Limites

Limites de campos escalares

Sea $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $\bar{x}_0$ un punto de acumulación de D_f

Diremos que el número $l \in \mathbb{R}$ es el limite de f cuando $\bar{x}$ tiende a $\bar{x}_0$

Propiedades

Sean $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\bar{x}_0$ pto de acumulación de D_f y D_g

Y $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l_1$, $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} g(\bar{x}) = l_2$

1. $$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} [f(\bar{x}) + g(\bar{x})] = l_1 + l_2$$

2. $$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} kf(\bar{x}) = k \cdot l_1$$

3. $$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} [f(\bar{x}) \cdot g(\bar{x})] = l_1 \cdot l_2$$

4. $$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} [\frac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})}] = \frac{l_1}{l_2}$$

1 y 2 también aplican para campos vectoriales.

Funciones acotadas e infinitesimos

Si $f(x, y) = h(x, y)g(x, y)$ y h es una función acotada en un $E^*(x_0, y_0)$ y g es un infinitésimo en (x_0, y_0) entonces:

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(x, y) = \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} h(x, y)g(x, y) = 0$$

Funciones acotadas

$f_1(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$

$f_2(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$f_3(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$f_4(x, y) = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$f_5(x, y) = \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Limite importante

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\sin[f(x, y)]}{f(x, y)} = 1$$

Limites sucesivos o reiterados

$$l_{12} = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y) = 0$$

$$l_{21} = \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y) = 0$$

Si $\exists l, \exists l_{12}, \exists l_{21}$ entonces $l = l_{12} = l_{21}$

Nos interesa el corolario: Si $l_{12} \neq l_{21} \Rightarrow \nexists l$

Propiedad

Si $f(x, y) \to l_1$ cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ por una curva c_1 y $f(x, y) \to l_2$ cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ por una curva c_2 siendo

$$l_1 \neq l_2 \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$$

También podemos aproximarnos por una familia de rectas. Se los llama limites radiales $y - y_0 = m(x - x_0)$ y si el resultado del limite depende de m entonces no existe el limite doble.

Continuidad de una función en un punto

Sea $f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\bar{x}_0$ pto de acumulación del dominio D_f

f es continua en $\bar{x}_0 \Leftrightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$

f es continua en un conjunto si es continua en cada punto del conjunto.

$f : D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g : D_g \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos campos escalares continuos en $\bar{x}_0$ entonces:

1. $f + g$ es continua en $\bar{x}_0$
2. $f \cdot g$ es continua en $\bar{x}_0$
3. $\frac{f}{g}$ es continua $g(\bar{x}_0) \neq 0$

Las funciones polinomicas son continuas, con dominios adecuados la composición de funciones continuas es continua.

Clasifciacion de discontinuidades

Si existe el limite pero no es igual a la imagen entonces la discontinuidad es **evitable**

Si no existe el limite entonces la discontinuidad es **esencial**