Teoremas

Divergencia y rotacional de un campo vectorial

Sea un campo vectorial $\bar{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ / \ \bar{f}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ con $\bar{f} \in C^1(D)$

Se define la divergencia del campo $\bar{f}$ como:

$$div \bar{f} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Es un campo escalar.

Si recordamos el operador nabla $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$

$$div \bar{f} = \nabla \cdot \bar{f}$$

Si $\bar{f}$ representa un campo de velocidades de un fluido entonces si $div \bar{f} > 0$ el gas se está expandiendo. Si $div \bar{f} < 0$ el gas se esta comprimiendo. Y si $div \bar{f} = 0$ el campo vectorial se llama solenoidal.

El rotor o rotacional del campo vectorial $\bar{f}$ se define:

$$rot \bar{f} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

Si introducimos el operador nabla $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$

$$rot \bar{f} = \nabla \times \bar{f}$$

Si $rot \bar{f} = \bar{0}$ el campo se llama irrotacional. Si $\bar{f}$ representa un campo de velocidades de un fluido entonces $rot \bar{f} = \bar{0}$ en un punto P significa fisicamente que el fluido no tiene rotaciones en dicho punto P.

Propiedades

Si $\bar{f} \in C^2$ entonces:

$$div(rot\bar{f}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{f}) = 0$$

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Si $f \in C^2(D)$ entonces el rotor de un gradiente es el vector nulo:

$$\nabla \times (\nabla f) = \bar{0}$$

Por ultimo el laplaciano de f se define:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f$$

Si $\nabla^2 f = 0$ el campo escalar es armónico.

Teorema de la divergencia

Sea $H \subset \mathbb{R}^3$ un macizo con superficie frontera S, orientada con el campo de normales hacia el exterior. Si $\bar{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es de clase $C^1(D)$ tal que $D \subset H \cup S$ entonces :

$$\iint_S \bar{f} \cdot \bar{n} \cdot \bar{d}r = \iiint_H div\bar{f}\,dv$$

Ej:

Sea $\bar{f}(x, y, z) = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy))$ y
$H = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2, 0 \leq y \leq 2 - z \right\}$ calcular:

$$\iint_S \bar{f} \cdot \bar{n} \cdot \bar{d}r$$

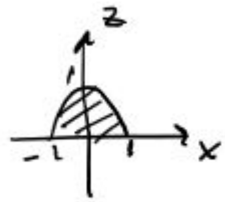
Notemos que $\bar{f} \in C^2$

Empezamos calculando la divergencia de $\bar{f}$:

$div\bar{f} = y + 2y = 3y$

Hallamos el limite de x:

Graficamos $z \leq 1 - x^2$



La integral queda:

$$\iint_S \bar{f} \cdot \bar{n} \cdot \bar{dr} = \iiint_H 3y dv$$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1-x^2} dz \int_{0}^{2-z} 3y dy = \frac{184}{35}$$

Dejamos la resolución de la integral a cargo del lector.

Teorema de Green

Sea un campo vectorial $\bar{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ con $\bar{f} : D_{\bar{f}} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad , \quad \bar{f} \in C^1 \quad , \quad D_{\bar{f}} \subset R \cup C$ siendo C la curva cerrada, simple y suave frontera de R. Entonces:

$$\oint_C \bar{f} \cdot \bar{ds} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

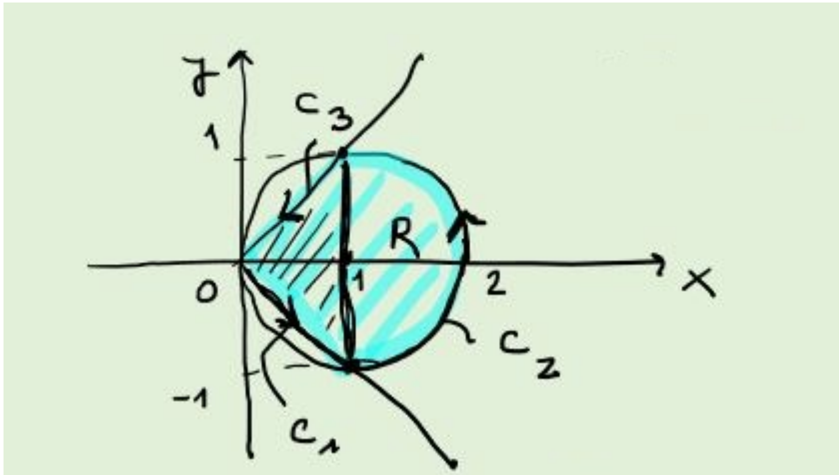
Ej:

Sea $R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x \quad , \quad x^2 + y^2 \leq 2x \right\}$ y $\bar{f}(x, y) = \left(xe^{\sin x} - y, x + y \ln^4[y^2 + 1] \right)$

Calcular la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de C donde C es la curva frontera de R

Operamos la segunda ecuación de R y graficamos:

$$x^2 + y^2 \leq 2x$$
$$x^2 - 2x + y^2 \leq 0$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1$$
$$(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$$



Sabemos que $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

Sin aplicar el teorema de Green la integral queda así:

$$\oint_C \bar{f} \cdot \bar{ds} = \int_{C_1} \bar{f} \cdot \bar{ds} + \int_{C_2} \bar{f} \cdot \bar{ds} + \int_{C_3} \bar{f} \cdot \bar{ds}$$

Y deberíamos parametrizar cada una de las curvas, pero si aplicamos el teorema de Green podemos simplificar el ejercicio:

Sabemos que $\bar{f} \in C^1$ por ser suma, producto y composición de funciones C^1 entonces podemos reescribir la integral:

$$\oint_C \bar{f} \cdot \bar{ds} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_R 2 \cdot dxdy$$

Luego:

$$2 \iint_R dxdy = 2 \left[\frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{\pi}{2} \right] = 2 + \pi$$

Sabemos que $\iint_R dxdy$ representa el area de la región R y esta está compuesta por un triangulo y medio circulo. $a(t) = \frac{b \cdot h}{2}$ y $a(c) = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$ mirando el grafico podemos identificar facilmente todos los parametros necesarios para calcular las areas.

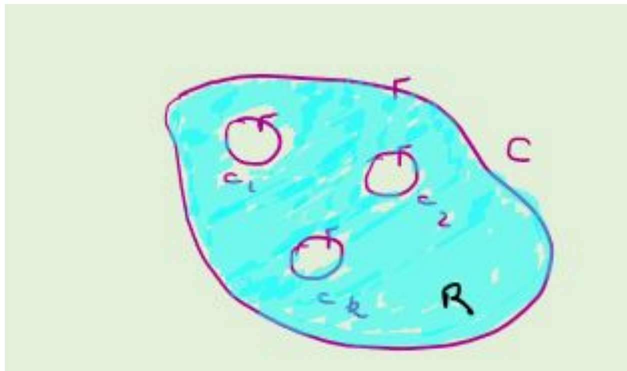
Generalización del teorema de Green

Si $Q_x - P_y = k$ entonces:

$$\oint_C \bar{f} \cdot \bar{ds} = k \iint_R dxdy$$

donde la segundra integral representa el area de R

Dada una curva C cerrada simple en $\mathbb{R}^2$ y además un conjunto de curvas c_i donde $c_i \cap c_j = \varnothing$ con $i \neq j$



Entonces:

$$\oint_C \bar{f} \cdot \bar{ds} - \sum_{i=1}^{k} \oint_{C_i} \bar{f} \cdot \bar{ds} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

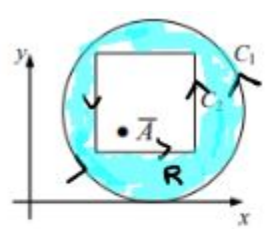
Es decir, el area encerrada por la curva C menos la sumatoria de las areas encerradas por las curvas c_i es igual a la región R.

Ej:

Dado $\bar{f} : \mathbb{R}^2 - \{\bar{A}\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ / $\bar{f} = (P, Q)$ suponga matriz jacobiana continua con $Q'_x - P'_y = 6$

Calcule $\oint_{C_1} \bar{f} \cdot \bar{ds}$ sabiendo que $\oint_{C_2} \bar{f} \cdot \bar{ds} = 12$, C_1 es una circunferencia de radio 8 , C_2 es un cuadrado de lado 5.

Primero graficamos:



La matriz jacobiana continua significa que $\bar{f} \in C^1(\mathbb{R}^2 - \{\bar{A}\})$

Por la generalización del teorema de Green sabemos que:

$$\oint_{C_1} \bar{f} \cdot \bar{ds} - \oint_{C_2} \bar{f} \cdot \bar{ds} = \iint_R (Q_x - P_y) dxdy$$

$$\oint_{C_1} \bar{f} \cdot \bar{ds} - 12 = 6 \iint_R dxdy$$

$$\oint_{C_1} \bar{f} \cdot \bar{ds} = 6a(R) + 12$$

$$a(R) = area(circulo) - area(cuadrado)$$

$$a(r) = 64\pi - 25$$

$$\oint_{C_1} \bar{f} \cdot \bar{ds} = 64\pi - 25 + 12$$

$$\oint_{C_1} \bar{f} \cdot \bar{ds} = 384\pi - 138$$

Teorema del rotor o de stokes

Sea S una superficie abierta, simple y orientada con curva de borde C y suave orientada según S y sea $\bar{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \ \ / \ \ f \in C^1(D) \ , \ \ D \subset S \cup C$ entonces:

$$\oint_C \bar{f} \cdot \bar{ds} = \iint_S rot \bar{f} \cdot \bar{n} \ dr$$