Integrales de Linea

Curva suave

La imagen de una función vectorial $\bar{\sigma} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua, donde I es un conjunto conexo es una curva.

$$Im(\bar{\sigma}) = C$$

Si $\bar{\sigma} \ \in \ C^1 \ \ \text{y} \ \ \bar{\sigma}\,'(t) \ \neq \ \bar{0} \qquad \forall t \ \in \ I$

Entonces C es una curva suave y $\bar{\sigma}(t)$ una parametrización

$\bar{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$
$Im(\bar{\sigma}) = C$
$t_0 \in (a, b)$
$\bar{\sigma}\,'(t_0) \neq \bar{0}$
$\bar{x} = \bar{\sigma}\,(t_0) + \lambda \cdot \bar{\sigma}\,'(t_0) \ \ \lambda \in \mathbb{R} \qquad \text{Recta tangente}$

Longitud del arco de una curva

$$L(c) = \int_a^b \|\bar{\sigma}\,'(t)\| \, dt$$

Ej:

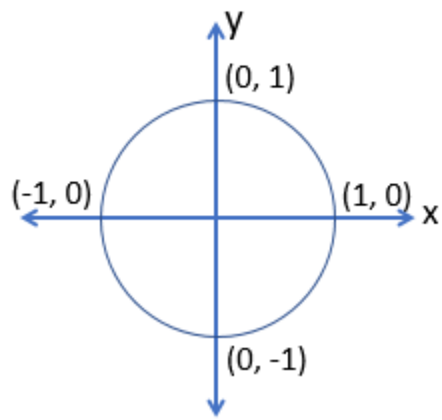
Para la parametrización de la siguiente curva

$$\bar{\sigma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \ \ / \ \ \bar{\sigma}\,(t) = (\cos t \, , \, \sin t \,)$$

se cumple:

$$\begin{cases} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$x^2 + y^2 = 1$ Es la circunferencia unitaria



$\bar{\sigma}\,'(t) = (-\sin(t)\,,\ \cos(t)\,)$
$\|\bar{\sigma}\,'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$

$\|\bar{\sigma}\,'(t)\|$ es constante $\forall t \in [0, 2\pi]$

$$L(c) = \int_0^{2\pi} 1dt = t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

Integral de linea de campo escalar

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar continuo en D y C una curva suave tal que $Im(\bar{\sigma}) = C$

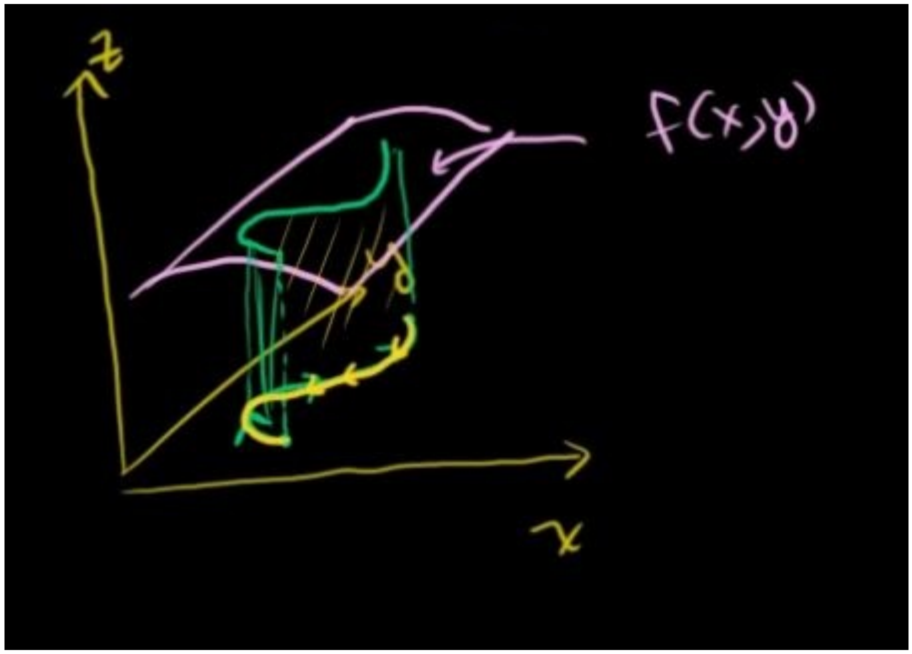
$\bar{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \bar{\sigma}\text{ continua}, \quad \bar{\sigma} \in C^1, \quad \bar{\sigma}\,'(t) \neq \bar{0}$

La integral del campo escalar f a lo largo de $\bar{\sigma}$ se define:

$$\int_C f ds = \int_a^b f\,[\bar{\sigma}\,(t)] \cdot ||\bar{\sigma}\,'(t)||dt$$

No importa el sentido de la parametrización.

Si el campo escalar f va de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ entonces la integral de linea puede interpretarse como el area debajo de una superficie de ecuación $f(x, y) = z$ a lo largo de un camino $\bar{\sigma}$



Ej:

Calcular $\int_C f ds, \quad f(x, y) = xy$

$\bar{\sigma} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2 \ / \ \bar{\sigma}(t) = (2\cos t, 2\sin t)$

Hallamos la derivada de la parametrización de la curva:

$\bar{\sigma}'(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \ , \ ||\bar{\sigma}'(t)|| = 2 \qquad \forall t \in [0, \pi]$

Reemplazando en la definición queda:

$f[\bar{\sigma}(t)] = 4\cos t \sin t \ , \ ||\bar{\sigma}'(t)||dt = 2dt$

$$\int_C f ds = \int_0^\pi 4\cos t \sin t \cdot 2dt = 8\int_0^\pi \cos t \sin t \ dt = 8\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^\pi = 0$$

Integral de linea de campo vectorial

Sea $\bar{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo sobre la trayectoria $\bar{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$

Si $\bar{\sigma} \in C^1$ entonces la integral de linea del campo vectorial $\bar{F}$ a lo largo de la curva $C = Im(\bar{\sigma})$ se define :

$$\int_C \bar{F} \cdot \bar{ds} = \int_a^b \bar{F}\left[\bar{\sigma}\left(t\right)\right] \cdot ||\bar{\sigma}'(t)||dt$$

A la integral de linea de un campo vectorial se la suele llama *circulación*, algunos solo llaman circulación si C es cerrada $\oint_C \bar{F} \cdot \bar{ds}$

Propiedades

1. Linealidad

$$\int_c \left(a\bar{F} + b\bar{G}\right) \cdot \bar{ds} = a\int_c \bar{F} \cdot \bar{ds} + b\int_c \bar{G} \cdot \bar{ds}$$

2. Propiedad aditiva respecto del camino de integración

$C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$

$$\int_C \bar{F} \cdot \bar{ds} = \int_{C_1} \bar{F} \cdot \bar{ds} + \int_{C_2} \bar{F} \cdot \bar{ds} + \cdots + \int_{C_n} \bar{F} \cdot \bar{ds}$$

3. Importa el sentido de la parametrización

Si $\bar{\sigma}_1$ y $\bar{\sigma}_2$ son dos parametrizaciones distintas de la misma curva orientadas en sentidos opuestos entonces:

$$\int_{\bar{\sigma}_1} \bar{F} \cdot \bar{ds} = -\int_{\bar{\sigma}_2} \bar{F} \cdot \bar{ds}$$

Campos de gradientes

Sea $\bar{F} : H \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Se dice que $\bar{F}$ es un campo de gradientes en H si existe un campo escalar $\phi : H \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \phi \in Dif(H)$ tal que:

$$\bar{F} = \bigtriangledown\phi$$

Ej:

El campo $\bar{F}(x, y) = (2x, 3y^2)$ s un campo de gradientes en $\mathbb{R}^2$ En efecto si $\phi(x, y) = x^2 + y^3$ tenemos:

$$\bigtriangledown\phi(x, y) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = (2x, 3y^2) = \bar{F}(x, y)$$

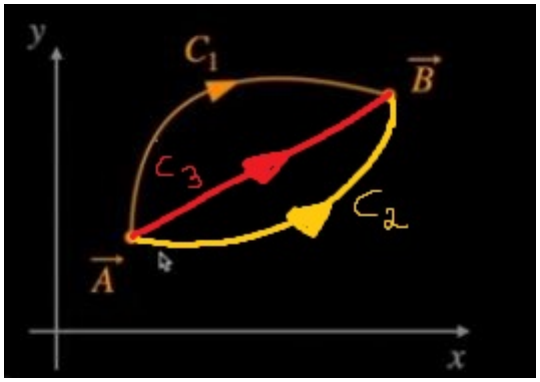
Tambien decimos que ϕ es función potencial del campo $\bar{F}$

Propiedad

Independencia del camino en integral de linea.

La circulación de $\bar{F}$ desde $\bar{A}$ hasta $\bar{B}$ a lo largo de cualquier curva suave a trozos $C \subset H$ no depende de la curva que se utilice y además:

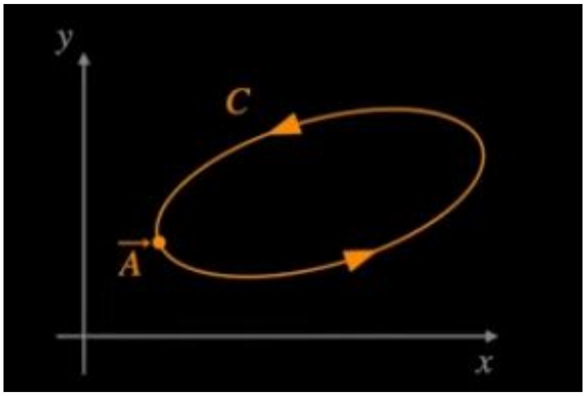
$$\int_C \bar{F} \cdot \bar{ds} = \phi(\bar{B}) - \phi(\bar{A})$$



Consecuencia directa del teorema:

La integral a lo largo de todo camino cerrado es 0

$$\oint_C \bar{F} \cdot \bar{ds} = \phi(\bar{A}) - \phi(\bar{A}) = 0$$



Además si $\phi(\bar{A}) = \phi(\bar{B})$ entonces

$$\int_C \bar{F} \cdot \bar{ds} = \phi(\bar{B}) - \phi(\bar{A}) = 0$$

Condición [necesaria] para que un campo sea de gradientes

Como $\bar{F} \in C^1(H)$ entonces $\bigtriangledown\phi \in C^1(H)$ y entonces $\phi \in C^2(H)$

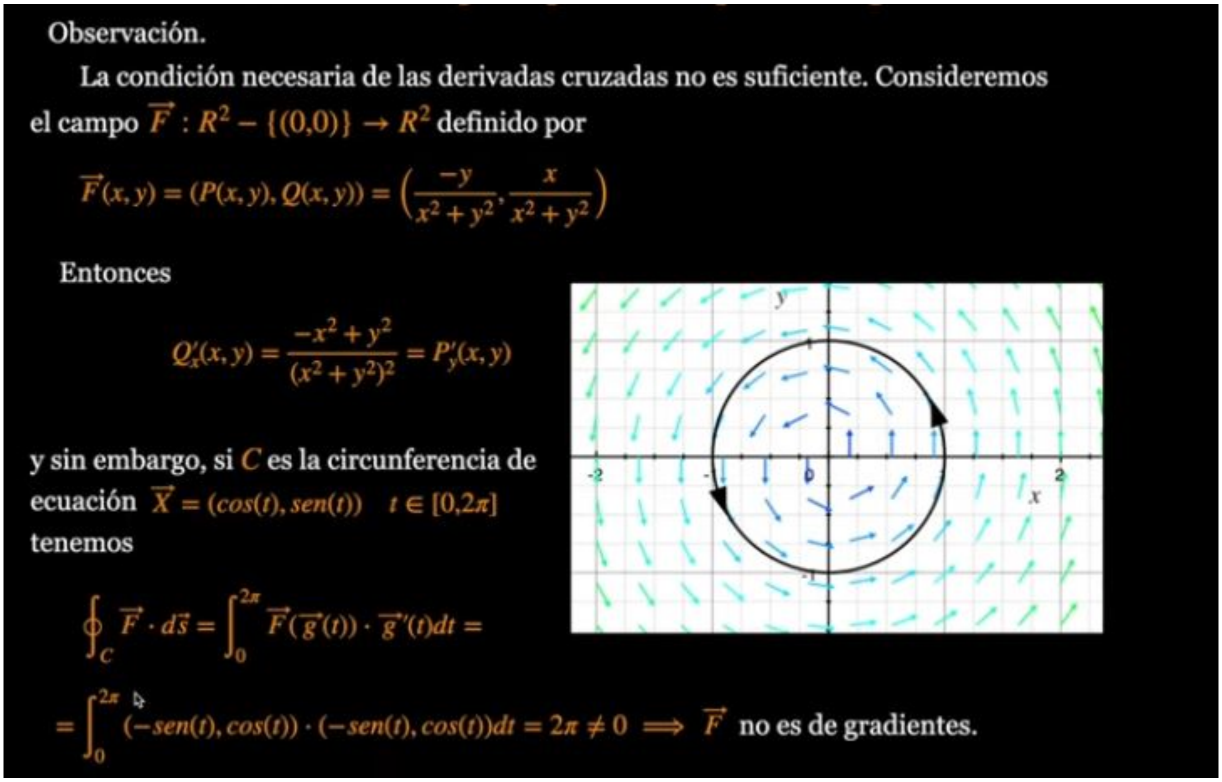
La matriz jacobiana de $\bar{F}$ es simetrica.

$$D\bar{F} = \begin{pmatrix} \phi''_{xx} & \phi''_{xy} \\ \phi''_{yx} & \phi''_{yy} \end{pmatrix}$$

Si F es campo de gradientes entonces su matriz jacobiana es simetrica.

En particular nos interesa el teorema reciproco. Es decir si la matriz NO es simetrica entonces $\bar{F}$ no puede ser campo de gradientes.

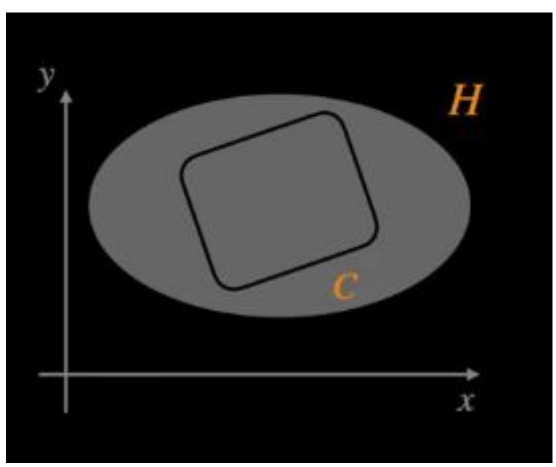
Ej : $(P(x,y), Q(x,y)) = (\phi'_x, \phi'_y)$



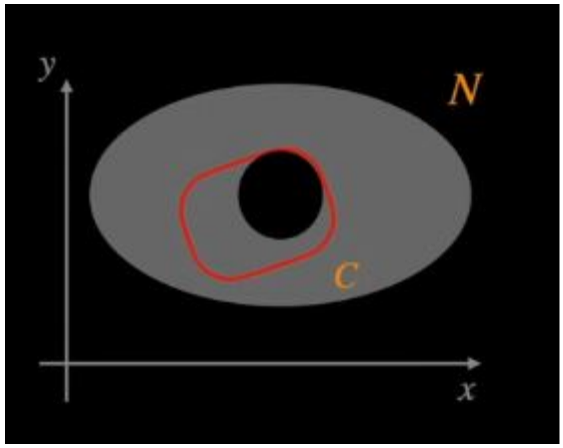
Conjunto simplemente conexo

Un conjunto conexo $H \subset \mathbb{R}^n$ se dice simplemente conexo cuando toda curva cerrada contenida en H puede por deformación continua reducirse a un punto manteniéndose en el conjunto.

En $\mathbb{R}^2$ la idea se puede reemplazar por si el conjunto H tiene "agujeros" o no. Si los tiene entonces no es simplemente conexo.



H es simplemente conexo.



N no es simplemente conexo.

En $\mathbb{R}^3$ estos "agujeros" deben ser interpretados como rectas infinitas, ya que si fuesen solo un segmento la curva *cerrada* podría colapsar a punto "esquivando" el segmento no incluido en el conjunto H

Con el concepto de conjunto simplemente conexo podemos definir una condición suficiente para que un campo sea de gradientes.

Condición [suficiente] para que un campo sea de gradientes

Sea $\bar{F} : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con matriz jacobiana $D\bar{F}$ continua y **simetrica** en el conjunto H abierto y **simplemente conexo**. Entonces existe $\phi : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\bigtriangledown\phi = \bar{F}$

Construcción de la función potencial

Sea $\bar{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \;\; / \;\; \bar{F}(x, y) = (x + y^2, 2xy)$

Sabemos que $\bar{F} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ por sus componentes ser suma y producto de funciones $C^1(\mathbb{R}^2)$

Calculamos su matriz jacobiana para ver si es simetrica y saber si admite función potencial.

$$D\bar{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Como es simetrica y continua en $\mathbb{R}^2$ entonces admite función potencial por ser $\mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y **simplemente conexo**

$$\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \;\; / \;\; \bigtriangledown \phi(x, y) = \bar{F}(x, y)$$

Como $\bar{F}$ es el gradiente de ϕ entonces sus componentes son las derivadas parciales de ϕ

$$\begin{cases} \phi'_x(x, y) = x + y^2 \quad (1) \\ \phi'_y(x, y) = 2xy \quad (2) \end{cases}$$

Integramos (1) respecto de x :

$$\phi(x, y) = \frac{x^2}{2} + y^2 x + \alpha(y) \quad (3)$$

Derivamos (3) respecto de y e igualamos a (2) para hallar $\alpha(y)$

$$2xy + \alpha'(y) = 2xy$$

$$\alpha'(y) = 0 \Rightarrow \alpha(y) = c$$

Luego reemplazando $\alpha(y)$ en nuestra ecuación de ϕ nos queda una familia de funciones potenciales:

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ \phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 x + c$$

$$\nabla\phi(x, y) = (x + y^2, 2xy)$$