高校数学 Ⅲ　微分積分

tomiharu0317

2020 年 6 月 27 日更新

※注意　高校数学なので厳密性を求めないでください．

1　関数の極限

1.1　関数の極限及び関数の連続性の定義

$f(x)$ が関数であるとは：　1 つの x を与えたとき，ただ 1 つの値 $f(x)$ を返す対応　のことである．以後，$f(x)$ は関数と仮定する．

定義（関数の右極限）
関数 $f(x)$ と定数 a に対して，$x > a$ を満たしながら x が a に限りなく近づくとき，その近づくスピードに関わらず，常に $f(x)$ が 1 つの値 b に限りなく近づくならば，

$$x \to a+0 \text{ のとき } f(x) \to b$$

または

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b$$

で表し，b を $f(x)$ の $x \to a+0$ における右極限値と呼ぶ．

定義（関数の左極限）
関数 $f(x)$ と定数 a に対して，$x < a$ を満たしながら x が a に限りなく近づくとき，その近づくスピードに関わらず，常に $f(x)$ が 1 つの値 b に限りなく近づくならば，

$$x \to a-0 \text{ のとき } f(x) \to b$$

または

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b$$

で表し，b を $f(x)$ の $x \to a-0$ における右極限値と呼ぶ．

定義（関数の極限）
$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x)$ が成立するとき，この右・左極限値を $f(x)$ の $x = a$ における極限値と呼び，

$\lim_{x \to a} f(x)$ で表す．

定義（関数の連続性）

$f(a) = \lim_{x \to a+0} f(x)$ であるとき，$f(x)$ は $x = a$ で右側連続である．

$f(a) = \lim_{x \to a-0} f(x)$ であるとき，$f(x)$ は $x = a$ で左側連続である．

左側連続かつ右側連続のとき，$f(x)$ は $x = a$ で連続である と呼ぶ．すなわち，関数 $f(x)$ が連続であるとき，

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) = \lim_{x \to a-0} f(x) \Leftrightarrow f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

を満たす．

以後，$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ を連続の定義とする．

1.2 極限の計算法則 I

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha, \lim_{x \to a} f(x) = \beta$ であるとき，

1) $\lim_{x \to a}(kf(x) + lg(x)) = k\alpha + l\beta = k(\lim_{x \to a} f(x)) + l(\lim_{x \to a} g(x))$

2) $\lim_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \alpha \cdot \beta = (\lim_{x \to a} f(x))(\lim_{x \to a} g(x))$

3) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$
(ただし，$\beta \neq 0$ の場合に限る．すなわち，$\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ のときのみ，商に関して分配可能である．）

1.3 極限の計算法則 II

1) $x = a$ の a を除いた十分近くで常に $f(x) \leq g(x)$ が成り立つとき，$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$ になる．

2) $x = a$ の a を除いた十分近くで常に $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ が成り立ち，かつ，$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$ が成り立つならば,，$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} f(x)$ になる．（※ハサミウチの定理）

1.4 ハサミウチの定理の応用

1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \sin x = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

証明）

step 1) $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき図 1 より，

$$\triangle OAB < \text{扇形}\ OAB < \triangle OBC$$

すなわち，

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot \sin x < \frac{1}{2}\cdot x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$$

したがって，

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}$$

が成り立つ．

このとき，（$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ で $\sin x > 0$ から）$\sin x$ で両辺を割ると，

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

逆数をとれば，

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{1}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to 0+0} 1 = \lim_{0+0} \cos x = 1$ であるため，ハサミウチの定理から，

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

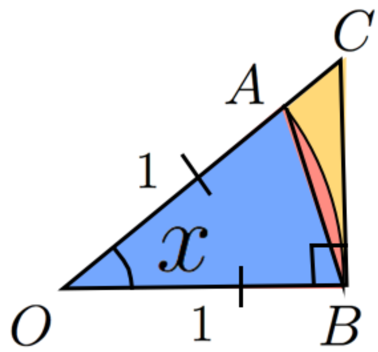

図 1　「高校数学の美しい物語」から引用．

step 2) $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ のとき，各面積が負になるため (1) の不等式が成り立たない．

したがって，ハサミウチの定理を使わず，直接極限を求める．

$\displaystyle\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x}$ より，$x = -t\ (t > 0)$ とおけば，$\displaystyle\lim_{t\to 0+0} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t\to 0+0} \frac{\sin t}{t} = 1$ が成り立つ．

以上，step1 および step2 から，$\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x} = 1$ となるため，

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

1.5　∞ における極限

定義）

x を限りなく大きくするとき，（そのスピードに関係なく）常に $f(x)$ が 1 つの値 b に限りなく近づくならば，$x \to \infty$ のとき $f(x) \to b$ または $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ で表し，b を（$x \to b$ における）$f(x)$ の極限値と呼ぶ．（$-\infty$ も同じ）

1.6　関数の連続性とその性質

ある x の区間（x の集合）上のどの点 $x=a$ においても $f(x)$ が連続であるとき，” $f(x)$ はその区間（全体）で連続である” という．

定理 1（連続関数の基本的性質）

$f(x)$，$g(x)$ がそれぞれ区間 I 上で連続であるとき，$kf(x)+lg(x)$（k,l を定数），$f(x)-g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$（ただし，$g(x)$ は I 上で常に $g(x)\neq 0$ を満たす）は全て I 上で連続になる．

証明）

I 上の任意の点 $x=a$ において，

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(kf(x)+lg(x)) &= k\lim_{x\to a}f(x)+l\lim_{x\to a}g(x)\\ &= kf(x)+lg(x)\\ &= (kf(x)+lg(x))|_{x=a}\end{aligned}$$

により，$kf(x)+lg(x)$ は $x=a$ で連続すなわち I 全体でも連続になる．

$\Rightarrow f(x)-g(x)$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も全く同様にして証明できる．

定理 2（最大値・最小値の定理）

$f(x)$ が $a\leq x\leq b$ 上で連続であるとき，$f(x)$ は $a\leq x\leq b$ 上で” 必ず最大値と最小値をそれぞれとる”．

定理 3（中間値の定理）

$f(x)$ が $a\leq x\leq b$ 上で連続かつ $f(a)\cdot f(b)\leq 0$ であるとき，$f(x)=0$ は $a\leq x\leq b$ 上で少なくとも 1 つの実数解をもつ．

$\because$ 上を満たす点 A,B を連続なグラフ $y=f(x)$ で結べば，$y=f(x)$ は（$a\leq x\leq b$ 上のどこかで）x 軸を横切らなければならない．

$\Rightarrow$ 横切る点が $y=f(x)$ と $y=0$ の支点，すなわち $f(x)=0$ の実数解になる．

1.7　微分法

これは式を参照する例です．

$$E=mc^2 \tag{2}$$

以下は参照．4 ページの式 (2) によれば，...

$a_1+a_2+\cdots+a_n$

$\underset{x}{\rightarrow}$

$\xrightarrow[abc]{xyz}$
$\ddot{\mathrm{A}}, \dot{x}$
$\iiiint$
$\sqrt{x} + \sqrt{y}$
$\arg\min_x f(x)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \hdotsfor{3} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \text{ のとき} \\ -x & \text{それ以外のとき} \end{cases} \tag{4}$$

$\dfrac{a}{b}$

$$E = mc^2 \tag{$*$}$$

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{split} \sinh^{-1} x &= \log(x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= x - x^3/6 + 3x^5/40 + \cdots \end{split} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \sin A &= y/r & \cos A &= x/r & \tan A &= y/x \\ \cot A &= x/y & \sec A &= r/x & \csc A &= r/y \end{aligned}$$

$$s_1 = a_1, \tag{7}$$
$$s_2 = a_1 + a_2, \tag{8}$$

一般に

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{9}$$

アインシュタインは

$$E = mc^2$$

と言った。

$a + (-b) = a - b$

(x, y)
$\{0, 1\}$
$2^{2^{2^{2}}}$ $a^{k_{ij}}$ $\mathrm{a_{ij}}$
$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$
別行とは,

$$y = ax^2 + bx + c \tag{10}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \; a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$
$\int_0^1$

$$\int_0^1$$

$$y = \frac{1+x}{1-x}$$

$f(x, y)\, dx\, dy$
$\sqrt{2}\, x$
$i\, j$
$a_{i\, j}$
$(x), [x], \{x\}, \lfloor x \rfloor, \lceil x \rceil, \langle x \rangle$
$\bigl\{ a_k \bigm| k \in \{1, 2, 3\} \bigr\}$
$\{a_k | k \in \{1, 2, 3\}\}$

$$\left(\frac{A}{B} \right)$$

θ
Ω
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$
$a \div b \times c \oplus d$
$3 \in 2n + 1, 2 \notin 2n + 1$
$x \not\equiv y$
$p(x \mid \theta)$
$x \notin y, x \not\in y$

$$\left\{ x \mid x \leq \frac{1}{2} \right\}$$

$f\colon A \to B$

$\forall A, A \Rightarrow B$

$\sum \prod \int \oint$

$\log x, \cos x, \lim$

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

$m \bmod n$

$a \equiv b \pmod{n}$

$\vec{aeiueoa}$

$\overrightarrow{\mathrm{aeiueoa}}$

$\overbrace{a + \cdots + z}^{26}$

(あえいうえおあ)

$\mathbf{A}$

$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\alpha}$

$\text{ß} = 3.14$

```
sum1 = sum2 = 0;
ans = 0
n = int(input())
for i in range(n):
    n += 1

print(ans)
```

π

$$\begin{matrix} abc & abc & abc \\ x & y & z \end{matrix}$$