Transformada de Laplace.

Para comenzar a entender la transformada de Laplace debemos tener en claro como funciona la transformada de Fourier. Recordemos la definición.
La transformada de Fourier de una función $f(t)$ se define:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

La transformada de Fourier venía acompañada de una condición necesaria que decía que $f(t)$ debe ser seccionalmente continua y de módulo integrable en todo el eje real, por ello muchas funciones no eran transformables ya que el area encerrada bajo la curva de estás tendería a infinito cuando $t \to \infty$.

Para solucionar esto, es conveniente multiplicar por un factor exponencial decreciente $e^{-\alpha t}$ obteniendose:

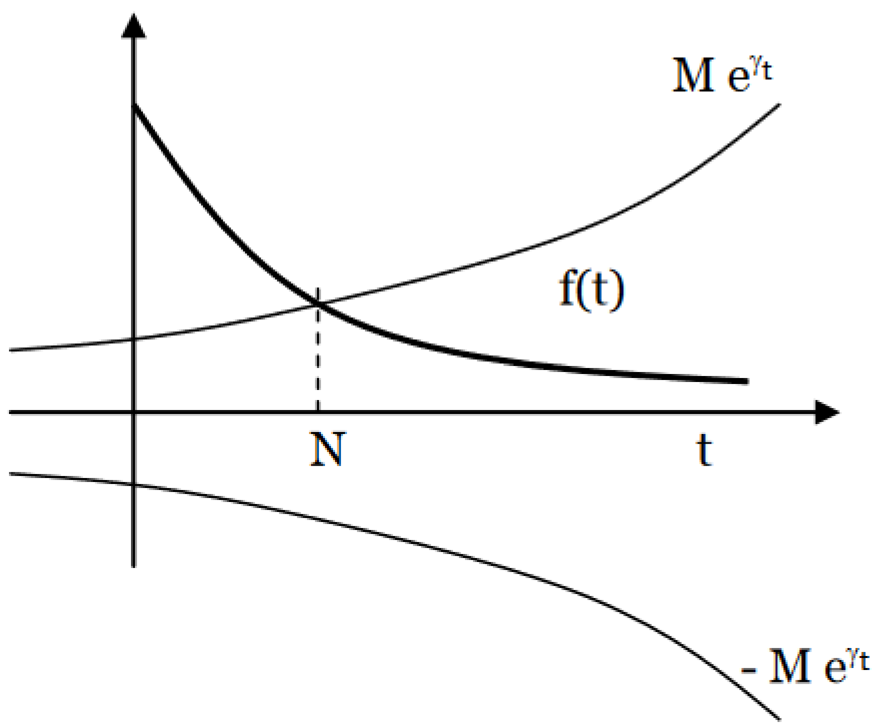
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\alpha t} \cdot e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st}$$

con $s = \alpha + i\ \omega$
Y esta es la definición de la transformada de Laplace. Esta, al igual que la transformada de Fourier se aplica en el dominio del tiempo, pero nos devuelve una funcion en un dominio de vairable compleja s que llamaremos dominio de Laplace.
Dentro del enfoque de la materia se trabajará con la versión unilateral de la transformada bajo la supocisión que todas las funciones $f(t)$ trabajadas cumpliran $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$.

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Teorema de existencia.

Sea $f(t)$ una función seccionalmente continua y $f(t)$ de orden exponencial γ para $t > N \Rightarrow \exists\ \mathscr{L}[f(t)]$
Una función $f(t)$ es de orden exponencial $\gamma \iff \exists\ M, \gamma \in \mathbb{R}/\forall t > N : |e^{-\gamma t}f(t)| < M$ si $t \to \infty$.
Es decir, la función en módulo no puede crecer mas que $Me^{\gamma t}$ a partir de un cierto valor N.



Propiedades de la transformada de Laplace

a) Linealidad

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)] \quad \wedge \quad G(s)=\mathscr{L}[g(t)] \quad \wedge \quad k_1,k_2\in\mathbb{R}\Rightarrow \mathscr{L}[k_1f(t)+k_2g(t)]=k_1F(s)+k_2G(s)$$

b) Primera propiedad de traslación

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]\Rightarrow \mathscr{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$$

Esto significa que multiplicar por e^{at} en el dominio del tiempo, equivale a efectuar una traslación de a unidades hacia la derecha en el dominio de Laplace.

c) Segunda propiedad de traslación

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)] \;\wedge\; g(t)=\begin{cases} f(t-a) & t>a \\ 0 & t<a \end{cases} \Rightarrow \mathscr{L}[g(t)]=e^{-as}F(s)$$

Esto significa que una traslación de a unidades hacia la derecha en el dominio del tiempo equivale a multiplicar por e^{-as} en el dominio de Laplace.

d) Cambio de escala

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]\Rightarrow \mathscr{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

e) Transformada de las derivadas

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]\Rightarrow \mathscr{L}[f^n(t)]=s^n\cdot F(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{n-1}(0)$$

Se puede encontrar una relación entre esta propiedad y el binomio de Newton. Al avanzar en la sumatoria (de restas) el grado de s^n va decreciendo mientras que el "grado" (orden) de la derivada de $f(0)$ va aumentando. Además vale la pena observar que una derivada en el dominio del tiempo, se traduce a un polinomio en el dominio de Laplace, esto junto con la propiedad siguiente será muy util para resolver ecuaciones diferenciales e integrodiferenciales.

f) Transformada de la integral simple

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]\Rightarrow \mathscr{L}[\int_0^t f(u)du]=\frac{F(s)}{s}$$

g) Multiplicación por t^n

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]\Rightarrow \mathscr{L}[t^nf(t)]=(-1)^nF^{(n)}(s)$$

Es decir, multiplicar por t^n en el dominio del tiempo equivale a derivar en el orden n en el dominio de Laplace.

h) División por t

$$F(s)=\mathscr{L}[f(t)]\Rightarrow \mathscr{L}[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^\infty F(u)du$$

Esto es valido siempre que $\exists \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$ Es decir, dividir por t en el dominio del tiempo, equivale a integrar en el dominio de Laplace. Observar que en el dominio de Laplace tenemos una función integral, al resolver nos quedará una función de s como cualquier otra transformada.

i) Teorema del valor inicial

Si existen los limites indicados, se cumple:

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

j) Teorema del valor final

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Observar que en estas ultimas dos propiedades la transformada está multiplicada por s

k) Transformada de funciones periódicas

$$f(t) = f(t+T) \Rightarrow F(s) = \mathscr{L}[f(t)] = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

Funciones especiales

Estas son algunas funciones muy utilizadas dentro de la ingeniería y nos serán utiles para calcular transformadas de Laplace sin tener que usar la definición. Nos basaremos en estas funciones y haremos todos los calculos teniendo en cuenta las propiedades detalladas anteriormente.