Integrales de superficie

Campo escalar

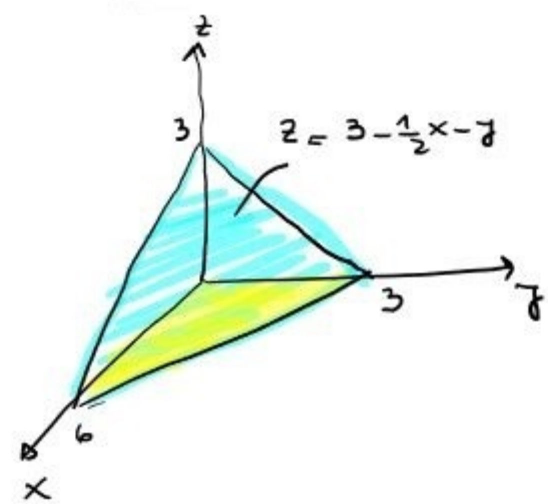
Sea $\bar{T} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ / $\bar{T}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ una parametrización suave de S y $f(x, y, z)$ un campo escalar continuo en $S = \bar{T}(D)$ entonces:

$$\iint_S f \cdot dr = \iint_D f\left[\bar{T}(u, v)\right] \cdot \left\|\bar{T}_u(u, v) \times \bar{T}_v(u, v)\right\| dudv$$

Ej:

Calcular el área de la porción del plano $x + 2y + 2z = 6$ en el primer octante.

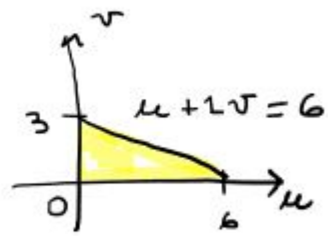
Despejando z la ecuación queda $z = 3 - \frac{1}{2}x - y$



Definimos una parametrización de la superficie

$$\bar{T} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ / \ \bar{T}(u, v) = \left(u, v, 3 - \frac{1}{2}u - v\right)$$

Graficamos el dominio de integración:



Definimos el dominio formalmente:

$$D = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 6 \ , \ 0 \leq v \leq 3 - \frac{1}{2}u \right\}$$

Ahora calculamos $\left\| \bar{T}_u(u, v) \times \bar{T}_v(u, v) \right\|$ derivando $\bar{T}$ con respecto a u y despues a v:

$$\bar{T}_u(u, v) \times \bar{T}_v(u, v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2}, 1, 1 \right)$$

$$\left\| \bar{T}_u(u, v) \times \bar{T}_v(u, v) \right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1} = \frac{3}{2}$$

Nos piden el area de la superficie parametrizada por ende el campo escalar queda $f(x, y, z) = 1$ y la integral es:

$$a(s) = \iint_S dr = \iint_D \left\| \bar{T}_u(u, v) \times \bar{T}_v(u, v) \right\| dudv = \iint_D \frac{3}{2} dudv$$

$$\iint_D \frac{3}{2} dudv = \frac{3}{2} \int_0^6 du \int_0^{3-\frac{1}{2}u} dv = \frac{27}{2}$$

Dejamos el desarrollo de la integral doble a cargo del lector.

Ej 2:

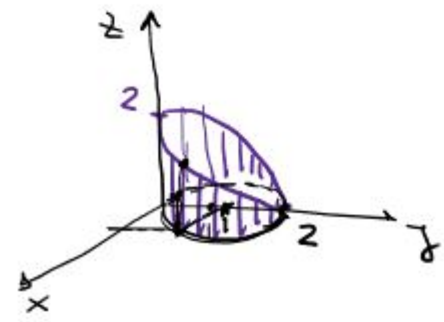
Calcular el area de la siguiente superficie:

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2y \ , \ 0 \leq z \leq 2 - y \right\}$$

Desarrollamos la primer ecuación de la superficie :

$$x^2 + y^2 = 2y$$
$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$$
$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

Obtenemos un cilindro el cual tiene su altura restringida por el plano $z = 2 - y$



Realizamos un cambio de variable a coordenadas cilindricas teniendo en cuenta que el centro del cilindro se encuentra en $(0, 1, 0)$

$$\begin{cases} x = \cos u & 0 \leq u \leq 2\pi \\ y - 1 = \sin u & 0 \leq v \leq 2 - (1 + \sin u) \\ z = v & 0 \leq v \leq 1 - \sin u \end{cases}$$

Ahora podemos definir la parametrización de S :

$$\bar{T} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ / \ \bar{T}(u, v) = (\cos u, 1 + \sin u, v)$$

Definimos el dominio formalmente:

$$D = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi \ , \ 0 \leq v \leq 1 - \sin u \right\}$$

Ahora calculamos $\left\| \bar{T}_u(u, v) \times \bar{T}_v(u, v) \right\|$ derivando $\bar{T}$ con respecto a u y despues a v:

$$\bar{T}_u(u, v) \times \bar{T}_v(u, v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$\left\| \bar{T}_u(u, v) \times \bar{T}_v(u, v) \right\| = 1$$

Como nos piden el area de la superficie parametrizada entonces se toma $f(x, y, z) = 1$ y la integral queda:

$$a(s) = \iint_S dr = \iint_D 1 \cdot dudv$$

$$\iint_D dudv = \int_0^{2\pi} du \int_0^{1 - \sin u} dv = \int_0^{2\pi} (1 - \sin u) du$$

$$(u + \cos u)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

Campo vectorial

$$\iint_S \bar{f} \cdot \bar{n} \cdot dr = \iint_D \bar{f}\, \left[\bar{T}(u,v)\right] \cdot \left(\bar{T}_u(u,v) \times \bar{T}_v(u,v)\right) dudv$$

Donde $\bar{n} = \bar{T}_u(u,v) \times \bar{T}_v(u,v)$ es un vector normal a la superficie y dicta su orientación.

Si $\bar{f}$ es un campo de velocidades de un fluido entonces la integral de superficie representa el flujo (caudal) :

Ej:

Calcular el flujo a traves de la superficie S indicando la orientación elegida para la superficie con $\bar{f}(x,y,z) = (-y,x,z)$:

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 \ , \ z \geq 0 \ , \ 0 \leq y \leq 1\right\}$$

Definimos una parametrización de S :

$$\bar{T} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \ / \ \bar{T}(u,v) = (u, v, 1 - u^2)$$

$$D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq u \leq 1 \ , \ 0 \leq v \leq 1\right\}$$

Calculamos el vector normal:

$$\bar{T}_u(u,v) \times \bar{T}_v(u,v) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (2u, 0, 1)$$

Luego la integral queda:

$$\iint_S \bar{f} \cdot \bar{n} \cdot dr = \iint_D (-v, u, 1 - u^2) \cdot (2u, 0, 1) dudv$$

Realizamos el producto y resolvemos la integral:

$$\iint_D (-2uv + 1 - u^2)dudv = \int_{-1}^{1} du \int_0^1 (-2uv + 1 - u^2)dv = -\frac{1}{3}$$

Analogamente a las integrales de linea de campo vectorial si existen dos parametrizaciones de una misma superficie con orientación opuesta entonces:

$$\iint_{\varphi_1} \bar{f} \cdot \bar{n} \cdot dr = - \iint_{\varphi_2} \bar{f} \cdot \bar{n} \cdot dr$$