

Transformada de Laplace.

Para comenzar a entender la transformada de Laplace debemos tener en claro como funciona la transformada de Fourier. Recordemos la definición. La transformada de Fourier de una función $f(t)$ se define:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

La transformada de Fourier venía acompañada de una condición necesaria que decía que $f(t)$ debe ser seccionalmente continua y de módulo integrable en todo el eje real, por ello muchas funciones no eran transformables ya que el area encerrada bajo la curva de éstas tendería a infinito cuando $t \rightarrow \infty$.

Para solucionar esto, es conveniente multiplicar por un factor exponencial decreciente $e^{-\alpha t}$ obteniendose:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-\alpha t} \cdot e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st}$$

con $s = \alpha + i\omega$

Y esta es la definición de la transformada de Laplace. Esta, al igual que la transformada de Fourier se aplica en el dominio del tiempo, pero nos devuelve una funcion en un dominio de variable compleja s que llamaremos dominio de Laplace.

Dentro del enfoque de la materia se trabajará con la versión unilateral de la transformada bajo la supocisión que todas las funciones $f(t)$ trabajadas cumplan $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$.

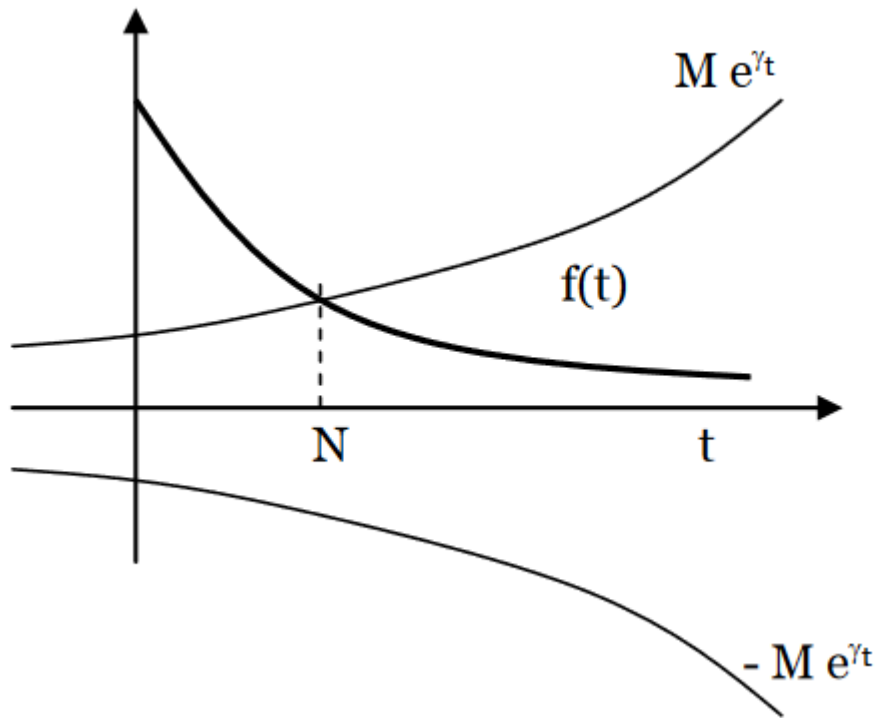
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Teorema de existencia.

Sea $f(t)$ una función seccionalmente continua y $f(t)$ de orden exponencial γ para $t > N \Rightarrow \exists \mathcal{L}[f(t)]$

Una función $f(t)$ es de orden exponencial $\gamma \iff \exists M, \gamma \in \mathbb{R} / \forall t > N : |e^{-\gamma t} f(t)| < M$ si $t \rightarrow \infty$.

Es decir, la función en módulo no puede crecer mas que $Me^{\gamma t}$ a partir de un cierto valor N .



Propiedades de la transformada de Laplace

a) Linealidad

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \wedge G(s) = \mathcal{L}[g(t)] \wedge k_1, k_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{L}[k_1 f(t) + k_2 g(t)] = k_1 F(s) + k_2 G(s)$$

b) Primera propiedad de traslación

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a)$$

Esto significa que multiplicar por e^{at} en el dominio del tiempo, equivale a efectuar una traslación de a unidades hacia la derecha en el dominio de Laplace.

c) Segunda propiedad de traslación

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \wedge g(t) = \begin{cases} f(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}[g(t)] = e^{-as} F(s)$$

Esto significa que una traslación de a unidades hacia la derecha en el dominio del tiempo equivale a multiplicar por e^{-as} en el dominio de Laplace.

d) Cambio de escala

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

e) Transformada de las derivadas

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{L}[f^n(t)] = s^n \cdot F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{n-1}(0)$$

Se puede encontrar una relación entre esta propiedad y el binomio de Newton. Al avanzar en la sumatoria (de restas) el grado de s^n va decreciendo mientras que el "grado" (orden) de la derivada de $f(0)$ va aumentando.

Además vale la pena observar que una derivada en el dominio del tiempo, se traduce a un polinomio en el dominio de Laplace, esto junto con la propiedad siguiente será muy útil para resolver ecuaciones diferenciales e integrodiferenciales.

f) Transformada de la integral simple

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{F(s)}{s}$$

g) Multiplicación por t^n

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

Es decir, multiplicar por t^n en el dominio del tiempo equivale a derivar en el orden n en el dominio de Laplace.

h) División por t

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(u)du$$

Esto es valido siempre que $\exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$ Es decir, dividir por t en el dominio del tiempo, equivale a integrar en el dominio de Laplace. Observar que en el dominio de laplace tenemos una función integral, al resolver nos quedará una función de s como cualquier otra transformada.

i) Teorema del valor inicial

Si existen los límites indicados, se cumple:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

j) Teorema del valor final

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Observar que en estas ultimas dos propiedades la transformada está multiplicada por s

k) Transformada de funciones periódicas

$$f(t) = f(t + T) \Rightarrow F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

Funciones especiales Estas son algunas funciones muy utilizadas dentro de la ingeniería y nos serán útiles para calcular transformadas de Laplace sin tener que usar la definición. Nos basaremos en estas funciones y haremos todos los cálculos teniendo en cuenta las propiedades detalladas anteriormente.