Funciones definidas de forma implicita

Teorema de Cauchy-Dini

1ª VERSIÓN CURVA DEFINIDA IMPLÍCITAMENTE EN (x, y)

Sea $F: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D abierto $P_0 = (x_0, y_0) \in D$, si se cumplen:

(1) $F(x_0, y_0) = 0$ ((x_0, y_0) debe pertenecer al conj de nivel 0 de F)

(2) $F \in C^1(E(x_0, y_0))$

(3) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ entonces se puede asegurar que $F(x, y) = 0$ define implícitamente a $f: E(x_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} / y = f(x)$, $f \in C^1(E(x_0))$, f es dif en x_0

y $\boxed{F(x, f(x)) = 0}$ y la derivada en el punto x_0 se calcula mediante la sig fórmula:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

2^{da} VERSIÓN SUPERFICIE DEFINIDA IMPLÍCITAMENTE

Sea $F: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, D abierto $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathring{D}$ si se cumplen

(1) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ (P_0 pertenece al conjunto de nivel 0 de F)

(2) $F \in C^1(E(x_0, y_0, z_0))$

(3) $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ entonces queda definido un $E(x_0, y_0) \subset \mathbb{R}^2$ y una única función $f: E(x_0, y_0) \to \mathbb{R}$ / $z = f(x, y)$, f es dif en (x_0, y_0) y cumple $F(x, y, f(x, y)) = 0$

siendo $f_x(x_0, y_0) = -\dfrac{F_x(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$ $\quad z_x(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$

$f_y(x_0, y_0) = -\dfrac{F_y(x_0, y_0, z_0)}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$ $\quad z_y(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$

Ej 11