

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
KATEDRA KYBERNETIKY
IDENTIFIKACE SYSTÉMŮ A FILTRACE

2. SEMESTRÁLNÍ PRÁCE

17. srpna 2023

Bc. Nikola Svrčinová
Bc. Tomáš Hrubý

KKY/ISF - Semestrální práce č. 2 (rekurzivní a nerekurzivní metody odhadu)

Simulujte systém

$$y(t) - 0.6y(t-1) = u(t-1) + e(t) + 0.5e(t-1),$$

kde $t \in \mathbb{N}_0$ představuje aktuální časový okamžik, $u(t)$ je vstup systému (zvolte vhodně), $y(t)$ je výstup systému a $e(t)$ je bílý šum se střední hodnotou $E\{e(t)\} = 0$ a variancí $E\{e_2(t)\} = 1$. Dále předpokládejte, že skutečné parametry systému neznáte a pomocí získaných dat zpětně odhadněte parametry modelu

$$y(t) - ay(t-1) = bu(t-1) + e(t) + ce(t-1)$$

s využitím následujících rekurzivních a nerekurzivních metod:

1. metoda přídavné proměnné,
2. metoda chyby predikce,
3. rekurzivní metoda přídavné proměnné,
4. rekurzivní metoda rozšířených nejmenších čtverců,
5. rekurzivní metoda chyby predikce.

Výsledky nerekurzivní metody porovnejte formou tabulky pro $10^2, 10^3, \dots, 10^6$ dat. Výsledky rekurzivních metod porovnejte grafem časového vývoje odhadu do okamžiku $t = 10^6$. Diskutujte výhody/nevýhody zkoumaných metod.

Obsah

1	Generování dat	4
2	Metoda přídavné proměnné	4
3	Metoda chyby predikce	4
4	Rekurzivní metoda přídavné proměnné	5
5	Rekurzivní metoda rozšířených nejmenších čtverců	7
6	Rekurzivní metoda chyby predikce	7
7	Shrnutí výsledků	9

1 Generování dat

Při generování syntetických dat byl zvolen gaussovský šum, neboť je trvale budící. Trvale budící signál je bohatý a získáme díky němu spolehlivý odhad parametrů. Je vygenerováno 1 000 000 dat a všechny metody jsou porovnávány na totožných datech.

2 Metoda přídavné proměnné

Metoda přídavné proměnné (IVM - Instrumental Variable Method) hledá jakýkoliv nestranný odhad parametrů. Vychází z metody nejmenších čtverců (MNC), jejíž výsledky lze vidět v tabulce 1. Výsledky IVM se nacházejí v tabulce 2. Z výsledků lze vidět, že IVM lépe odhaduje v tomto konkrétním případě parametr a a odhad parametru b je srovnatelný. Odhad pomocí metody nejmenších čtverců odhaduje parametry ve tvaru

$$\hat{a} = \frac{a\sigma^2b^2 + \lambda^2(a - c - a^2c + c^2a)}{\sigma^2b^2 + \lambda^2c^2 - 2ac\lambda^2 + \lambda^2},$$
$$\hat{b} = b.$$

I přesto, že na IVM jsou kladeny slabší předpoklady, tak odhaduje parametry lépe.

Tabulka 1: Odhad parametrů pomocí metody nejmenších čtverců.

počet dat	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
odhad a	0,70	0,70	0,71	0,71	0,71
odhad b	1,02	0,95	0,99	1	1

Tabulka 2: Odhad parametrů pomocí nerekurzivní metody přídavných proměnných.

počet dat	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
odhad a	0,49	0,54	0,58	0,60	0,60
odhad b	0,99	0,95	0,99	1	1

3 Metoda chyby predikce

Metoda chyby predikce (prediction error method - PEM) je vyvinuta pro modely obsahující korelovanou poruchu c , pro kterou metoda MNC nenachází nestranné odhady. Pro získání co nejpřesnějšího odhadu pomocí metody PEM je nutné znát strukturu modelu, strukturu ztrátové funkce a způsob minimalizace pro

nalezení jediného globálního minima. V tabulce 3 lze vidět výsledky s použitou mírou učení $\alpha = 0,8$ a počáteční hodnotou odhadovaných parametrů $\tilde{\Theta}(0) = [a(0), b(0), c(0)] = [1, 1, 1]$.

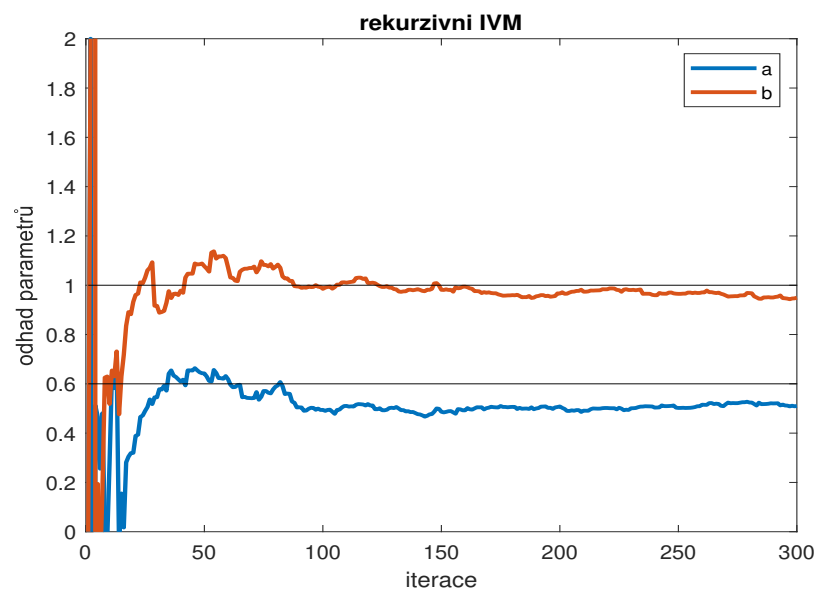
Tabulka 3: Odhad parametrů pomocí nerekurzivní metody chyby predikce.

počet dat	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
odhad a	0,56	0,60	0,60	0,60	0,60
odhad b	0,99	0,97	1	1	1
odhad c	0,55	0,53	0,52	0,50	0,50

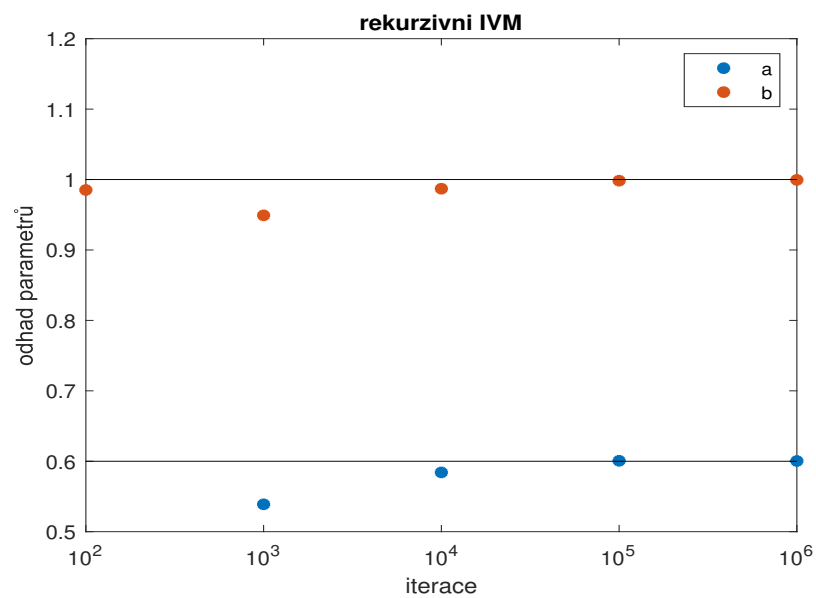
4 Rekurzivní metoda přídavné proměnné

U rekurzivních metod je zobrazena konvergence odhadovaných parametrů k jejich skutečným hodnotám pro 300 a 10^6 iterací. Počáteční hodnoty odhadovaných parametrů byli zvoleny jako $(-2; 2)$ a tedy od skutečných hodnot parametrů $(0, 6; 1)$ se lehce liší a ke znatelné konvergenci dochází již u prvních 300 iterací.

U rekurzivní metody přídavných proměnných lze vidět na obrázku 1, že konverguje rychleji pro prvních 300 iterací než například pro rekurzivní metodu chyby predikce na obrázku 5. V grafu 2 lze pak vidět, že jak pro nerekurzivní IVM, tak i pro rekurzivní IVM jsou parametry a a b odhadnuty s velikou přesností. Nevýhodou této metody je, že nezahrnuje odhad parametru c .



Obrázek 1: Odhad parametrů pomocí rekurzivní metody přídavných proměnných pro 300 iterací.



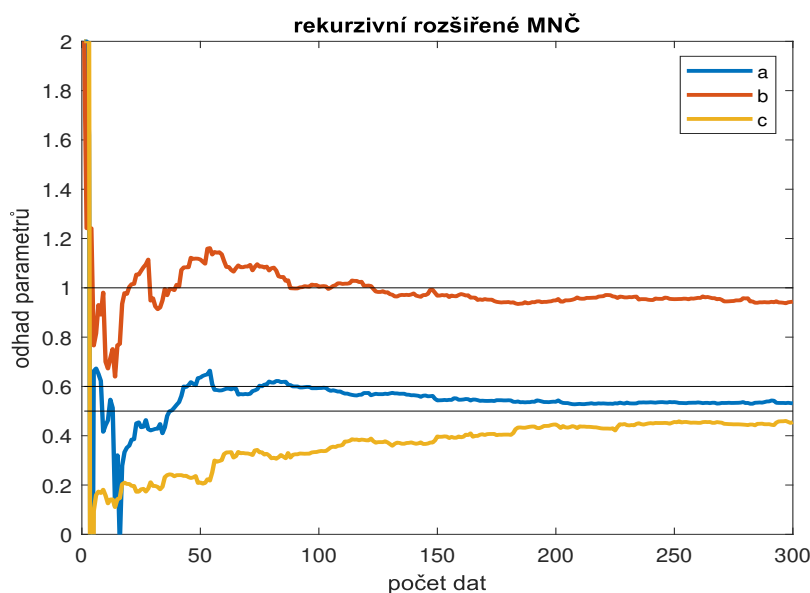
Obrázek 2: Odhad parametrů pomocí rekurzivní metody přídavných proměnných pro 10^6 iterací.

5 Rekurzivní metoda rozšířených nejmenších čtverců

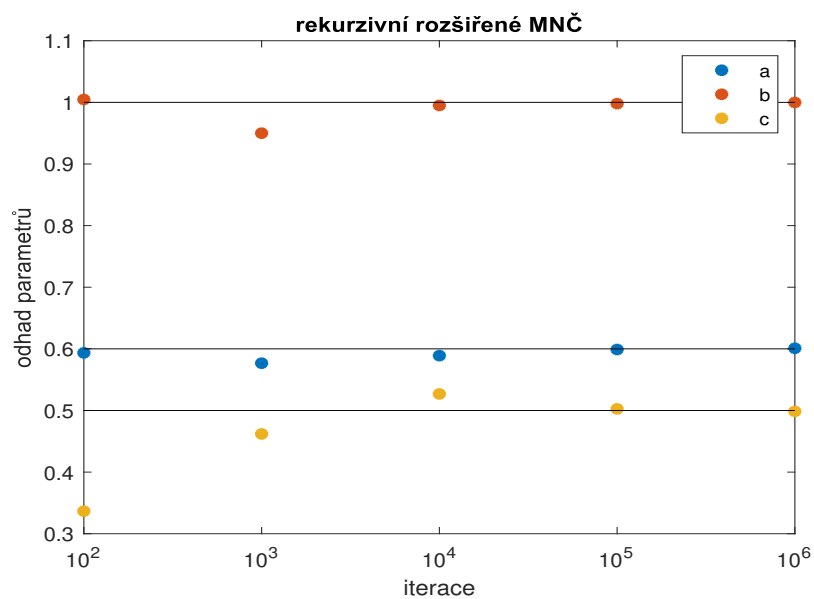
U rozšířené metody nejmenších čtverců je výhodou, že lze odhadnout i parametr c , který u běžné MNČ není možné zachytit a dává stranné výsledky. Proto, aby mezi sebou šli metody porovnávat, tak byly zvoleny počáteční hodnoty odhadovaných parametrů jako $(-2; 2; 2)$ se skutečnými $(0, 6; 1; 0, 5)$. Jak lze pozorovat z grafů 3 a 4 metoda konverguje ke správným hodnotám i pro velice málo iterací.

6 Rekurzivní metoda chyby predikce

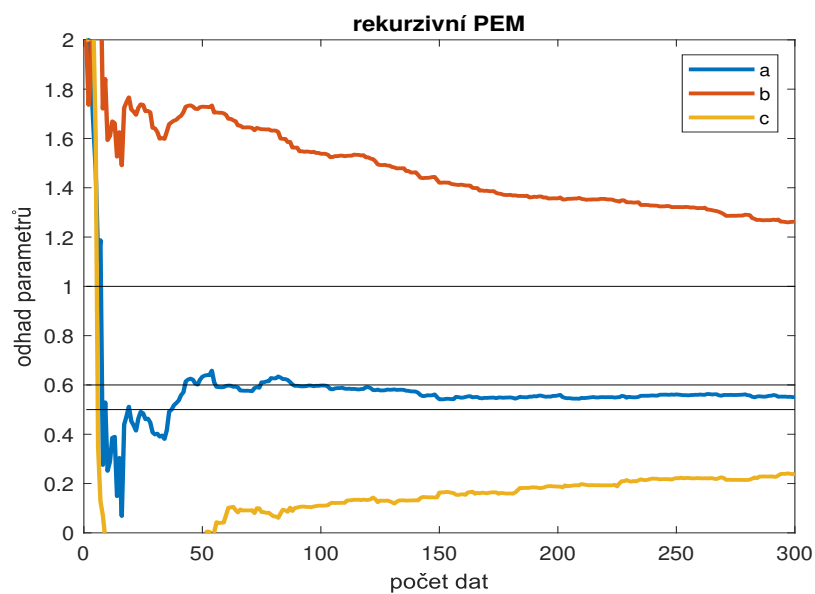
Výhodou metody rekurzivní chyby predikce je, že stejně jako předešlá metoda odhaduje hodnotu parametru c . Z grafů 5 a 6 lze ale pozorovat že konvergence ke skutečným parametrům je mnohem pomalejší než u ostatních metod.



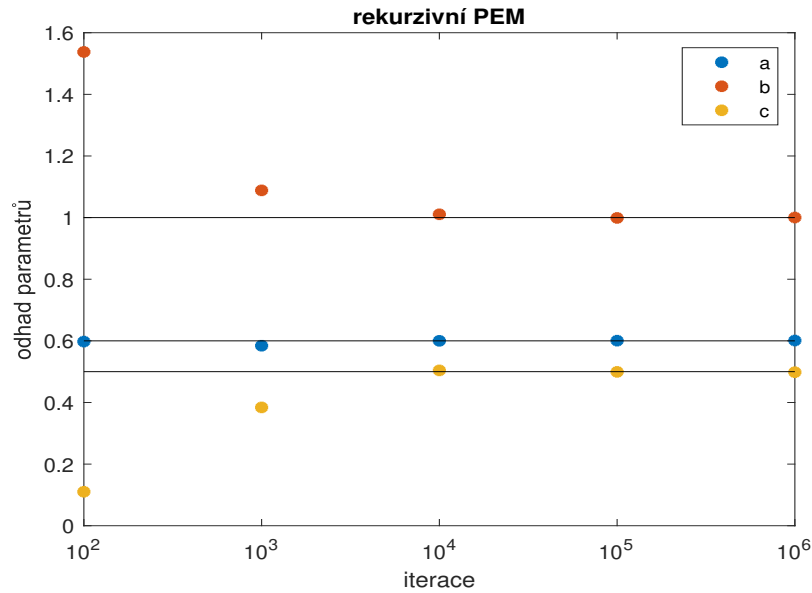
Obrázek 3: Odhad parametrů pomocí rekurzivní metody rozšířených nejmenších čtverců pro 300 iterací.



Obrázek 4: Odhad parametrů pomocí rekurzivní metody rozšířených nejmenších čtverců pro 10^6 iterací.



Obrázek 5: Odhad parametrů pomocí rekurzivní metody chyby predikce pro 300 iterací.



Obrázek 6: Odhad parametrů pomocí rekurzivní metody chyby predikce pro 10^6 iterací.

7 Shrnutí výsledků

Celkově lze z výsledků říci, že výsledky získané pomocí metody rekurzivních rozšířených nejmenších čtverců jsou spolehlivé a poskytují odhad všech tří parametrů. U metody chyby predikce lze také odhadnout veškeré tři parametry a, b, c , ale je nutné znát model, což v mnohých reálných případech není možné a vede k chybné identifikaci. Rekurzivní metoda chyby predikce navíc konverguje pomaleji k výsledkům. U metod přídavných proměnných nemusíme znát předem model, ale nedochází k odhadu parametru c .

Odkazy

- [1] DUNÍK, Jindřich. Identifikace systémů a filtrace. 2. přepracované a rozšířené vydání. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2020. ISBN 978-80-261-0940-2