# Ecuaciones diferenciales

## Definición de campo escalar homogéneo

Un campo escalar $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es homogéneo de grado $k$ si:

$$\forall \bar{x} \in D \ , \ \forall t \in \mathbb{R} - \{0\} : f(t\bar{x}) = t^k f(\bar{x})$$

Observemos que $f$ es homogéneo de grado $0$ si: $f(t\bar{x}) = t^0 f(\bar{x}) = f(x)$

### Ej 1:

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / f(x, y) = x^3 + xy^2$ determinar si el campo escalar es homogéneo y si lo es indicar el grado.

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + tx(ty)^2 = t^3x^3 + t^3xy^2 = t^3(x^3 + xy^2) = t^3 f(x, y)$$

Concluimos que $f$ es homogéneo de grado $3$.

### Ej 2:

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / f(x, y) = \frac{3x^2}{y^2}$

$$f(tx, ty) = \frac{3(tx)^2}{(ty)^2} = \frac{3t^2x^2}{t^2y^2} = \frac{3x^2}{y^2} = f(x, y)$$

Por lo tanto concluimos que $f$ es homogéneo de grado 0.

### Ej 3:

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / f(x, y) = x + y + 1$

$$f(tx, ty) = tx + ty + 1 = t(x + y) + 1 \neq t^k f(x, y)$$

Concluimos que $f$ no es homogéneo.

------------------

Una ecuación difrencial de primer orden $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ es homogénea si las funciones $P$ y $Q$ son homogéneas del mismo grado.

## Ej:

$xy^2dx + y^3dy = 0$ es una E.D homogénea porque $P(x,y) = xy^2$ es homogénea de grado 3 y $Q(x,y) = y^3$ también lo es:

$$P(x,y) = xy^2$$
$$P(tx,ty) = tx(ty)^2 = txt^2y^2 = t^3xy^2 = t^3P(x,y)$$
$$Q(x,y) = y^3$$
$$Q(tx,ty) = (ty)^3 = t^3y^3 = t^3Q(x,y)$$

De $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ se puede deducir: $Q(x,y)dy = -P(x,y)dx$ y despues:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-P(x,y)}{Q(x,y)}$$

$$y' = f(x,y)$$

Siendo una $f$ una función homogénea de grado 0.

Para resolver usamos uno de los siguientes cambios de variable $y = ux$ ó $x = uy$ vamos a tomar $y = ux$ o lo que es igual $\frac{y}{x} = u$ con $x \neq 0$ por que la función mas simple acompaña al $dy$.

$$y = ux$$
$$y' = u'x + u$$

Reemplazamos en la E.D :

$$u'x + u = f(x,ux) = f[x(1,u)] = x^0f(1,u) = f(1,u)$$

Podemos sacar la $x$ afuera de la función por ser $f$ una función homogénea de grado $0$.

$$u'x = f(1,u) - u$$
$$\frac{du}{dx} = f(1,u) - u$$
$$\frac{du}{f(1,u)-u} = \frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{du}{f(1,u)-u} = \int \frac{1}{x}dx$$
$$G(u) = \ln|x| + c$$
$$G(\frac{y}{x}) = \ln|x| + c$$

# Ecuaciones diferenciales totales exactas(E.D.T.E)

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \ \ (1) \qquad P, Q \in C^1(D)$ con $D$ abierto y simplemente conexo.

Si la expresión $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ es el diferencial de algún campo escalar $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ d\phi(x,y) = 0$

$\phi_x(x,y)dx + \phi_y(x,y)dy = 0$

Entonces $\phi(x,y) = c$ es la s.g de la E.D.

$$\begin{cases} \phi_x(x,y) = P(x,y) \\ \phi_y(x,y) = Q(x,y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_{xy}(x,y) = P_y(x,y) \\ \phi_{yx}(x,y) = Q_x(x,y) \end{cases}$$

Y por el teorema de Schwarz $P_y(x,y) = Q_x(x,y)$ que es el criterio de exactitud para determinar si $(1)$ es una E.D.

Recordemos que si $\bar{f} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ / \ \bar{f}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ es un campo de gradientes existe una función potencail $\phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ \nabla\phi = \bar{f}$ precisamente los conjuntos de nivel de la función potencial $\phi$ serán la s.g de la E.D.

### Ej:

$$\begin{cases} xy^2dx + (yx^2+1)dy = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ P(x,y) = xy^2 \\ Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ Q(x,y) = yx^2 + 1 \end{matrix} \qquad P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

Derivamos $P$ respecto de $y$ y $Q$ respecto de $x$.

$$\left.\begin{array}{r} P_y(x,y) = 2xy \\ Q_x(x,y) = 2xy \end{array}\right. \Rightarrow \text{La E.D es del tipo T.E}$$

Entonces sabemos que existe una función que cumple:

$$\begin{cases} \phi_x(x,y) = xy^2 \qquad (1) \\ \phi_y(x,y) = yx^2 + 1 \qquad (2) \end{cases}$$

Integramos $(1)$ respecto de $x$:

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \alpha(y)$$

Derivamos $\phi$ respecto de y e igualamos a $(2)$ para encontrar $\alpha(y)$:

$$x^2y + \alpha'(y) = yx^2 + 1$$

$$\alpha'(y) = 1 \Rightarrow \alpha(y) = y + c_1$$

Entonces la solución general de la ecuación diferencial queda:

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + y = c_2$$

Con la condición $y(1) = 0$ queda $c_2 = 0$ y la solución del ej queda:

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + y = 0$$

**-------------------------**

Veamos un ejemplo de una E.D que no es del tipo T.E pero puede reducirse a una T.E.

$$(2y^2 + 3x)dx + 2xydy = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} P(x,y) = 2y^2 + 3x \quad , \quad P_y(x,y) = 4y \\ Q(x,y) = 2xy \quad , \quad Q_x(x,y) = 2y \end{array}\right. \Rightarrow \text{No es T.E}$$

Sea:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$
$$P_y(x,y) \neq Q_x(x,y)$$

Supongamos que existe un factor integrante que depende de $x$: $\mu(x)$

$$\mu(x)\left[P(x,y)dx + Q(x,y)dy\right] = 0$$
$$\mu(x)P(x,y)dx + \mu(x)Q(x,y)dy = 0$$

Para que sea una T.E se tiene que cumplir:

$$[\mu(x)Q(x,y)]_x = [\mu(x)P(x,y)]_y$$
$$\mu'(x)Q(x,y) + \mu(x)Q_x(x,y) = \mu(x)P_y(x,y)$$
$$\mu'(x)Q(x,y) = \mu(x)P_y(x,y) - \mu(x)Q_x(x,y)$$
$$\mu'(x)Q(x,y) = \mu(x)[P_y(x,y) - Q_x(x,y)]$$
$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{P_y(x,y)-Q_x(x,y)}{Q(x,y)}$$

Para que exista el factor integrante $\mu(x)$ la expresión de arriba tiene que depende solo de $x$; en ese caso queda:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{Q} dx}$$

Entonces resolvemos el ejemplo:

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{4y - 2y}{2xy} = \frac{2y}{2xy} = \frac{1}{x} \rightarrow \text{Depende solo de x}$$

Luego existe el factor integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln|x|} = |x| \Rightarrow \mu(x) = x$

Planteamos la E.D de nuevo pero multiplicando por el factor integrante.

$$x(2y^2 + 3x)dx + x2xydy = 0$$

$$(2xy^2 + 3x^2)dx + 2x^2ydy = 0$$

Ahora si derivamos $P$ y $Q$ queda:

$$\begin{matrix} P(x,y) = 2xy^2 + 3x^2 & , & P_y(x,y) = 4xy \\ Q(x,y) = 2x^2y & , & Q_x(x,y) = 4xy \end{matrix} \Rightarrow \text{Si es T.E}$$

Entonces sabemos que existe una función que cumple:

$$\begin{cases} \phi_x(x,y) = 2xy^2 + 3x^2 \quad (1) \\ \phi_y(x,y) = 2x^2y \quad (2) \end{cases}$$

Integramos $(1)$ con respecto a $x$ para hallar $\phi(x, y)$

$$\phi(x, y) = x^2 y^2 + x^3 + \alpha(y)$$

Derivamos respecto de $y$ e igualamos a $(2)$ para hallar $\alpha(y)$

$$2x^2 y + \alpha'(y) = 2x^2 y$$

$$\alpha'(y) = 0 \Rightarrow \alpha(y) = c_1$$

Entonces la solución general queda: $x^2 y^2 + x^3 = c$

#### *Nota*

También se puede plantear un factor integrante que dependa de $\mu(y)$ y en ese caso queda:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{Q_x - P_y}{P} dy}$$