Fisica con integrales

Integrales de linea

Campo escalar

Recordamos la definición:

$$\int_C f ds = \int_a^b f\left[\bar{\sigma}(t)\right] \cdot ||\bar{\sigma}'(t)|| dt$$

Densidad y masa

Conociendo la densidad lineal de un alambre C

$$\delta(x, y) = \frac{dm}{ds}$$

Donde $dm = \text{diferencial de masa}$ y $ds = \text{diferencial de longitud}$ (volumen en una dimensión)

Si: $C = Im(\bar{\sigma}) \ \ , \ \ \bar{\sigma} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

Entonces la masa

$$m(c) = \int_C \delta(x, y) ds$$

Si la curva estuviera en $\mathbb{R}^3$:

$$m(c) = \int_C \delta(x, y, z) ds$$

Es decir, la función de densidad $\delta(x, y)$ está funcionando como nuestro campo escalar y la ecuacion $\bar{\sigma}(t)$ del cable como la curva.

Ejemplo:

Calcular la masa de un alambre cuya forma es de la curva intersección de las superficies $z = 2 - x^2 - 2y^2 \ , \ z = x^2$ entre $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 1)$ en el primer octante si su densidad es $\delta(x, y, z) = kxy \ \ , \ \ k > 0$

La curva está dada como intersección de dos superficies:

$$C \left\{ z = 2 - x^2 - 2y^2 \right.$$

$x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \geq 0$ por estar limitado el ejercicio al primer octante

Reemplazamos $z = 0$ e igualamos las ecuaciones para hayar la proyección de la curva en el plano xy

$x^2 = 2 - x^2 - 2y^2$
$2x^2 + 2y^2 = 2$
$x^2 + y^2 = 1$

Definimos una parametrización de la curva

Para x e y podemos usar $\cos(t)$ y $\sin(t)$ y como tenemos que $z = x^2$ entonces $z = \cos^2(t)$

$$\bar{\sigma}\,(t) = \left(\cos t\ ,\ \sin t\ ,\ \cos^2(t)\,\right)$$

Debemos definir los limites de t , para esto usamos las condiciones iniciales de los puntos donde se debe integrar.

$$\begin{cases} \cos(t_0) = 1 \\ \sin(t_0) = 0 \\ \cos^2(t_0) = 1 \end{cases} \Rightarrow t_0 = 0$$

$$\begin{cases} \cos(t_1) = 0 \\ \sin(t_1) = 1 \\ \cos^2(t_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow t_1 = \tfrac{\pi}{2}$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Entonces una parametrización suave del arco de curva C es:

$$\bar{\sigma}\,:\,\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^3\ \ /\ \ \bar{\sigma}\,(t) = \left(\cos t\ ,\ \sin t\ ,\ \cos^2(t)\,\right)$$

Hallamos la derivada pues nos servirá para calcular la masa.

$\bar{\sigma}\,'(t) = (-\sin(t)\,,\ \cos(t)\,,\ -\sin(2t)\,)$
$\|\bar{\sigma}\,'(t)\| = \sqrt{1 + \sin^2(2t)}$

Ahora calculamos la masa usando la integral de linea:

$$m(c) = \int_C kxy \cdot ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} k \cos t \sin t \cdot \sqrt{1 + \sin^2(2t)}dt$$

Resolviendo la integral llegamos a

$$m(c) = \frac{k^{(\pi+2)}}{8}$$

Coordenadas del centro de masa:

$$x_g = \frac{\int_C x \cdot \delta(x,y,z) \cdot ds}{Masa} = \frac{\int_C x \cdot \delta(x,y,z) \cdot ds}{\int_C \delta(x,y,z) \cdot ds}$$

$$y_g = \frac{\int_C y \cdot \delta(x,y,z) \cdot ds}{Masa} = \frac{\int_C y \cdot \delta(x,y,z) \cdot ds}{\int_C \delta(x,y,z) \cdot ds}$$

$$z_g = \frac{\int_C z \cdot \delta(x,y,z) \cdot ds}{Masa} = \frac{\int_C z \cdot \delta(x,y,z) \cdot ds}{\int_C \delta(x,y,z) \cdot ds}$$

Momentos de inercia con respecto a los planos coordenados:

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2) \cdot \delta(x,y,z) \cdot ds$$

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2) \cdot \delta(x,y,z) \cdot ds$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2) \cdot \delta(x,y,z) \cdot ds$$

Campo vectorial

Se puede calcular el trabajo W de un campo de fuerzas $\bar{F}$ a lo largo de una curva $C = Im(\bar{\sigma})$ con la integral.

Recordamos la definición:

$$W = \int_C \bar{F} \cdot \bar{ds} = \int_a^b \bar{F}\,[\bar{\sigma}\,(t)] \cdot ||\bar{\sigma}\,'(t)||dt$$

Campo conservativos

Un campo $\bar{F}$ es conservativo cuando es un campo de gradientes.

Se dice que $\bar{F}$ es un campo de gradientes en H si existe un campo escalar $\phi : H \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \;\; \phi \in Dif(H)$ tal que: $\bar{F} = \bigtriangledown \phi$

Se cumplen las siguientes dos condiciones:

$$\oint_C \bar{F} \cdot \bar{ds} = 0 \qquad \forall\, C \;\; \text{cerrada}$$

$$\int_{C_1} \bar{F} \cdot \bar{ds} = \int_{C_2} \bar{F} \cdot \bar{ds} \qquad \forall\, C_1, C_2 \;\; \text{con extremos inicial y final iguales}$$

Integrales dobles

Dado un campo escalar $f(x, y) \geq 0 \qquad \forall (x, y) \in R$

Ya no tenemos un alambre C sino una región R

Entonces:

$$Vol(M) = \iint_R f(x, y)dxdy$$

Con M el macizo tal que:

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in R \;\;\; \wedge \;\;\; 0 \leq z \leq f(x, y) \right\}$$

Además si tenemos una función de densidad $\delta(x, y) = f(x, y)$

Entonces:

$$Masa(R) = \iint_R \delta(x, y)dxdy$$

Coordenadas del centro de masa:

$$x_g = \frac{\iint_R x \cdot \delta(x,y)dxdy}{Masa} = \frac{\iint_R x \cdot \delta(x,y)dxdy}{\iint_R \delta(x,y)dxdy}$$

$$y_g = \frac{\iint_R y \cdot \delta(x,y)dxdy}{Masa} = \frac{\iint_R y \cdot \delta(x,y)dxdy}{\iint_R \delta(x,y)dxdy}$$

Momentos de inercia:

$$I_x = \iint_R y^2 \cdot \delta(x,y)dxdy$$

$$I_y = \iint_R x^2 \cdot \delta(x,y)dxdy$$

Integrales Triples

Dado un macizo H

$$Vol(H) = \iiint_H dx\,dy\,dz$$

Dada una función de densidad $f(x,y,z) = \delta(x,y,z)$ la masa del macizo H se calcula:

$$Masa(H) = \iiint_H \delta(x,y,z)dx\,dy\,dz$$

Coordenadas del centro de masa:

$$x_g = \frac{\iiint_H x \cdot \delta(x,y,z) \cdot dxdydz}{Masa} = \frac{\iiint_H x \cdot \delta(x,y,z) \cdot dxdydz}{\iiint_H \delta(x,y,z) \cdot dxdydz}$$

$$y_g = \frac{\iiint_H y \cdot \delta(x,y,z) \cdot dxdydz}{Masa} = \frac{\iiint_H x \cdot \delta(x,y,z) \cdot dxdydz}{\iiint_H \delta(x,y,z) \cdot dxdydz}$$

$$z_g = \frac{\iiint_H z \cdot \delta(x,y,z) \cdot dxdydz}{Masa} = \frac{\iiint_H x \cdot \delta(x,y,z) \cdot dxdydz}{\iiint_H \delta(x,y,z) \cdot dxdydz}$$

Momentos de inercia:

$$I_x = \iiint_H (y^2 + z^2) \cdot \delta(x, y, z) dxdydz$$

$$I_y = \iiint_H (x^2 + z^2) \cdot \delta(x, y, z) dxdydz$$

$$I_z = \iiint_H (x^2 + y^2) \cdot \delta(x, y, z) dxdydz$$