

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
KATEDRA KYBERNETIKY
IDENTIFIKACE SYSTÉMŮ A FILTRACE

1. SEMESTRÁLNÍ PRÁCE

16. srpna 2023

Bc. Nikola Svrčinová
Bc. Tomáš Hrubý

1 Odhad parametrů dynamického systému (identifikovatelnost systému)

Uvažujte dva systémy (generátory dat) S_1 a S_2 s následující strukturou

$$y(t) + a_1 y(t-1) = b_1 u(t-1) + e(t) + c_1 e(t-1),$$

kde $t \in \mathbb{N}_0$ představuje aktuální časový okamžik, $u(t)$ je vstup systému, $y(t)$ je výstup systému a $e(t)$ je bílý šum se střední hodnotou $E\{e(t)\} = 0$ a variancí $E\{e^2(t)\} = \lambda^2$. Necht' hodnoty parametrů uvažovaných systémů jsou

$$S_1: \quad a_1 = -0.5, \quad b_1 = 0.9, \quad c_1 = 0, \quad \lambda^2 = 1,$$

$$S_2: \quad a_1 = -0.5, \quad b_1 = 0.9, \quad c_1 = -0.4, \quad \lambda^2 = 1.$$

- Pro S_1 a S_2 vygenerujte vždy tři sady vstupně-výstupních (I/O) dat pro $t = 0, \dots, 500$ ($y(0) = 0$) odpovídající třem typům vstupních signálů - jednotkový impuls v čase $t = 0$ o velikosti σ , jednotkový skok v čase $t = 0$ o velikosti σ a bílý šum se střední hodnotou 0 a variancí σ^2 . Pro generování dat volte $\sigma = 1$.
- Uvažujte model

$$y(t) + \hat{a}_1 y(t-1) = \hat{b}_1 u(t-1) + \varepsilon(t). \quad (1)$$

Z dříve vygenerovaných I/O dat proveďte identifikaci systémů S_1 a S_2 , tj. odhadněte hodnotu parametrů \hat{a}_1 a \hat{b}_1 metodou nejmenších čtverců pro různé volby vstupního signálu. Výsledek ilustруйте formou tabulky.

- Proveďte teoretickou analýzu a analytické výsledky konfrontujte s výsledky experimentálními. Teoretická analýza necht' zahrnuje:
 - analýzu vstupního signálu z hlediska bohatosti,
 - odvození vztahů pro odhad parametrů jako funkce zdroje, tj. určete $\hat{a}_1 = f_a(a_1, b_1, c_1)$ a $\hat{b}_1 = f_b(a_1, b_1, c_1)$.
- Uvažujte regulátor $u(t) = -k y(t) + v(t)$, kde $v(t) \sim \mathcal{N}\{0, \kappa^2\}$ je bílý šum ($\kappa \in \mathbb{R}_+$). Zesílení k zvolte tak, aby uzavřený systém pro $\kappa^2 = 0$ byl stabilní. Předpokládejte odhad parametrů systému S_1 metodou nejmenších čtverců s využitím modelu (1). Jaký vztah platí pro varianci odhadů \hat{a}_1 a \hat{b}_1 v souvislosti s velikostí variance externího signálu κ^2 ? Správnost svoji odpovědi podložte experimentem.

2 Odhad parametrů statického systému (struktura modelu)

Z experimentů provedených na třech různých systémech jsme získali data uložená v souboru `isf_2_data.mat`, který je dostupný online na courseware předmětu KKY/ISF v sekci Samostatná práce. Zvolte si nejprve jednu z variant I/O dat $[X1 \ Y1]$, $[X2 \ Y2]$ nebo $[X3 \ Y3]$ obsažených v uvedeném souboru. Dále použijte metodu nejmenších čtverců k odhadu parametrů β_i , $i = 0, 1, \dots, n$ regresního modelu

$$y(t) = \beta_0 + \beta_1 x(t) + \beta_2 x^2(t) + \beta_3 x^3(t) \dots \beta_n x^n(t) + e(t),$$

kde $x(t)$ je nezávislá (vysvětlující) veličina, $y(t)$ je závislá (vysvětlovaná) veličina a $e(t)$ je náhodná veličina s nulovou střední hodnotou a konečnou variancí. Při tom postupujte dle následujících bodů.

- Data rozdělte na dvě části - na část použitou pro identifikaci a část použitou pro validaci.
- Proveďte identifikaci parametrů regresního modelu pro různou volbu řádu n na základě části dat určených k identifikaci. Validací data použijte pro určení vhodné volby n sledováním střední kvadratické chyby (lze předpokládat, že pro rostoucí n se bude u dat použitých pro identifikaci tato chyba zmenšovat a u validačních dat bude nejprve klesat, ale obvykle od hledaného vhodného řádu bude mít tendenci opět narůstat). Při hledání parametrů pomocí metody nejmenších čtverců je nutné řešit normální soustavu rovnic. Pro větší řády regresního modelu může být tato soustava špatně podmíněná a řešení numericky nestabilní. Uvažujte proto různé způsoby nalezení odhadu v Matlabu. Srovnajte a analyzujte numerické možnosti z níže uvedených bodů:
 - řešení původní přeuročené soustavy ve smyslu nejmenších čtverců `pinv(A) * y, A \ y`,
 - řešení normální soustavy rovnic `inv(A' * A) * A' * y`, QR rozklad, $(A' * A) \setminus (A' * y)$,
 - funkce Matlabu pro polynomiální aproximaci `polyfit`.

Obsah

1	Dynamický systém	4
1.1	Vygenerování dat a identifikace systémů	4
1.2	Analýza vstupního signálu	6
1.2.1	Jednotkový skok	6
1.2.2	Jednotkový impuls	7
1.2.3	Gaussovský šum	7
1.3	Analýza parametrů	8
1.3.1	Jednotkový skok	8
1.3.2	Jednotkový impuls	9
1.3.3	Gaussovský šum	9
1.4	Zavedení zpětné vazby	10
1.4.1	Simulace	12
2	Statický systém	14
2.1	predikce hodnot mimo trénovací množinu	14
2.2	odhad hodnot uvnitř trénovací množiny	16

1 Dynamický systém

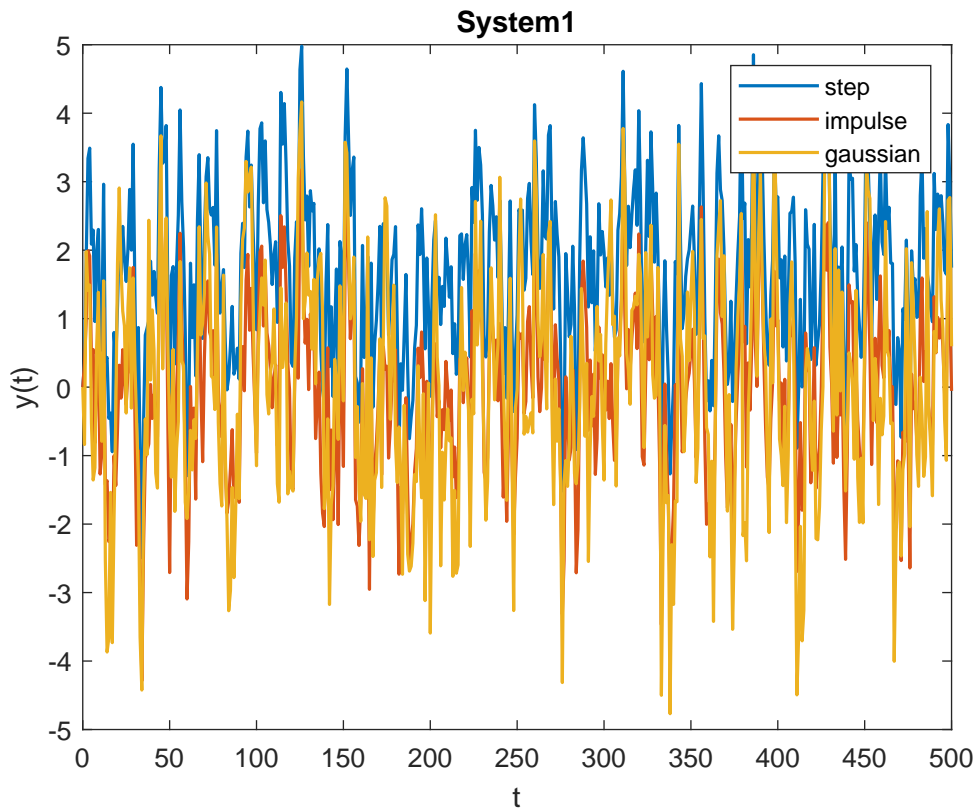
1.1 Vygenerování dat a identifikace systémů

V zadání jsou uvedeny 2 následující systémy

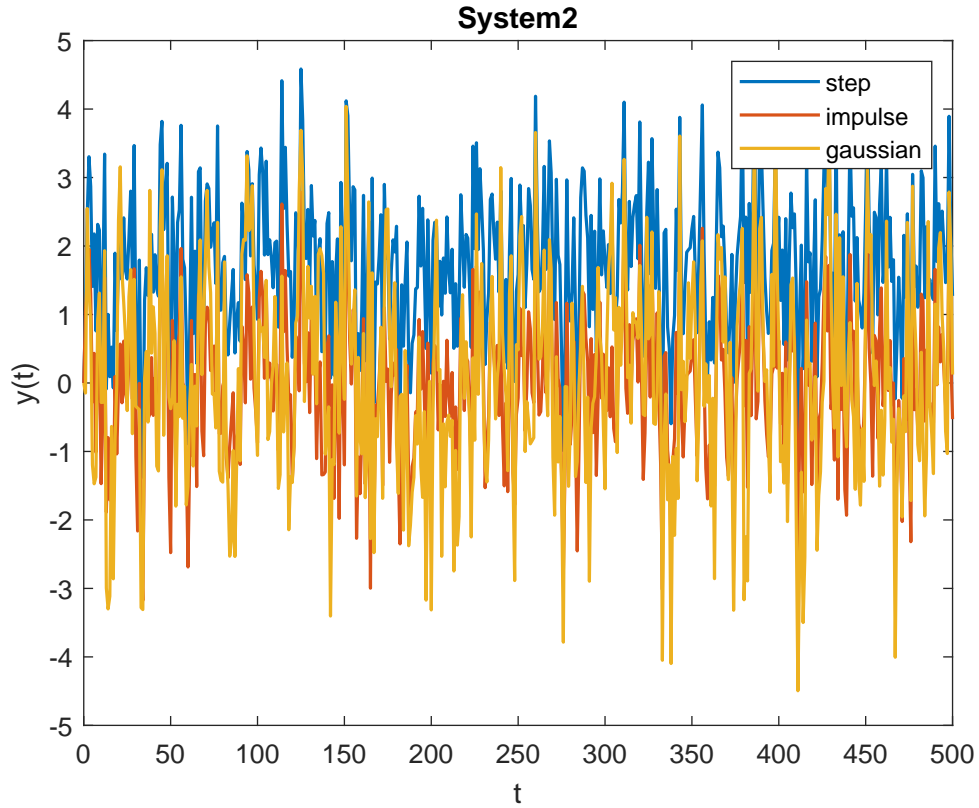
$$S1 : y(t) = 0,5y(t-1) + 0,9u(t-1) + e(t),$$

$$S2 : y(t) = 0,5y(t-1) + 0,9u(t-1) + e(t) - 0,4e(t-1),$$

kde bílý šum $e(t) \sim N(0, 1)$. Pro každý ze systémů $S1$ a $S2$ jsou vygenerovány 3 typy vstupních signálů. Vygenerované časové řady lze vidět na obrázku 1 a 2. Prvním vstupním signálem je jednotkový impuls $u(t=0) = 1$, jinak 0 (červená), jednotkový skok $\forall t : u(t) = 1$ (modrá) a bílý šum $u(t) \sim N(0, 1)$ (oranžová). Z vygenerovaných řad lze zpozorovat, že v případě jednotkového skoku nabývají výstupní hodnoty vyšších hodnot a v případě gaussovského vstupního signálu se zdá výstup více variabilní.



Obrázek 1: Výstup systému $S1$.



Obrázek 2: Výstup systému $S2$.

Pomocí metody nejmenších čtverců byly odhadnuty parametry systému ve tvaru

$$\hat{\Theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y, \quad (1)$$

kde Y je vektor výstupů pro $\tau = \{t, t-1, \dots, t-N\}$, $\hat{\Theta}$ jsou odhadované parametry ve tvaru $[\hat{a} \ \hat{b}]^T$, a Φ je matice řádkových regresorů:

$$\Phi = \begin{bmatrix} -y(0) & u(0) \\ -y(1) & u(1) \\ \vdots & \vdots \\ -y(t-1) & u(t-1) \end{bmatrix}$$

Odhady parametrů $\hat{\Theta}$ jsou uvedeny v tabulkách 1 a 2. Z odhadnutých hodnot lze vidět, že metoda nejmenších čtverců odhaduje lépe systém $S1$, neboť systém neobsahuje korelovaný šum. Po nahlédnutí do tabulek pozorujeme, že v případě impulsu je velice ovlivněn odhad koeficientu b_1 . Impuls proto není vhodný pro odhad koeficientů. V případě systému $S1$ nelze zpozorovat značné rozdíly při

odhadu koeficientů mezi krokovým a normálním vstupním signálem. Krokový vstupní signál se však v případě odhadů systému $S2$ liší od skutečných hodnot, neboť není dostatečně bohatý. Tyto domněnky jsou ověřeny v následujících podkapitolách.

Tabulka 1: Odhad koeficientů pro různé vstupní signály systému $S1$.

veličiny	skutečné	step	impuls	gaussian
a_1	-0,5	-0.479	-0,490	-0,507
b_1	0,9	0,859	1,360	0,844

Tabulka 2: Odhad koeficientů pro různé vstupní signály systému $S2$.

veličiny	skutečné	step	impuls	gaussian
a_1	-0,5	-0.085	-0,092	-0,3342
b_1	0,9	1,562	1,488	0,8549

1.2 Analýza vstupního signálu

Pokud je generován málo bohatý vstupní signál, tak odhadované parametry nemusejí odpovídat skutečným hodnotám. Vstupní signál musí být tedy tzv. trvale budící. Systém je označen za trvale budící pokud jsou splněny dvě podmínky. První podmínkou je existence následující limity

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t+\tau)u^T(t).$$

Pokud limita existuje $\forall \tau$ a matice $R_u(n)$ je pozitivně definitní, pak vstupní signál označíme za trvale budící. Matice má tvar

$$R_u(\tau) = \begin{bmatrix} r_u(0) & r_u(1) & \dots & r_u(n-1) \\ r_u(-1) & r_u(0) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ r_u(-n+1) & r_u(-n+2) & \dots & r_u(0) \end{bmatrix}.$$

1.2.1 Jednotkový skok

Pro jednotkový krok existuje limita ve tvaru

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N 1 = 1$$

a matice

$$R_u(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

je pozitivně definitní pouze v případě, kdy je dimenze matice rovná jedné. Pro větší dimenze je matice pozitivně semidefinitní a nejedná se tedy o trvale budící systém.

1.2.2 Jednotkový impuls

Pro jednotkový impuls existují limity ve tvaru

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (1 + 0 + 0 \dots + 0) = 0.$$

Matice

$$R_u(\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

není v žádném případě pozitivně definitní a opět tedy nejsou splněny předpoklady pro trvale budící systém.

1.2.3 Gaussovský šum

Pro $u(t) \sim N(\mu, \sigma^2)$, kde $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$, mají limity pro $\tau = 0$ tvar

$$r_u(0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t+0)u^T(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} E[u(t)u^T(t)] = \sigma^2 = 1.$$

Pro $\tau \neq 0$ je využito nezávislosti $u(t)$ s $u(t + \tau)$

$$r_u(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t + \tau)u^T(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} E[u(t + \tau)u^T(t)] = 0.$$

Matice má pak tvar

$$R_u(\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

$R_u(\tau)$ je pozitivně definitní. Vstupní signál jako jediný lze označit za trvale budící. Díky bohatosti signálu získáváme nejspolehlivější odhad parametrů.

1.3 Analýza parametrů

Pro analýzu parametrů přepíšeme vztah (1) pro odhad \hat{a}, \hat{b} metodou nejmenších čtverců následovně:

$$\begin{bmatrix} \sum y^2(t-1) & -\sum y(t-1)u(t-1) \\ -\sum y(t-1)u(t-1) & \sum u^2(t-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum y(t)y(t-1) \\ \sum y(t)u(t-1) \end{bmatrix} \quad (2)$$

přesný postup viz [1]. Pro $N \rightarrow \infty$, stacionární a ergodický systém je použita aproximace $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y^2(t-1) \approx E[y^2(t-1)]$. Odhad parametrů je přepsán do podoby

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[y^2(t-1)] & -E[y(t-1)u(t-1)] \\ -E[y(t-1)u(t-1)] & E[u^2(t-1)] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -E[y(t)y(t-1)] \\ E[y(t)u(t-1)] \end{bmatrix}$$

Pro stacionární proces platí $y(t-1) = y(t)$ a tedy

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E[y^2(t)] & -E[y(t)u(t)] \\ -E[y(t)u(t)] & E[u^2(t)] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -E[y(t)y(t-1)] \\ E[y(t)u(t-1)] \end{bmatrix} \quad (3)$$

1.3.1 Jednotkový skok

Pro jednotkový skok platí, že pro střední hodnotu a rozptyl je $E[u(t)] = 1$ a $var[u(t)] = 0$. Pokud označíme $S = \frac{b}{1+a}$, kde a a b jsou zadané veličiny, tak díky nezávislosti veličin, stacionaritě, $E[e(t)] = \lambda^2$ a $E[y(t)e(t)] = \lambda^2$ získáváme následující výsledky

$$\begin{aligned} E[y^2(t)] &= S^2\sigma^2 + \frac{(1+c^2-2ac)\lambda^2}{1-a^2}, \\ E[y(t)u(t)] &= E[y(t)]E[u(t)] = S\sigma^2, \\ var(u(t)^2) &= E[u(t)^2] - E[u(t)]^2 = E[u(t)^2] = \sigma^2, \\ E[y(t)y(t-1)] &= S^2\sigma^2 + \frac{(c-a)(1-ac)\lambda^2}{1-a^2}, \\ E[y(t)u(t-1)] &= S\sigma^2. \end{aligned}$$

Tím pádem získáváme odhadované parametry jako funkce skutečných parametrů systému

$$\begin{aligned} \hat{a} &= a - \frac{c(1-a^2)}{1+c^2-2ac}, \\ \hat{b} &= a - bc \frac{1-a}{1+c^2-2ac}. \end{aligned}$$

Výsledné hodnoty lze vidět v tabulce 3. Lze upozorovat, že teoretické a simulační hodnoty se shodují a provedené odvození jsou tedy důvěryhodná. Pro systém

S_1 jsou odhady pro $c = 0$ rovny $\hat{a} = a$ a $\hat{b} = b$. Pro jednotkový skok se tedy teoretické a simulační shodují se zadanými veličinami. V systému S_2 kvůli šumu jsou odhady odlišné od zadaných veličin a a b .

Tabulka 3: Porovnání teoretické a odhadnuté hodnoty parametrů pro jednotkový skok.

veličiny	teoretické	simulační
$S_1 : a$	-0,5	-0.479
$S_1 : b$	0,9	0,859
$S_2 : a$	-0,1053	-0.085
$S_2 : b$	1,6105	1,562

1.3.2 Jednotkový impuls

Pro impuls $u(1) = \sigma$ lze vyjádřit rovnici (2) ve tvaru

$$\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nE[y^2(t)] & -y(1)\sigma \\ -y(1)\sigma & -\sigma^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -nE[y(t)y(t-1)] \\ y(2)\sigma \end{bmatrix},$$

kde pro velké N lze považovat $E[u(t)] = 0$ a $\text{var}[u(t)] = 0$. Další veličiny jsou vyjádřeny jako

$$E[y^2(t)] = \frac{\lambda^2}{1-a^2},$$

$$E[y(t)y(t-1)] = \frac{c\lambda^2}{1-a^2},$$

$$E[y(t)y(t-1)] = -aE[y^2(t)].$$

Teoretický odhad parametrů je získán ve tvaru

$$\hat{a} = a,$$

$$\hat{b} = b + \frac{e(2)}{\sigma}.$$

V případě jednotkového impulsu jsou teoretické a simulační hodnoty parametru a v obou systémech rovny zadanému parametru. Naopak pro parametr b platí, že ani jeden ze systémů nezachycuje zadanou hodnotu parametru.

1.3.3 Gaussovský šum

Pro šum $u(t) \sim N(0, \sigma^2)$ platí díky nezávislosti, že

$$E[y^2(t)] = \frac{b^2\sigma + (1+c^2-2ac)\lambda^2}{1-a^2},$$

$$E[y(t)u(t)] = E[y(t)]E[u(t)] = 0,$$

$$\text{var}(u(t)^2) = E[u(t)^2] - E[u(t)]^2 = E[u(t)^2] = \sigma^2,$$

Tabulka 4: Porovnání teoretické a odhadnuté hodnoty parametrů pro jednotkový impuls.

veličiny	teoretické	simulační
$S_1 : a$	-0,5	-0.490
$S_1 : b$	1,360	1,4756
$S_2 : a$	-0,5	-0.092
$S_2 : b$	1,488	1,4756

$$E[y(t)y(t-1)] = \frac{-ab^2\sigma^2 + (c-a)(1-ac)\lambda^2}{1-a^2},$$

$$E[y(t)u(t-1)] = b\sigma^2.$$

Teoretický odhad parametrů je ve tvaru

$$\hat{a} = \frac{a\sigma^2b^2 + \lambda^2(a-c-a^2c+c^2a)}{\sigma^2b^2 + \lambda^2c^2 - 2ac\lambda^2 + \lambda^2},$$

$$\hat{b} = b.$$

V případě gausovského vstupního signálu se v systému $S1$ shodují teoretické, simulační i zadané hodnoty parametru, neboť $\hat{a} = a$ a $\hat{b} = b$. V $S2$, kde je korelovaný šum se liší zadaná hodnota a od svých teoretických a simulačních hodnot.

Tabulka 5: Porovnání teoretické a odhadnuté hodnoty parametrů pro gaussovský šum.

veličiny	teoretické	simulační
$S_1 : a$	-0,5	-0,5070
$S_1 : b$	0.9	0,844
$S_2 : a$	-0,3089	-0,3342
$S_2 : b$	0.9	0,8549

1.4 Zavedení zpětné vazby

Zavedením zpětné vazby na vstup systému, ve tvaru;

$$u(t) = -ky(t) + v(t), \quad v(t) \sim \mathcal{N}(0, \kappa^2),$$

získáváme systém:

$$y(t) = 0.5y(t-1) - 0.9ky(t-1) - 0.9v(t) + e(t),$$

nad kterým zkoumáme variance odhadů $var[\hat{a}]$, $var[\hat{b}]$ v závislosti na velikosti variance šumu zpětné vazby κ^2 . Pro $\kappa = 0$, bylo na základě podmínky asymptotické stability $|a + bk| < 1$, $k < 0.556$, zesílení zpětné vazby pevně zvoleno jako $k = 0.5$.

Analogicky k předchozí sekci, jsme s využitím vztahu (2), a jeho aproximaci (3) středními hodnotami, odhadli variance odhadů analyticky. Pro náš nestranný odhad platí (Skripta věta 4.2.1):

$$\text{cov}[\hat{\theta}] = \text{cov}[\tilde{\theta}] = \lambda^2 (\Phi^T \Phi)^{-1},$$

kde $(\Phi^T \Phi)$ odpovídá matici z Rovnice 1, kterou aproximujeme pomocí operátorů střední hodnoty pro $N \rightarrow \infty$ analogicky k postupu, kterým jsme získali Rovnici(2):

$$(\Phi^T \Phi)^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} E[y^2(t)] & -E[y(t)u(t)] \\ -E[y(t)u(t)] & E[u^2(t)] \end{bmatrix}^{-1}$$

Získáme jednotlivé prvky matice:

$$\begin{aligned} E[y(t)^2] &= \frac{b^2 \kappa^2 + \lambda^2}{1 + (a + bk)^2} \\ E[y(t)u(t)] &= -kE[y(t)^2] = -k \frac{b^2 \kappa^2 + \lambda^2}{1 + (a + bk)^2} \\ E[u^2(t)] &= kE[y(t)^2] + \kappa^2 = k^2 \frac{b^2 \kappa^2 + \lambda^2}{1 + (a + bk)^2} + \kappa^2 \end{aligned}$$

Z toho

$$\text{cov}[\hat{\theta}] = \frac{\lambda}{N\kappa^2} \begin{bmatrix} \frac{\kappa^2 a^2 + 2\kappa^2 abk + 2\kappa^2 b^2 k^2 + \lambda^2 k^2 + \kappa^2}{b^2 \kappa^2 + \lambda^2} & \frac{k}{\kappa^2} \\ \frac{k}{\kappa^2} & \frac{1}{\kappa^2} \end{bmatrix}$$

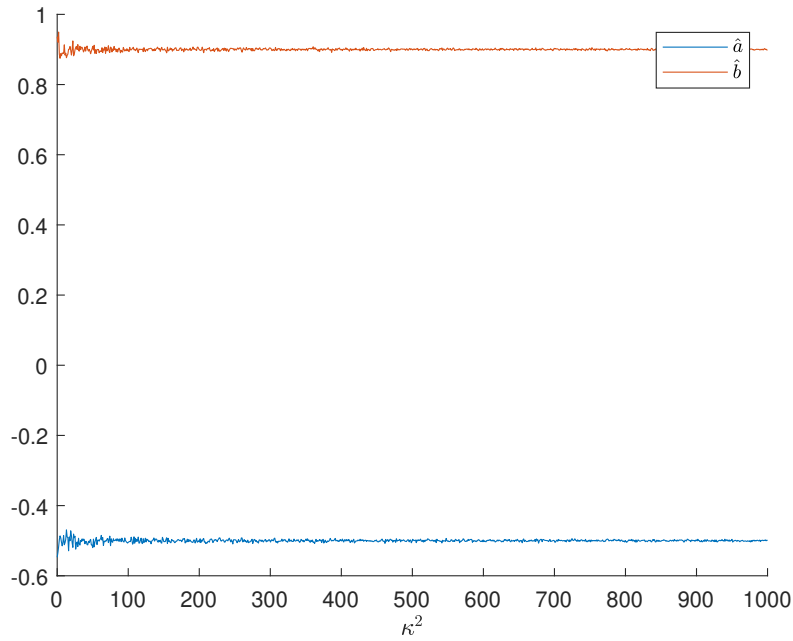
Diagonální členy kovarianční matice:

$$\begin{aligned} \text{var}[\hat{a}] &= \frac{\lambda^2}{N\kappa^2} \frac{\kappa^2 a^2 + 2\kappa^2 abk + 2\kappa^2 b^2 k^2 + \lambda^2 k^2 + \kappa^2}{b^2 \kappa^2 + \lambda^2} \\ \text{var}[\hat{b}] &= \frac{\lambda^2}{N\kappa^2} \frac{1}{\kappa^2} \end{aligned}$$

1.4.1 Simulace

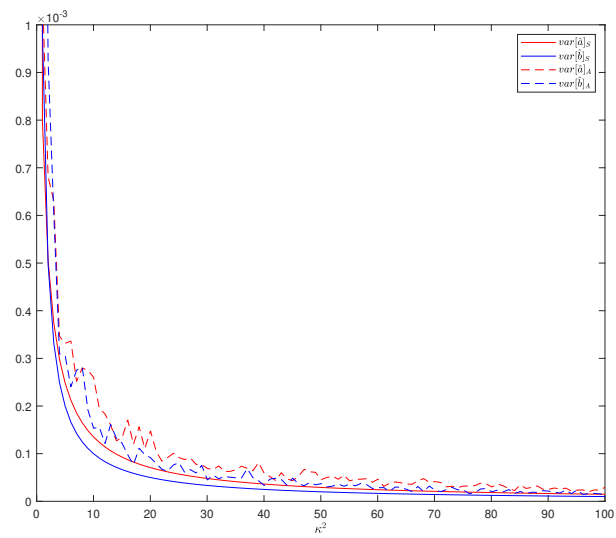
Analytické řešení $var[\hat{a}]$, $var[\hat{b}]$ jako funkce κ^2 jsme ověřili experimentálně. Bylo provedeno 100 experimentů pro každé z $N = 1000$ nasamplovaných $\kappa^2 \in (0, 1000]$.

Na Obrázku 3 jsou zobrazeny průběhy odhadů parametrů v závislosti na vzrůstajícím κ^2 , $N = 1$.

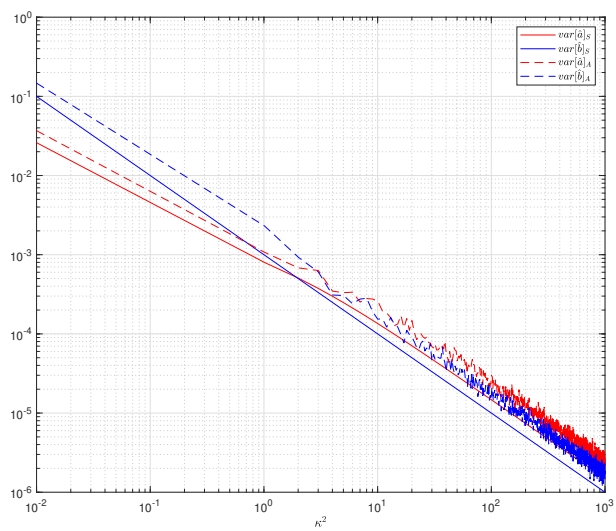


Obrázek 3: \hat{a} , \hat{b} pro $\kappa^2 \in (0, 1000]$

Odhadnutí $var[\hat{a}]$, $var[\hat{b}]$ bylo provedeno statisticky na základě $N = 1000$ pokusů pro každé κ^2 , tato závislost je zobrazena na Obrázku 4. Při zvyšování variance šumy zpětné vazby se snižují variance odhadů. To je zejména patrné, vykreslíme-li závislost logaritmicky - Obrázek 5.



Obrázek 4: $\text{var}[\hat{a}]$, $\text{var}[\hat{b}]$ pro $\kappa^2 \in (0, 1000]$



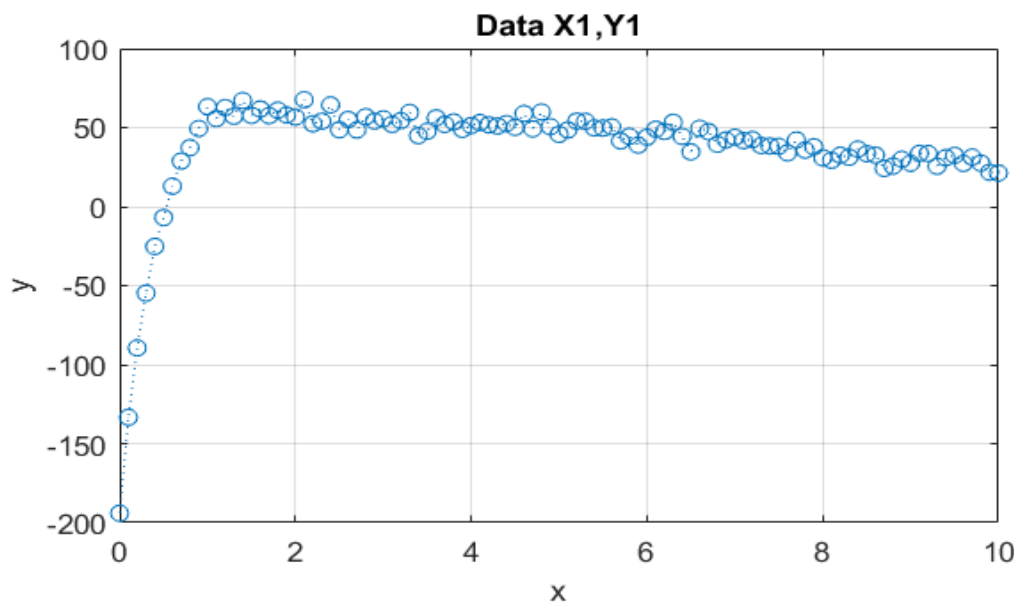
Obrázek 5: Závislost $\text{var}[\hat{a}]$, $\text{var}[\hat{b}]$ na κ^2 logaritmicky

2 Statický systém

2.1 predikce hodnot mimo trénovací množinu

Z dostupných dat je zvolen první systém $[X1 \ Y1]$. Systém je nejdříve vykreslen na obrázku 6 a jsou u něho pozorovány vlivné body, které značně ovlivňují regresi. Pro regresní odhady je proto zanedbáno prvních 9 pozorování.

Při výpočtu střední kvadratické odchylky trénovacích dat (MSE) chyba odhadu klesá se zvyšujícím se stupněm polynomu a může docházet k přefittování odhadu dat. Stupeň polynomu je proto určen z MSE testovací množiny dat. V tabulce 6 je ukázán výpočet chyby pro poměr mezi trénovací a testovací množinou 90/10. Na obrázku 7 je zobrazen pro tento poměr polynom s nejmenší chybou a na obrázku 9 je zobrazen polynom s nejhorší MSE. Pro odhad dat je zvolen na základě výpočtu MSE s různým poměrem testovacích a trénovacích dat vybrán polynom stupně 1.

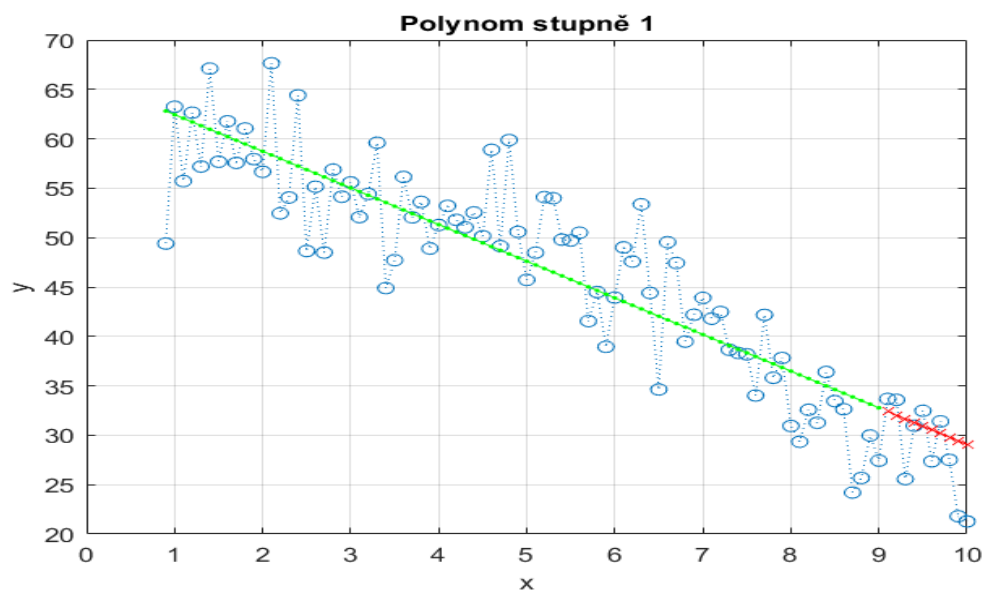


Obrázek 6: Vykreslení počátečních dat.

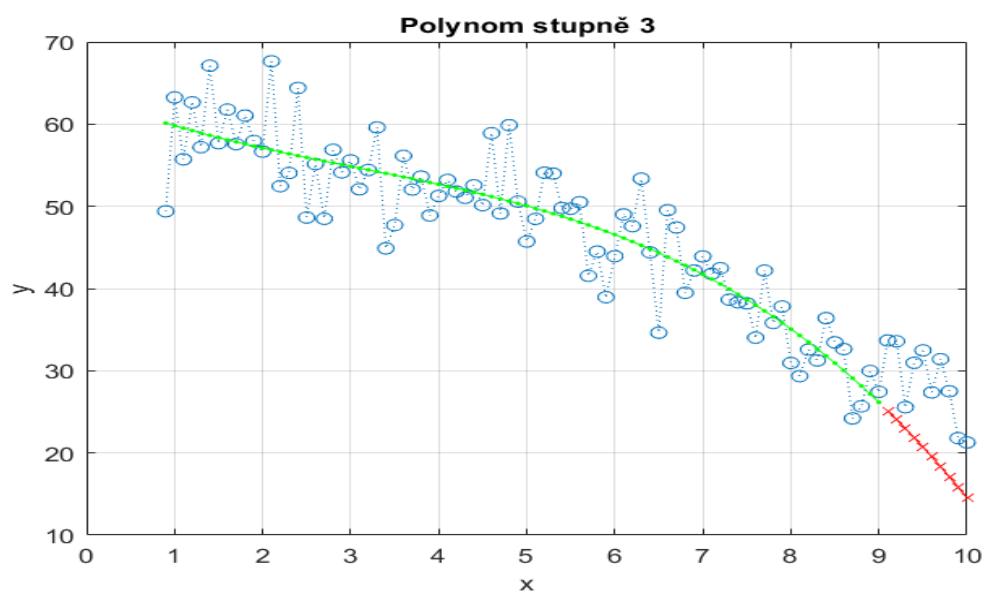
Tabulka 6: Porovnání střední kvadratické chyby pro různé stupně polynomů při poměru trénovacích a testovacích dat 90/10.

stupeň polynomu	1	2	3	4	5
MSE	18	30.2	81.2	95.5	49.5

Pro odhad polynomu jsou použity 3 možné způsoby zápisu. Zápis metody nejmenších čtverců pomocí funkcí `pinv()`, `polyfit` a řešení normální soustavy rov-



Obrázek 7: Predikce dat pro polynom stupně 1.



Obrázek 8: Predikce dat pro polynom stupně 4.

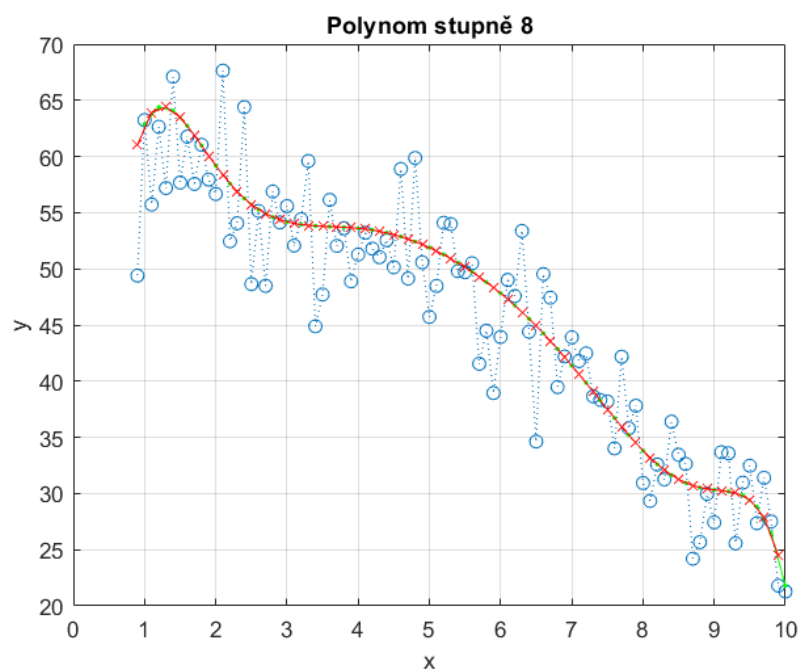
nic se neliší. Tento fakt je způsoben tím, že matice regresorů je dobře podmíněná a nejsou zde numerické problémy s výpočtem inverzních matic. Chyba predikce se pro jednotlivé způsoby řešení pro polynom stupně jedna liší až na míste 10^{-13} .

2.2 odhad hodnot uvnitř trénovací množiny

Dostupná data z předešlé podkapitoly byli opět zbaveny vlivných bodů. Data byla dále rozdělena na trénovací, které tvoří sudé hodnoty a na testovací, které jsou v původním datovém souboru na liché pozici. Ze zmíněných použitých metod odhadu parametrů se jako nejspolehlivější jeví zápis metody nejmenších čtverců pomocí funkce `pinv()`, neboť řešení pomocí normální soustavy rovnic obsahuje singulární matici od 7. stupně polynomu a funkce `polyfit` je špatně podmíněná od 11. stupně polynomu. V tabulce 7 jsou vypsány hodnoty střední kvadratické chyby skutečných a predikovaných hodnot pro stupně polynomu 1 až 20. Na obrázku 9 lze vidět odhad pro polynom stupně 8.

Tabulka 7: Porovnání střední kvadratické chyby pro různé stupně polynomů.

stupeň	MSE	stupeň	MSE
1	31,4	11	25,7
2	26,2	12	25,6
3	26,7	13	24,9
4	28,8	14	32,7
5	29,6	15	335,6
6	26,6	16	460,3
7	26,7	17	566,3
8	24,8	18	846,2
9	25,3	19	923,9
10	25,1	20	996,1



Obrázek 9: Predikce dat pro polynom stupně 8.

Odkazy

- [1] DUNÍK, Jindřich. Identifikace systémů a filtrace. 2. přepracované a rozšířené vydání. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2020. ISBN 978-80-261-0940-2