-> HECHO/DISEÑO

-> HECHO/DUDA

-> NO HICE/MAL

1.1. Repaso de lógica proposicional

Ejercicio 1. Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones cuando el valor de verdad de a, b y c es *verdadero* y el de x e y es *falso*.

a) $(\neg x \vee b)$

b) $((c \vee (y \wedge a)) \vee b)$

c) $\neg(c \vee y)$

d) $\neg(y \vee c)$

e) $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$

f) $((c \vee y) \wedge (a \vee b))$

g) $(((c \vee y) \wedge (a \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge a) \vee b))$

h) $(\neg c \wedge \neg y)$

$a, b, C = V$

$X, Y = F$

a) $(\neg F \vee V) = (V \vee V) = V$

b) $((V \vee (F \wedge V)) \vee V) = ((V \vee F) \vee V)$

$= (V \vee V) = V$

c) $\neg(V \vee F) = \neg V = F$

d) $\neg(F \vee V) = \neg V = F$

e) $(\neg(V \vee F) <=> (\neg V \wedge \neg F))$

$= (F <=> (F \wedge V)) = (F <=> F) = V$

f) $((V \vee F) \wedge (V \vee V)) = (V \wedge V) = V$

g) $(((V \vee F) \wedge (V \vee V)) \Leftrightarrow (V \vee (F \wedge V) \vee V)$

$= ((V \wedge V) \Leftrightarrow (V \vee F \vee V) = V \Leftrightarrow V = V$

no hay orden xq son todos "$\vee$"

h) $(\neg V \wedge \neg F) = F \wedge V = F$

Ejercicio 2. Considere la siguiente oración: "Si es mi cumpleaños o hay torta, entonces hay torta".

- Escribir usando lógica proposicional y realizar la tabla de verdad
- Asumiendo que la oración es verdadera y hay una torta, qué se puede concluir? Caso
- Asumiendo que la oración es verdadera y no hay una torta, qué se puede concluir? Caso
- Suponiendo que la oración es mentira (es falsa), se puede concluir algo? Caso

P ↳ El resultado? osea $P \vee Q \Rightarrow Q = F$?

a)

P = ES MI CUMPLEAÑOS

Q = HAY TORTA

Si $P \vee Q \Rightarrow Q$ solo falso si VF

P	Q	$P \vee Q$	$P \vee Q \Rightarrow Q$

V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	F	V

b) La proposición es V, pues $P \vee Q = V \vee V = V$

y luego $P \vee Q \Rightarrow Q = V \Rightarrow V = V$

c) La proposición es F, pues $P \vee Q = V \vee F = V$

y luego $P \vee Q \Rightarrow Q = V \Rightarrow F = F$

d) Si no es el cumpleaños ni hay torta, queda $F \vee F \Rightarrow F = V$

La proposición es verdadera.

OJO: Lo hice de dos maneras, colocando b, c y d o poniendo juntos en las posibilidades.

Si cuando dice "ORACIÓN VERDADERA"

se refiere a $P \vee Q \Rightarrow Q = V$ únicamen

solo la de los puntos

Ejercicio 3. ★ Usando reglas de equivalencia (conmutatividad, asociatividad, De Morgan, etc) determinar si los siguientes pares de fórmulas son equivalencias. Indicar en cada paso qué regla se utilizó.

a)
- $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$

b)
- $\neg(\neg p) \rightarrow (\neg(\neg p \wedge \neg q))$
- q

c)
- $((True \wedge p) \wedge (\neg p \vee False)) \rightarrow \neg(\neg p \vee q)$
- $p \wedge \neg q$

d)
- $(p \vee (\neg p \wedge q))$
- $\neg p \rightarrow q$

e)
- $p \rightarrow (q \wedge \neg(q \rightarrow r))$
- $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r))$

CONMUTATIVIDAD: $A \vee B = B \vee A$, $B \wedge A = A \wedge B$

$A \Leftrightarrow B = B \Leftrightarrow A$

DISTRIBUTIVA: $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

DE MORGAN: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

ASOCIATIVA: $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

1. Doble negación
   $(\neg\neg p \leftrightarrow p)$
2. Idempotencia
   $((p \wedge p) \leftrightarrow p)$
   $((p \vee p) \leftrightarrow p)$
3. Asociatividad
   $(((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r)))$
   $(((p \vee q) \vee r) \leftrightarrow (p \vee (q \vee r)))$
4. Conmutatividad
   $((p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p))$
   $((p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p))$
5. Distributividad

5. Distributividad
$((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$
$((p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$

6. Reglas de De Morgan
$(\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$
$(\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q))$

a) $(p \vee q) \wedge (p \vee r) \stackrel{?}{=} \neg p \Rightarrow (q \wedge r)$

Dist $\Rightarrow$ $p \vee (q \wedge r) \stackrel{?}{=} \neg p \Rightarrow (q \wedge r)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$\neg p \Rightarrow (q \wedge r)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

Son equivalentes

b) $\neg(\neg p) \Rightarrow (\neg(\neg p \wedge \neg q)) \stackrel{?}{=} q$

Doble neg = V
Morgan $p \Rightarrow (\neg\neg p \vee \neg\neg q) \stackrel{?}{=} q$

$p \Rightarrow p \vee q \stackrel{?}{=} q$

P	Q	$P \vee q$	$P \Rightarrow P \vee q$
V	V	V	V
V	F	V	V

F	V	V	V
F	F	F	V

Por las equivalencias

c) $((V\land p)\land(\neg p\lor F)) \Rightarrow \neg(\neg p\lor q) \stackrel{?}{\equiv} p\land\neg q$

DE MORGAN

$= ((V\land p)\land(\neg p\lor F)) \Rightarrow \neg\neg p\land\neg q \stackrel{?}{\equiv} p\land\neg q$

DOBLE NEG

$= ((V\land p)\land(\neg p\lor F)) \Rightarrow p\land\neg q \stackrel{?}{\equiv} p\land\neg q$

si fueran ambas P. Dist

si P es falso, $V\lor F = V$

si $P = V$ ent. $V\land V = V$

p	q	$\neg p$	$V\land p$	$\neg p\lor F$	$\overbrace{(V\land p)\land(\neg p\lor F)}^{A}$	$\overbrace{p\land\neg q}^{B}$	$A\Rightarrow B$
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	F	V	F	F	V

$A \Rightarrow B \doteq B.$

No son equivalentes

d) $(p \vee (\neg p \wedge q)) \overset{?}{\doteq} \neg p \Rightarrow q$

Dist $\overbrace{(p \vee \neg p)}^{V} \wedge (p \vee q) = \neg p \Rightarrow q$

$\neg$ $V \vee F$, $F \vee V$ siempre da V.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg p$	$p \vee q$	$(p \vee \neg p) \wedge (p \vee q)$	$\neg p \Rightarrow q$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	F	F

son equivalentes

e) $p \Rightarrow (q \wedge \neg(q \Rightarrow r)) \overset{?}{\doteq} (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee (q \vee \neg r))$

Me dió fiaca. Mucho texto

Ejercicio 4. Determinar si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.

a) $(p \vee \neg p)$

b) $(p \wedge \neg p)$

d) $((p \wedge q) \rightarrow p)$

e) $((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$

c) $((\neg p \lor q) \leftrightarrow (p \to q))$

f) $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$

TAUTOLOGÍA: TODO V

CONTINGENCIA: V y F.

CONTRADICCIÓN: TODO F

a) $(P \lor \neg P)$ = TAUTOLOGÍA $\Rightarrow$

P	¬P	P ∨ ¬P
V	F	V
F	V	V

b) $(P \land \neg P)$ = CONTRADICCIÓN $\Rightarrow$

P	¬P	P ∧ ¬P
V	F	F
F	V	F

c) $((\neg P \lor q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow q))$ = TAUTOLOGÍA

P	q	¬P	¬P ∨ q	P ⇒ q	((¬P ∨ q) ⇔ (P ⇒ q))
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

d) $((P \land q) \Rightarrow P)$ = TAUTOLOGÍA

P	q	P ∧ q	(P ∧ q) ⇒ P
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

$P \land (q \lor r)$

e) $((p\wedge(q\vee r)))\Leftrightarrow((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$ = TAUTOLOGÍA

p	q	r	q∨r	A: p∧(q∨r)	B: ((p∧q)∨(p∧r))	A<=>B
V	V	V	V	V	V v V=V	V
V	V	F	V	V	V v F=V	V
V	F	V	V	V	F v V=V	V
V	F	F	F	F	F v F=F	V
F	V	V	V	F	F v F=F	V
F	V	F	V	F	F v F=F	V
F	F	V	V	F	F v F=F	V
F	F	F	F	F	F v F=F	V

f) $((p\Rightarrow(q\Rightarrow r)))\Rightarrow((p\Rightarrow q)\Rightarrow(p\Rightarrow r))$ CONTINGENCIA

p	q	r	q=>r	A: p=>(q=>r)	(p=>q)	(p=>r)	B: (p=>q)=>(p=>r)	A=>B
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	F
V	F	V	V	V	F	V	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V

Ejercicio 5. Dadas las proposiciones lógicas α y β, se dice que α es más fuerte que β si y sólo si $\alpha \to \beta$ es una tautología. En este caso, también decimos que β es más débil que α. Determinar la relación de fuerza de los siguientes pares de fórmulas:

2/3

1

a) *True*, *False*

b) $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$

c) p, $(p \wedge q)$

d) p, $(p \vee q)$

e) p, q

f) p, $(p \to q)$

FALSE TRUE

¿Cuál es la proposición más fuerte y cuál la más débil de las que aparecen en este ejercicio?

HAY 3 CASOS

- Si $A\to B \wedge B\to A$ son tautologías son equivalentes.
- [illegible]

Puede ser que A->B y B->A ninguna sea tautología: son ambas contingencias => NO HAY RELACIÓN FUERZA

· Puede que A->B sea TAUTOLOGÍA pero B->A no sea:

A es más fuerte que B.

$\alpha > \beta$ sii $\alpha \Rightarrow \beta$ es tautología

a) α = True β = False $\alpha \Rightarrow \beta$ = F

α = False β = True $\alpha \Rightarrow \beta$ = V β es más fuerte que α

b) $\alpha = (p \wedge q)$, $\beta = (\hat{p} \vee \hat{q})$ (PROP PROP) $(p \wedge q)$ es más fuerte que $(p \vee q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \Rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

$p \wedge q$ es más fuerte q p . $p \wedge q$ es más fuerte que q

$p \subseteq p \wedge q$

c) p, $(p \wedge q)$ $p \wedge q$ es más fuerte q p

p	q	$p \wedge q$	$p \Rightarrow (p \wedge q)$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

d) p, $(p \vee q)$ p es más fuerte que $(p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

e) p, q : ninguna es más fuerte. No $\exists$ relación de fuerza entre p y q

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$

V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

f) $p, p \Rightarrow q$ Ninguna es más fuerte. No $\exists$ relación entre p y $p \Rightarrow q$.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	F

1.2. Trivaluada

Ejercicio 6. Asumiendo que el valor de verdad de b y c es *verdadero*, el de a es *falso* y el de x e y es *indefinido*, indicar cuáles de los operadores deben ser operadores "luego" para que la expresión no se indefina nunca:

a) $(\neg x \vee b)$

b) $((c \vee (y \wedge a)) \vee b)$

c) $\neg(c \vee y)$

d) $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$

e) $((c \vee y) \wedge (a \vee b))$

f) $(((c \vee y) \wedge (a \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge a) \vee b))$

g) $(\neg c \wedge \neg y)$

La idea es pensar donde aplicar el $\vee_L$, $\wedge_L$. En algunos lenguajes de programación corta operar, se cumple una

El luego lo debo poner para evitar la indef.
Si tengo $(V \vee (\bot \wedge V))$ se indefine xq el $\vee$ va a evaluar ambos lados. el $\vee_L$ hace que corte operar sea true xq el $\vee$ con un V basta

a) $(\neg x \vee b)$ No se puede resolver.

$(\neg \bot \vee V)$ = SE INDEFINE ✓

b) $((c \vee_L (y \wedge a)) \vee b) = ((V \vee_L (\bot \wedge F)) \vee V)$

Corta con este V

$= ((V \vee_L \bot) \vee V) = V \vee V = V$ ✓

c) $\neg(c \vee_L y) = \neg(V \vee_L \bot) = \neg V = F$ ✓

Corta con este V.

d) $(\neg(c \vee y) \Leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$

$(\neg(V \vee_L \bot) \Leftrightarrow (F \wedge_L \bot))$

↳ Corta con F xq el y necesita dos ∧

$(F \Leftrightarrow F) = V$ ✓

e) $((c \vee \gamma) \wedge (a \vee b))$

$((V \vee_L \bot) \wedge (F \vee V))$

$(V \wedge V) = V$ ✓

f) $(((c \vee \gamma) \wedge (a \vee b)) \Leftrightarrow (c \vee (\gamma \wedge a) \vee b))$

$(((V \vee_L \bot) \wedge (F \vee V)) \Leftrightarrow (V \vee_L (\bot \wedge F) \vee V))$

$V \wedge V \Leftrightarrow V \vee_L \bot \vee V$ → agrupo.

$V \Leftrightarrow (V \vee_L \bot) \vee V$ ✓

$V \Leftrightarrow V$ ✓

g) $(\neg c \wedge \neg \gamma)$

$(F \wedge_L \bot) = F$ ✓

↳ Cortó con F xq el ∧ necesita $V \wedge V$

EXTRA: $(a \vee g) = \bot$ xq $(F \vee \bot) = \bot$

Ejercicio 7. Sean p, q y r tres variables de las que se sabe que:

- p y q nunca están indefinidas,
- r se indefine sii q es *verdadera*

Proponer una fórmula que nunca se indefina, utilizando siempre las tres variables y que sea verdadera si y solo si se cumple que:

a) Al menos una es verdadera.

b) Ninguna es verdadera.

c) Exactamente una de las tres es verdadera.

d) Sólo p y q son verdaderas.

e) No todas al mismo tiempo son verdaderas.

f) r es verdadera.

$p, q \neq \bot \qquad r = \bot \Leftrightarrow q = V$

FÓRMULA NUNCA SE INDEFINA, USANDO p, q y r

P	q	F
V	V	⊥
V	V	⊥
V	F	? => V?
V	F	? => F?
F	V	⊥
F	V	⊥
F	F	? => V?
F	F	? => F?

1.3. Cuantificadores

↗ EN CUANT.

Ejercicio 8. ★ Determinar, para cada aparición de variables, si dicha aparición se encuentra libre o ligada. En caso de estar ligada, aclarar a qué cuantificador lo está. En los casos en que sea posible, proponer valores para las variables libres de modo tal que las expresiones sean verdaderas.

DELIMITA

a) $(\forall x : \mathbb{Z})(0 \leq x < n \rightarrow \ x + y = z)$ -> si $X \geq 0$ y $X < M$ ocurre que $X+Y=Z$ =>

b) $(\forall x : \mathbb{Z})((\forall y : \mathbb{Z})((0 \leq x < n \land 0 \leq y < m) \rightarrow x + y = z))$

c) $(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < 10 \rightarrow j < 0)$

d) $(\forall j' : \mathbb{Z})(j' \leq 0 \rightarrow P(j')) \land P(j)$ -> si $j' \leq 0$ se cumple $P(j')$ y $P(j)$

a) X: Ligada al ∀

m, Y, Z: Variables libres.

Para que sea verdadero debe cumplir el ∀.

Como tengo -> debe cumplirse $X+Y=Z$

M = límite de iteración. X = MÁX m−1.

-> Si $m > 2$ es imposible xq no puedo elegir un Y, Z q valga siempre

Ej: $m = 4$ $Y = 2$

1. $0 + 2 = 2 \rightarrow Z$
2. $1 + 2 = 3 \rightarrow Z$
3. $2 + 2 = 4 \rightarrow Z$
4. $3 + 2 = 5 \rightarrow Z$

Luego como $0 \leq 4 < 4$ es falso no sigue, el -> se cumple siempre xq el cuantificador es falso siempre es el antecedente es falso.

Para que sea VERDADERO,

Ej: $n=1$, $y=1$, $z=1$ ↳ V→V

Ej 2: $n=-5$, $y=10$, $z=10$ ↳ F→V

Ej 3: $n=-5$, $z=10$, $y=-5$ ↳ F→F

b) $(\forall x:\mathbb{Z})((\forall y:\mathbb{Z})((0\leq x<n \wedge 0\leq y<m)\rightarrow x+y=z))$

x: ligada al primer $\forall$ $(\forall x:\mathbb{Z})$

y: ligada al segundo $\forall$ $(\forall y:\mathbb{Z})$

Variables libres: n, m y z

$(V\wedge F)\rightarrow V$

$(F\wedge F)\rightarrow F$

Ej: $n=1$ $m=0$ $z=1$, Ej 2: $n=-5$ $m=-4$, $z=-7$, si $n>1$, se cumple. no puedo elegir un solo z

c) $(\forall j:\mathbb{Z})(0\leq j<10\rightarrow j<0)$

j: ligada al $\forall$.

Variables libres: no hay ninguna otra variable. la única es j, y está ligada

Como j está ligada NO $\exists$ solución VERDADERA.

xq siempre es $V\rightarrow F=F$.

d) $(\forall j:\mathbb{Z})(j\leq 0\rightarrow P(j))\wedge P(j)$

j: ligada al cuantificador $\forall$

Observación, olvidemos ... de lo que ...

P

j : Variable libre.

Depende de que P(j) sea verdadero.

Supongamos que $(\forall j' : \mathbb{Z})(j' \leq 0 \to P(j'))$ es verdadero:

- $j' > 0$ y $P(j) = V$ $\Rightarrow (F \to ?) \wedge V = V$
- $(j' \leq 0$ y $P(j')$ es $V)$ y $P(j) = V$

$\Rightarrow (V \to V) \wedge = V$

Si $j' \leq 0 \to P(j')$ es V, así vale el cuantificador universal y por lo tanto vale P(j).

Así suponiendo que j' es negativo, y vale $(\forall j' : \mathbb{Z})(j' \leq 0 \to P(j'))$ así $j < 0$ es V siempre.

Vale $\forall j \leq 0$

Ejercicio 9. ★ Sea $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualquiera. Explicar cuál es el error de traducción a fórmulas de los siguientes enunciados. Dar un ejemplo en el cuál sucede el problema y luego corregirlo.

a) *"Todos los naturales menores a 10 cumple P"*

$(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \wedge P(i))$ $i = -1$, $F \wedge ? = F$. $(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \to P(i))$ $i = -1$, $F \to ? = V$

b) *"Algún natural menor a 10 cumple P"*

$(\exists i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \to P(i))$

c) *"Todos los naturales menores a 10 que cumplen P, cumplen Q"*:

$(\forall x : \mathbb{Z})((0 \leq x < 10) \to (P(x) \wedge Q(x)))$

d) *"No hay ningún natural menor a 10 que cumpla P y Q"*:

$\neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge P(x))) \wedge \neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge Q(x)))$

Son predicados xq están en mayúscula. Los predicados devuelven solo VERDADERO O FALSO del mundo de la lógica. Permiten CUANTIFICADORES

No devuelven tipo de dato.

$\forall$: $\forall$+FILTRO+ $\rightarrow$. Generaliza la conjunción. $P(1)V \wedge P(2)V \ldots \Rightarrow P(M)V$

$\exists$: $\exists$+FILTRO+ $\wedge$. Generaliza la disyunción. $P(1)V \vee P(2)V \ldots \Rightarrow P(M)V$

a) Tenemos un i, que sea cualquier entero. Para que el "$\wedge$" se cumpla i debe ir entre 0 y 9 incluidos y además P(i) cumplirse.

Cuando utilizamos un cuantificador universal debemos utilizar la implicación.

$$(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \rightarrow P(i))$$

Con el "$\wedge$" estamos obligando a que i esté entre 0 y 9 (incl.) y además P(i) se cumpla.

El "$\wedge$" nos está generando dos condiciones distintas.

- Contraejemplo: i = 5 , pero puede que P(4) sea falso.

→ generaliza

$$\underbrace{\text{"TODOS LOS NATURALES MENORES A 10,}}_{\text{ANT}} \Rightarrow \underbrace{\text{CUMPLEN P"}}_{\text{CONS.}}$$

b) • Contraejemplo: i: 5, puede que $0 \leq i < 10$ pero P(i) sea falso y VF = F en implicación

Para que el ∃ funcione, necesitamos usarlo con cuantificador existencial (mas bonito 1 solo caso)

$(\exists i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \wedge P(i))$

-> no habla se nadie en específico

"ALGÚN NATURAL MENOR A 10 CUMPLE P"

$\underbrace{\text{ALGÚN NATURAL MENOR}}_{\text{ANT}}$ A $\underbrace{\text{10 CUMPLE P}}_{\text{CONS}}$

P $\wedge$ Q

c) $(\forall x : \mathbb{Z})(((0 \leq x < 10) \to P(x)) \to Q(x))$

Repaso 9

Ejercicio 9. ★ Sea $P(x:\mathbb{Z})$ y $Q(x:\mathbb{Z})$ dos predicados cualquiera. Explicar cuál es el error de traducción a fórmulas de los siguientes enunciados. Dar un ejemplo en el cuál sucede el problema y luego corregirlo.

a) *"Todos los naturales menores a 10 cumple P"*
$(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \wedge P(i))$

) IGNORO LOS MAYORES A 10 Y MENORES A 0.
PARA LOS FUERA DEBE DAR TRUE -> CON SI SALE DE RANGO
LA IDEA SERÍA Q EL ∀ SIEMPRE DE TRUE XQ
SINO MATA A TODOS INCLUSIVE <10

b) *"Algún natural menor a 10 cumple P"*
$(\exists i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \to P(i))$

$\wedge$

c) *"Todos los naturales menores a 10 que cumplen P, cumplen Q"*:
$(\forall x : \mathbb{Z})((0 \leq x < 10) \to (P(x) \wedge Q(x)))$

] P

d) *"No hay ningún natural menor a 10 que cumpla P y Q"*:
$\neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge P(x))) \wedge \neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge Q(x)))$

] P

a) Cuando i = 10 Nonde: F ∧ ? = F

Si cambio "∧" por "->" sería V sin importar otra cosa xq si i = -1 no debería ser evaluable.

Si es mayor que 10 se sale de rango y no vale menos

OBS: siempre que hay un rango, siempre valido q para cuanto ignoro el resto.

$(\forall i:\mathbb{Z})(0\leq i<10 \land P(i))$

Si mando $i=120$ se rompe

$i=4$, VALE $(V \land V)$

$i=-1$, NO VALE $(F \land ?)=F$, $i=11$ → CONTRAEJEMPLO

CONTRAEJEMPLO

Para corregir: $(\forall i:\mathbb{Z})((0\leq i<10)\rightarrow P(i))$

b) $(\exists i:\mathbb{Z})((0\leq i<10)\rightarrow P(i))$

Acá dice que todo $i<10$ vale que $P(i)$ osea, $0,1,2,3,4,\dots,9$ vale $P(i)$

$i=-1 \Rightarrow F\rightarrow ?=V$
$i=12 \Rightarrow F\rightarrow ?=V$

En este caso hay soluciones que NO están en rango y DAN VERDADERO IGUAL.

Ent, $(\exists i:\mathbb{Z})((0\leq i<10)\land P(i))$

Tomando fuera su rango, el implica me hace todo verdadero. Osea me importa $P(i)$ solo si $0\leq i<10$. En términos como debería estar falso.

$\forall$ + RESTRIC RANGO + $\rightarrow$

↳ SI NO CUMPLE FILTRO = V

$\exists$ + RESTRIC + $\wedge$

↳ SI SALE RANGO: F

✓

c) $((\forall x:\mathbb{Z})((0 \leq x < 10 \wedge P(x)) \rightarrow Q(x))$

Contraejemplo: ~

d) OP1: $((\forall x:\mathbb{Z})(0 \leq x < 10) \Rightarrow \neg(P(x) \wedge Q(x)))$ ✗

OP2: $\neg((\exists x:\mathbb{Z})(0 \leq x < 10) \wedge (P(x) \wedge Q(x)))$ ✓

Ejercicio 10. ★ Sean $P(x:\mathbb{Z})$ y $Q(x:\mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen. Escribir el predicado asociado a cada uno de los siguientes enunciados:

- a ▪ *"Existe un único número natural menor a 10 que cumple P"*
- b ▪ *"Existen al menos dos números naturales menores a 10 que cumplen P"*
- c ▪ *"Existen exactamente dos números naturales menores a 10 que cumplen P"*
- d ▪ *"Todos los enteros pares que cumplen P, no cumplen Q"*
- e ▪ *"Si un entero cumple P y es impar, no cumple Q"*
- f ▪ *"Todos los enteros pares cumplen P, y todos los enteros impares que no cumplen P cumplen Q"*
- g ▪ *"Si hay un número natural menor a 10 que no cumple P entonces ninguno natural menor a 10 cumple Q; y si todos los naturales menores a 10 cumplen P entonces hay al menos dos naturales menores a 10 que cumplen Q"*

a) $(\exists i:\mathbb{Z})((0 \leq i < 10 \wedge P(i)) \wedge (\forall j:\mathbb{Z})((0 \leq j < 10 \wedge P(j)) \rightarrow j = i))$ ✓

$\cancel{(\exists i:\mathbb{Z})((0 \leq i < 10 \wedge P(i))} \wedge \neg(\forall j:\mathbb{Z})((0 \leq j < 10 \wedge P(j) \wedge i \neq j))$

VEO ∃ EXISTAN 2, DESPUÉS NO IMP

b) $(\exists i:\mathbb{Z})(\exists j:\mathbb{Z})(0 \leq i < 10 \wedge 0 \leq j < 10 \wedge i \neq j) \wedge P(i) \wedge P(j)$ ✓

d) $(\forall i:\mathbb{Z})(((i \bmod 2 == 0) \wedge P(i)) \rightarrow \neg Q(i))$ ✓

e) ¿if? $(\exists i:\mathbb{Z})(((P(i) \wedge \neg(i \bmod 2 == 0)) \rightarrow \neg Q(i))$ ✓

f) $(\forall i : \mathbb{Z})(((i \bmod 2 == 0 \rightarrow P(i)) \wedge$

$((\neg(i \bmod 2 == 0) \wedge \neg(P(i))) \rightarrow Q(i))$

g) TODO

- $n < 10$ y $\neg P(i) \rightarrow \neg[\exists i;\ 0 \leq i < 10 \rightarrow Q(i)]$
- $(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < 10 \wedge P(i) \rightarrow (\exists j, k : \mathbb{Z})(0 \leq j, k < 10 \rightarrow Q(j) \wedge Q(k))$

Si: $((\exists i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10 \wedge \neg P(i)) \rightarrow (\neg((\exists j : \mathbb{Z})(0 \leq j < 10 \rightarrow Q(j)))$

$\wedge ((\forall k : \mathbb{Z})(0 \leq k < 10 \wedge P(k)) \rightarrow (\exists a, b : \mathbb{Z})(0 \leq a, b < 10 \wedge a \neq b \wedge Q(a) \wedge Q(b))$

¿Como interpretas el ;? g

¿Como interpretas el "al menos"? b

¿Como interpretas el "si"? e

¿Cuando que tiene f ser V cuando no cumple el filtro y cuando f?

↳ x g: el $\forall$ si no en rango debe ser V

¿El existe, siempre falso?

si un entero cumple P = $(\forall i : \mathbb{Z})$

Ejercicio 11. ★ Sean $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z}, y : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen. Escribir el predicado asociado a cada uno de los siguientes enunciados:

?

- *"Si un entero cumple P, entonces existe un entero distinto tal que juntos cumplen Q"*

- *"Existe un par de enteros tal que cumplen Q y ninguno de ambos cumple P"*
- *"Si un par de enteros cumplen Q, entonces al menos uno de ellos cumple P"* ?
- *"Si un entero cumple P, no existe ningún entero tal que juntos cumplan Q"* ?

1) $(\forall i : \mathbb{Z}) \left(P(i) \rightarrow \left((\exists j : \mathbb{Z}) (i \neq j \wedge Q(i,j)) \right) \right)$ ✓

2) $(\exists i, j : \mathbb{Z}) (Q(i,j) \wedge \neg (P(i) \vee P(j)))$ ✓

3) $(\forall i, j : \mathbb{Z}) (Q(i,j) \rightarrow (P(i) \vee P(j)))$ ✓

↳ PRIMERO RECORRE i, luego j.

4) $(\forall i : \mathbb{Z}) (P(i) \rightarrow \neg (\exists j : \mathbb{Z}) (Q(i,j)))$ ✓

Ejercicio 12. ★ Sean $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen y sean a, b y k enteros. Decidir en cada caso la relación de fuerza entre las dos fórmulas:

a) $P(3)$ } A
   $k > 5 \wedge (\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < k) \rightarrow P(n))$ } B

b) $P(3)$ } A
   $k > 5 \wedge (\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < k \wedge P(n))$ } B

c) $(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10 \wedge P(n)) \rightarrow Q(n))$] A
   $(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \rightarrow Q(n))$] B

d) $(\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 10 \wedge P(n) \wedge Q(n))$
   $(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \rightarrow Q(n))$

e) $k = 0 \wedge (\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 10 \wedge P(n) \wedge Q(n))$
   $k = 0 \wedge ((\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < k) \rightarrow Q(n)))$

a) B me dice que $P(0), P(1), P(2), \underbrace{P(3)}_{¡A!}$ y $P(4)$ son verdaderos xq si K debe ser $\overbrace{\text{mayor a 5}}^{6}$, n toma los valores de 0 al 5 MINIMAMENTE. Ahora, si sé que sea

0 a 5 en V, si $n > 6$ y llegara a ser

falso ($P(6), P(7)$) la implicación seguiría siendo

verdadera. Por lo tanto B -> A.

El dato de $P(3)$ sólo me da certeza

sobre que es V en $P(3)$ pero no me

dice nada de los demás (Ej: $P(2)$ no lo sé)

6) A: Sólo me dice que $P(3)$ es V.

B: K COMO MÍNIMO es MAYOR A 5 (SI NO, TODO ES F)

Al usar un $\exists$, sé que n puede tomar

valores del 0 al 5 pero NADA me

garantiza que $P(0), P(1), \ldots, P(5), \ldots P(k-1)$

TODO se hace FALSO.

sean verdadero. Es decir, incluir TODAS

podrían ser falsas.

Luego, A -> B.

c) A: El $\forall$ hace dos cosas

Valida si está entre 0 y 9 el valor de n y si $P(n)$ es V.

Supongamos que el $\forall$ no se cumple, es decir es F. Quedaría $F \to V = V$

Supongamos que el $\forall$ se cumple, es decir es V. Quedaría $V \to V = V$

Es prácticamente imposible que sea F.

B: Me garantiza que si n está entre 0 y 9 $Q(n)$ se cumple. La única posibilidad de que sea falso depende de Q.

Luego, $A \to B$ xq si supongo que B es VERDADERA tendría no cumple la A xq no sé si $P(n)$ se no o cumplió o no.

d) A: $\exists x$ ser un existe me haría un

Solo casos para que sea verdadero.

Sin embargo, es menos difícil xq me pide cumplir 3 conjunciones.
Con que UNA falle ya me hace falso ese caso (MAX 10)

B: me garantiza que si está entre 0 y 9, Q(M). Al ser una implicación, si el rango no se cumpliera igual haría que la implicación PUEDA ser verdadera.

Luego, creo q NO hay relación de fuerza por 2 motivos:

YA ESTOY ABRIENDO A Q ALGUNO FALLE

1. si supongo que EXISTE alguno en A entonces sé que B FUNCA (PERO NO EN TODOS LOS CASOS!)
2. si supongo que PARATODO en B es V,

no me garantiza que f(A) sea V.

e) 1 -> 2 xq la segunda es siempre TRUE ✓