Numeros complejos.

Definición de un numero complejo.

Para empezar a hablar de numeros complejos primero hay que definir a la unidad imaginaria.

$$\sqrt{-1} = i$$

Todos los numeros de la forma bi donde $b \in \mathbb{R}$ son numeros puramente imaginarios.

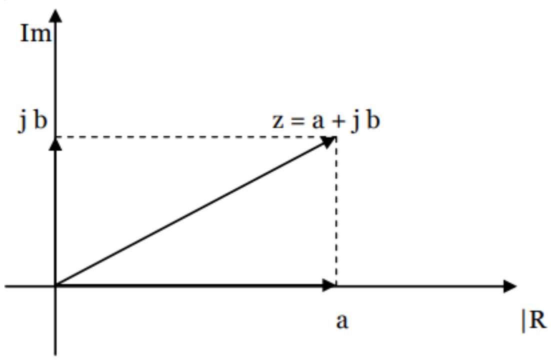
Un numero complejo es la suma entre un numero real y uno imaginario y se suelen llamar z tal que:

$$z = a + bi$$

Con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$

Representación geometrica en el plano complejo

Los complejos pueden representarse en un plano mediante pares ordenados de numeros reales, esto se debe al isomorfismo que tiene $(\mathbb{C}, +)$ con $(\mathbb{R}^2, +)$ por lo tanto pueden representarse como vectores.



Igualdad.

La igualdad entre numeros complejos se define asi:

$$z_1 = a + bi \ \wedge \ z_2 = c + di$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c \ \wedge \ b = d$$

Modulo.

Geometricamente es el modulo del vector asociado a z.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Adición.

$$z = z_1 + z_2 = a + bi + c + di = a + c + bi + di = (a + c) + (b + d)i$$

Es equivalente a la suma de vectores, por lo tanto tiene sus mismas propiedades.

Multiplicación.

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (b + di) = (a \cdot c - b \cdot d) + i(a \cdot d + b \cdot c)$$

No es necesario recordar esta formula de memoria pues la suma es distributiva respecto de la multiplicación y se puede llegar al resultado operando con esta propiedad y recordando que $i^2 = -1$.

Conjugado.

El conjugado de un numero complejo $z = a + bi$ se define:

$$\bar{z} = a - bi$$

Es decir, tiene la misma parte real y opuesta parte imaginaria. El conjugado es distributiva respecto de la suma, multiplicación y división. Además hay una propiedad muy interesante que nos ayudará a resolver divisiones.

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

Esta propiedad es util para deshacerse de un denominador complejo multiplicando arriba y abajo por su conjugado similar a como se suele hacer con la radicación.

Potencias naturales en forma Binomica

$$\begin{aligned} z^0 &= 1 \\ z^1 &= z \\ z^{n+1} &= z^n \cdot z \end{aligned}$$

De acuerdo a la definición podemos calcular las potencias de la unidad imaginaria:

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 && (1) \\ i^1 &= i && (2) \\ i^2 &= -1 && (3) \\ i^3 &= -i && (4) \\ i^n &= i^r && (5) \end{aligned}$$

Siendo r el resto de dividir a n por 4.

Para poder calcular potencias en forma binomica $(a + bi)$ debemos utilizar el binomio de Newton:

$$(a + bi)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Esta sumatoria no es muy complicada de entender, tendremos n terminos donde el coeficiente principal de cada uno está dado por el numero combinatorio entre n y k. A medida que "avanzamos" en la sumatoria k va aumentando de a 1 haciendo que en cada termino la potencia de b vaya aumentando hasta n y la de a disminuyendo desde n. No resulta de gran complejidad entender que está sucediendo y para llegar a las mismas conclusiones podemos tomar una potencia muy alta de un numero complejo y descomponerla en muchas multiplicaciones. Si intentamos generalizar ese proceso llegaremos al binomio de Newton. Una forma muy elegante de calcular complejos pero sin duda con demasiado trabajo. Mas adelante veremos como simplificar esta tarea.

Raiz cuadrada en forma Binomica.

Diremos que u es la raiz cuadradada de $z \Leftrightarrow z = u^2$ Para esta operación realizaremos algunos calculos ya que no se puede ver a tan simple vista por donde comenzar.
Sea $z = a + bi$ y $u = x + yi$:

$$\begin{aligned} u^2 &= z && (6) \\ (x + yi)^2 &= a + bi && (7) \\ x^2 + 2ixy - y^2 &= a + bi && (8) \\ & && (9) \end{aligned}$$

Por igualdad de complejos podemos deducir:

$$a = x^2 - y^2 \tag{10}$$
$$b = 2xy \tag{11}$$

Por otro lado tambien podemos argumentar lo siguiente:

$$u^2 = z \tag{12}$$
$$|u^2| = |z| \tag{13}$$
$$|u|^2 = |z| \tag{14}$$
$$x^2 + y^2 = |z| \tag{15}$$

Si ahora sumamos miembro a miembro (10) y (15) obtenemos:

$$|z| + a = 2x^2 \tag{16}$$
$$x = \sqrt{\frac{|z| + a}{2}} \tag{17}$$

Y si restamos miembro a miembro (10) y (15).

$$|z| - a = 2y^2 \tag{18}$$
$$y = \sqrt{\frac{|z| - a}{2}} \tag{19}$$

Es decir:

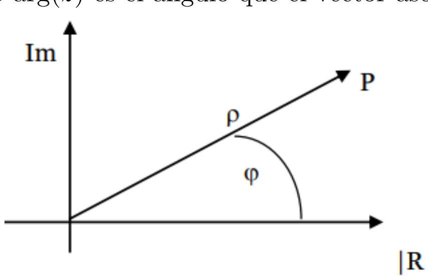
$$u = \pm\sqrt{\frac{|z| + a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{|z| - a}{2}}$$

Lo cual nos dá como resultado 4 posibles raices, pero sabemos que por el teorema fundamental del algebra, todo polinomio de grado 2 tiene exactamente 2 raices en el conjunto de los complejos.
Podemos reestringir 2 raices y dejarlas fuera gracias a la ecuación (11). Recordemos que estamos calculando $\sqrt{z}$. Los distintos valores de u vienen dados por los signos de x e y. Por la ecuación (11) podemos ver que los mismos están ligados al signo de b. Es decir, si x e y tienen el mismo signo, entonces b será positivo, si tienen distinto signo entonces b será negativo. De esta forma podemos resolver la distorsión. Si b es positivo tendremos dos soluciónes para $\sqrt{z}$, una donde x e y son positivos y otra donde x e y son negativos. Si b es negativo aún tendremos dos soluciones pero en una de estas x será positivo e y negativo y en la otra x será negativo e y positivo.
Observación: La formula resolvente es aplicable a complejos, siempre y cuando se realicen las operaciones como están definidas en el campo complejo.

Forma polar de un complejo.

Al igual que los vectores de $\mathbb{R}^2$, los numeros complejos pueden representarse en forma polar, de nuevo, gracias al isomorfismo que existe entre los conjuntos.

La forma polar de un numero complejo está representada por ρ y φ tal que $\rho = |z|$ y $\varphi = \arg(z)$. Observar que φ o $\arg(z)$ es el ángulo que el vector asociado al numero complejo z forma con el semieje real positivo.



Relación entre forma binomica y polar.

Por pitagoras es muy sencillo encontrar la siguiente relación:

$$a = \rho\cos(\varphi) \tag{20}$$
$$b = \rho\sin(\varphi) \tag{21}$$

Esto es util si se quiere pasar de polar a binomica ya que tenemos despjeados los valores de a y b en función de ρ y φ. Veremos ahora como pasar de binomica a polar. Con un poco de pensamiento llegamos a:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{22}$$
$$\varphi = \arctan(\frac{b}{a}) \tag{23}$$

Estas formulas se deducen sencillamente con algunas propiedades de trigonometria y sin duda son ciertas y muy utiles pero, para algunos casos especiales, hay que pensar un poco mas.
Por ejemplo, ¿Qué pasa si $a = 0$? Entonces el numero es imaginario puro, ya que a es la parte real. Los numeros imaginarios puros se encuentran sobre el eje imaginario (o eje de ordenadas) es decir, su argumento será de $\frac{\pi}{2}$ o bien $3\frac{\pi}{2}$ dependiendo de su signo.
Pero aún hay un problema, la función $\tan(x) = y$ no es biyectiva en todo el dominio y por lo tanto se utiliza con el dominio reestringido a $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ para que exista su inversa $\arctan(x) = y$. Y todo esto, ¿Qué significa? Pues que la función de φ en la calculadora sirve para calcular valores entre $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, es decír, complejos en el primer y cuarto cuadrante. Con un poco de pensamiento podemos solucionar esto solo sumando π al valor cuando sabemos que nuestro numero está en el segundo o tercer cuadrante.

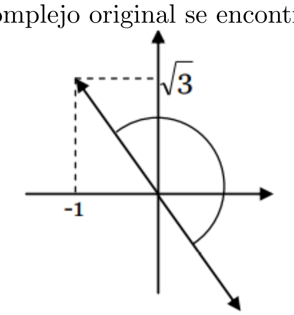
Veremos un ejemplo para clarificar todo este palabrerio. Escribamos en polar el siguiente numero: $-1 + i\sqrt{3}$
Primero que nada notemos que como a es negativo y b positivo, sabemos que el numero se encuentra en el segundo cuadrante.
Ahora calculemos el modulo que es bastante sencillo:

$$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

Ahora usamos la formula del argumento y vemos que obtenemos:

$$\varphi = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$$

Pensamos un poco y nos damos cuenta que un argumento de $-\frac{\pi}{3}$ deja el complejo en el cuarto cuadrante, pero el complejo original se encontraba en el segundo.



Aquí se nota porque se debe sumar π o medio giro para obtener el argumento del complejo original. Y nuestro complejo queda:

$$z = [2; 2\frac{\pi}{3}]$$

Forma trigonometrica de un complejo.

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

En esta formula se esconden todas las relaciones entre binomica y polar que vimos anteriormente. Pero además el famoso matemático Euler demostró:

$$\rho e^{i\varphi} = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

No entraremos en detalle sobre la demostración de esta formula, pero recomiendo fuertemente buscar información al respecto porque la demostración es una de las mas bellas de las matematias. Para la materia solo la tomaremos como verdadera y diremos que la forma exponencial de un numero complejo z es $\rho e^{i\varphi}$ donde $\rho = |z|$ y $\varphi = \arg(z)$. De aquí además es de donde sale la bella identidad: $e^{i\pi} + 1 = 0$ ya que -1 tiene modulo 1 y argumento π.

Operaciones en forma polar.

Igualdad

Sea $z_1 = [\rho_1; \varphi_1]$ y $z_2 = [\rho_2; \varphi_2]$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \ \wedge \ \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$$

Para que dos complejos sean iguales deben tener el mismo modulo y sus argumentos pueden diferir en una cantidad entera de giros (2π).

Multiplicación

Sea $z_1 = [\rho_1; \varphi_1]$ y $z_2 = [\rho_2; \varphi_2]$

$$z_1 \cdot z_2 = [\rho_1 \cdot \rho_2; \varphi_1 + \varphi_2]$$

Esta formula de la multiplicación quizas no tenga sentido a primera vista, por eso realizaremos la demostración:

$$z_1 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \ \wedge \ z_2 = \rho_2 e^{i\varphi_2}$$

$$\rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = (\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot (e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2}) = (\rho_1 \cdot \rho_2) \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = [\rho_1 \cdot \rho_2; \varphi_1 + \varphi_2]$$

División

$$\frac{z_1}{z_2} = [\frac{\rho_1}{\rho_2}; \varphi_1 - \varphi_2]$$

La demostración es muy parecida a la anterior y ya se puede ver a simple vista.

Potencias naturales en forma Polar.

Con $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = [\rho^n; n \cdot \varphi]$$

Esta formula se puede deducir sencillamente reflexionando sobre la demostración de la multiplicacion presentada anteriormente.

Raiz n-ésima.

Como vimos, en la forma binomica solo es posible calcular raices cuadradas, o en su defecto, raices potencias de 2 ya que estas pueden descomponerse en raices cuadradas. Gracias a la forma polar podemos resolver raices n-ésimas de un complejo.
Sea $z = [\rho; \varphi]$ y $w = [r; \theta]$ una raíz n-ésima de z tal que $w^n = z$. Entonces se deduce:

$$w^n = z \Rightarrow [r^n; n\theta] = [\rho; \varphi]$$

Y por igualdad de complejos:

$$r^n = \rho \tag{24}$$
$$n\theta = \varphi + 2k\pi \tag{25}$$
$$\tag{26}$$

$$r = \sqrt[n]{\rho} \tag{27}$$

$$\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \tag{28}$$

Finalmente, con $0 < k < n - 1$:

$$w_k = [\sqrt[n]{\rho}; \frac{\varphi + 2k\pi}{n}]$$

Importante: cuando $k = n$ obtenemos w_0, por eso k va de 0 a $n - 1$, luego empiezan a repetirse. Además, por convención, antes de calcular raices n-ésimas se escribe al complejo en su primer giro positivo. De esta forma, las raices quedan ordendas a partir del semieje positivo real en sentido positivo (antihorario).

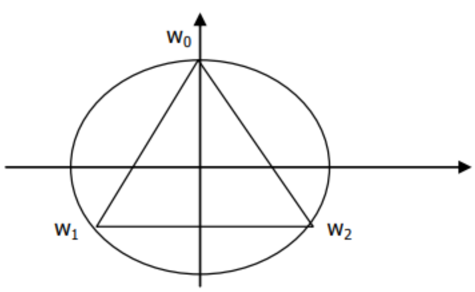
Representacion geometrica

Como $|w_k|$ no depende de k entonces:

$$|w_0| = |w_1| = |w_2| = |w_{n-1}| = \sqrt[n]{\rho}$$

Entonces los afijos de todas las raices están sobre la circunferencia de radio $\sqrt[n]{\rho}$.
Además, la distribución será equiespaciada, ya que el argumento (ángulo) aumenta en $k \cdot \frac{2\pi}{n}$. Es decir un entero por una fracción de giro que depende de n. Esto secciona el giro completo en n partes iguales. Para resumir podemos decir que los afijos constituyen los vertices de un polígono regular de n lados inscripto en la circunferencia de radio $\sqrt[n]{\rho}$ centrada en el origen.

Ejemplo: la grafica de las $\sqrt[3]{-8i}$



Raices primitivas de la unidad.

Sea w_k una raiz n-ésima de la unidad, es decir: ${w_k}^n = 1$ Se dice que w_k es una raíz primitiva de orden n si:

$${w_k}^h \neq 1 \ \ \forall 0 \leq h \leq n$$

Es decir, w_k es raíz primitva de orden n si no es raíz de orden inferior. Esto sucede cuando w_k es una raiz nueva que no apareció en ningun orden anterior a n. Como las raices primitivas se calculan sobre la unidad, todas las raices tendrán modulo igual a 1 ya que $\sqrt[n]{1} = 1 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ y esto hace que haya raices repetidas en los distintos órdenes.

Algunas propiedades:
a) w_0 nunca es primitiva porque vale 1 para todos los órdenes de n
b) w_1 siempre es primitiva ya que cada vez que aumentamos el orden n, las divisiones del giro se hacen mas pequeñas y al tener raices equiespaciadas, los espacios entre raices se harán mas pequeños al aumentar el orden de n. Y al ser w_1 la primer raíz de un orden en particular, esta nunca existirá en algún otro orden inferior.
c) w_k es primitiva $\Leftrightarrow m.c.d(k; n) = 1$ ya que si no se cumple esto significa que la raíz existe en un orden inferior.

Por ejemplo: En el orden 6 las raices primitivas son w_1 y w_5, en cambio w_4 ya es raiz en un orden anterior. Mas concretamente es w_2 del orden 3.

Si este tema no se entiende bien recordar que n es el orden de las raices y nos dice cuantas raices hay en total en ese orden (contando w_0) y k es la numeración de cada raíz en particular dentro de un orden n. Además recordar que todas las raices tienen el mismo modulo, por ende lo unico que las diferencia es el giro, esto hace que una raiz pueda tener como argumento un multiplo de otra y por esto repetirse en ordenes inferiores.

Logaritmo natural.

Diremos que un numero complejo $u = x + yi$ es logaritmo natural de z si:

$$z = e^u$$

Deducción de la formula de calculo de $\ln(z)$:

$$\begin{align} z &= e^u \tag{29}\\ \rho e^{i\varphi} &= e^{x+iy} \tag{30}\\ \rho e^{i\varphi} &= e^x \cdot e^{iy} \tag{31}\\ \rho = e^x \quad &\wedge \quad y = \varphi + 2k\pi \tag{32}\\ u_k &= ln(\rho) + i(\varphi + 2k\pi) \tag{33}\end{align}$$

Cuando $k = 0$ y $\varphi \in [0; 2\pi)$ se define el valor principal de $\ln(z)$: $V.P(\ln z) = \ln(\rho) + i\varphi$

Importante notar que el logaritmo toma un numero en forma polar $[\rho; \varphi]$ y lo devuelve en forma binomica. Además el logaritmo tiene infinitas soluciones, y como la parte real de las mismas no depende de k entonces todas se encuentran en la misma recta vertical $x = \ln \rho$. Para realizar calculos y cuando el logaritmo se encuentre afectado por otras operaciones se tomará el valor principal como el unico valor.

Potencia compleja de un complejo.

Sea $z = z_1^{z_2}$:

$$\begin{align} \ln(z) &= \ln(z_1^{z_2}) \tag{34}\\ \ln(z) &= z_2 \cdot \ln(z_1) \tag{35}\\ z &= e^{z_2 \cdot \ln(z_1)} \tag{36}\\ & \tag{37}\end{align}$$

Aplicación de complejos: vibraciones armonicas simples

Los numeros complejos resultan muy útiles para la representación matematica de fenómenos periódicos. Los fenómenos periódicos mas sencillos presentes en la naturaleza, se expresan matematicamente mediante funciones senoidales.

$$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

O bien, con su respectivo desplazamiento:

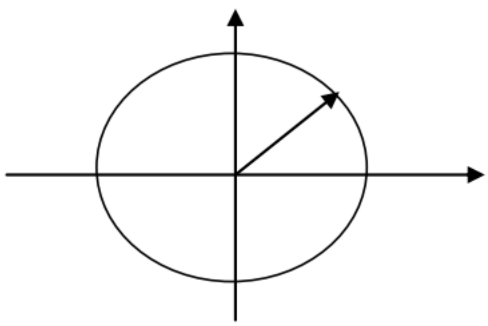
$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Donde:
t: Variable tiempo en segundos.
A: Amplitud de onda o valor de pico.
ω: Pulsación o frecuencia angular.
f: Frecuencia de vibración.
T: Período.
φ: Ángulo de fase inicial.
Además:
$f = \frac{1}{T}$

$\omega = 2\pi f$

Veremos como usar vectores complejos giratorios para representar estas funciones por mas que sean de variable real.

Ya sabemos que $z = re^{i\varphi}$ es la representación exponencial de un numero complejo de módulo r y argumento φ. Si ahora consideramos $\varphi = \omega t$ obtenemos la expresión $z = re^{i\omega t}$, un numero complejo que va variando su argumento (ángulo) dependiendo del tiempo. Esta es la expresión matematica de un vector giratorio de longitud constante r, que gira con una velocidad angular constante ω alrededor del origen.



La componente real de z es la proyección del vector sobre el eje real, es decir: $r\cos(\omega t)$. Y la componente imaginaria de z es su proyección sobre el eje imaginario: $r\sin(\omega t)$, esto se deduce facilmente recordando que $\omega t = \varphi$ y recordando la forma trigonometrica de un complejo propuesta mas arriba. En ambos casos, la proyeccion de un vector giratorio sobre un eje fijo es una magnitud que varia sinusoidalmente.

El fenómeno expresado por la función senoidal se denomina Vibración armonica simple.

Fasores

Sea $A(t) = A_m \cos(\omega t + \varphi)$. Se puede interpretar como: $A(t) = Re[A_m \cos(\omega t + \varphi) + iA_m \sin(\omega t + \varphi)]$.
Se puede deducir:

$$A(t) = Re[A_m e^{i(\omega t + \varphi)}]$$

Donde:

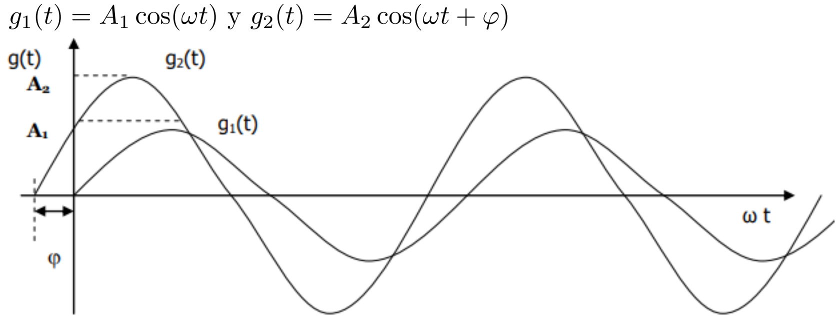
$$A_m e^{i(\omega t+\varphi)} = A_m e^{i\varphi} e^{i\omega t}$$

A $A_m e^{i\varphi}$ se le llama el Fasor asociado a $A(t)$ y es la expresión de un numero complejo. Como $A(t)$ es una línea giratoria en el plano complejo, en un instante dado ($t = 0$) está representada por el fasor. Es decir, una cantidad fasorial es una instánea de la exponencial compleja tomada para $t = 0$.

Siempre que haya que trabajar con funciones sinusoidales será, en general, mas sencillo trabajar con sus respectivos asores.

Superposición de ondas de la misma frecuencia.

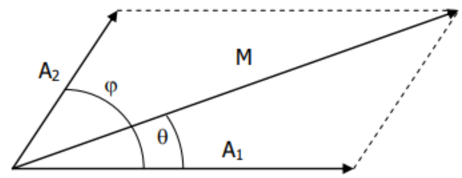
Sean $g_1(t) = A_1 \cos(\omega t)$ y $g_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$



Queremos obtener $g_1(t) + g_2(t)$ como una unica función sinusoidal. Para esto usaremos fasores.

$$A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{i(\omega t+\varphi)} = (A_1 + A_2 e^{i\varphi}) e^{i\omega t}$$

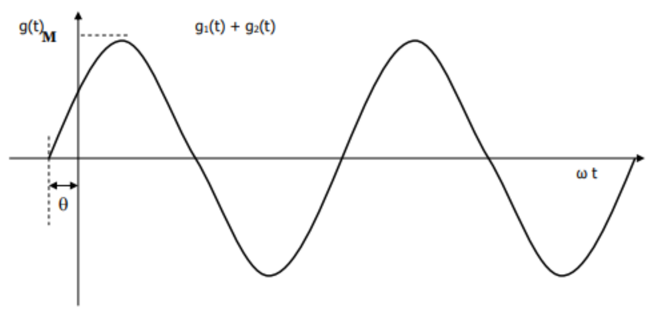
Que se puede escribir $(A_1 + A_2 e^{i\varphi}) = Me^{i\theta}$.



El diagrama vectorial se suele trazar para un instante determinado, pero como la diferencia de fase es constante y la frecuencia angular es igual, el paralelogramo gira como una figura rígida con una velocidad angular ω.

Entonces:

$$g_1(t) + g_2(t) = Re[e^{i\theta} e^{i\omega t}] \Rightarrow g_1(t) + g_2(t) = M\cos(\omega t + \theta)$$



Veremos un ejemplo para que se entienda mejor:

Dados: $V_1(t) = 10\cos(3t - \frac{\pi}{3})$ y $V_2(t) = 5\cos(3t + 5\frac{\pi}{12})$.
Hallar: $V_1(t) + V_2(t)$ utilizando fasores.

Buscamos los fasores:

$$V_1 = 10e^{-i\frac{\pi}{3}} \tag{38}$$
$$V_2 = 5e^{i5\frac{\pi}{12}} \tag{39}$$

Los pasamos a forma binomica para sumarlos.

$$V_1 = 5 - i8.66 \tag{40}$$
$$V_2 = 1.29 + i4.83 \tag{41}$$

Ahora los sumamos:

$$V_1 + V_2 = 6.29 - i3.83$$

Lo pasamos a forma exponencial:

$$V_1 + V_2 = 7.36e^{-i0.55}$$

Finalmente lo multiplicamos por $e^{i\omega t}$ que en este caso $\omega = 3$:

$$7.36e^{i(3t-0.55)}$$

Y por ultimo tomamos la parte real:

$$V_1(t) + V_2(t) = 7.36\cos(3t - 0.55)$$