Integrales Triples

Sea un campo escalar $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y acotado en $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$

La integral triple se define:

$$\iiint_R f(x, y, z) dxdydz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z) dz$$

Como en integrales dobles, no importa el orden de integración siempre y cuando se respeten los limites con sus variables correspondientes. Si f es continua las 6 integrales iteradas son iguales.

El concepto de integrar con respecto a una variable manteniendo el resto fija se sigue manteniendo y es la manera adecuada para resolver este tipo de integrales.

Relación con integrales dobles

Si en el dominio de integración una variable depende de las otras dos la integral triple puede escribirse como una integral doble de otra intregal asi:

Sea $H = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D \quad \wedge \quad \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y) \right\}$

Entonces H es un macizo proyectable en el plano xy y su proyección es D.

La integral queda de la siguiente forma:

$$\iiint_R f(x, y, z) dxdydz = \iint_D dxdy \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right]$$

Ej:

Sea $H = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 \ , \ 0 \leq y \leq 1 \ , \ 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \right\}$ Calcular $\iiint_H f(x, y, z) dV$, siendo $f(x, y, z) = x$ y el volumen del solido H

Tenemos el campo escalar $f : D \subset \mathbb{R}^3 \ / \ f(x, y, z) = x$

Y las funciones de z son:

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y) = 0 \\ \varphi_2(x, y) = x^2 + y^2 \end{cases}$$

La integral queda:

$$\iiint_H x \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} xdz$$

Integramos una vez con respecto a z y aplicamos Barrow:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2)xdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^3 + y^2x)dy$$

Integramos con respecto a y y aplicamos Barrow:

$$\int_0^1 dx \left[x^3y + x\frac{y^3}{3}\Big|_0^1 \right] = \int_0^1 (x^3 + \frac{x}{3})dx$$

Por ultimo, integramos con respecto a x:

$$\frac{x^4}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

Ahora para calcular el volumen del macizo H debemos tomar como campo escalar $f(x, y, z) = 1$

$$Vol(H) = \iiint_H dx\, dy\, dz$$

Definimos la integral e integramos con respecto a z :

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^2 + y^2)dy$$

Integramos con respecto a y y luego con respecto a x :

$$\int_0^1 x^2y + \frac{y^3}{3}\Big|_0^1 dx = \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{3})dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x\Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

Cambio de variable

Coordenadas cilindricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\bar{T} : H^* \subset \mathbb{R}^3 \to H \subset \mathbb{R}^3 \;\; / \;\; \bar{T}(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

Para este cambio de variable $J_{\bar{T}} = r$

$$\iiint_H f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iiint_{H^*} r \cdot f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)dr\,d\theta\,dz$$

Coordenadas esfericas

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$\bar{T} : H^* \subset \mathbb{R}^3 \to H \subset \mathbb{R}^3 \;\; / \;\; \bar{T}(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)$$

Para este cambio de variable $J_{\bar{T}} = \rho^2\sin\varphi$

$$\iiint_H f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{H^*} \rho^2\sin\varphi f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)d\rho\,d\theta\,d\varphi$$