PUCRS - Escola Politécnica
Cálculo II/2

PRIMITIVAS	DERIVADAS	IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS
1) $\int u^p du = \frac{u^{p+1}}{p+1} + c \ , \ p \neq -1$	1) $\frac{d}{dx}(k) = 0 \ , \ \forall k \in IR$	1) $sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$
2) $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u \rvert + c$	2) $\frac{d}{dx}(u^p) = p \ u^{p-1} \ u'$	2) $\sec^2(x) = 1 + tg^2(x)$
3) $\int e^u du = e^u + c$	3) $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \ u'$	3) $\csc^2(x) = 1 + \cot g^2(x)$
4) $\int sen\ (u)\ du = -\cos\ (u) + c$	4) $\frac{d}{dx}(\ln(u)) = \frac{u'}{u}$	4) $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
5) $\int \cos\ (u)\ du = sen(u) + c$	5) $\frac{d}{dx}(sen(u)) = \cos(u)\ u'$	5) $sen^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
6) $\int \sec^2(u)\ du = tg\,(u) + c$	6) $\frac{d}{dx}(\cos(u)) = -sen(u)\ u'$	6) $sen(2x) = 2\ sen(x)\ \cos(x)$
7) $\int \csc^2(u)\ du = -\cot g\,(u) + c$	7) $\frac{d}{dx}(tg\,(u)) = \sec^2(u)\ u'$	7) $\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x)$
8) $\int \sec\ (u)\ tg\ (u)\ du = \sec(u) + c$	8) $\frac{d}{dx}(\cot g\,(u)) = -\csc^2(u)\ u'$	8) $tg\,(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$
9) $\int \csc\ (u)\ \cot g\,(u)\ du = -\csc(u) + c$	9) $\frac{d}{dx}(\sec(u)) = \sec(u)\,tg\,(u)\ u'$	9) $\cot g\,(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)}$
10) $\int \sec(u)\,du = \ln\lvert\sec(u) + tg(u)\rvert + c$	10) $\frac{d}{dx}(\csc(u)) = -\csc(u)\cot g\,(u)\ u'$	10) $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
11) $\int \csc(u)\,du = \ln\lvert\csc(u) - \cot(u)\rvert + c$		11) $\csc(x) = \frac{1}{sen(x)}$

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Teorema Fundamental do Cálculo:

Seja f contínua no intervalo [a, b] e F uma primitiva de f $(\text{isto é}: F'(x) = f(x))$. Então: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = [\,F(x)\,]_a^b = F(b) - F(a)}$

FÓRMULAS PARA ÁREAS E VOLUMES

Cálculo de Área entre duas curvas: $A=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx$

Cálculo do Volume por discos perpendiculares ao eixo x: $V=\pi\int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$

Cálculo do volume por arruelas perpendiculares ao eixo x: $V=\pi\int_a^b \left[\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2\right]dx$

Observação: procedemos de forma análoga para discos e arruelas perpendiculares ao eixo y.

TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Integração por partes: $\int u\, dv = u\, v - \int v\, du$

Observação: se o integrando for um produto envolvendo duas funções de categorias distintas da lista LIATE (Logarítmica, Inversa de trigonométrica, Algébrica, Trigonométrica, Exponencial) escolhemos para u a função cuja categoria aparece antes na lista e dv como o resto do integrando.

Integração por decomposição em frações parciais: $\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx$

i) Fatores lineares distintos: $\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1}{(x-r_1)}+\frac{A_2}{(x-r_2)}+\cdots+\frac{A_n}{(x-r_n)}$ onde $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são as raízes de q(x)

ii) Fatores lineares repetidos: $\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1}{(x-r_1)}+\frac{A_2}{(x-r_1)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(x-r_n)}$

iii) Fatores quadráticos irredutíveis: $\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_1x+A_2}{(x^2+r_1)}+\cdots\frac{A_n}{(x-r_n)}$

iv) Divisão não própria: $\frac{p(x)}{q(x)}$, onde o grau de p(x) é maior ou igual ao grau de q(x) , proceder primeiro com a troca por: $\frac{p(x)}{q(x)}=g(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$ onde:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \cline{2-2} \underline{\quad\quad} & g(x) \\ r(x) & \end{array}$$

TÉCNICAS DE INTEGRAÇÃO

Integração por substituição trigonométrica: Usar as trocas trigonométricas: $sen^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$ ou $\sec^2(\theta)=1+tg^2(\theta)$

$sen(\theta)=\dfrac{cat\ op}{hip}$; $\cos(\theta)=\dfrac{cat\ adj}{hip}$; $\tan(\theta)=\dfrac{cat\ op}{cat\ adj}$; $\sec(\theta)=\dfrac{hip}{cat\ adj}$; $\csc(\theta)=\dfrac{hip}{cat\ op}$; $\cot g(\theta)=\dfrac{cat\ adj}{cat\ op}$

- Para integrais contendo um único radical no integrando da forma ($a>0$ constante):

$\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow x = a\,sen(t)$ $\qquad$ $\sqrt{a^2+x^2} \Rightarrow x = a\,tg(t)$ $\qquad$ $\sqrt{x^2-a^2} \Rightarrow x = a\sec(t)$

SÉRIES

Séries Geométricas: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ • **Converge** para $\dfrac{a}{1-r}$ se $|r|<1$; • **Divergente** se $|r|\geq 1$.

Série p: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ com $p>0$ é: • **Convergente** se $p>1$; • **Divergente** se $0<p\leq 1$.

Teste da Divergência (Critério do Termo Geral): Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **divergente**.

Teste da Integral: Seja f uma função contínua, positiva e decrescente no intervalo $[1;+\infty)$ e $a_n = f(n)$.

• Se $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente**. • Se $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **divergente**.

Teste da Comparação por Limites: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ uma série de termos positivos.

Se $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L > 0$, então **ambas as séries convergem ou ambas divergem**.

Teste da Série Alternada: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ é **Convergente** se $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ **e** $a_n \geq a_{n+1}$ para todo $n > 1$.

Teste da Razão: Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não nulos e $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$ (ou $+\infty$).

- Se $L < 1$ então a série é **convergente**;
- Se $L > 1$ (ou $+\infty$) então a série é **divergente**;
- Se $L = 1$ **nada se conclui** .

Série de Taylor: $f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots$

Série de Maclaurin: Centro **c = 0** .