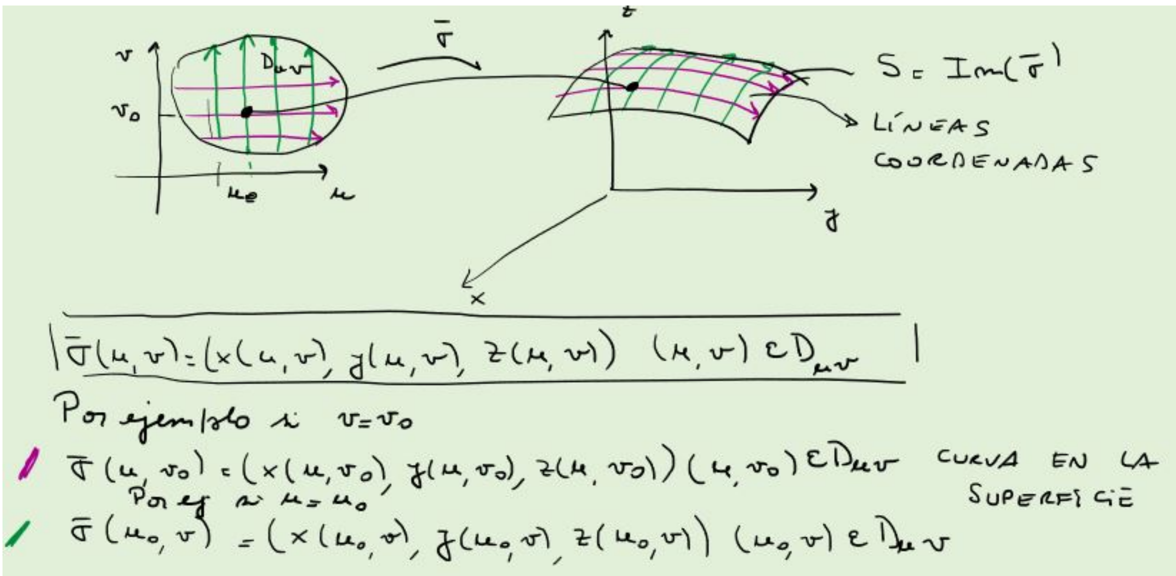
Derivadas

Superficies parametrizadas

Sea $\bar{\sigma} : D_{uv} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \bar{\sigma}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ con D_{uv} conexo y $\bar{\sigma}$ continua entonces:

$$Im(\bar{\sigma}) = S$$



Ej:

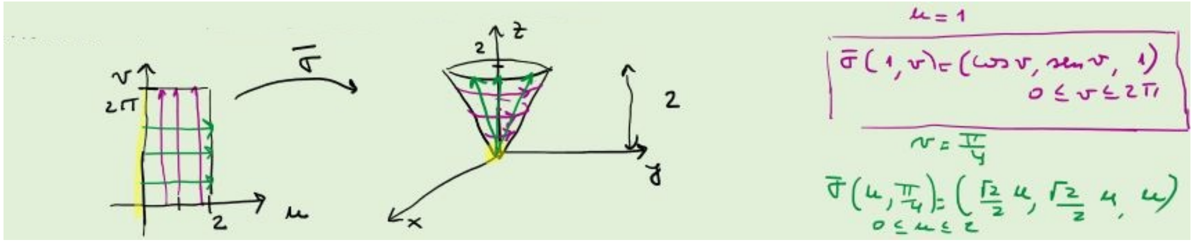
Sea $\bar{\sigma} : D_{uv} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 / \bar{\sigma}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ y

$D_{uv} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 2\pi\}$

Escribimos la parametrización con ecuaciones cartesianas

$$\begin{cases} x = u \cos v \qquad (1) \\ y = u \sin v \qquad (2) \\ z = u \qquad (3) \end{cases}$$

$$\text{De(1)} \quad x^2 = u^2 \cos^2 v$$
$$\text{De(2)} \quad y^2 = u^2 \sin^2 v$$
$$x^2 + y^2 = u^2 \quad \text{como} \quad u \geq 0$$
$$u = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \leq 2$$



Derivabilidad

Derivada de una función vectorial

Sea $\bar{f} : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in D$ Si existe con norma finita

$$\lim_{h \to 0} \frac{\bar{f}(t_0 + h) - \bar{f}(t_0)}{h}$$

diremos que $\bar{f}$ es derivable en t_0

$$\bar{f}'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{f}(t_0 + h) - \bar{f}(t_0)}{h}$$

O bien,

$$\bar{f}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(t_0)}{t - t_0}$$

Una función vectorial es derivble en un punto t_0 si y solo si las componentes son derivalbes en ese punto.

Ej 1: $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 / \bar{f}(t) = (\text{sen}\, t, t^2 + 1)$

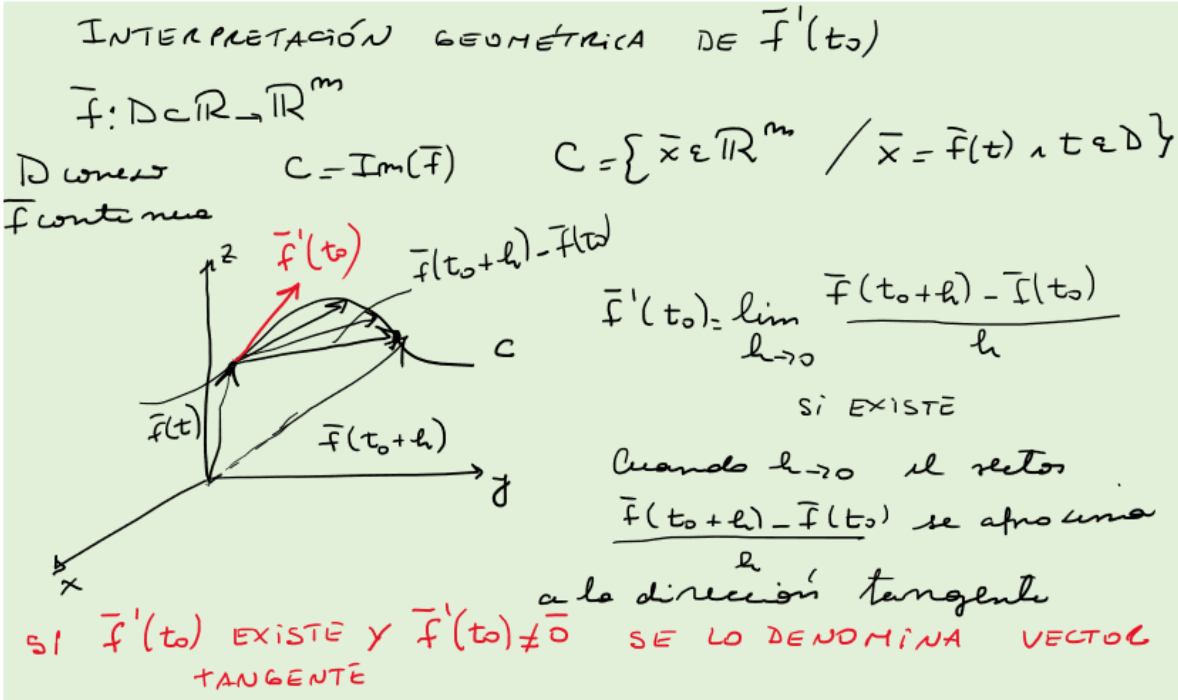
$\bar{f}'(t) = (\cos t, 2t)$; $\bar{f}'(\pi) = (-1, 2\pi)$

Ej 2: $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 / \bar{f}(t) = (t, |t|)$ Hallar $\bar{f}'(0)$, si existe

$f_1(t) = t$ es derivable $\forall t \in \mathbb{R}$

$f_2(t) = |t|$ no es derivable en $t = 0$

$\Rightarrow \nexists\, \bar{f}'(0)$



Si $\bar{f}(t)$ representa la posición de una particula en cada instante t:

Vector velocidad: $\bar{v}(t) = \bar{f}'(t)$

Rapidez : $s(t) = ||\bar{f}'(t)||$

Vector aceleración: $\bar{a}(t) = \bar{v}'(t) = \bar{f}''(t)$

Ej:

Sea $\bar{f} : D \subset [0, 4] \to \mathbb{R}^2 / \bar{f}(t) = \left(\sqrt{t}, 2 - t\right)$

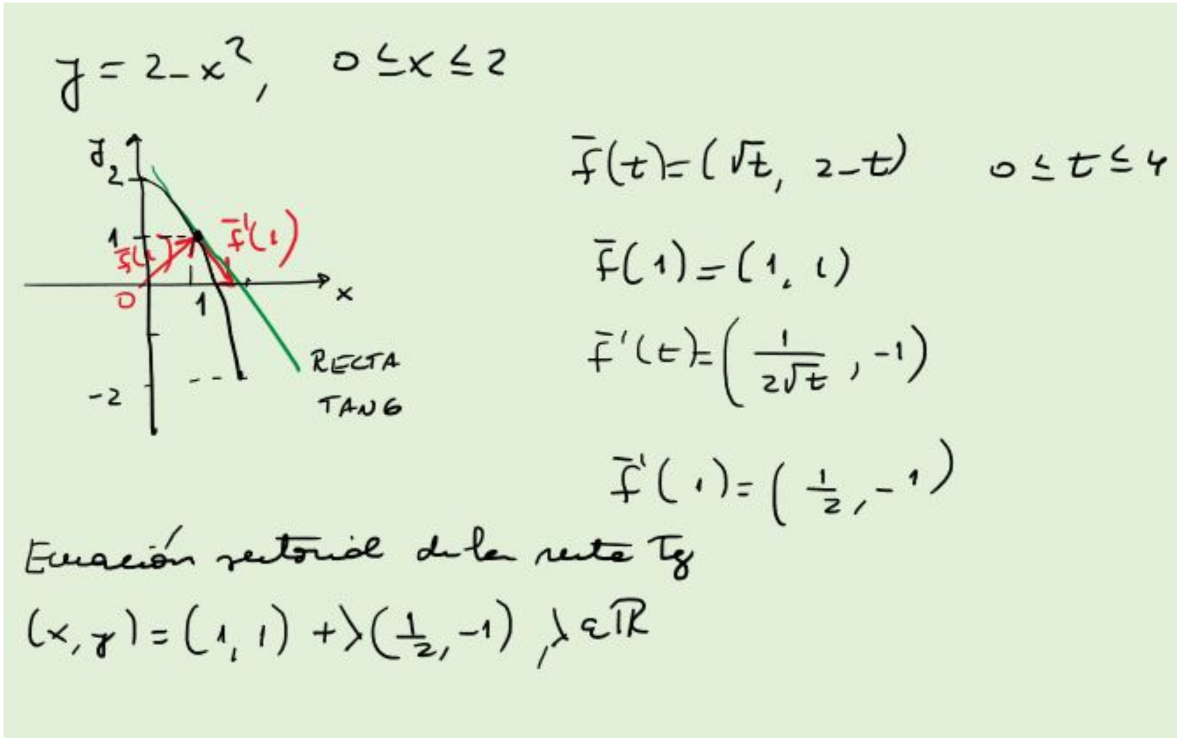
$C = Im(\bar{f})$

Primero encontremos los limites de x y despues escribamos y en función de x

$$
\begin{gathered}
0 \leq t \leq 4 \\
0 \leq \sqrt{t} \leq \sqrt{4} \\
0 \leq \sqrt{t} \leq 2 \\
0 \leq x \leq 2
\end{gathered}
$$

$$
\begin{cases}
x = \sqrt{t} \to x^2 = t \\
y = 2 - t \to y = 2 - x^2, 0 \leq x \leq 2
\end{cases}
$$

Graficamos y hallamos el vector tangente.



Punto regular de una curva

Un puto $P_0 = \bar{f}(t_0)$ es un punto regular de $C = Im(\bar{f})$ si y solo si $\exists \bar{f}'(t_0) \quad \wedge \quad \bar{f}'(t_0) \neq 0$

En el ejemplo, $P_0 = (1, 1) = \bar{f}(1)$ es un punto regular

Punto simple

Un punto $P_0 = \bar{f}(t_0)$ es un punto simple de la curva C cuando es imágen de un solo punto del dominio.

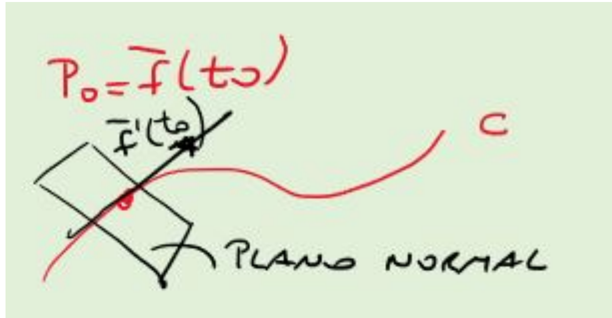
Recta tangente y plano normal

Recta tangente

$$\bar{x} = P_0 + \lambda \cdot \bar{f}'(t_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Plano normal

$\bar{f}'(t_0) \cdot (\bar{x} - P_0) = 0$



Derivadas de campos esclares

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}/z = f(x, y)$ y $P_0 = (x_0, y_0) \in D$

Derivada parcial de f en el punto P_0 se denota por: $f_x(P_0)$,

$f_x'(P_0)$,

$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0)$,

$D_1 f(P_0)$

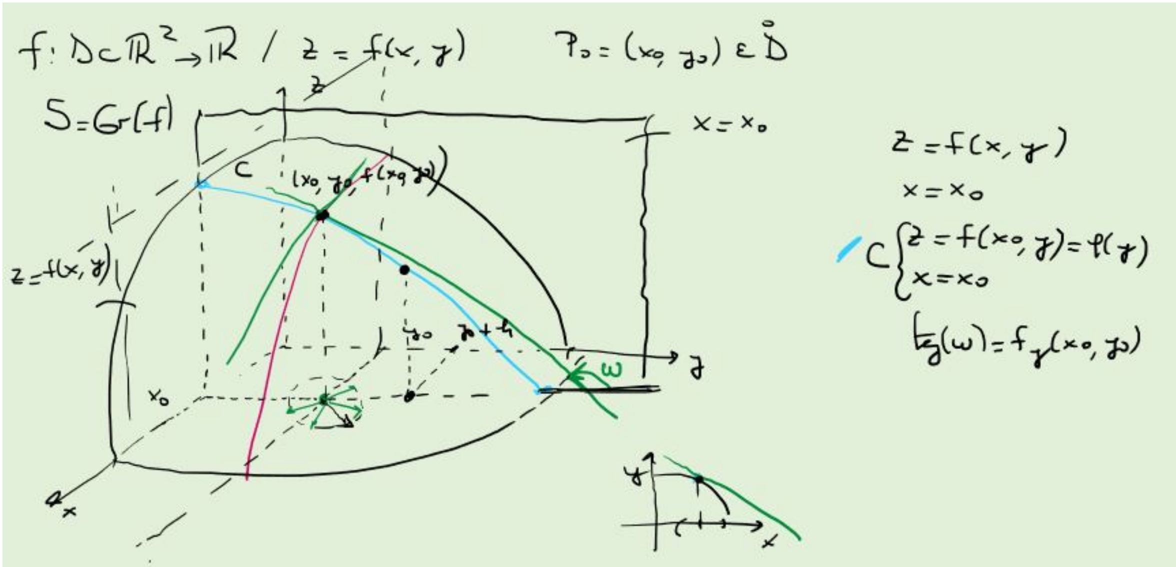
Si el limite existe entonces:

$$f_x(P_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Analogamente:

$$f_y(P_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Interpretación geometrica de las derivadas parciales



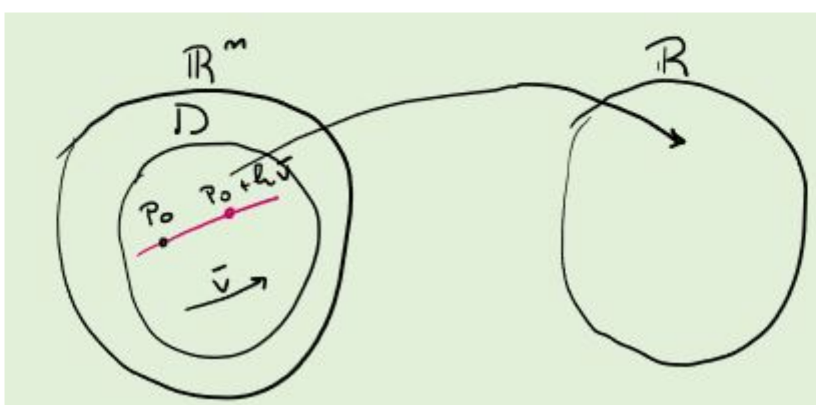
Derivada direccional de un campo escalar

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}/z = f(x, y)$, $P_0 \in D$ y $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$

Si el limite existe la derivada en dirección de $\bar{v}$ se define:

$$f'(P_0, \bar{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + h\bar{v}) - f(P_0)}{h}$$

Caso particular $\bar{v} = \bar{0}$, la derivada en dirección del vector nulo siempre existe y vale 0.



$\bar{x} = P_0 + h \cdot \bar{v}, h \in \mathbb{R}$ son puntos de una recta.

Cuando $||\bar{v}|| = 1$ la derivada recibe el nombre de **derivada direccional**

En este caso las derivadas parciales son un caso particular cuando se deriva en la dirección de los versores canónicos.

Propiedad de homogeneidad

$$f'(P_0, k\bar{v}) = kf'(P_0, \bar{v})$$

Utilidad

$$f'(P_0, \breve{v}) = \frac{1}{||\bar{v}||} \cdot f'(P_0, \bar{v})$$

Derivada direccional de un campo vectorial

Sea $\bar{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $P_0 \in D$, $\breve{v} \in \mathbb{R}^m$ $/||\breve{v}|| = 1$

$$\bar{f}'(P_0, \bar{v}) = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{f}(P_0 + h\bar{v}) - \bar{f}(P_0)}{h}$$

Este limite existe si y solo si existen los limites de todas las componentes.

Derivadas parciales sucesivas

Ejemplo

$f(x, y) = y^2 \operatorname{sen} x$

ORDEN 0

$f_x(x, y) = y^2 \cos x$

$f_y(x, y) = 2y \operatorname{sen} x$

ORDEN 1

$f_{xx}(x, y) = -y^2 \operatorname{sen} x$

$f_{xy}(x, y) = 2y \cos x$

$f_{yx}(x, y) = 2y \cos x$

$f_{yy}(x, y) = 2 \operatorname{sen} x$

ORDEN 2

ORDEN 3

$2^1 = 2$ $\quad 2^2$ $\quad 2^3$

Para un campo escalar $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ va a tener n^k derivadas de orden k

Teorema de Schwarz

Sea $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y el punto $P_0 = (x_0, y_0)$ interior a D_f ,si existen f_x, f_y y f_{xy} en un entorno de P_0 y f_{xy} es continua en P_0 , entonces existe y $f_{yx}(P_0)$resultando $f_{yx}(P_0) = f_{xy}(P_0)$

Diferenciabilidad

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ / \ z = f(x, y)$ y $P_0 = (x_0, y_0) \in D$

f es diferenciable en P_0 si $f_x(P_0)$ y $f_y(P_0)$ existen y:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - [f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)]}{||(x, y) - (x_0, y_0)||} = 0$$

Plano tangente

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Gradiente

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $P_0 = (x_0, y_0)$

El vector cuyas componentes son las n derivadas parciales de f en P_0 se llama gradiente de la función en P_0 y se denota:

$$\bar{\nabla} f(P_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = grad(f)$$

Para que exista el vector gradiente en un punto deben existir las n derivadas parciales en ese punto.

Caso general

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ / \ z = f(x, y)$ y $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ tal que existen las n derivadas parciales en P_0 entonces f es diferenciable en P_0 si:

$$\lim_{\bar{x}\to P_0} \frac{f(\bar{x}) - f(P_0) - \nabla f(P_0) \cdot (\bar{x} - P_0)}{||\bar{x} - P_0||} = 0$$

Si f es diferenciable en P_0 entonces f es continua en P_0.

Si f no es continua en P_0 entonces f no es diferenciable en P_0

Si f es diferenciable en P_0 entonces existe $f'(P_0, \bar{v}) \quad \forall \bar{v}$ y:

$$f'(P_0, \bar{v}) = \bar{\nabla} f(P_0) \cdot \bar{v}$$

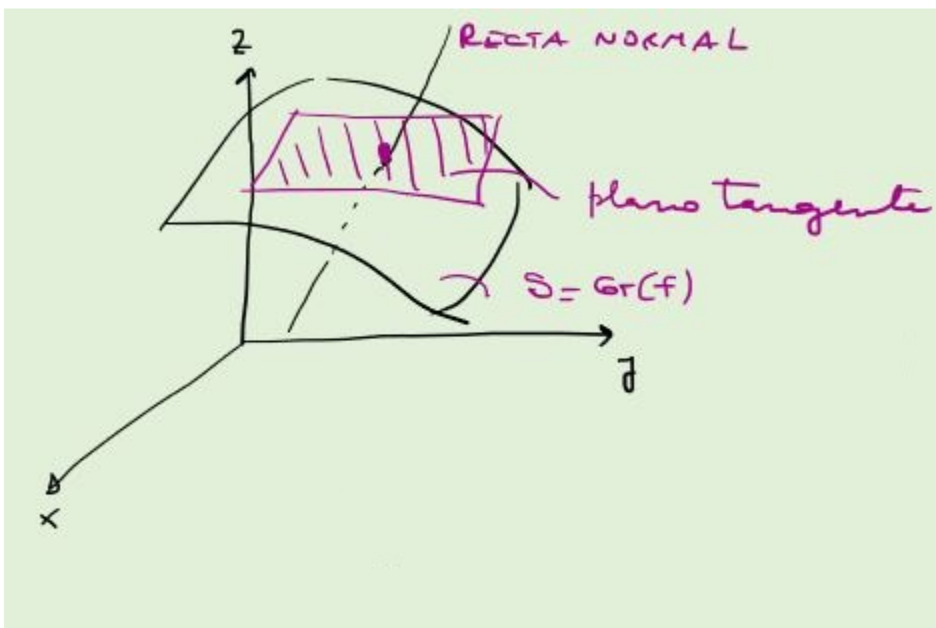
Las funciones polinomicas son diferenciables en $\mathbb{R}^n$

Propiedades de la matriz jacobiana

Si $\bar{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $P_0 \in D$ es tal que existen todas las derivadas parciales de $\bar{f}$ en P_0 y son continuas en un $E(P_0)$ entonces $D\bar{f}(P_0)$ es continua y $\bar{f}$ es diferenciable en P_0

Componentes de un vector normal al plano tangente

$$\bar{N} = \left(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\right)$$



Ecuación del plano tangente

$$\underbrace{f_x(x_0, y_0)}_{a}\, x + \underbrace{f_y(x_0, y_0)}_{b}\, y \underbrace{-}_{c=-1} z + \underbrace{f(x_0, y_0) - x_0 f_x(x_0, y_0) - y_0 f_y(x_0, y_0)}_{d} = 0$$

Ecuación vectorial de la recta normal

En el punto $(x_0, y_0, f(x, y))$

$$\overline{x} = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + \lambda (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1), \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Derivada direccional maxima, minima y nula

Cuando $\overline{\nabla} f(P_0) \neq \overline{0}$ $\quad f'(P_0, \breve{v}_{MAX}) = \|\overline{\nabla} f(P_0)\|$ $\quad \breve{v}_{MAX} = \dfrac{\overline{\nabla} f(P_0)}{\|\overline{\nabla} f(P_0)\|}$

Derivada direccional máxima

Derivada direccional mínima

$$f'(P_0, \breve{v}_{min}) = -\|\overline{\nabla} f(P_0)\| \qquad \breve{v}_{min} = -\frac{\overline{\nabla} f(P_0)}{\|\overline{\nabla} f(P_0)\|}$$

Por otra parte se obtiene derivada direccional nula

$\forall \breve{v} \perp \nabla f(P_0)$

$$f'(P_0, \breve{v}) = \overline{\nabla} f(P_0) \cdot \breve{v} = \|\overline{\nabla} f(P_0)\| \underbrace{\|\breve{v}\|}_{1} \cos\theta = \|\overline{\nabla} f(P_0)\| \cos\theta$$

Formula de aproximacion lineal de campos escalares

FORMULA DE APROXIMACIÓN USANDO DIFERENCIAL

$$\boxed{f(P_0+\bar H) \simeq f(P_0) + \bar\nabla f(P_0)\cdot\bar H}$$

En superficies parametrizadas

$\bar m_0 = \bar\sigma_u(u_0,v_0)\times\bar\sigma_v(u_0,v_0)$

$\boxed{\bar m_0\cdot(\bar x - P_0)=0}$ Ecuación del plano tangente

o bien en forma vectorial

$$\boxed{\bar x = P_0 + \mu\,\bar\sigma_u(u_0,v_0) + t\,\bar\sigma_v(u_0,v_0)\ ,\quad \mu, t\in\mathbb{R}}$$

Ecuación de la recta normal a S en P_0

$$\boxed{\bar x = P_0 + \lambda\,\bar m_0 \quad \lambda\in\mathbb{R}}$$

Teorema de composición de funciones

Sean $g: D_g\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$, $f: D_f\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$ si $Im(g)\subset D_f$ se define $h=f\circ g$ y si g es diferenciable en P_0 y f es diferenciable en $g(P_0)$ entonces la función compuesta h es diferenciable en P_0 y $\underbrace{Dh(P_0)}_{m\times n}=\underbrace{Df(g(P_0))}_{m\times p}\,\underbrace{Dg(P_0)}_{p\times n}$ PRODUCTO DE MATRICES

Caso particular

Sea $\bar g: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ y $f: D_f\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$\boxed{h'(t) = \bar{\nabla} f(\bar{g}(t_0)) \cdot \bar{g}'(t_0)}$$

Apliación de la regla de la cadena

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable y $P_0 \in \mathring{D}$ / $\bar{\nabla} f(P_0) \neq \bar{0}$, consideramos la curva de nivel que pasa por P_0, $C_k(f) = \{ (x,y) \in D : \underbrace{f(x,y) = f(P_0)} \}$

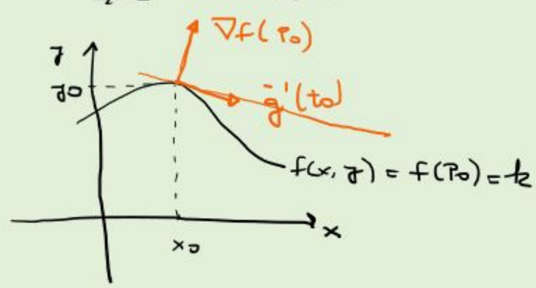
$k = f(P_0)$

y sea $\bar{g}: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 / \bar{g}(t) = (x(t), y(t))$ una parametrización regular de C_k $\quad \bar{g}(t_0) = P_0$, $\bar{g}'(t_0) \neq \bar{0}$ $\quad \bar{g}$ es dif

$$h(t) = (f \circ \bar{g})(t) = k$$

$\forall t \in I$: $h'(t) = 0$ aplicamos la regla de la cadena $\underbrace{\nabla f(\bar{g}(t_0))}_{\neq \bar{0}} \cdot \underbrace{\bar{g}'(t_0)}_{\neq \bar{0}} = 0 \Rightarrow \nabla f(\bar{g}(t_0)) \perp \bar{g}'(t_0)$

$P_0 = \bar{g}(t_0)$



Si $f: D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(D)$ D abierto, $P_0 \in D$

$C_k(f) = \{\bar{x} \in D : f(\bar{x}) = k, k \in \mathbb{R}\}$, CONJUNTO DE NIVEL QUE PASA POR P_0 : $f(\bar{x}) = f(P_0)$, ES UNA SUPERFICIE LLAMADA SUPERFICIE DE NIVEL S, $\nabla f(P_0) \perp S$ EN EL PUNTO P_0

Ecuación del plano tangente $\boxed{\bar{\nabla} f(P_0) \cdot (\bar{x} - P_0) = 0}$

$\boxed{f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} / z = f(x, y)}$

Defino una función $\varphi: D_\varphi \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} / \underline{\varphi(x, y, z) = f(x, y) - z}$

$\varphi \in C^1(D_\varphi)$, $C_0(\varphi) = \{(x, y, z) \in D_\varphi : f(x, y) - z = 0\}$

$C_0(\varphi) = Gr(f) = S$, $P_0 \in C_0(\varphi)$, $\nabla \varphi(P_0) \perp S$

$$\bar{\nabla} \varphi(x, y, z) = (f_x(x, y), f_y(x, y), -1)$$

$$\bar{\nabla} \varphi(x_0, y_0, z_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$$