Grafos

Un grafo es una estructura formada por vértices unidos a través de aristas y se utiliza para representar determinadas situaciones. Formalmente se define como una estructura algebraica de la siguiente forma:

Un grafo es una terna $G = (V; A; \varphi)$ siendo: V: el conjunto de vértices $V \neq \emptyset$

A: el conjunto de aristas A

φ : la función de incidencia : $A \to V^{(2)}$

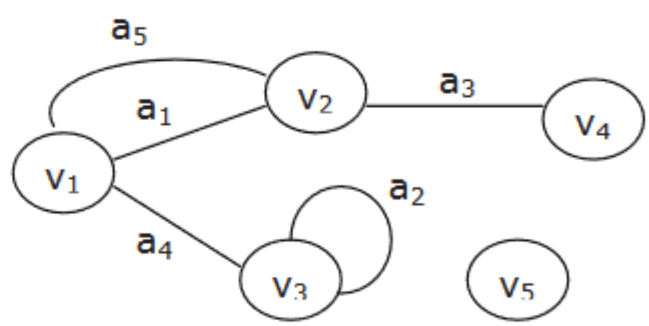
$V^{(2)}$ es el conjunto formado por subconjuntos de 1 o 2 elementos de V.

Ej:

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

$\varphi(a_1)=\{v_1,v_2\}$, $\varphi(a_2)=\{v_3\}$, $\varphi(a_3)=\{v_4,v_2\}$, $\varphi(a_4)=\{v_1,v_3\}$, $\varphi(a_5)=\{v_1,v_2\}$

Se puede diagramar de la siguiente forma:



Definiciones

VÉRTICES ADYACENTES: v_i es adyacente a $v_j \Leftrightarrow \exists a_k \in A$ tal que $\varphi(a_k) = \{v_i, v_j\}$ Es decir son aquellos vértices unidos por alguna arista. En el ejemplo, v_2 es adyacente a v_1 y a v_4 pero no a v_3

VÉRTICE AISLADO: el que no es adyacente a ningún otro. En el ejemplo: v_5 es aislado.

ARISTAS PARALELAS: a_i es paralela a $a_j \Leftrightarrow \varphi(a_i) = \varphi(a_j)$ siendo $a_i \neq a_j$ Es decir son aquellas comprendidas entre los mismos vértices. En el ejemplo, a1 y a5 son paralelas, están comprendidas entre los mismos vértices.

ARISTAS ADYACENTES: las que tienen un único vértice en común siendo distintas y no paralelas. En el ejemplo, a_1 es adyacente a a_3

BUCLES o LAZOS: las aristas comprendidas en un mismo vértice. En el ejemplo, a_2 es un bucle.

ARISTAS INCIDENTES EN UN VÉRTICE: las que tienen a dicho vértice por extremo. En el ejemplo, las aristas a_1 , a_3 y a_5 son incidentes en el vértice v_2

GRAFO SIMPLE: el que no tiene aristas paralelas ni bucles.

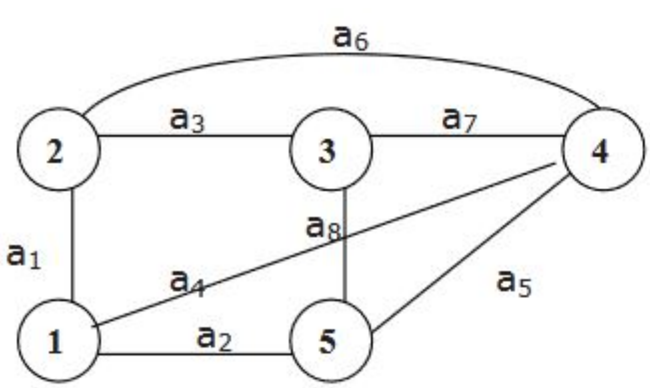
Matriz de adyacencia

Sea un grafo $G = (V; A; \varphi)$ con $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

Se define la matriz de adyacencia de G a una matriz booleana de $n \times n$:

$$M_a(G) = ((m_{ij}))\text{tal que } \ m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } \ v_i \ \text{ es adyacente a } \ v_j \\ 0 \text{ si } \ v_i \ \text{ no es adyacente a } \ v_j \end{cases}$$

Ej:



$$M_a(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de incidencia

Sea un grafo $G = (V; A; \varphi)$ con $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

Se define la matriz de incidencia de G a una matriz booleana de $n \times m$:

$$M_i(G) = ((m_{ij}))\text{tal que } \ m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } \ v_i \ \text{ es incidente a } \ a_j \\ 0 \text{ si } \ v_i \ \text{ no es incidente a } \ a_j \end{cases}$$

Ejemplo para el mismo grafo anteriór.

$$M_i(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Función grado de un vertice

El grado de un vertice es la cantidad de aristas incidentes en el, si se trata de un bucle cuenta por 2.

En un grafo simple se denomina vértice colgante o pendiente al que tiene grado igual a uno.

En un grafo simple un vertice es aislado si y solo si su grado es cero.

En todo grafo se cumple que la suma de los grados de los vértices es igual al doble de la cantidad de aristas.

$$\sum g(v_i) = 2|A|$$

Caminos

CAMINO: sucesión de aristas adyacentes distintas.

CICLO o circuito: camino cerrado. El vértice inicial coincide con el final.

LONGITUD del camino: cantidad de aristas que lo componen.

CAMINO SIMPLE: si todos los vértices son distintos.

CAMINO ELEMENTAL: si todas las aristas son distintas

Grafos especiales

Grafo K-Regular

Sea un grafo $G = (V; A; \varphi)$ y $k \in \mathbb{N}_0$

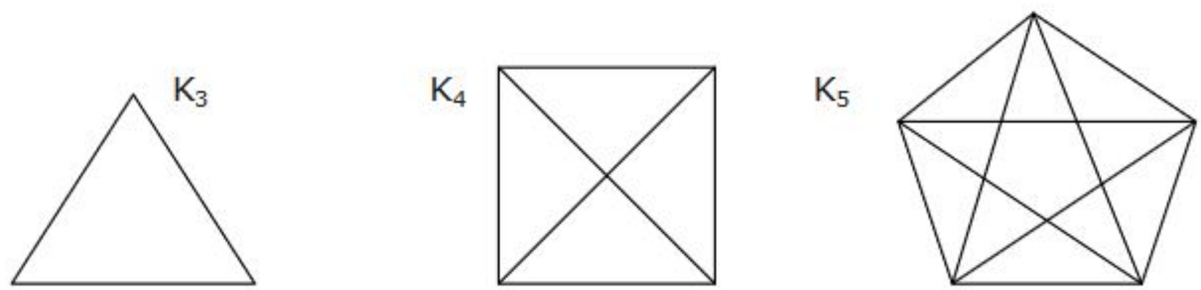
Se dice que G es k-regular $\Leftrightarrow \forall v \in V : g(v) = k$

Grafos completos

Se indican K_n

Sea $n \in N : K_n = (V; A; \varphi)$ tal que $\forall v, w \in V : v \neq w \Leftrightarrow \exists a \in A : \varphi(a) = \{v, w\}$

O sea, los K_n son grafos simples de n vértices en los cuales cada vértice es adyacente a todos los demás.



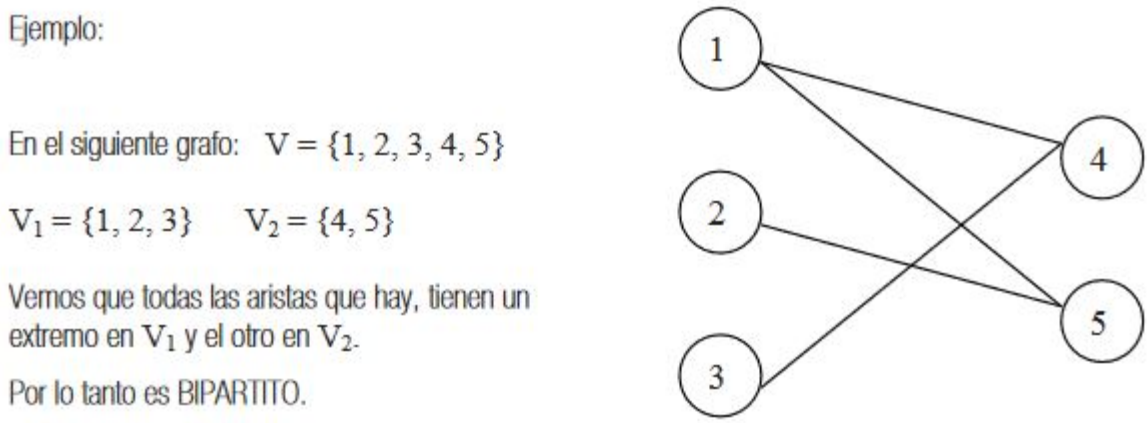
Grafos bipartitos

Sea un grafo simple $G = (V; A; \varphi)$con $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

Se dice que G es BIPARTITO $\Leftrightarrow V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \neq \emptyset \quad \wedge \quad V_2 \neq \emptyset \quad \wedge \quad V_1 \cap V_2 = \emptyset$

$\wedge \quad \forall a_i \in A : \varphi(a_i) = \{v_j, v_k\}$ con $v_j \in V_1 \quad \wedge \quad v_k \in V_2$ o $v_k \in V_1 \quad \wedge \quad v_j \in V_2$

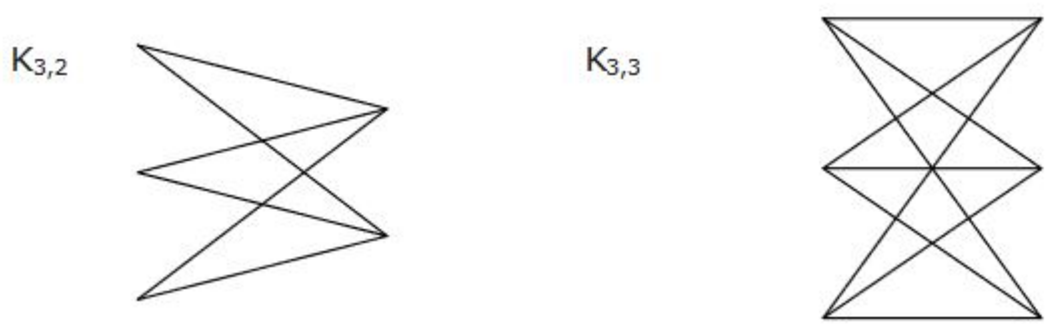
Es decir, los grafos BIPARTITOS son grafos cuyo conjunto de vértices está particionado en dos subconjuntos no vacíos y disjuntos: V_1 y V_2 tales que los vértices de V_1 pueden ser adyacentes a los vértices de V_2 pero los de un mismo subconjunto no son adyacentes entre sí.



Grafos bipartitos completos

Como su nombre lo indica deben ser bipartitos y además completos. Es decir, el conjunto de vértices debe estar particionado en dos subconjuntos, cada arista debe tener un vértice de cada subconjunto y por ser completos cada vértice debe formar una arista con todos los demás. Pero atención, con todos los demás del subconjunto al que él **no** pertenece.

Por lo tanto son grafos bipartitos de $n + m$ vértices con TODAS las aristas posibles.



Subgrafos

Dado un grafo $G = (V; A; \varphi)$, se denomina subgrafo al grafo $G' = (V'; A'; \varphi/_{A'})$tal que

$V' \subseteq V \quad \wedge \quad A' \subseteq A \quad \wedge \quad \varphi/_{A'}$ es la función restringida a A'

Para obtener subgrafos de un grafo dado se puede:

1. suprimir uno o varios vértices y las aristas incidentes en ellos
2. suprimir solamente una o varias aristas.

Si se suprime un vértice v, el subgrafo restante es $\tilde{G}_v$

Si se suprime una arista a, el subgrafo restante es $\tilde{G}_a$

Relación de conexión

Dado un grafo $G = (V; A; \varphi)$, en el conjunto de vértices se define la siguiente relación:
$$v_i R v_j \Leftrightarrow \exists \text{camino de } \ v_i \ \text{ a } \ v_j \quad \vee \quad v_i = v_j$$

Esta relación es de equivalencia y por lo tanto pueden hallarse las clases de equivalencia, a las que se denomina COMPONENTES CONEXAS.

Grafos Conexos

Un grafo es conexo si y sólo si tiene una única componente conexa.

Es decir, un grafo es conexo si y sólo si existe algún camino entre todo par de vértices.

Definiciones

ISTMO O PUNTO DE CORTE Dado un grafo $G = (V; A; \varphi)$ conexo, $v \in V$ es istmo $\Leftrightarrow$ $\tilde{G}_v$ es no conexo.

Es decir, un istmo es un vértice tal que su supresión desconecta al grafo.

PUENTE: Dado un grafo $G = (V; A; \varphi)$ conexo, $a \in A$ es puente $\Leftrightarrow$ $\tilde{G}_a$ es no conexo.

Es decir, un puente es una arista tal que su supresión desconecta al grafo.

CONJUNTO DESCONECTANTE: Dado un grafo $G = (V; A; \varphi)$ conexo,

$B \subseteq A$ es desconectante $\Leftrightarrow$ $\tilde{G}_B$ es no conexo.

Es decir, un conjunto de aristas es desconectante si y sólo si su supresión desconecta al grafo.

CONJUNTO DE CORTE: Un conjunto B desconectante es también de corte$\Leftrightarrow \forall C \subset B, C$ no es desconectante.

O sea, para ser conjunto de corte debe estar formado por el mínimo número de aristas, o bien solamente por las necesarias para desconectar al grafo.

Grafos eulerianos

Se denomina **camino euleriano** al camino que pasa por todas las aristas una sola vez; y **ciclo euleriano** al ciclo que pasa por todas las aristas una sola vez.

La condición necesaria y suficiente para que en un grafo exista **camino** euleriano es:

1. El grafo debe ser conexo
2. Todos los vertices deben tener grado par, o a lo sumo dos grado impar

La condición necesaria y suficiente para que en un grafo exista **ciclo** euleriano es:

1. El grafo debe ser conexo
2. Todos los vertices deben tener grado par.

Caminos y ciclos Hamiltonianos

Se denomina **camino hamiltoniano** al camino que pasa una sola vez por cada vértice; y **ciclo hamiltoniano** al ciclo que pasa una sola vez por cada vértice.

Importante : no necesariamente va a pasar por todas las aristas, pues en muchos casos repitiría vertices y no sería hamiltoniano.

Isomorfismos de grafos

Dados dos grafos: $G1 = (V_1; A_1; \varphi_1)$ y $G_2 = (V_2; A_2; \varphi_2)$

Se dice que son isomorfos si y solo si existen dos funciones biyectivas:

$f : V_1 \to V_2$ y $g : A_1 \to A_2$ tales que:

$$\forall a \in A_1 : \varphi_2(g(a)) = f(\varphi_1(a))$$

Si no hay aristas paralelas, entonces es suficiente:
$\forall u, v \in V_1 : \{u, v\} \in A_1 \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in A_2$

Esto significa que si en el primer grafo hay una arista entro deos vértices, los correspondientes a estos vertices en el segundo grafo también deben estar unidos por una arista.

En pocas palabras, **dos grafos son isomorfos cuando tienen la misma estructura**, es decir sus vértices están relacionados de igual forma aunque estén dibujados de manera distinta.

Condiciones necesarias para que dos grafos sean isomorfos

1. Deben tener la misma cantidad de vértices.
2. Deben tener la misma cantidad de aristas.
3. Deben tener los mismos grados de los vértices.
4. Deben tener cadenas de las mismas longitudes.
5. Si uno tiene ciclos, el otro también debe tenerlos.
6. Etc.

Observación: las condiciones mencionadas **son necesarias** (es decir que sí o sí se deben cumplir para que los grafos sean isomorfos) pero **no son suficientes** (o sea que aunque se cumplan puede ser que los grafos no sean isomorfos)

Importante: Si dadas dos matrices de adyacencia correspondientes a dos grafos, ellas no son iguales, no significa que los grafos no sean isomorfos, pues tal vez reordenando una de ellas se pueda lograr que sean iguales.

Para poder afirmar que dos grafos no son isomorfos hay que mostrar alguna propiedad estructural no compartida o bien probar que todos los ordenamientos posibles de las matrices no coinciden. Esto último no es práctico pues como sabemos la cantidad de ordenamientos posibles de n elementos es igual a $n!$, lo cual es una cantidad bastante elevada

Digrafos

Un dígrafo es una terna $G = (V; A; \delta)$ siendo:

V el conjunto de vértices $V \neq \emptyset$

A el conjunto de aristas o arcos

y δ la función de incidencia: $\delta : A \to V \times V$

En este caso la función de incidencia se dice dirigida

Observaciones

La función de incidencia δ le hace corresponder a cada arista un **PAR ORDENADO** de vértices, al primero se lo llama **EXTREMO INICIAL** de la arista, y el segundo es el **VERTICE FINAL**.

Los caminos y los ciclos se definen de la misma forma que para los grafos no dirigidos, pero hay que respetar el sentido de las aristas.

Si todos los vértices son distintos se trata de un **camino simple**.

Si todas las aristas son distintas, se trata de un **camino elemental**.

Función grado en un digrafo

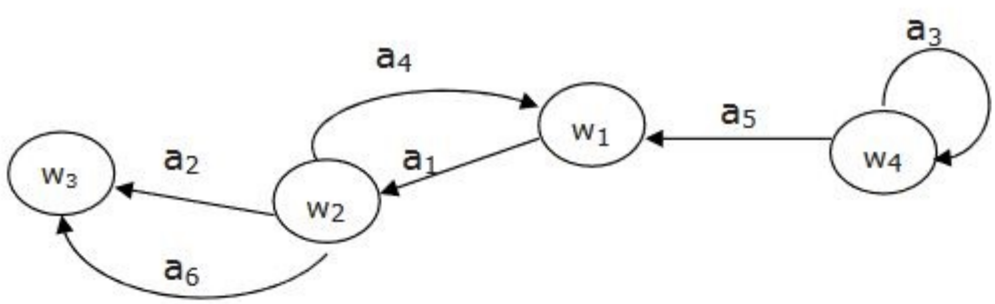
GRADO POSITIVO: cantidad de aristas que inciden positivamente en el vértice (son las que "entran" al vértice). Se denota $g^+(v)$

GRADO NEGATIVO: cantidad de aristas que inciden negativamente en el vértice (son las que "salen" del vértice). Se denota $g^-(v)$

GRADO TOTAL: es la suma de los grados positivo y negativo. Se denota $g(v)$

GRADO NETO: es la diferencia entre el grado positivo y el negativo. Se denota $g_N(v)$

Ej:



$g^+(w_1) = 2$; $g^+(w_2) = 1$; $g^+(w_3) = 2$; $g^+(w_4) = 1$

$g^-(w_1) = 1$; $g^-(w_2) = 3$; $g^-(w_3) = 0$; $g^-(w_4) = 2$

$g(w_1) = 3$; $g(w_2) = 4$; $g(w_3) = 2$; $g(w_4) = 3$

$g_N(w_1) = 1$; $g_N(w_2) = -2$; $g_N(w_3) = 2$; $g_N(w_4) = -1$

Propiedades

1. $\sum g^+(v_i) = |A|$
2. $\sum g^-(v_i) = |A|$

3. $\sum g(v_i) = 2|A|$
4. $\sum g_N(v_i) = 0$

Pozos y fuentes

En los digrafos puede haber vertices especiales de los que no "sale" ninguna arista y se denominan **pozos**. Otros, a los que no "llega" ninguna aristas y se los denominan **fuentes**.

POZO: es un vértice v tal que $g^-(v) = 0$ O sea, v no es extremo inicial de ninguna arista.

FUENTE: es un vértice v tal que $g^+(v) = 0$ O sea, v no es extremo final de ninguna arista

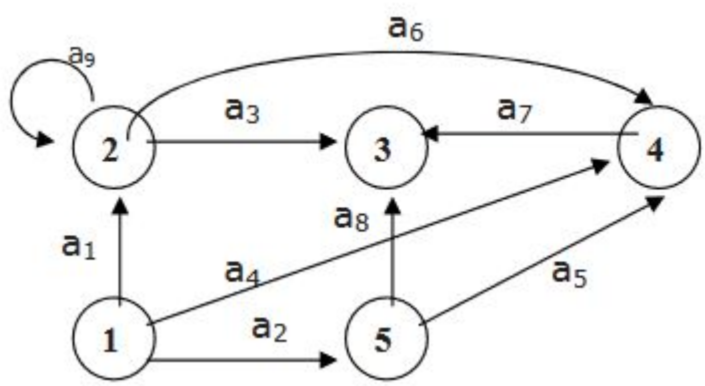
Matriz de adyacencia

Sea un grafo $G = (V; A; \delta)$ con $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

Se define la matriz de adyacencia de G a una matriz booleana de $n \times n$:

$$M_a(G) = ((m_{ij}))\text{tal que } \; m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } \; \exists a \in A : \delta(a) = (v_i; v_j) \\ \quad 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Ej:



$$\mathrm{M_a(G)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de incidencia

Sea un grafo $G = (V; A; \delta)$ con $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$

Si no tiene bucles ni aristas paralelas ,se define la matriz de incidencia de G a una matriz de $n \times m$:

$$M_i(G) = ((m_{ij}))\text{tal que } \; m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } \; v_i \; \text{ es vertice incial de } \; a_j \\ -1 \text{ si } \; v_i \; \text{ es vertice final de } \; a_j \\ 0 \text{ si } \; v_i \; \text{ no es extremo de } \; a_j \end{cases}$$

Ejemplo para el mismo digrafo anterior.

$$\mathrm{M_i(G)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Grafo asociado a un digrafo

Dado un dígrafo, si se cambian las aristas dirigidas por aristas no dirigidas, se obtiene el grafo asociado. Es decir hay que ignorar el sentido de las aristas.
Si en el dígrafo original hay aristas paralelas o antiparalelas, en el grafo asociado sólo se representa una de ellas.

Conexidad en digrafos

Todo dígrafo cuyo grafo asociado sea conexo, se denomina DÍGRAFO CONEXO.

Todo dígrafo en el que exista algún camino entre todo par de vértices se denomina **DÍGRAFO FUERTEMENTE CONEXO**

Caminos de Euler y Hamilton en digrafos

Se definen de forma similar que para grafos no dirigidos, pero hay que respetar el sentido de las aristas.

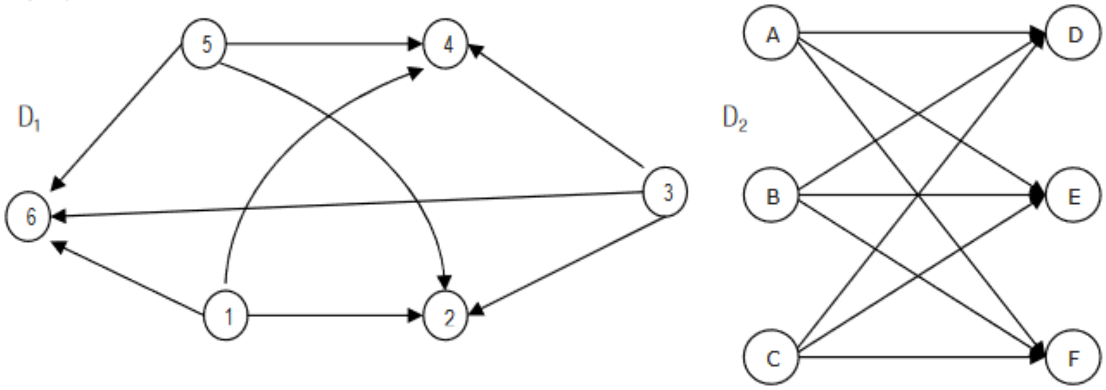
Condición necesaria y suficiente para que exista **ciclo** de Euler en un dígrafo:

$$\forall v \in V : g^+(v) = g^-(v)$$

Isomorfismo de digrafos

El concepto de isomorfismo de dígrafos es igual que para grafos, pero hay que tener en cuenta la dirección de las aristas, es decir el grado positivo y negativo de cada vértice y, por lo tanto eso debe respetarse para la asignación, es decir la correspondencia debe establecerse entre los vértices del mismo grado positivo o negativo

Ejemplo:



¿Son estos dígrafos isomorfos?...

Si definimos la función: $f : V_1 \rightarrow V_2$ tal que

$f(1) = A$; $f(2) = D$; $f(3) = B$; $f(4) = E$; $f(5) = C$; $f(6) = F$

y construimos las matrices de adyacencia, veremos que resultan ser IGUALES:

Matriz de D_1

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	1
4	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0	1
6	0	0	0	0	0	0

Matriz de D_2

	A	D	B	E	C	F
A	0	1	0	1	0	1
D	0	0	0	0	0	0
B	0	1	0	1	0	1
E	0	0	0	0	0	0
C	0	1	0	1	0	1
F	0	0	0	0	0	0

Como las matrices son iguales, entonces los dígrafos son isomorfos.

Arboles

Llamaremos árbol a todo grafo conexo y sin ciclos.

Condicion necesaria y suficiente:

Un arbol es un grafo en el cual entre todo par de vértices existe un único camino simple.

Propiedades básicas de los árboles

Si a un árbol se le agrega una arista entre dos de sus vértices, deja de ser árbol.

Todas las aristas de un árbol son puentes.

En todo árbol se cumple que:$|V| = |A| + 1$

Se denomina **BOSQUE** al grafo no conexo en el cual cada una de las componentes es un árbol.

En un bosque de k componentes se cumple que $|V| = |A| + k$

Árboles dirigidos

Un digrafo se denomina árbol dirigido cuando su grafo asociado es un árbol.

De los árboles dirigidos nos interesa estudiar los árboles con raíz.

El árbol con raíz es un árbol dirigido en el cual el grado entrante (positivo) de cada vértice es igual a 1, salvo un único vértice con grado positivo igual a cero, llamado raíz.

Un vértice v de un árbol se dice que es **HOJA** cuando $g(v) = 1$ Los **VÉRTICES INTERNOS** son todos aquellos que no son la raíz ni las hojas.

Se llama **RAMA** a todo camino que va desde la raíz a alguna hoja.

Otras definiciones

Antecesor: v es antecesor de $w \Leftrightarrow$ existe un único camino simple de v a w.

Sucesor: w es sucesor de v si v es antecesor de w

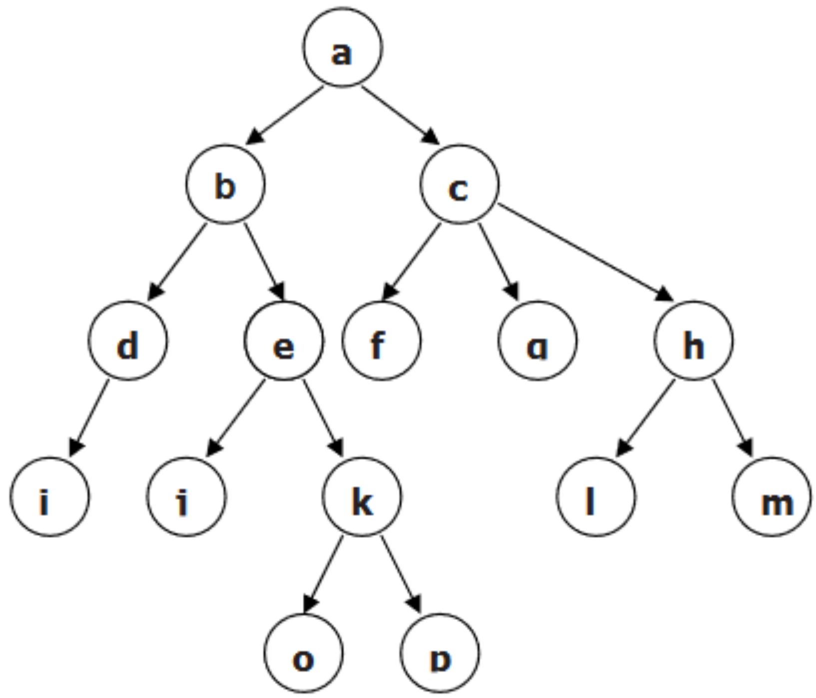
Padre: v es padre de w existe una arista de v a w.

Hijo: w es hijo de v si existe una arista de v a w.

Hermanos: v y w son hermanos si tienen el mismo padre.

Podríamos decir que se reconocen como en el árbol genealógico.

Ejemplo:



En este árbol, la raíz es: a

Las hojas son: i, j, o, p, f, g, l, m

El padre de k es e.

Los hijos de c son f, g, h

Todos los antecesores de j son e, b, a

Mas definiciones

El **NIVEL DE UN VÉRTICE** se define en forma recursiva:

1. El nivel de la raíz es cero: $n(r) = 0$
2. Cada vértice tiene un nivel mas que su padre.

ALTURA de un árbol: es el mayor **NIVEL** alcanzado por las **HOJAS**.

Se dice que un árbol está **BALANCEADO** cuando todas las hojas están en el nivel **MAYOR o en UNO MENOS**.

En el ejemplo anterior, la altura del árbol es: $h = 4$ ¿Es balanceado? No, pues las hojas f y g están en el nivel 2.

Arboles n-arios

Un árbol con raíz es n-ario $\Leftrightarrow \forall v \in V : g^{-}(v) \leq n$

Es decir, cada vértice puede tener a lo sumo n hijos

Si $n = 2$ entonces se dice árbol **BINARIO**.

Si $n = 3$ entonces se dice árbol **TERNARIO**.

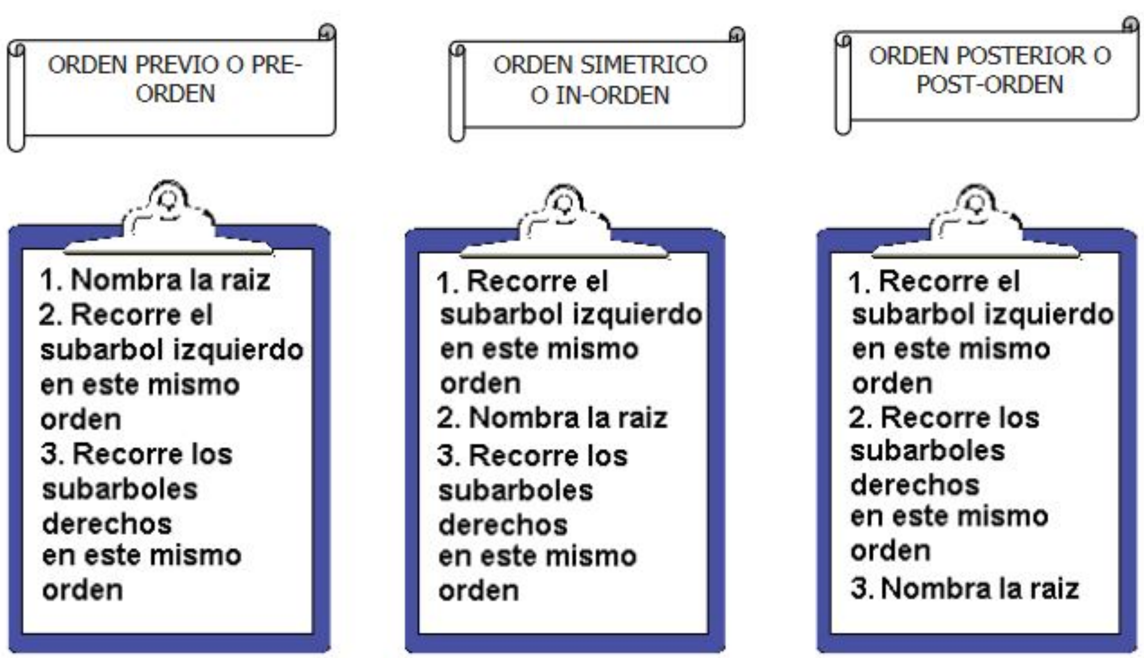
Un árbol se dice **n-ario regular** cuando todos los vértices tienen la misma cantidad de hijos, salvo las hojas que no tienen hijos.

Un árbol se **dice n-ario regular pleno** o **completo** cuando además de ser n-ario regular, todas las hojas se hallan en el mismo nivel.

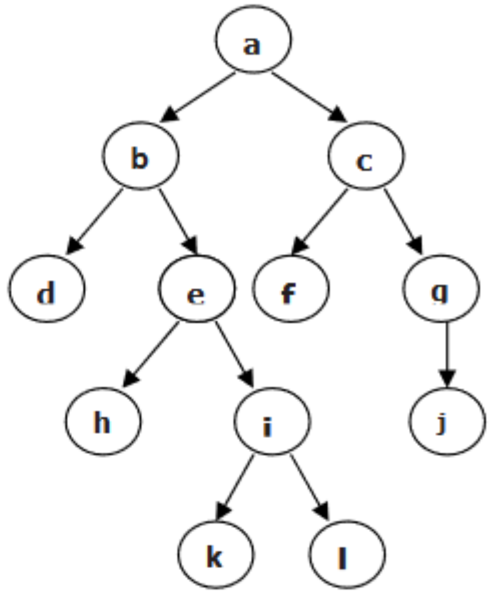
Subárbol

Sea $G = (V; A; \delta)$ un árbol con raíz r. Sea $v \in V$, se llama subárbol con raíz v, y se indica $T(v)$, al árbol que consta de v, todos sus descendientes y las aristas entre ellos.

Recorrido de un arbol



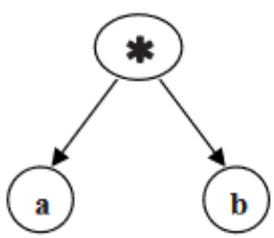
Ejemplo:



Recorrido en orden previo: **a b d e h i k l c f g j**
Recorrido en orden simétrico: **d b h e k i l a f c j g**
Recorrido en orden posterior: **d h k l i e b f j g c a**

Representación de expresiones algebraicas

Si ✱ es una operación binaria, el resultado de operar a con b se representa de la siguiente forma:



El operador es la raíz y los operandos son los hijos o subárboles.

Si leemos este árbol en orden simétrico, obtenemos la expresión usual: $a * b$

Cuando representamos expresiones algebraicas, son comunes los siguientes nombres:

Notación Polaca: es el **orden PREVIO**: $*ab$

Notación usual o infija: es el **orden SIMÉTRICO**: $a * b$

Notación polaca inversa: es el **orden POSTERIOR**: $ab*$