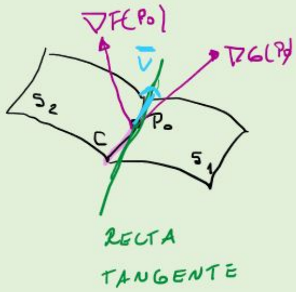
Taylor y extremos

Cauchy-Dini

3ª VERSIÓN CURVA EN $\mathbb{R}^3$ DEFINIDA IMPLÍCITAMENTE



$C = S_1 \cap S_2$, $P_0 \in C$

$F: D_1 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F \in C^1(D_1)$ $\quad P_0 \in D_1$

$C_0(F) = \{\bar{x} \in D_1 : F(\bar{x}) = 0\}$ $\quad S_1 \subset C_0(F)$

$G: D_2 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $G \in C^1(D_2)$ $\quad P_0 \in D_2$

$C_0(G) = \{\bar{x} \in D_2 : G(\bar{x}) = 0\}$ $\quad S_2 \subset C_0(G)$

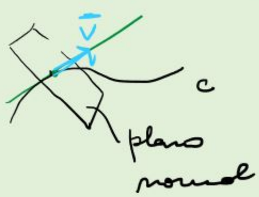
Como el gradiente en el pto P_0 es ortogonal en P_0 al conj de nivel que pasa por P_0 $\quad \nabla F(P_0) \perp S_1$

$\nabla G(P_0) \perp S_2$

Si $\bar{\nabla} F(P_0) \times \bar{\nabla} G(P_0) \neq \bar{0}$ diremos que $C \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$

está definida por la intersección de las dos superficies

$\bar{v} = \bar{\nabla} F(P_0) \times \bar{\nabla} G(P_0)$ es un vector que dirige la recta tangente: $\boxed{\bar{x} = P_0 + \lambda \bar{v},\ \lambda \in \mathbb{R}}$ ecuación recta tangente



$\boxed{\bar{v} \cdot (\bar{x} - P_0) = 0}$ ecuación del plano normal

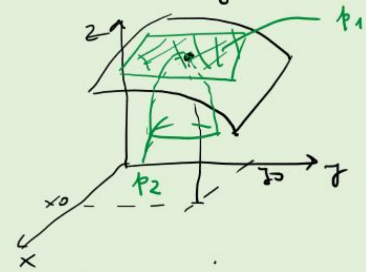
Polinomio de Taylor Orden 1

Luego $\underbrace{p_1(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\text{PLANO TANGENTE}}$

Polinomio de Taylor Orden 2

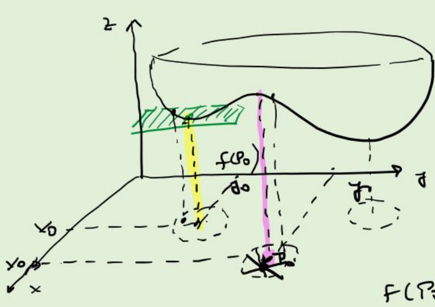
$$p_2(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2 f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \right]$$



Extremos de Campos Escalares

EXTREMOS DE CAMPOS ESCALARES



DEFINICIÓN

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P_0 \in \mathring{D}$

$f(P_0)$ es un máximo local o relativo si $f(\bar{x}) \leq f(P_0)\ \forall \bar{x} \in E(P_0)$

$f(P_0)$ es un mínimo local o relativo si $f(\bar{x}) \geq f(P_0)\ \forall \bar{x} \in E(P_0)$

Si se cumple $\forall \bar{x} \in D$ decimos que f tiene un máximo (mínimo) absoluto

Si f diferenciable tiene un extremo en un pto $P_0 \in D_f \Rightarrow \bar{\nabla} f(P_0) = \bar{0}$

En el caso que $f: D_f \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ significa que hay un

plano tangente horizontal a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

Corolario:

Si f es diferenciable en P_0 y $f(P_0)$ es extremo relativo de f entonces $f'(P_0, \bar{v}) = 0 \quad \forall \bar{v} \in \mathbb{R}$

porque $f'(P_0, \bar{v}) = \bar{\nabla} f(P_0) \cdot \bar{v} = 0$

$$f'(P_0, \bar{v}) = 0 \quad \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^n$$

Definición: Si el campo escalar f es diferenciable en P_0 y $\bar{\nabla} f(P_0) = \bar{0}$ entonces el punto P_0 se llama pto estacionario

Observación: La anulación de las derivadas parciales de primer orden en un pto P_0 no implica necesariamente que f tenga un extremo en P_0