Integrales Dobles

Integrales dobles sobre rectangulos

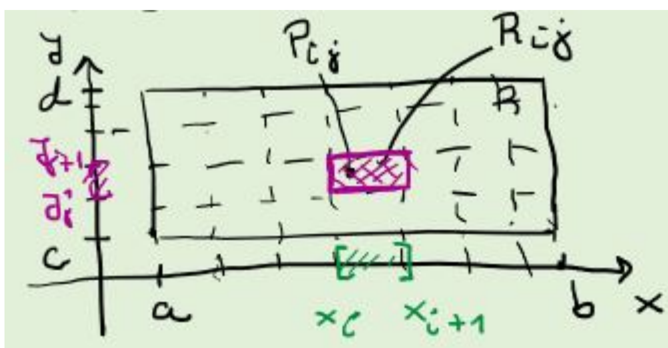
Sea un campo escalar $f\,:\,D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ \ /\ \ z = f(x, y)$ y R un rectangulo del plano xy de ecuaciones $R = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\,:\, a \leq x \leq b\,,\ c \leq y \leq d \,\right\}$

Comenzamos dividiendo el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos de igual amplitud $\Delta x = \frac{b-a}{m}$

Un intervalo cualquiera queda definido: $[x_i, x_{i+1}] \qquad i \in [0, m-1]$

Luego dividimos el intervalo $[c, d]$ en n subintervalos de igual amplitud $\Delta y = \frac{c-d}{n}$

Un intervalo cualquiera queda definido: $[y_j, y_{j+1}] \qquad j \in [0, n-1]$



Sea R_{ij} un subrectángulo cualquiera $R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ y P_{ij} un punto cualquiera perteneciente a ese rectangulo $P_{ij} = (w_i, w_j)$

Calculamos el calor de la funcion en el punto P_{ij} (altura) y formamos la suma:

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(P_{ij}) \Delta x \Delta y$$

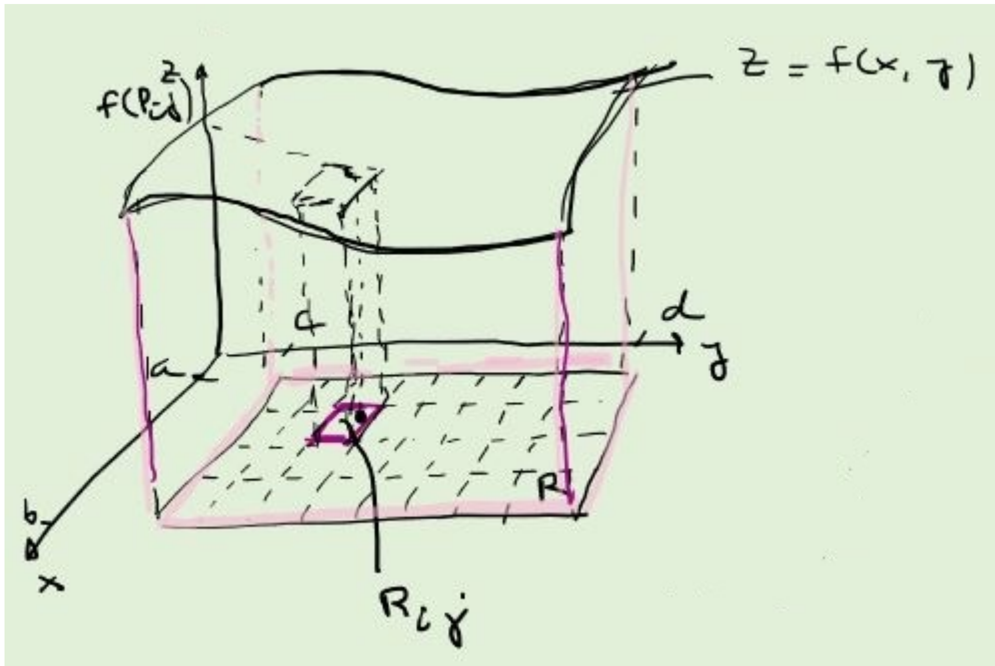
Donde $\Delta x \Delta y$ representa el area del rectangulo y $f(P_{ij})$ la altura.

Haciendo tender m y n a infinito, si el limite de la suma existe entonces se llama integral doble del campo escalar f sobre R y se define:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \lim_{m,n \to +\infty} \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(P_{ij}) \Delta x \Delta y$$

Si no existe el limite, la función no es integrable.

Si $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in R$ entonces $\iint_R f(x, y)dxdy = Vol(M)$ representa el volumen del macizo M que tiene como base el rectangulo R y está limitado superiormente por la grafica de f y lateralmente por los planos $x = a, x = b, y = c, y = d$ (Limites del rectangulo R)



$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b \ \ , \ \ c \leq y \leq d \ \ , \ \ 0 \leq z \leq f(x, y) \right\}$$

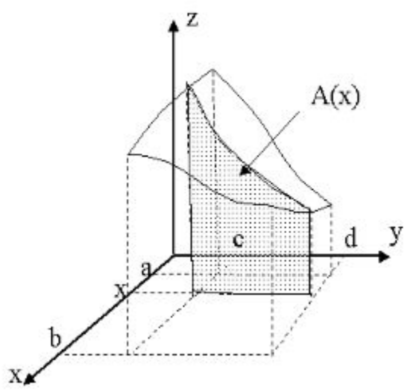
Para resolver una integral doble la idea es dejar una variable fija e integrar con respecto a la otra variable para así obtener una funcion de Area que podremos integrar nuevamente.

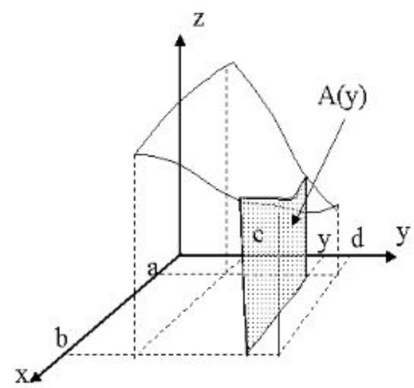
EJ:

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ z = f(x, y)$ continua en D y $R = [a, b] \times [c, d]$ con $D \subset R$

La integral definida $\int_c^d f(x, y)dy$ indica que al integrar la función de dos variables respecto de y , la x se mantiene fija y la y se integra entre $y = c$ e $y = d$ o sea, obtendremos una función de area dependiendo de x:

$$A(x) = \int_c^d f(x, y)dy$$





Si ahora integramos la funcion $A(x)$ respecto de x:

$$\int_a^b A(x)dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)dy \right] dx$$

Se puede escribir:

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy$$

Esto significa que primer integramos con respcto a y y luego con respecto a x

No importa el orden de integración, siempre y cuando se mantengan los limites correspondientes a cada variable las integrales tendrán el mismo resultado.

Integrando en superficies mas complejas

La idea basica es la misma pero ya no integraremos en un rectangulo R ahora el dominio de integración estará limitado por distintas funciones.

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ z = f(x,y)$ continua en D

Regiones de tipo 1

Llamamos L a una región donde los limites de x son constantes y los limites de y dependen de x con funciones $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$

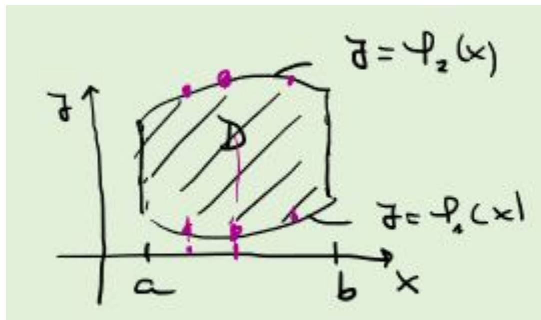
Entonces:

$$L = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \, , \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \right\}$$

$$\iint_L f(x,y)dydx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dydx$$

La integral doble se resuelve de la misma forma que cualquier otra, tomando x como una constante e integrando respecto de y pero al evaluar la primer integral aplicaremos la *regla de Barrow* reemplazando esta vez con funciones de x en lugar de valores constantes de y.

La grafica de la región podría ser algo asi:



Regiones de tipo 2

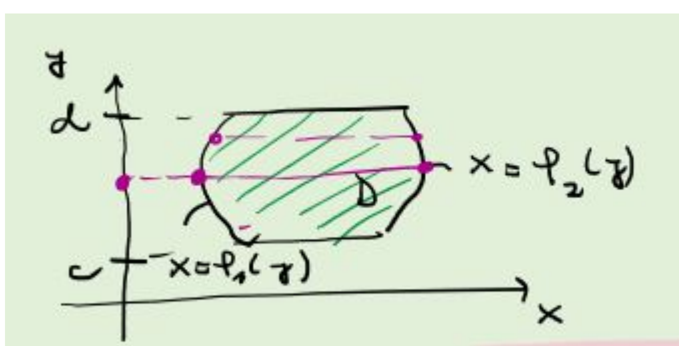
Llamamos L a una región donde los limites de y son constantes y los limites de x dependen de y con funciones $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$

Entonces:

$$L = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d \, , \; \varphi_1(y) \le x \le \varphi_2(y) \right\}$$

$$\iint_L f(x,y)dxdy = \int_c^d \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dxdy$$

La grafica de la región podría ser algo asi:



Tanto para regiones de tipo 1 como de tipo 2 es importante tener en cuenta el orden de integración además de definir bien los limites. Se debe integrar en ulitmo lugar la variable

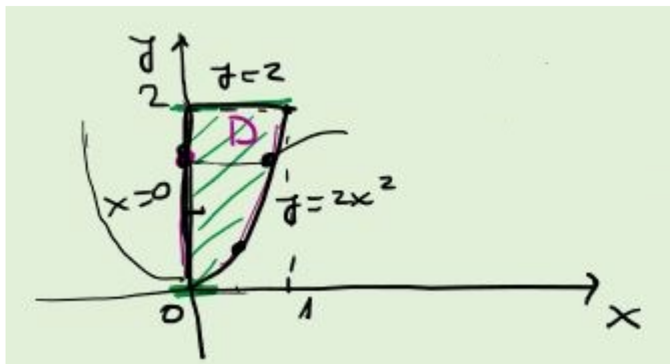
que tenga valores constantes y en primer lugar la variable que dependa de funciones de la otra variable. Además es importante utilizar como limite inferior a la función que esté mas cercana al eje coordenado correspondiente

Ej:

Sea D la región del primer cuadrante limitada por $y = 2x^2$ e $y = 2$ calcular:

$$\iint_D (1 + xy)dxdy$$

Es muy util siempre graficar la región de integración en un plano:



Comenzaremos integrando con y como función de x ya que las ecucaciones dadas son de la forma $y = \varphi(x)$

Para esto definiremos los limites de integración de y como funciones de x y resultán así

$$y_0 = 2x^2, y_1 = 2$$

Entonces:

$$\iint_D (1 + xy)dxdy = \int_0^1 dx \int_{2x^2}^2 (1 + xy)dy$$

$$\int_0^1 dx \left[y + x\tfrac{y^2}{2} \right] \Big|_{2x^2}^2$$

Evaluamos con regla de Barrow:

$$\int_0^1 \left[(2 + 2x) - (2x^2 + 2x^5) \right] dx = \int_0^1 (2 + 2x - 2x^2 - 2x^5)$$

Resolvemos la integral de 1 variable:

$$2x + x^2 - \tfrac{2x^3}{3} - \tfrac{x^6}{3} \Big|_0^1 = 2 + 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 2$$

Ahora cambiaremos el orden de integración ajustando los limites de la región

Escribimos los limites en función de y y quedan:

$$x_0 = 0, x_1 = \sqrt{\frac{y}{2}}$$

Entonces(cambiamos el orden de los diferenciales):

$$\iint_D (1 + xy)dydx = \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}} (1 + xy)dx$$

$$\int_0^2 dy \left[x + y\frac{x^2}{2} \right] \Big|_0^{\sqrt{\frac{y}{2}}}$$

Evaluamos con regla de Barrow y separamos en dos integrales:

$$\int_0^2 dy \left[\sqrt{\frac{y}{2}} + \frac{1}{2}y\left(\sqrt{\frac{y}{2}}\right)^2 \right] = \int_0^2 \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}}dy + \int_0^2 \frac{y^2}{4}dy$$

Resolvemos las integrales de 1 variable:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_0^2$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} \cdot 2^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{12} \cdot 8 = 2$$

Observemos que se llegó al mismo resultado pero una de las integrales resultó mas compleja de resolver por el uso de raices y la agudeza algebraica que se requiere para manejarlas correctamente.

Cambios de variables

Transformacion lineal

Recordemos en Analisis matematico 1

Si f es continua entonces y definimos una función de x tal que:

$$x : [c, d] \rightarrow [a, b] \;\;/\;\; x = g(t)$$

Y ademas tenemos que $g \in C^1$ e inyectiva y que $g(c) = a$ y $g(d) = b$

Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

De la misma forma en integrales dobles debemos definir dos funciones:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$$

$$\bar{T} : D^* \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2 \,/\, \bar{T}(u, v) = [x(u, v), y(u, v)]$$

$\bar{T}$ debe ser inyectiva, $\bar{T} \in C^1$ y ad emás $J_{\bar{T}}(u, v) \neq 0$

J_t siendo el jacobiano, es decir:

$$J_{\bar{T}}(u, v) = det \begin{pmatrix} x_u(u, v) & x_v(u, v) \\ y_u(u, v) & y_v(u, v) \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D^*} f\,[x(u, v), y(u, v)] \cdot J_{\bar{T}} dxdy$$

Ej:

Resuelva la siguiente integral usando el cambio de coordenadas indicado:

$$\iint_D (6 - x - y)^{-1} dxdy \quad , \quad D : |x + y| \leq 2 \;\;\wedge\;\; y \leq x + 2 \leq 4$$

Usando $(x, y) = (v, u - v)$

Definimos las funciones de x e y:

$$\bar{T} \begin{cases} x = v \\ y = u - v \end{cases}$$

Calculamos el $J_{\bar{T}}$:

$$J_{\bar{T}} = det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

Reescribimos las ecuaciones de D para definir D^*

$$|v + u - v| \leq 2 \quad \wedge \quad (u - v) \leq (v + 2) \leq 4$$

De la primer ecuación obtenemos $-2 \leq u \leq 2$ y la segunda podemos separar las desigualdades y tomar $(u - v) \leq (v + 2)$

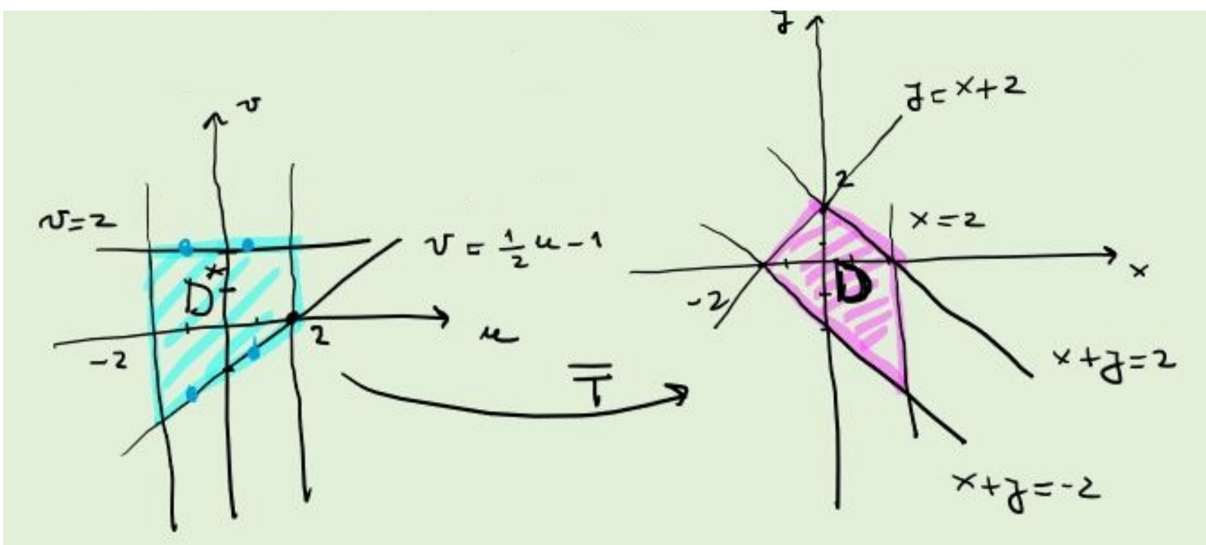
Luego obtenemos que $v \geq \frac{1}{2}u - 1$

Por ultimo nos queda $v + 2 \leq 4$ de la cual podemos decir $v \leq 2$

Desarrollemos las ecuaciones de D para poder graficarla:

$$D^* \begin{cases} -2 \leq u \leq 2 \\ v \geq \frac{1}{2}u - 1 \\ v \leq 2 \end{cases} \qquad D \begin{cases} -2 \leq x + y \leq 2 \\ y \leq x + 2 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

Los graficos quedán así:



Entonces podemos reescribir la integral de la siguiente forma:

$$\iint_D \frac{1}{(6 - x - y)} dxdy = \iint_{D^*} \frac{1}{(6 - u)} \cdot 1dudv$$

Como podemos ver en el grafico tenemos que los valores de u no depende de v tenemos una región de tipo 1 y podemos resolver así:

$$\int_{-2}^{2} du \int_{\frac{1}{2}u-1}^{2} \frac{1}{6-u} dv$$

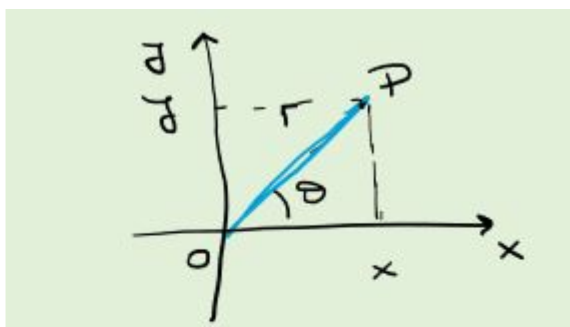
Estamos integrando una función que depende solo de u con respecto a v por ende puede salir multiplicando la función y restamos los limites de integración por Barrow ya que $\int dv = v$

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{6-u}(2 - \frac{1}{2}u + 1) du = \int_{-2}^{2} \frac{1}{6-u}(3 - \frac{1}{2}u) du$$

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{6-u} \cdot \frac{1}{2}(6-u) du$$

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} du = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

Coordenadas polares

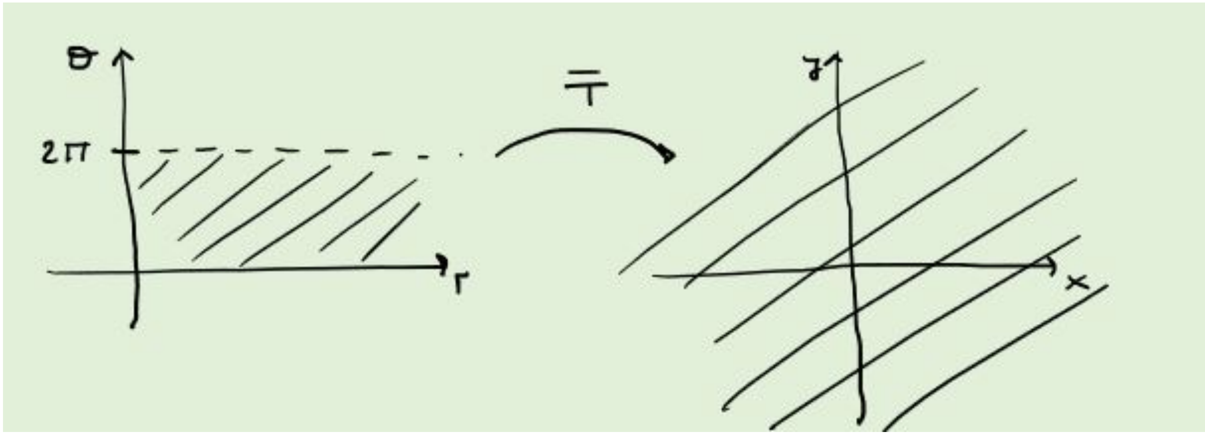


$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

Recordemos que siempre $r \geq 0$ y $\theta < 2\pi$

Entonces definimos:

$$\bar{T} : [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \;\; / \;\; \bar{T}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$



Además para este cambio de variable $J_{\bar{T}} = r$ siempre.

Siendo f continua en D :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_r\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\, drd\theta$$

Coordenadas elípticas

$$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases} \qquad x^2 + y^2 = r^2$$

Recordemos que siempre $r \geq 0$ y $\theta < 2\pi$ y además $a > 0$ y $b > 0$

Para este cambio de variable $J_{\bar{T}} = a \cdot b \cdot r$ siempre.

Siendo f continua en D :

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(ar\cos\theta, br\sin\theta)\cdot abr\, drd\theta$$

Con estas coordenadas se puede asegurar que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = r^2$

Ej:

Calcular el area de $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$

Usaremos coordenadas elípticas ya que sabemos que $r^2 \leq 1$ por ende $r \leq 1$

Entonces definimos nuestras ecuaciones para x e y:

$$\bar{T}\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases} \quad 0 \leq r \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Además recordemos que: $J_{\bar{T}} = a \cdot b \cdot r$

Nos piden el area de la superficie de integración, es decir nuestro campo escalar es $f(x, y) = 1$

La integral queda asi:

$$a(D) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 abr \cdot dr$$

Resolviendo la primer integral:

$$\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{ab}{2}2\pi = \pi \cdot a \cdot b$$