# Satelit

Tomáš Hůla

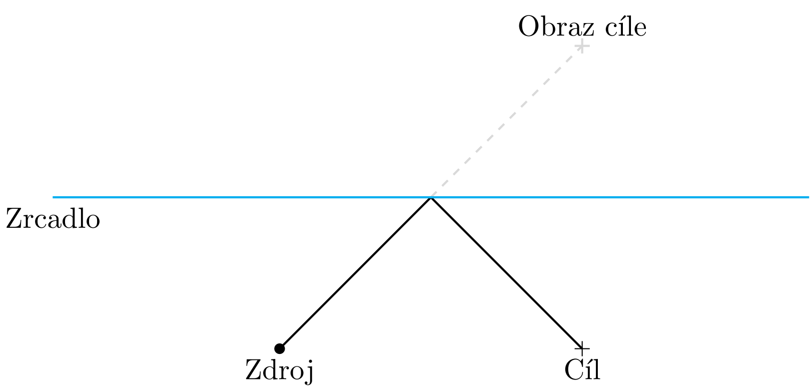
Září 2024

Princip odrazu satelitu od stěn obdélníku je identický s odrazy světla v zrcadle. Základní pravidlo se kterým budeme pracovat je, že zrcadlo zobrazuje objekt, jako by se nacházel ve stejné vzdálenosti za zrcadlem, jako je skutečný objekt od zrcadla. Pro zasažení cíle odrazem o zrcadlo stačí namířit paprsek na obraz cíle v zrcadle. Paprsek se od zrcadla odrazí ve směru cíle. Délka paprsku je stejná jako vzdálenost zdroje od obrazu cíle, protože paprsek pomyslně cestuje stále rovně do zrcadlené "dimenze". (viz obrázek 1) Tuto analogii lze rozšířit i na případ s více zrcadly. Na obrázku 2 je znázorněn stejný princip, ale se dvěma zrcadly.

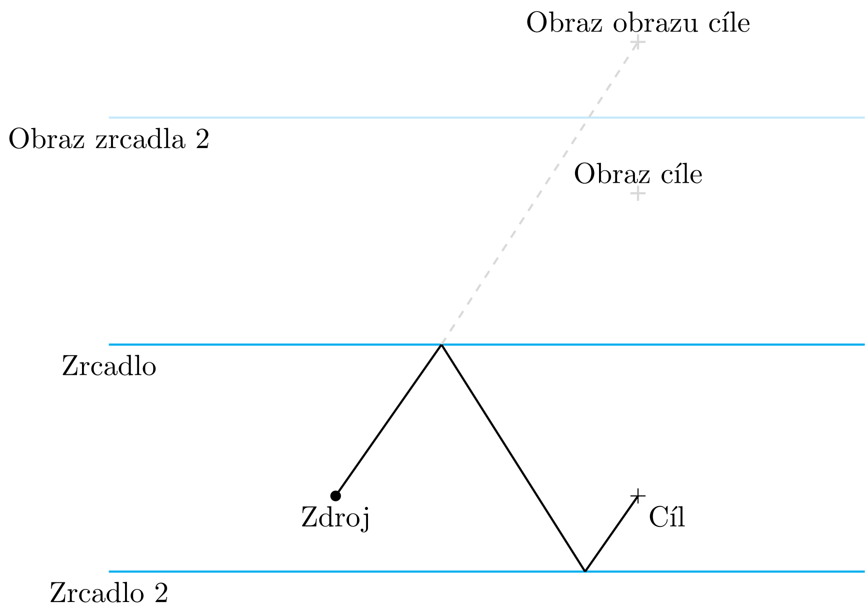
V našem případě je zdroj satelit, paprsek jeho trajektorie, zrcadla jsou strany obdelníku a cíle jsou jeho 4 rohy. (viz obrázek 3) Pokud si představíme nekonečně mnoho odrazů stran obdélníku a tím pádem i jejich rohů, dostaneme mřížku zrcadlových obrazů rohů. (viz obrázek 4) Takto vidíme všechny zrcadlové zobrazení rohů obdelníku.

## 1 Otázka 1

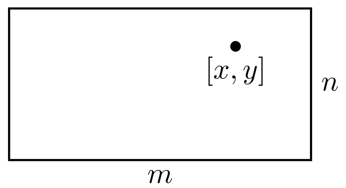
Délka odrážející se trajektorie z počátku satelitu končící v rohu se dá spočítat vzdáleností počátku satelitu k zrcadlovému vyzobrazení daného rohu.



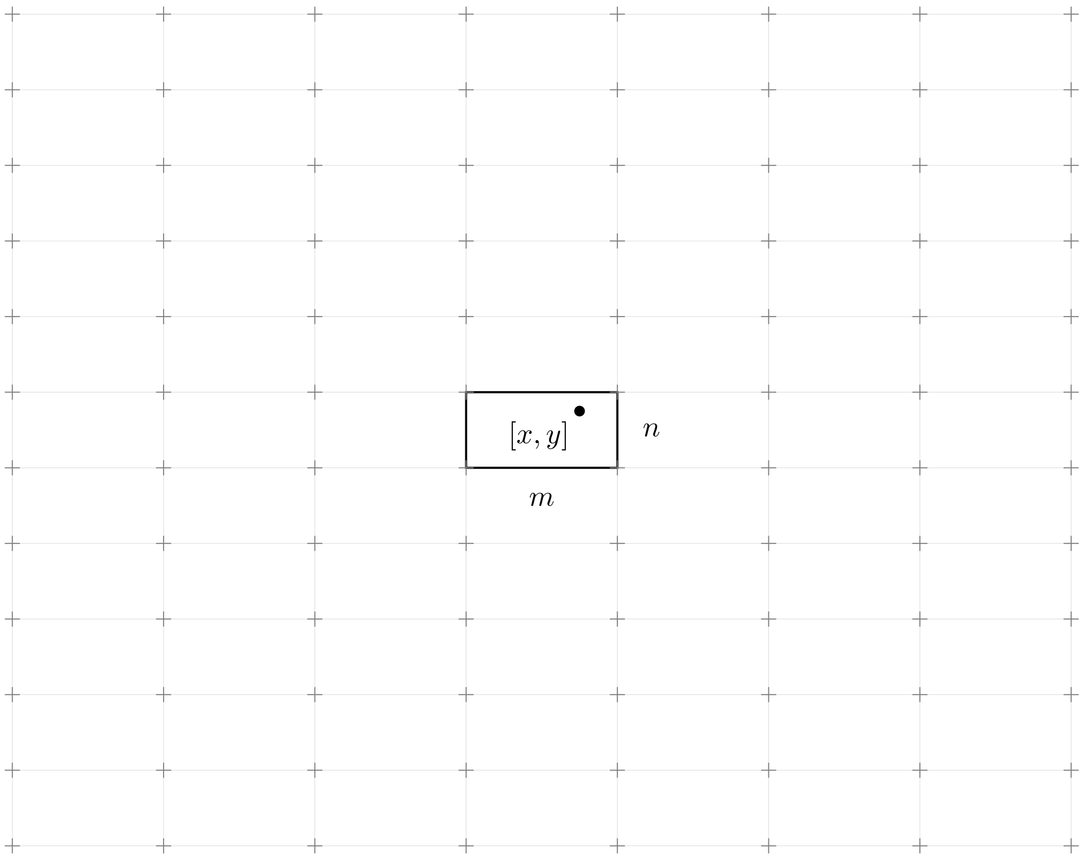

Obr. 1: Zrcadlení paprsku




Obr. 2: Zrcadlení paprsku se dvěma zrcadly

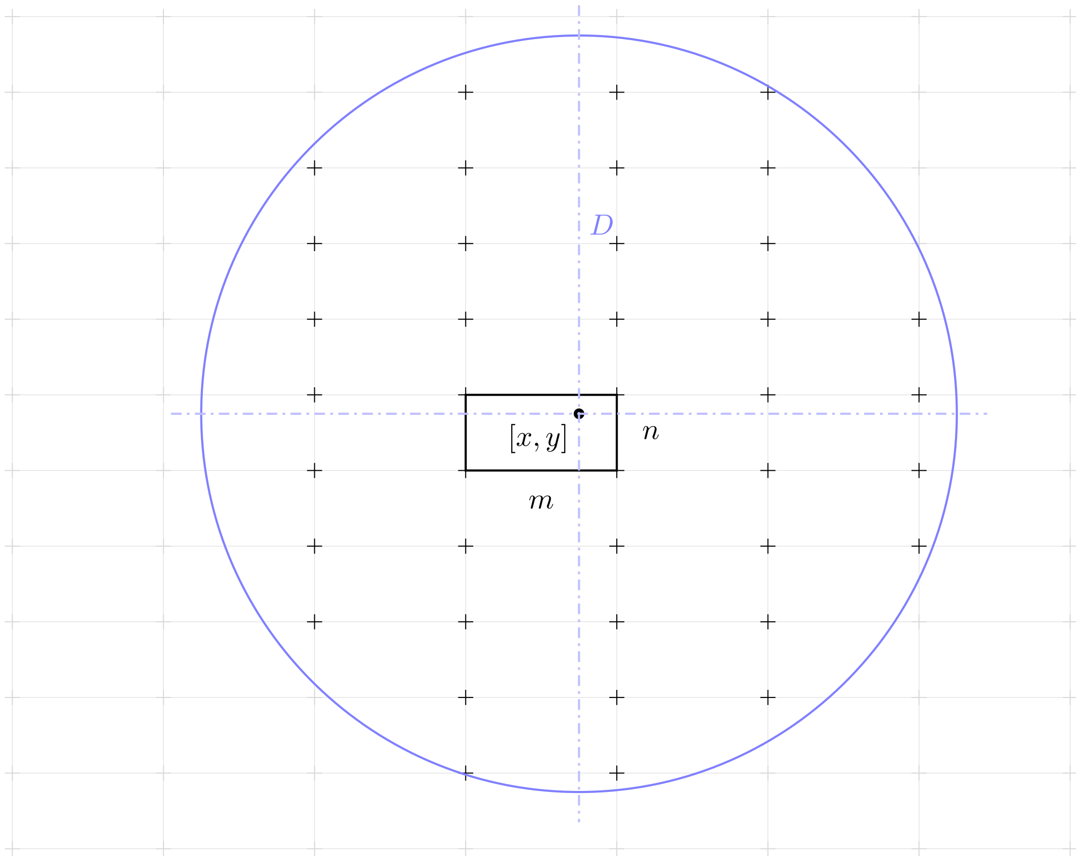



Obr. 3: Satelit v obdelníku




Obr. 4: Satelit v obdelníku zrcadlený

Obrazy satelitu nezakreslujeme, jelikož to nemá význam pro řešení problému. Každý roh je znázorněn křížkem.




Obr. 5: Rohy v dosahu satelitu

**Všechny zobrazení rohu, jež jsou ve vzdálenosti $\leq D$ od satelitu, jsou satelitem po několika odrazech dosažitelné.** Toto je znázorněno na obrázku 5. Pokud bychom toto měli vyjádřit matematicky, tak můžeme definovat dvě množiny, které vyjadřují horizontální a vertikální osu mřížky rohů. Množiny jsou omezeny pouze na ta čísla, která jsou do vzdálenosti $D$ od satelitu. Ale pozor, pouze do vzdálenosti v dané ose. (nikoli skutečné rovinové vzdálenosti)

$$H = \left\{ \mathbf{n} \in \mathbb{Z} \mid \mathbf{n} \in \left\langle \frac{-D + x}{m}; \frac{D + x}{m} \right\rangle \right\}$$
$$V = \left\{ \mathbf{n} \in \mathbb{Z} \mid \mathbf{n} \in \left\langle \frac{-D + y}{n}; \frac{D + y}{n} \right\rangle \right\}$$

Množina $H$ jsou celá čísla z *horizontální osy*, vyjadřující i-tý roh na který satelit *"dosáhne"*. Množina $V$ jsou celá čísla z *vertikální osy*, vyjadřující i-tý roh na která satelit *"dosáhne"*. Nyní $H \times V$ jsou polohy (v rámci pomyslné mřížky, nikoliv souřadnicového systému) všech rohů, do kterých ~~satelit může doletět~~. Není to pravda, $H \times V$ jsou všechny rohy v pomyslném čtverci o stranách $D$, nikoli kruhu. Takže chceme-li dostat všechny rohy, do kterých satelit může doletět, vyjádříme je takto množino $R$.

$$R = \{[h,v] \in H \times V \mid \sqrt{(mh-x)^2 + (nv-y)^2} \leq D\}$$

Toto je náš výsledek. **Satelit se může letět $|R|$ způsoby (směr a vzdálenost) tak, že po nějaké vzdálenosti $d \leq D$ skončí v rohu.**

# 2 Otázka 2

Druhá otázka je velmi podobná té první, akorát místo maximální vzdálenosti $D$ máme zadán maximální počet odrazů $N$. Definujme si pomocnou funkci $f(x)$, která od kladných čísel odečítá 1.

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{pro } x > 0 \\ x & \text{pro ostatní} \end{cases}$$

Nyní si opět definujeme množiny horizontálních a vertikálních bodů mřížky s rohy. K $N$ se přičítá 1, protože první roh je dosažitelný bez odrazu.

$$H = \{\mathbf{n} \in \mathbb{Z} \mid \mathbf{n} \in \langle -N; N+1 \rangle\}$$
$$V = \{\mathbf{n} \in \mathbb{Z} \mid \mathbf{n} \in \langle -N; N+1 \rangle\}$$

Výsledna množina všech dosažitelných rohů by vypadala takto:

$$R = \{[h,v] \in H \times V \mid |f(v)| + |f(h)| \leq N\}$$

$f(v)$ a $f(h)$ se používavaji, ze stejného důvodu jako $N+1$ v množinách $H$ a $V$. První rohy jsou nezrcadlené a tak se dají dosáhnout bez odrazu. Toto je náš výsledek. **Satelit se může rozletět $|R|$ způsoby tak, že po $n \leq N$ odrazech skončí v rohu.**