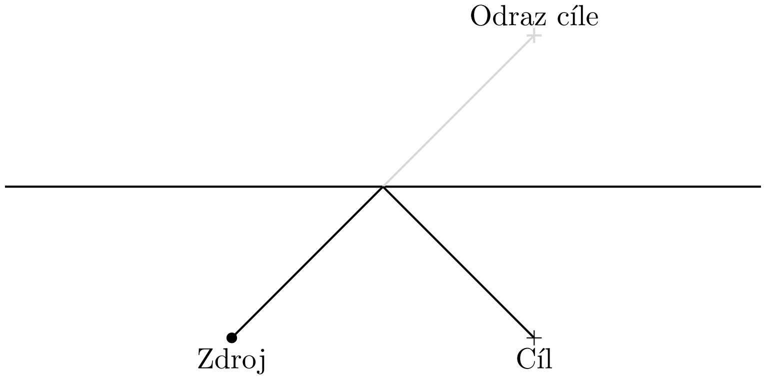
Satelit

Tomáš Hůla

Zíří 2024

Jelikož se satelit odráží od krjů obdelníku pod stejným úhlem, pod kterým dopadl, má stejné vlastnosti jako paprsky světla odrážející se v zrcadle. Základní pravidlo se kterým budeme pracovat je, že zrcadlo znázorňuje objekt, jakoby byl ve stejné vzdálenosti za zrcadlem, jako je objekt od zrcadla. Chceme-li paprskem zasáhnout nějaký cíl odrazem o zrcadlo, můžeme paprsek namířit na odraz cíle. Paprsek se odrazí od zrcadla ve směru cíle. Nutno podotknout, že délka paprsku je stejná jako vzdálenost zdroje od zrcadleného cíle, jelikož paprsek pomyslně cestuje stále rovně do zrcadlené "dimenze".



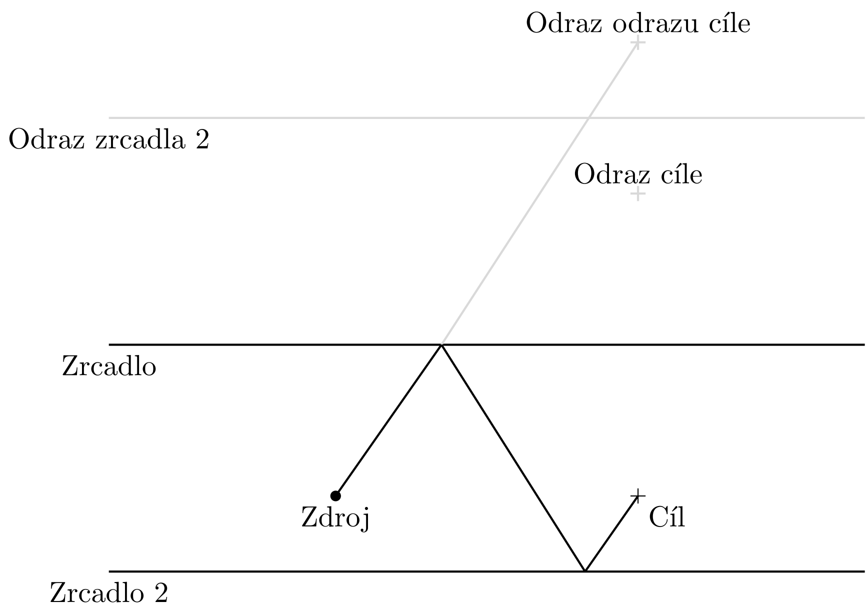
Obr. 1: Zrcadlení paprsku

S tímto se dá pracovat i dále, kdy můžeme zrcadlit i zrcadlo. Na obrázku 2 můžeme vidět stejný případ, ale se dvěma zrcadly.

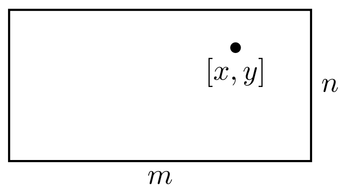
V našem případě je zdroj satelit, paprsek jeho trajektorie, zrcadla jsou strany obdelníku a cíle jsou jeho 4 rohy.

Když nyní zakreslíme *nekonečně* mnoho odrazů stran obdelníku a tím pádem i jejich rohů, dostaneme obrázek 4. (odrazy satelitu nezakresuljeme, jelikož to nemá význam pro řešení problému; každý roh je znázorněn křížkem)

Takto vidíme všechny zrcadlové zobrazení rohů obdelníku.



Obr. 2: Zrcadlení paprsku s více zrcadly



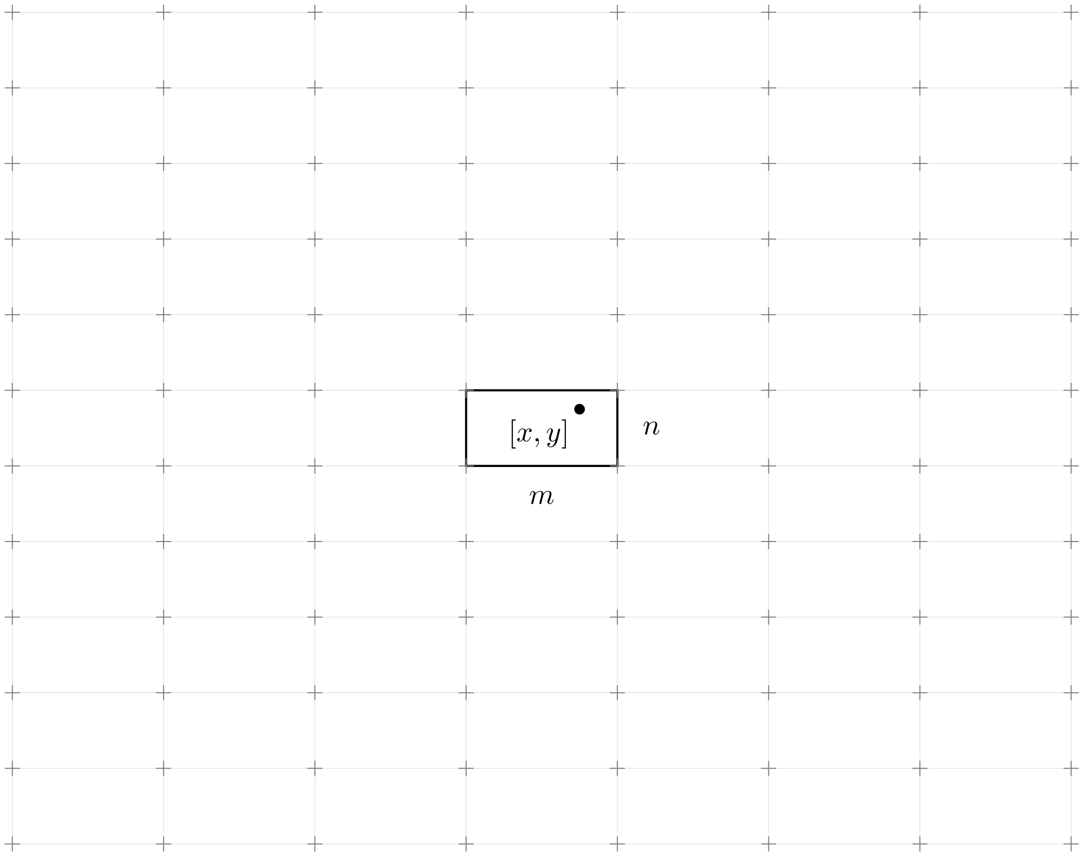
Obr. 3: Satelit v obdelníku

1 Otázka 1

Délka odrážející se trajektorie z počátku sateletu končící v rohu se dá spočítat vzdáleností počátku satelitu k zrcadlovému vyzovrazení daného rohu.

Všechny zobrazení rohu, jež jsou ve vzdálenosti $\leq D$ od satelitu, jsou satelitem po několika odrazech dosažitelné. Toto je znázorněno na obrázku 5.

Pokud bychom toto měli vyjádřit matematicky, tak můžeme definovat dvě množiny, které vyjadřují horizontální a vertikální body rohů. Čísla jsou omezena pouze na ta, která jsou do vzdálenosti D od satelitu. Ale pozor, pouze do vzdálenosti v dané ose. (nikoli skutečné rovinové vzdálenosti)

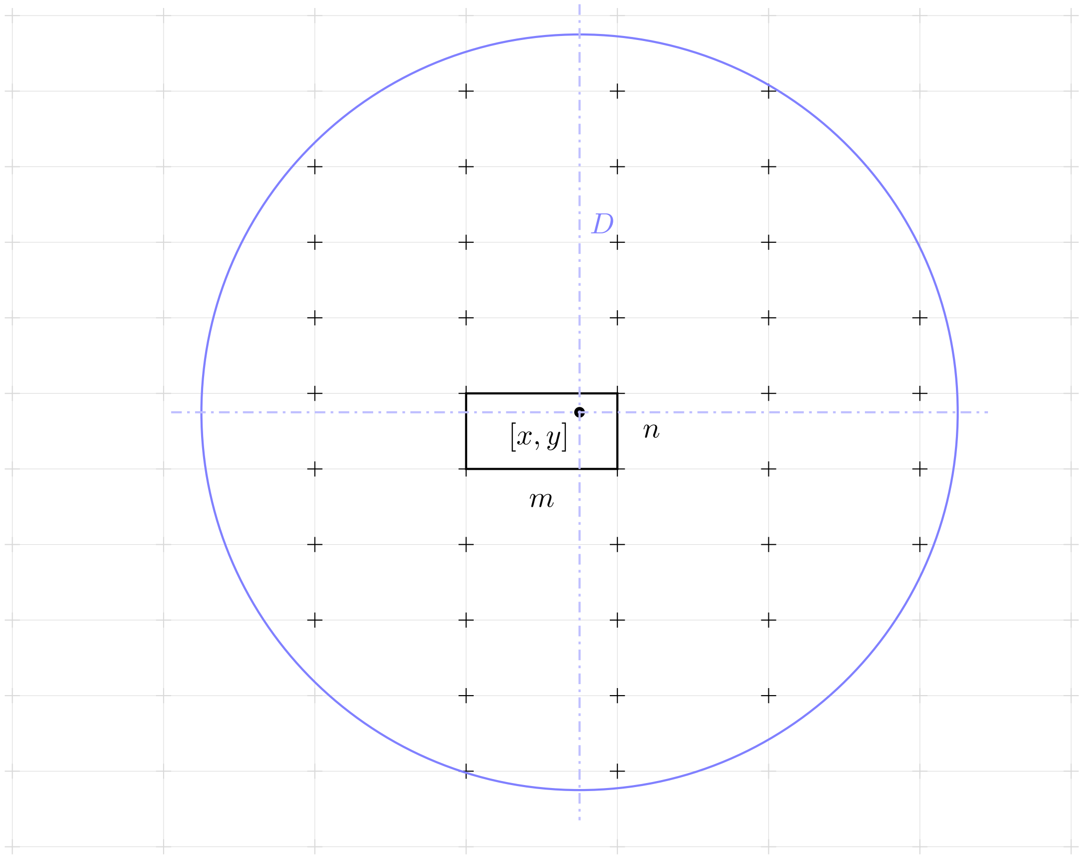


Obr. 4: Satelit v obdelníku zrcadlený

$$H = \left\{ \mathbf{n} \in \mathbb{Z} \mid \mathbf{n} \in \left\langle \frac{-D + x}{m}; \frac{D + x}{m} \right\rangle \right\}$$
$$V = \left\{ \mathbf{n} \in \mathbb{Z} \mid \mathbf{n} \in \left\langle \frac{-D + y}{n}; \frac{D + y}{n} \right\rangle \right\}$$

Množina H jsou celá čísla z *horizontální osy*, vyjadřující i-tý roh na který satelit *"dosáhne"*. Množina V jsou celá čísla z *vertikální osy*, vyjadřující i-tý roh na která satelit *"dosáhne"*. Nyní $H \times V$ jsou polohy (v rámci pomyslné mřížky, nikoliv souřadnicového systému) všech rohů, do kterých ~~satelit může doletět~~. Není to pravda, $H \times V$ jsou všechny rohy v pomyslném čtverci o stranách D, nikoli kruhu. Takže chceme-li dostat všechny rohy, do kterých satelit může doletět, vyjádříme je takto množino R.

$$R = \left| \{ [h, v] \in H \times V \mid \sqrt{(mh - x)^2 + (nv - y)^2} \leq D \} \right|$$



Obr. 5: Rohy v dosahu satelitu

Toto je náš výsledek. **Satelit se může rozletět $|R|$ směry, tak, že po nějaké vzdálenosti $d \leq D$ skončí v rohu.**

2 Otázka 2

Druhá otázka je velmi podobná té první, akorát místo maximální vzdálenosti D máme zadán maximální počet odrazů N. Definujme si pomocnou funkci $f(x)$, která od kladných čísel odečítá 1.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{pro } x > 0 \\ x & \text{pro ostatní} \end{cases}$$

Nyní si opěd definujeme množiny horizontálních a vertikálních bodů mřížky s rohy. K N se přičítá 1, protože první roh je dosažitelný bez odrazu.

$$H = \{\mathbf{n} \in \mathbb{Z} \mid \mathbf{n} \in \langle -N; N+1 \rangle\}$$
$$V = \{\mathbf{n} \in \mathbb{Z} \mid \mathbf{n} \in \langle -N; N+1 \rangle\}$$

Výsledna množina všech dosažitelných rohů by vypadala takto:

$$R = |\{[h, v] \in H \times V \mid |f(v)| + |f(h)| \leq N\}|$$

Toto je náš výsledek. **Satelit se může rozletět $|R|$ směry, tak, že po $n \leq N$ odrazech skončí v rohu.**