Álgebra I
Práctica 1 - Conjuntos, Relaciones y Funciones

Conjuntos

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

i) $1 \in A$ ii) $\{1\} \subseteq A$ iii) $\{2, 1\} \subseteq A$ iv) $\{1, 3\} \in A$ v) $\{2\} \in A$

1) i) $1 \in A$, sí pues $\{1\} \subseteq A$
(el subconjunto formado por 1 está incluido en A)

ii) $\{1\} \subseteq A$, sí pues todos los elementos $\in A$.

iii) $\{2,1\} \subseteq A$, sí pues todos los elementos del conjunto $\{2,1\}$ están en A.

iV) $\{2\} \in A$, no pues $\{2\}$ no es un elemento de A

2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

i) $3 \in A$	iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$	vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$	x) $\emptyset \subseteq A$
ii) $\{3\} \subseteq A$	v) $\{1, 2\} \in A$	viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$	xi) $A \in A$
iii) $\{3\} \in A$	vi) $\{1, 2\} \subseteq A$	ix) $\emptyset \in A$	xii) $A \subseteq A$

2) i) $3 \in A$. no

ii) $\{3\} \subseteq A$. no pues $3 \notin A$.

iii) $\{3\} \in A$. sí

iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$. Sí pues $\{3\} \in A$.

v) $\{1,2\} \in A$. Sí pues $\{1,2\}$ está como elemento en A.

vi) $\{1,2\} \subseteq A$. Sí pues, del conjunto $\{1,2\}$, $1 \in A$ y $2 \in A$

vii) $\{\{1,2\}\} \subseteq A$ ($\{1,2\} \in A$). Sí

viii) $\{\{1,2\},3\} \subseteq A$ ($\{1,2\} \in A$, $3 \in A$). No

ix) $\emptyset \in A$. No, solo en casos particulares donde $\emptyset$ está presente.

x) $\emptyset \subseteq A$. Sí

xi) $A \in A$ $\{1,2,\{3\},\{1,2\}\} \in A$. NO

$A = \{1\}$ $\qquad$ $A = \{\{1\}\}$

$\{\{\{1\}\}\}$

xii) $A \subseteq A$. Sí. Siempre

¿Como entender rápido?

$\{\{1,2,3\}\} \subseteq A \Leftrightarrow \{1,2,3\} \in A$.

o al revés, $1 \in A \wedge 2 \in A \Rightarrow \{1,2\} \subseteq A$.

3. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos

i) $A = \{1,2,3\},\ B = \{5,4,3,2,1\}$

ii) $A = \{1,2,3\},\ B = \{1,2,\{3\},-3\}$

iii) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 < |x| < 3\},\ B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 < 3\}$

iv) $A = \{\emptyset\},\ B = \emptyset$

3) i) $A = \{1,2,3\}$ $B = \{1,2,3,4,5\}$

¿$A \subseteq B$? ¿Todo elemento de $A \in B$?

Sí $1 \in B$, $2 \in B$ y $3 \in B \Rightarrow A \subseteq B$.

Sí, $A \subseteq B$

ii) $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$

¿Todo elemento de A pertenece a B?

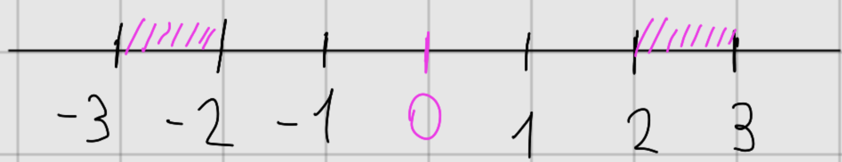
Claro, $1 \in B$, $2 \in B$ y $3 \in B \Rightarrow A \subseteq B$

No, $A \not\subseteq B$

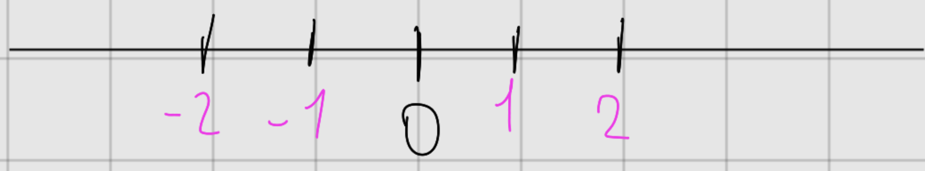
iii) $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 < |x| < 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 3\}$

A =



B =



$¿(-2)^2 < 3?$ no. $¿2^2 < 3?$ no

$¿(-1)^2 < 3?$ sí. $¿(1)^2 < 3?$ sí

no, Contraejemplo: $2.5 \in A$ pero $\{2.5\} \notin B$

iv) $A = \{\emptyset\}$, $B = \emptyset$

$¿\{\emptyset\} \subseteq \emptyset?$ no.

4. Dados los subconjuntos $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$ y $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$ del conjunto referencial $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$, hallar

i) $A \cap (B \triangle C)$ ii) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$ iii) $A^c \cap B^c \cap C^c$

i) $A \cap (B \triangle C)$

$B \triangle C = (B \cup C) - (B \cap C)$

$= \{1, 10, -2, 3, \{3\}, \{1,2,3\}\} - \emptyset$

$= \{1, 10, -2, 3, \{3\}, \{1,2,3\}\}$

$A \cap (B \triangle C) = \{1, -2, 7, 3\} \cap \{1, 10, -2, 3, \{3\}, \{1,2,3\}\}$

$A \cap (B \Delta C) = \{1, -2, 7, 3\} \cap \{1, 10, -2, 3, \{3\}, \{1,2,3\}\}$

$= \{1, -2, 3\}$ ✓

ii) $\underbrace{(A \cap B)}_{1} \Delta \underbrace{(A \cap C)}_{2}$

1. $\{1\}$ 2. $\{-2, 3\}$

$\{1\} \Delta \{-2, 3\} = \{1, -2, 3\}$ ✓

Es igual al i por leyes de morgan (DISTRIBUTIVA)

$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ ✓

iii) $A^c \cap B^c \cap C^c$

Conjunto universal: $\{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1,2,3\}, 3\}$

A^c: Lo que está en Conjunto referencial pero NO en A.

A^c: $\{\{3\}, 10, \{1,2,3\}\}$

$B^c : \{-2, 7, \{1,2,3\}, 3\}$

$C^c : \{1, \{3\}, 7, 10\}$

$A^c \cap B^c \cap C^c = \emptyset$ ✓

5. Dados subconjuntos A, B, C de un conjunto referencial V, describir $(A \cup B \cup C)^c$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^c$ en términos de uniones y complementos.

Aplico De Morgan:

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

i) $(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$

ii) $(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$

Jhala Lullaby

Cara de turrón

$A - B = A \cap B^c$

$A^c = V - A$

$A \cup A^c = V$

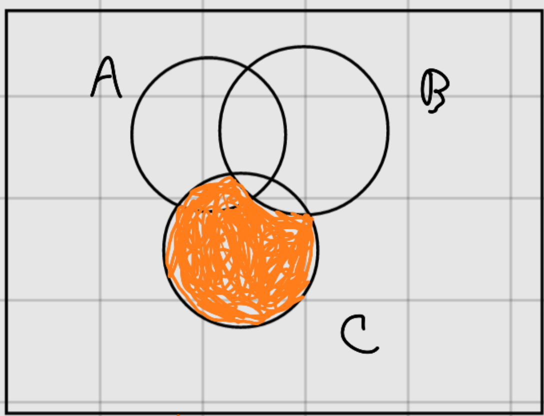
$A \Delta C = (C - A) \cup (A - C)$

$= (C \cap A^c) \cup (A \cap C^c)$

6. Sean A, B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

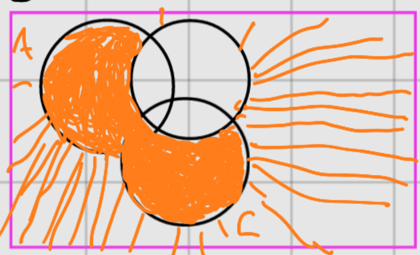
i) $(A \cup B^c) \cap C$ ii) $A \triangle (B \cup C)$ iii) $A \cup (B \triangle C)$

i) $(A \cup B^c) \cap C$



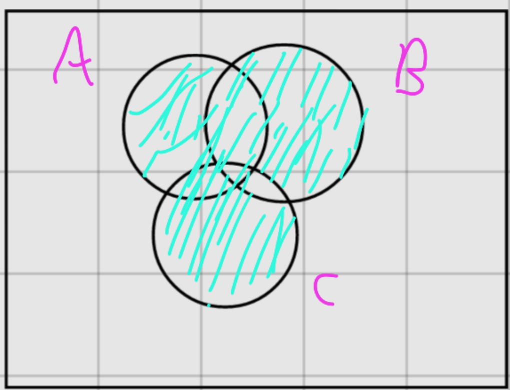
ACLARACIÓN

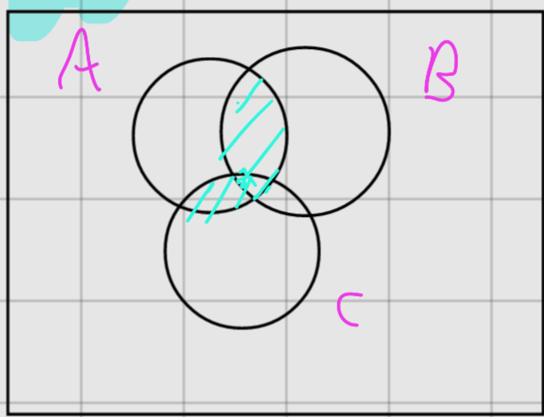
B^c en TODO.

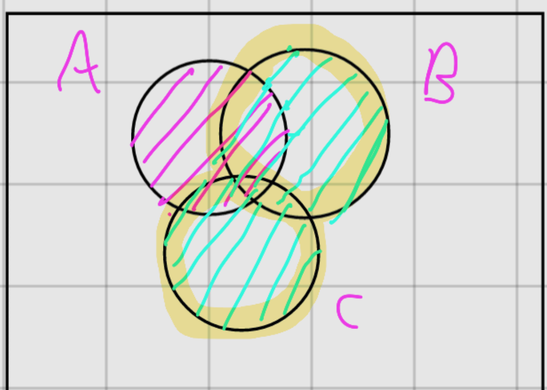


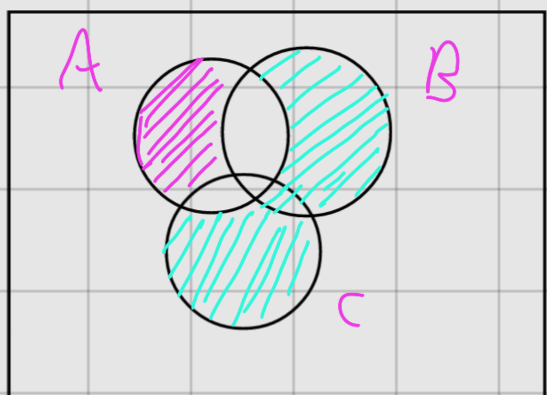
Luego agrego A.

ii) $A \Delta (B \cup C) = (A \cup (B \cup C)) - (A \cap (B \cup C))$



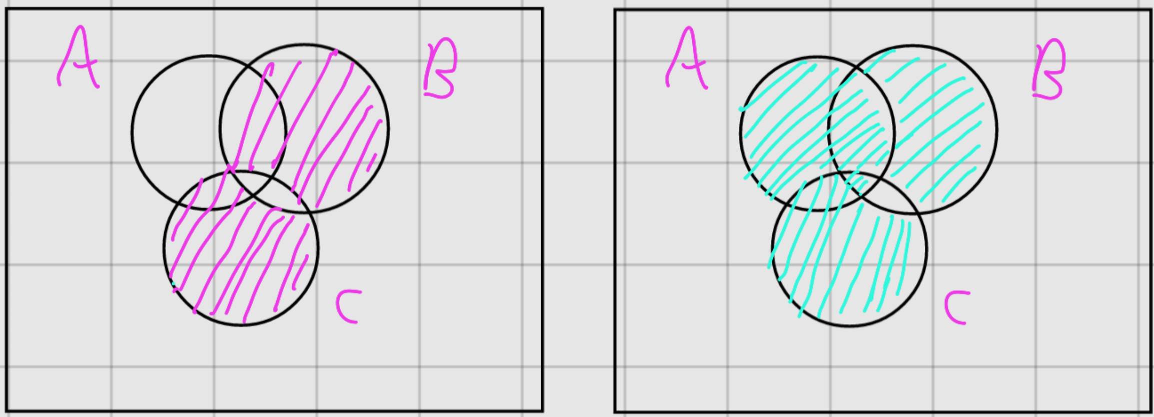






PROCESO: HAGO $A\cap(B\cup C)$, HAGO $A\cup(B\cup C)$, PINTO SOLO $A\cup(B\cup C)$

iii) $A\cup(B\triangle C)$ $\quad B\triangle C=(B\cup C)-(B\cap C)$



PROCESO: HAGO $B\triangle C$, LUEGO PINTO TODO A, AGREGO $B\triangle C$

8. Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos

i) $A=\{1\}$ ii) $A=\{a,b\}$ iii) $A=\{1,\{1,2\},3\}$

Los conjuntos de partes tienen a un elemento, subconjuntos armados por ellos y el vacío.

i) $A=\{1\}$ $\quad \mathcal{P}(A)=\{\emptyset, \{1\}\}$

ii) $A = \{a, b\}$ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ ✓

iii) $A = \{1, \{1,2\}, 3\}$ $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\},$
$\{\{1,2\}\}, \{1,3\}, \{1, \{1,2\}\},$
$\{3, \{1,2\}\}, \{1, \{1,2\}, 3\}\}$ ✓

Vimos fórmula de $\# \mathcal{P}(A) = 2^{\# A}$

$2^{\# A} \Leftrightarrow 2^3 = 8$ ✓

En el conjunto de partes todos son conjuntos formados por elementos.

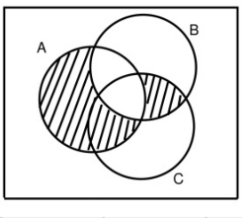
Ej: $A = \{1, 2, 3\}$, $2^3 = 8$

$\mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\},$
$\{1,2,3\}, \{1,3\}, \emptyset\}$

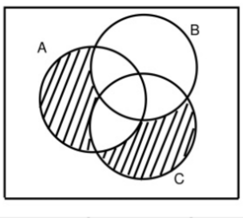
Corregido x profe :)

7. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

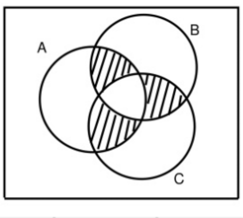
i)



ii)



iii)



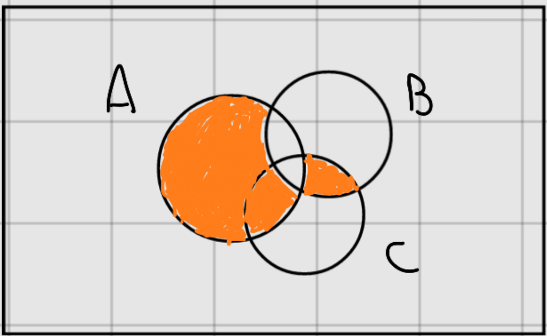
i) A, $A \cap C$, NO ESTÁ $A \cap B \cap C$, $C \cap B$, NO ESTÁ $A \cap B$

$$A \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) - ((A \cap B \cap C) \cup (A \cap B))$$

$$\Updownarrow$$

RTA: $A \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \cap ((A \cap B \cap C) \cup (A \cap B))^c$

VERIF:



ii) $\underbrace{A \Delta C}$, NO ESTÁ $A \cap B$, NO ESTÁ $B \cap C$

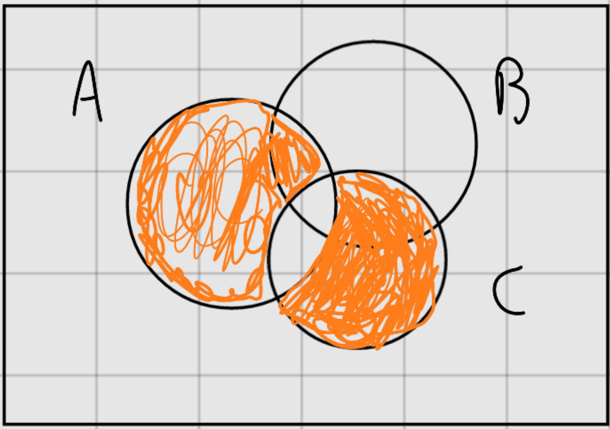
$$(A - C) - (C - A) = (A \cap C^c) \cup (C \cap A^c)$$

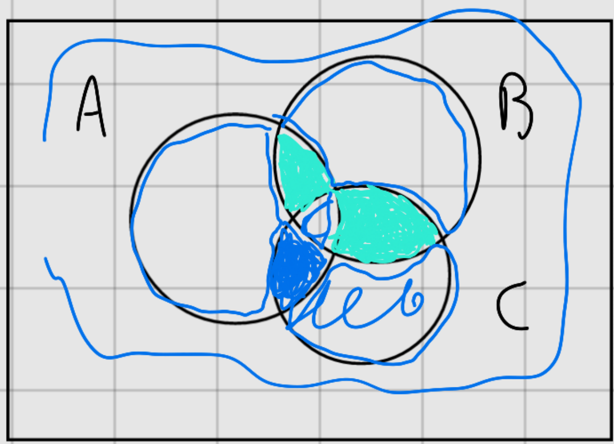
$$((A \cap C^c) \cup (C \cap A^c)) - ((A \cap B) \cup (B \cap C))$$

RTA: $((A \cap C^c) \cup (C \cap A^c)) \cap ((A \cap B) \cup (B \cap C))^c$

1. $((A\cap C^c)\cup(C\cap A^c))$

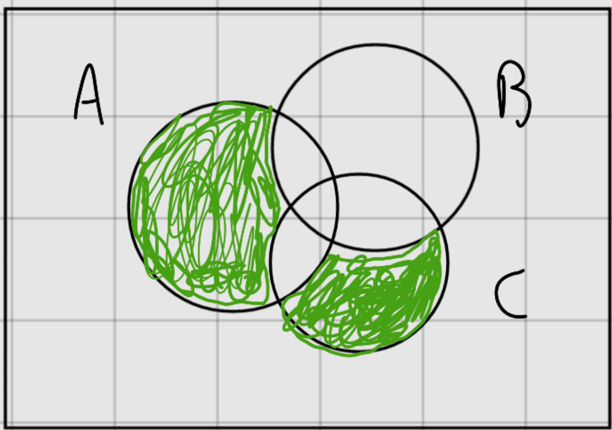
2. $[(A\cap B)\cup(B\cap C)]^c$





ACLARACIÓN: · En celeste $(A\cap B)\cup(B\cap C)$
· En azul: Con el complemento

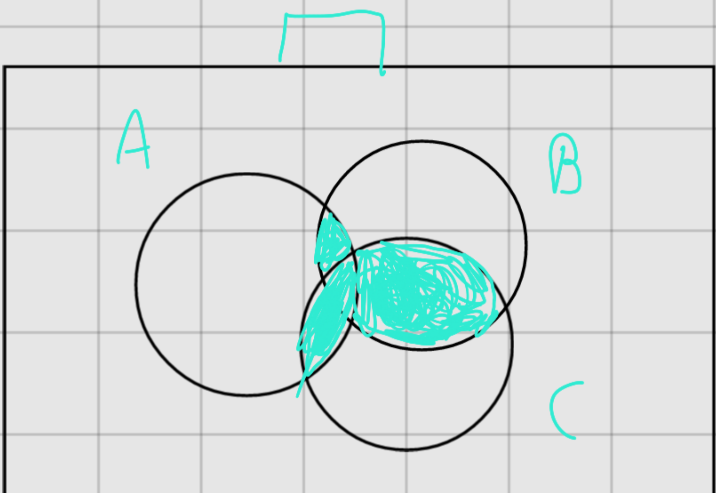
3. TODO:

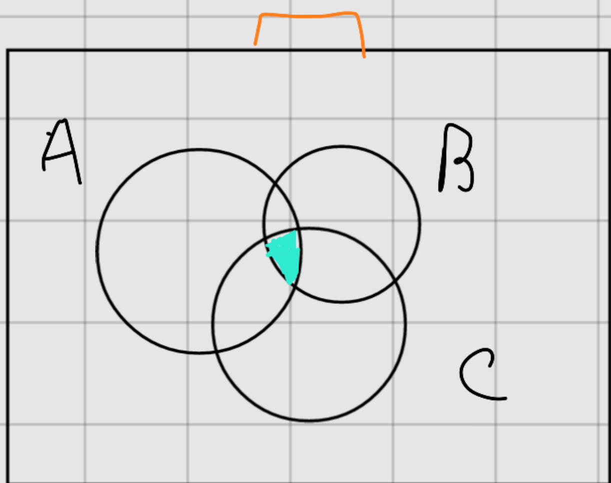


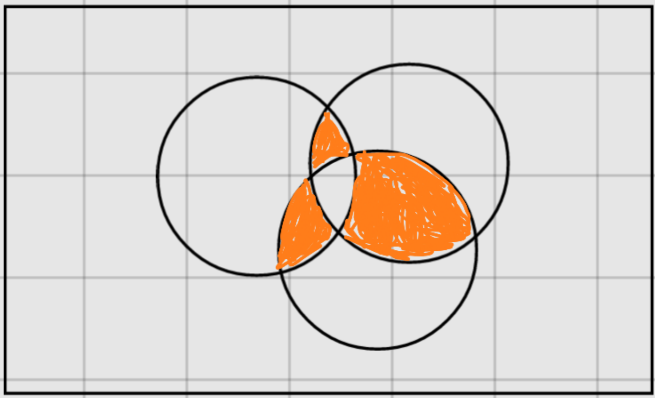
iii)

$$\underbrace{(A\cap C)\cup(A\cap B)\cup(B\cap C)}-\underbrace{(A\cap B\cap C)}$$

RTA: $(A\cap C)\cup(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap B\cap C)^c$







9. Sean A y B conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$.

$$\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$$

$$\Rightarrow)\ \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \underbrace{\Rightarrow}\ A \subseteq B$$

Ejercicio 47: DEMOSTRAR: $A \cup B = B \cup A$

Las igualdades se separan en dos inclusiones. Debemos llevar lo de izq a derecha.

- $A \cup B \subseteq B \cup A$ Pues si son iguales
- $B \cup A \subseteq A \cup B$ $A = \{1,2\}$ $B = \{1,2\}$

$A \subseteq B$ y $B \subseteq A$

Esto es el método de doble inclusión

· $A \cup B \subseteq B \cup A$ (Busco llevar lo izq. a der)

Se comienza colocando que un x pertenece

PASO AL MUNDO LÓGICA

$x \in A \cup B \qquad x \in A \vee x \in B$

Convierto unión

$$\boxed{p \vee q = q \vee p}$$

$x \in B \vee x \in A$

$x \in (B \cup A)$

Probamos que si pongo elemento en A, también está en B.

· $B \cup A \subseteq A \cup B$ (Busco llevar lo izq. a der)

$x \in B \cup A, \quad x \in B \vee x \in A$

$$\boxed{p \vee q = q \vee p}$$

$x \in A \vee x \in B$

$x \in (A \cup B)$

Probamos que si coloco elementos de B, también están en A

Conclusión $A \cup B = B \cup A$

DEMOSTRAR: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Demostración x doble inclusión

- $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$
- $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

$(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$

$x \in (A \cup B) \cup C$, $x \in (A \cup B) \vee x \in C$

$x \in A \vee x \in B \vee x \in C$

$p \vee q \vee r = p \vee (q \vee r)$

$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$

$x \in A \cup (x \in B \cup x \in C)$

$x \in A \cup (B \cup C)$

- $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

$x \in A \cup (B \cup C)$, $\quad x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$

$x \in A \vee x \in B \vee x \in C$

$p \vee q \vee r = p \vee (q \vee r)$

$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$

$x \in (A \cup B) \cup C$

DEMOSTRAR:

$B \subseteq A \cup B$

Coloco elementos en B y demuestro que está en la unión. Utilizo implica

$$x \in B, \quad x \in (A \cup B)$$

$$x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B)$$

$$\underbrace{x \in B}_{p} \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{q} \vee \underbrace{x \in B}_{p}$$

$$p \Rightarrow (q \vee p) \qquad \boxed{p \Rightarrow q = \sim p \vee q}$$

$$\sim p \vee (q \vee p) \qquad \boxed{p \vee q = q \vee p}$$

$$\sim p \vee q \vee p \qquad \boxed{\sim p \vee p = p}$$

$$q \vee \sim p \vee p \qquad \boxed{p \vee V = V}$$

$$q \vee V$$

$$= V$$

Demostramos que $B \subseteq A \cup B$

DEMOSTRAR: $A \cup A = A$

Prueba x doble inclusión

- $A \cup A \subseteq A$
- $A \subseteq A \cup A$

$\underbrace{A \cup A}$ $\subseteq$ $\underbrace{A}$

$x \in A \cup A$ $\quad x \in A \cup x \in A$

$x \in A \vee x \in A$ $\quad \boxed{P \vee P = P}$

$x \in A$

A

Por lo tanto $A \cup A \subseteq A$

$\underbrace{A}\subseteq\underbrace{A\cup A}$

$x\in A \qquad x\in A \vee x\in A$

$x\in(A\cup A)$

Por lo tanto $A\subseteq A\cup A$

se cumple $A=A\cup A$

DEMOSTRAR: $A\cap A=A$

$\Rightarrow)\ A\cap A\subseteq A$

$\Leftarrow)\ A\subseteq A\cap A$

$\Rightarrow)\ x\in A\cap A \qquad x\in A\wedge x\in A$ $\boxed{P\wedge P=P}$

$x\in A$

$\Leftarrow)\ x\in A,\ x\in A\cap x\in A$ $\boxed{P\Leftrightarrow P\wedge P=V}$

$x \in A \wedge x \in A$

$x \in (A \cap A)$

Por lo tanto, $A \cap A \subseteq A$

DEMOSTRAR: $A \cap \emptyset = \emptyset$

DOBLE INCLUSIÓN:

$\Rightarrow)\ A \cap \emptyset \subseteq \emptyset$

$\Leftarrow)\ \emptyset \subseteq A \cap \emptyset$

$\Rightarrow)\ x \in (A \cap \emptyset),\ x \in A \cap \underbrace{x \in \emptyset}_{\text{no puede pasar}}$

¡ABS!

Por lo tanto no puede suceder que $A \cap \emptyset \neq \emptyset$.

Así, $A \cap \emptyset = \emptyset$

DEMOSTRAR: $A \cap B = B \cap A$

- $\overbrace{A\cap B}^{1} \subseteq \underbrace{B\cap A}_{1}$
- $\underbrace{B\cap A}_{2} \subseteq \underbrace{A\cap B}_{2}$

$\Rightarrow)$ $x \in \underbrace{A\cap B}_{1}$, $x\in A \wedge x\in B$ $\quad \boxed{p\wedge q = q\wedge p}$

$$x\in B \wedge x\in A$$

$$x\in (B\wedge A)$$

$$x\in (\underbrace{B\cap A}_{1})$$

$\Leftarrow)$ $x\in \underbrace{B\cap A}_{2}$, $x\in B \wedge x\in A$ $\quad \boxed{p\wedge q = q\wedge p}$

$$x\in A \wedge x\in B$$

$$x\in (A\wedge B)$$

$$x\in (\underbrace{A\cap B}_{2})$$

Por lo tanto vale que:

$$A\cap B = B\cap A$$

9. Sean A y B conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A)\subseteq\mathcal{P}(B) \Leftrightarrow A\subseteq B$.

$X \in P(A) \iff X \subseteq A$

$A \in B, \{A\} \subseteq B$

$P(A) \subseteq P(B), \forall x \in A, \{x\} \in P(B), x \in B$

$\Rightarrow)\ \underbrace{P(A) \subseteq P(B)} \Rightarrow \underbrace{A} \subseteq B$

$x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in P(A)$

$\Rightarrow \{x\} \in P(B) \Rightarrow \{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B$

$P(A) \subseteq P(B)$

Opt 2:

Tomo A como subconjunto

$\overset{\{\ldots\}}{A} \in P(A)$

$\Leftarrow)\ \underbrace{A \subseteq B} \Rightarrow \underbrace{P(A)} \subseteq \underbrace{P(B)}$

$\underbrace{Y \in P(A)}$

$Y \subseteq A$

$\Downarrow$

$Y \subseteq B$

$\Downarrow$

$\underbrace{Y \in P(B)}$

$X \in A$

$Y \in P(B)$

Lo uso mismo variable para distintos casos

1) Coloco elementos en orden.

2) Uso datos izq para llegar a der.

Repaso $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \iff A \subseteq B$

- $\Rightarrow)$ $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$

- $\Leftarrow)$ $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

1) $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$

Supongo el.

$x \in A$, por def sé que si

$x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \wedge \{x\} \in \mathcal{P}(A)$

Por datos del problema sé que

$\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$, entonces

$\{x\} \in \mathcal{P}(B)$ y así $x \in B$.

2) $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

Supongo el.

Ej: $\{1\}$

$x \in \mathcal{P}(A)$, por def sé que si

$x \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow x \subseteq A$.

Por dato sé que $A \subseteq B$, por lo tanto si $X \subseteq A \Rightarrow X \subseteq B$. Así, $X \in P(B)$

11. Hallar contraejemplos para mostrar que las siguientes proposiciones son falsas:

i) $\forall a \in \mathbb{N}$, $\frac{a-1}{a}$ no es un número entero.

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con x, y positivos, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.

i) Busco que sea entero para $a \in \mathbb{N}$.

Contraejemplo: $a = 1$

$$\frac{1-1}{1} = 0 \in \mathbb{Z}$$

ii) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Contraejemplo: $x, y = 1$

$$\sqrt{2} \stackrel{?}{=} \sqrt{1} + \sqrt{1}$$

$$1.41 \neq 2$$

Y hallamos un Contraejemplo: $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x}+\sqrt{y}$

iii) $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$

Contraejemplo: $x = -3$

$$(-3)^2 > 4 \overset{?}{\Rightarrow} x > 2$$

$$9 > 4 \Rightarrow -3 > 2$$

$$V \Rightarrow F$$

$$F.$$

Y hallamos un Contraejemplo: x^2 es mayor a 4 sin ser x mayor a 2.

12. i) Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando debidamente:

(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \ \vee\ n \leq 8$.
(b) $\exists n \in \mathbb{N} /\ n \geq 5 \ \wedge\ n \leq 8$.
(c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N} \ /\ m > n$.
(d) $\exists n \in \mathbb{N} /\ \forall m \in \mathbb{N},\ m > n$.
(e) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 3 \Rightarrow x^2 > 4$.
(f) Si z es un número real, entonces z es un número complejo.

ii) Negar las proposiciones anteriores, y en cada caso verificar que la proposición negada tiene el valor de verdad opuesto al de la original.

iii) Reescribir las proposiciones ***e)*** y ***f)*** del ítem **i)** utilizando las equivalencias del ejercicio ***10i)***.

i) a) Es verdadera. $n=6,\ n=9$

i) b) Es verdadera. $n=6 \in \mathbb{N}$ y está en rango.

$$5 \leq 6 \leq 8$$

i) c) Es verdadera. Para todo natural $\exists$ algún otro natural mayor a él.

$n = 4$, $m = 5$.

i) d) $\forall m \in \mathbb{N} / \exists n \in \mathbb{N}, m > n$

Es verdadera.

$m = 6$, $n = 5$

i) e) $\forall x \in \mathbb{R} / x > 3 \Rightarrow x^2 > 4$

Es verdadera.

$x = 4$, $4 > 3 \Rightarrow 4^2 > 4$

$V \Rightarrow V$

V

i) f) Falsa

P: Z es número real.

q: Z es número Complejo

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Además los Complejos $\notin \mathbb{R}$.

6) ¿Como los niego? PREGUNTAR.

i) $\exists \sim n \geq 5 \wedge \sim n \leq 8$

13. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial V y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$

ii) $(A \cap B) \triangle C = (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$

iii) $C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$

iv) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

i) $(A \triangle B) - C = \overbrace{(A - C)}^{p} \triangle \overbrace{(B - C)}^{q}$

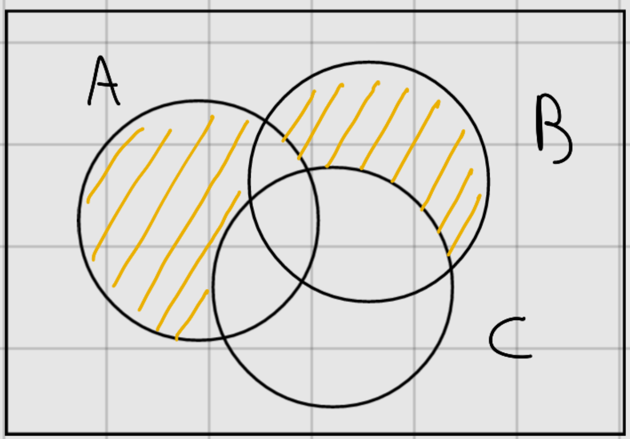
$((A \cup B) - (A \cap B)) - C = (p \cup q) - (p \cap q)$

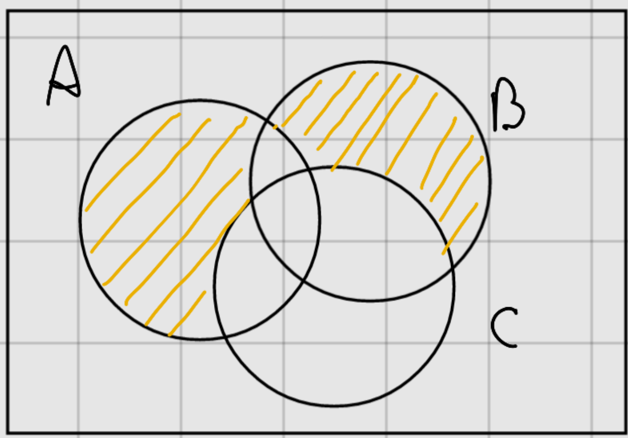
$(A \cup B) - C \overset{?}{=} ((A - C) \cup (B - C)) - ((A - C) \cap (B - C))$

$$A \cup B = A \cup B$$

VERDADERA

$$(A \triangle B) - C \qquad (A - C) \triangle (B - C)$$





ii) $\overbrace{(A \cap B)}^{P} \triangle \overset{♀}{\tilde{C}} = (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$

$$(P \cup ♀) - (P \cap ♀) = ((A \cup C) - (A \cap C)) \cap ((B \cup C) - (B \cap C))$$

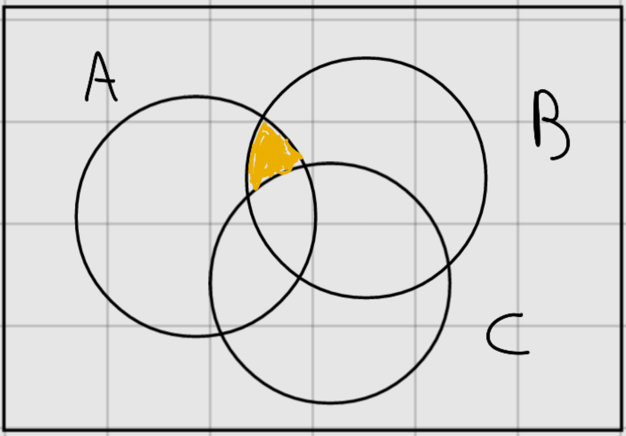
$$((A \cap B) \cup (C)) - ((A \cap B) \cap (C)) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$((A \cap B) \cup C) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

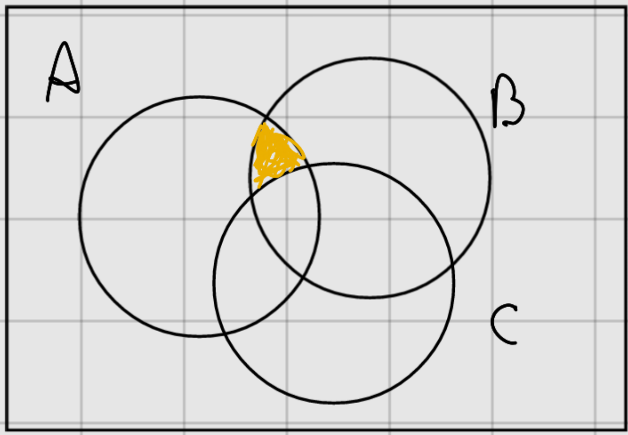
$$C \cup (A \cap B) = C \cup (A \cap B)$$

VERDADERA

$(A\cap B)\,\Delta\, C$



$(A\Delta C)\cap(B\Delta C)$



iii) $C \subseteq A \Rightarrow \left(B\cap C \subseteq (A\Delta B)^{c}\right)$

$C\subseteq A \Rightarrow \left(B\cap C \subseteq (A\cup B)^{c}\right)$

$C\subseteq A \Rightarrow B\cap C \subseteq A^{c}\cap B^{c}$

PREGUNTAR

iv) $A\Delta B=\emptyset \iff A=B$

$\Rightarrow)\ A\Delta B=\emptyset \Rightarrow A=B$

$\Leftarrow)\ A=B \Rightarrow A\Delta B=\emptyset$ USAR INCLUSIONES.

$\Rightarrow)\ A\Delta B=\emptyset \Rightarrow \cancel{A=B}$ $\underbrace{A\subseteq B}_{(1)}$ y $B\subseteq A$

① Sea $x \in A$, supongo que $x \notin B$ (POR ABS)

$(A \cup B) - (A \cap B)$

$(\Leftarrow)$ $A = B \Rightarrow A \Delta B = \emptyset$.

Sea $x \in A$, sé como dato que $A = B$, por lo tanto ambos tienen los mismos elementos, osea $A = B \Rightarrow x \in B$. Así $A \Delta B = \emptyset$ pues son iguales

VERDADERA

14. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V. Probar que

i) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

iii) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$

iv) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$

v) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; A \triangle B = B \cap A^c$

vi) $A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; B^c \subseteq A^c$

vii) $A \cap C = \emptyset \;\Rightarrow\; A \cap (B \triangle C) = A \cap B$

Como dice "Probar" son verdaderas

i) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

$$A \cap ((B \cup C) - (B \cap C)) = ((A \cap B) \cup (A \cap C)) - ((A \cap B) \cap (A \cap C))$$

$$A \cap (B \cup C) = A \cap (B \cup C)$$

VERDADERA

ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

$$A \cap (B \cap C^c)^c = (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B^c \cup C) = A \cap (B^c \cup C)$$

VERDADERA

iii) $A \Delta B \subseteq (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$

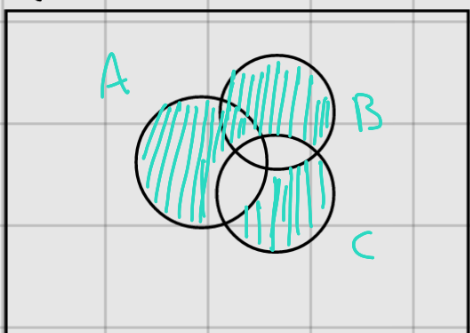
$$(A-B) \cup (B-A) \subseteq [(A-C) \cup (C-A)] \cup [(B-C) \cup (C-B)]$$

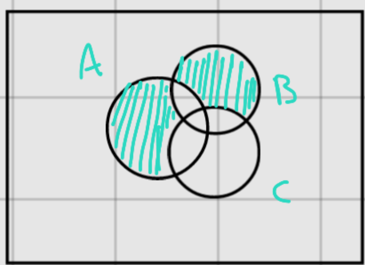
$$A \cup B \subseteq (A \cup C) \cup (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \subseteq C \cup (A \cup B)$$

VERDADERA

$(A \Delta C) \cup (B \Delta C) \supseteq A \Delta B$





iv) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$

$$A \cap C \cap B^c = A \cap B^c \cap C$$
$$A \cap B^c \cap C = A \cap B^c \cap C$$

VERDADERA. Repetir dibujos con inclusiones

Buena". 14 iv)

v) $A \subseteq B \Rightarrow A \Delta B = B \cap A^c$

$$\Rightarrow (A \cup B) - (A \cap B) = B \cap A^c$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = A^c \cap B$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = A^c \cap B$$

$$\Rightarrow \emptyset = A^c \cap B$$

$$\left[(A\cup B)\cap A^c\right] \cup \left[(A\cup B)\cap B^c\right]$$

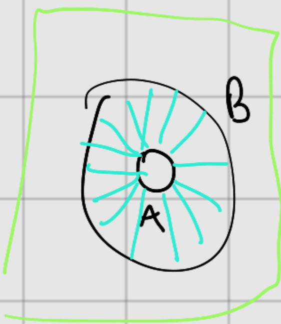
$$= \underbrace{(A\cap A^c)}_{\emptyset} \cup (B\cap A^c) \cup (A\cap B^c) \cup \underbrace{(B\cap B^c)}_{\emptyset}$$

Como dato tengo que $A\subseteq B$, por lo tanto $A^c\cap B \neq \emptyset$ (B)

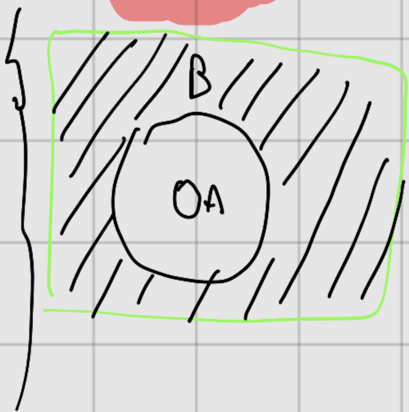
$A\subseteq B$: Los elementos de A están en B.

Pero $(A\cap B^c) = \emptyset$ (A)

$$A^c \cap B = \emptyset \qquad A\cap B^c = \emptyset$$



$= A^c \cap B$



Concluimos, $A^c\cap B = A^c\cap B$.

Si es $\emptyset$, supongo que no es vacío y llego a absurdo.

VERDADERA

13. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial V y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$

ii) $(A \cap B) \triangle C = (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$

iii) $C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$

iv) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

Repaso 13) i) más ordenado.

REPASO MENTAL 23:15 hs;

Para este tipo de ejercicio:

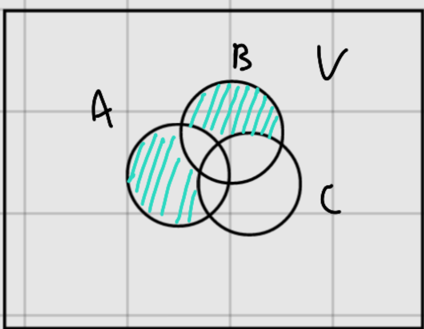
1. Diagrama de Venn
2. Si es V, demuestro, si es F, contraejemplo

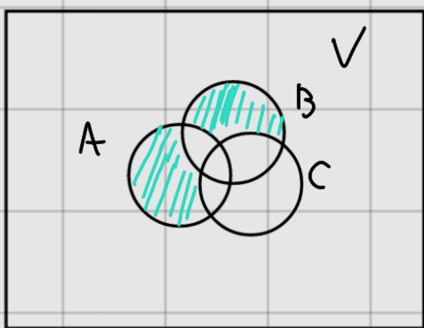
· Si tengo $A = B$, PRUEBO $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

· Si tengo una implicación. Tomo valor, supongo lo del otro y lo uso como dato.

$$\underbrace{(A \triangle B) - C}_{1} = \underbrace{(A - C) \triangle (B - C)}_{2}$$

1.





iguales. Demuestre

1: $(A \Delta B) - C = [(A \cup B) \cap (A \cap B)^c] \cap C^c$

$= [(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] \cap C^c$

$= [(A \cup B) \cap A^c] \cup [(A \cup B) \cap B^c] \cap C^c$

$= [B \cup A] \cap C^c$

$= A \cup B$

2. $(A - C) \Delta (B - C) = (A \cap C^c) \Delta (B \cap C^c)$

$= A \Delta B$

$= (A \cup B) - (A \cap B)$ o $(A - B) \cup (B - A)$

$= (A - B) \cup (B - A)$

$= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

$= (A \cup B)$

Como $1=2$ demostramos que es verdadera.

14) iv)

Repaso 14) iv)

$(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$

$A \cap C \cap B^c = A \cap B^c \cap C$

VERDADERA

OTRA FORMA: PRUEBO $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$\subseteq)$ $(A \cap C) - B \Rightarrow (A - B) \cap C$

$\subseteq)$ OBJETIVO: VER $x \in (A - B) \cap C$

Sea $x \in (A \cap C) - B$

$x \in (A \cap C) - B \underset{\text{DEF } -}{\Rightarrow} x \in (A \cap C) \cap B^c \underset{\text{DEF } \cap}{\Rightarrow}$

$(x \in A \wedge x \in C) \wedge x \in B^c \underset{\text{DEF}}{\Rightarrow} x \in A \wedge x \in B^c \wedge x \in C \Rightarrow$

$\cap B = -B$

$(A - B) \cap C$

$\supseteq)\ (A-B) \cap C \Rightarrow (A \cap C) - B$

$\supseteq)$ OBJETIVO: VER $x \in (A \cap C) - B$.

$$x \in (A-B) \cap C \underset{\substack{DEF\\DIF}}{\Rightarrow} x \in (A \cap B^c) \wedge x \in C \underset{DEF \cap}{\Rightarrow}$$

$$(x \in A \wedge x \in B^c) \wedge x \in C \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \wedge x \in B^c$$

$$\underset{\substack{DEF\\ \cap B^c = -B}}{\Rightarrow} (x \in A \wedge x \in C) - B \Rightarrow (A \cap C) - B$$

Acá me trabo xq yo sé que:

$A \cap B^c \cap C$ vendría de otra forma es $(A \cap C) - B$ por def de la diferencia pero..
¿está bien?

PREGUNTAR

15. Sean $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,3,5,7\}$. Hallar $A \times A$, $A \times B$, $(A \cap B) \times (A \cup B)$.

$A \times A$:

A: 3 elementos

$\# A \times A = \# A \cdot \# A$

$\# P(A \times A) = 2^{\# A \times A}$

$A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

$\# P(A \times A) = 2^9$ $\quad \# A \times A = 9$

$A \times B$:

$\# A \times B = 12 \Big\} \; \# P(A \times B) = 2^{12}$

$A \times B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(1,7),(2,1),(2,3),(2,5),(2,7),(3,1),(3,3),(3,5),(3,7)\}$

$(A \cap B) \times (A \cup B)$:

$A \cap B: \{1,3\}$ $\quad A \cup B: \{1,2,3,5,7\}$

$\#(A\cap B)\times(A\cup B): 10$

$$(A\cap B)\times(A\cup B) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,5),(1,7),(3,1),(3,2),(3,3),(3,5),(3,7)\}$$

16. Sean A, B y C conjuntos. Probar que

i) $(A\cup B)\times C = (A\times C)\cup(B\times C)$

ii) $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$

iii) $(A-B)\times C = (A\times C)-(B\times C)$

iv) $(A\triangle B)\times C = (A\times C)\triangle(B\times C)$

$A\subseteq A\cup B$ $\forall A,B$ conj

i)

$\subseteq$) OBJETIVO: $(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$

IMP: *

$$(x,y)\in(A\cup B)\times C \underset{\text{DEF } \cup}{\Longrightarrow} (x\in A\cup B)\wedge y\in C$$

$$\underset{\text{DEF } \times}{\Longrightarrow} (x\in A \vee x\in B) \wedge y\in C$$

→ separo en 2 casos

$A\wedge C$

$B\wedge C$

CASO 1: $x\in A\wedge y\in C \Longrightarrow (x,y)\in A\times C \Rightarrow (x,y)\in(A\times C)\cup\underbrace{(B\times C)}_{*}$

CASO 2: $x\in B\wedge y\in C \Rightarrow (x,y)\in B\times C \Rightarrow (x,y)\in(B\times C)\cup\underbrace{(A\times C)}_{*}$

PERFECTO

$\supseteq$) OBJ: $(x,y) \in (A \cup B) \times C$

$$(x,y) \in (A\times C) \cup (B \times C) \underset{\substack{\text{DEF}\\ \cup}}{\Longrightarrow} (x,y) \in (A\times C) \vee (x,y) \in (B\times C)$$

$$\underset{\substack{\text{DEF}\\ \times}}{\Longrightarrow} (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C) \underset{\substack{\text{DEF}\\ \text{DIST.}}}{\Longrightarrow}$$

$$y \in C \wedge (x \in A \vee x \in B) \underset{\substack{\text{DEF}\\ \cup,\\ \times}}{\Longrightarrow} (x,y) \in (A \cup B) \times C$$

Como se cumple la doble inclusión, es verdadera.

Por lo tanto $(A \cup B) \times C = (A \times C) \times (B \times C)$

PERFECTO

ii) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

$\subseteq$) OBJETIVO: $(x,y) \in (A\times C) \cap (B \times C)$

$\supseteq$) OBJETIVO $(x,y) \in (A \cap B) \times C$

$\subseteq$) $(x,y) \in (A \cap B) \times C$

$\underset{\substack{DEF \\ \times}}{\Longrightarrow} x \in (A \cap B) \wedge y \in C$

$\underset{\substack{DEF \\ \cap}}{\Longrightarrow} (x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C$

$\Rightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C)$

$\Rightarrow (x,y) \in A \times C \wedge (x,y) \in B \times C$

$\Rightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$ PERFECTO

$\supseteq$) $(x,y) \in [(A \times C) \cap (B \times C)]$

$\underset{\substack{DEF \\ \cap}}{\Longrightarrow} (x,y) \in (A \times C) \wedge (x,y) \in (B \times C)$

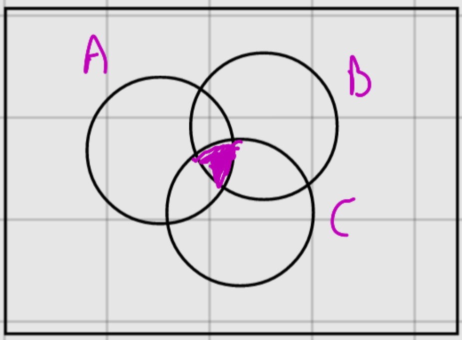
$\underset{\substack{DEF \\ \times}}{\Longrightarrow} (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C)$

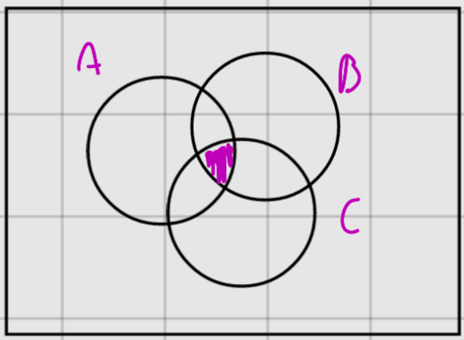
$\underset{\text{PROP}}{\Rightarrow} (x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \wedge y \in C$

$\Rightarrow (x,y) \in \underbrace{(A \cap B)}\, \times C$ ✓

$(A \cap C) \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ PERFECTO





iii), iv)

Relaciones

17. Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,3,5,7\}$. Verificar si las siguientes son relaciones de A en B y en caso afirmativo graficarlas por medio de un diagrama con flechas de A en B, y por medio de puntos en el producto cartesiano $A \times B$.

i) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(1,7),(3,1),(3,5)\}$

ii) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(2,7),(3,2),(3,5)\}$

iii) $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,7),(3,7)\}$

iv) $\mathcal{R} = \{(1,3),(2,1),(3,7)\}$

$\# A \times B = \# A \cdot \# B = 12$

$\# \mathcal{P}(A \times B) = 2^{12}$

$A \times B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(1,7),(2,1),(2,3),$
$(2,5),(2,7),(3,1),(3,3),(3,5),(3,7)\}$

i) Sí. Pues los elementos de la relación $\in A \times B$.

ii) No. Pues $(3,2)$ fuerza $\overset{a=3}{b=2}$ y $2 \notin B$.

iii) Sí. Pues...

iv) Sí. Pues...

18. Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,3,5,7\}$. Describir por extensión cada una de las relaciones siguientes de A en B:

i) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a \leq b$

ii) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a > b$

iii) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a \cdot b$ es par

iv) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a + b > 6$

$A = \{1,2,3\}$ $B = \{1,3,5,7\}$

La relación está dada por pares donde la primera coordenada es menor o igual a b.

$\#A \times B = \#A \cdot \#B \Rightarrow 3 \cdot 4 = 12$

$A \times B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7),$
$(2,1), (2,3), (2,5), (2,7),$
$(3,1), (3,3), (3,5), (3,7)$
$\}$

Ahora la relación es:

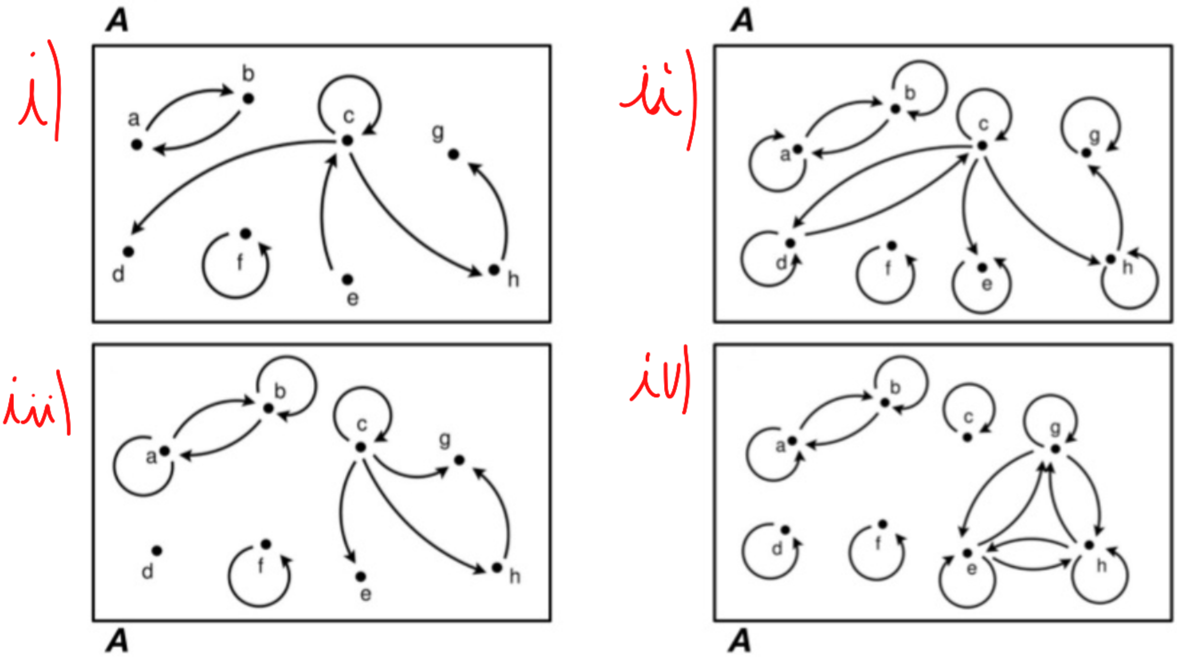
i) $a \leq b$ $R = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7),$
$(2,3), (2,5), (2,7),$
$(3,3), (3,5), (3,7)$
$\}$

ii) $a > b$ $R = \{(2,1), (3,1)\}$

iii) $a \cdot b$ es par $R = \{(2,1), (2,3), (2,5), (2,7)\}$

iv) $a+b>6$ $R=\{(1,7),(2,5),(2,7),(3,5),(3,7)\}$

19. Sea $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.



i) $R=\{(a,b),(b,a),(c,c),(c,d),(c,h),(f,f),(e,c),(h,g)\}$

(R) no, pues $\forall a \in R,\ a \not R a$.
Contraejemplo: $d \not R d$

(S) Para que sea simétrica:
Sean $a,b \in A$, si $\forall a,b$ $aRb \Rightarrow bRa$ entonces es sim.

Contraejemplo: $cRh \Rightarrow hRc$ pero $h \not R c$. Por lo tanto no es simétrica.

$V \Rightarrow F = F$

(AS) Para que sea antisimétrica:

$\forall a,b \in A$, si $aRb, bRa \Rightarrow x=y$

Contraejemplo: $aRb \wedge bRa$ pero $a \neq b$. Por lo tanto No es Antisimétrica

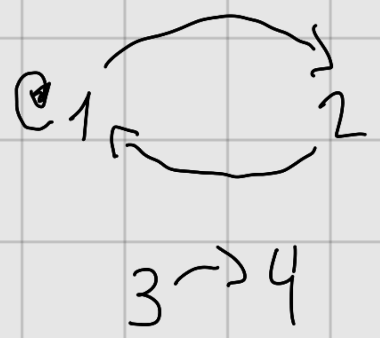
(T) Para que sea transitiva.

$\forall a,b,c \in A$ si $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc, \forall a,b$.

Contraejemplo: cRh, hRg pero cRg por lo tanto no es transitiva

PREGUNTAR: Con encontrar UN CASO q no cumpla (S), (AS) y (T) dejo de ser S.AS.T? Es decir, para que sea (S), (AS) y (T) debe cumplir la condición PARA TODOS los elementos de la relación?

Ej:



¿Es transitiva?

$1R2 \wedge 2R1 \Rightarrow 1R1$ ✓

*1 $\underbrace{3R4 \wedge 4\cancel{R}3 \Rightarrow 3R3}_{F.}$

¿Entonces no sería transitiva

por el caso *1 ?

Tampoco es simétrica pues

*2 $3R4 \Rightarrow 4 \not{R} 3$

$V \Rightarrow F = F$

Pero $1R2 \Rightarrow 2R1$

$V \Rightarrow V = V$

Por este caso *2 ¿dejaría de ser simétrica ?

ii)

R sí, pues $\forall a \in R$, sucede que aRa.

S no, pues sean $c, e \in A$, cRe pero $e \not{R} c$.

$cRe \Rightarrow eRc$

$V \Rightarrow F = F$.

Por lo tanto, no es simétrica

AS no, pues sean $c, d \in A$, $cRd \wedge dRc$ pero $c \neq d$.

$cRd \wedge dRc \Rightarrow c = d$

$V \wedge V \Rightarrow F = F$

Por lo tanto, no es Antisimétrica.

(T) Bueno con donde $\forall a,b,c \in A$

si $aRb, bRc \Rightarrow aRc$

Contraejemplo: cRh, hRg pero $c\not R g$.

$cRh \wedge hRg \Rightarrow cRg$

$V \quad V \Rightarrow F = F$

Por lo tanto, no es transitivo.

iii)

(R) Para q sea reflexiva debe cumplir que $\forall a \in A$, aRa.

Contraejemplo: sea $d \in A$, $d \not R d$.

Por lo tanto, No es reflexiva.

(S) Para que sea simétrica, siendo $a,b \in A$, debe cumplir q si $aRb \Rightarrow bRa$.

Contraejemplo: sea $c, g \in A$, cRg pero $g \not R c$.

$$cRg \Rightarrow gRc$$
$$V \quad F \quad = F$$

Por lo tanto, no es simétrica

(AS) Para que sea antisimétrica debe suceder que $\forall a, b \in A$, $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

Contraejemplo: $aRb \wedge bRa$ pero $a \neq b$

Por lo tanto, no es antisimétrica.

(T) Para que sea transitiva, $\forall a, b, c \in A$
$aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

Es transitiva. ¿Cómo lo pruebo?

$aRb \wedge bRa \Rightarrow aRa$ ✓

$cRh \wedge hRg \Rightarrow cRg$ ✓

iv)

(R) Para que sea reflexiva debe

(R) Para que sea reflexiva debe
suceder que $\forall a \in A, aRa$.

Es reflexiva.

(S) Para que sea simétrica debe suceder
que $\forall a,b \in A$ si $aRb \Rightarrow bRa$.

Es simétrica ¿Cómo lo pruebo?

Ej: $gRe \Rightarrow eRg$ ✓

$hRg \Rightarrow gRh$ ✓

(AS) Para que sea antisimétrica debe
suceder que $\forall a,b \in A$, si $aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$

Contraejemplo: $gRe \wedge eRg$ pero $e \neq g$

$$\underset{V}{gRe} \wedge \underset{V}{eRg} \Rightarrow \underset{F}{e=g} \quad = F$$

Por lo tanto no es antisimétrica.

(T) Para que sea transitiva debe suceder tal que $\forall a,b,c \in A$, $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

Es transitiva ¿Cómo lo pruebo?

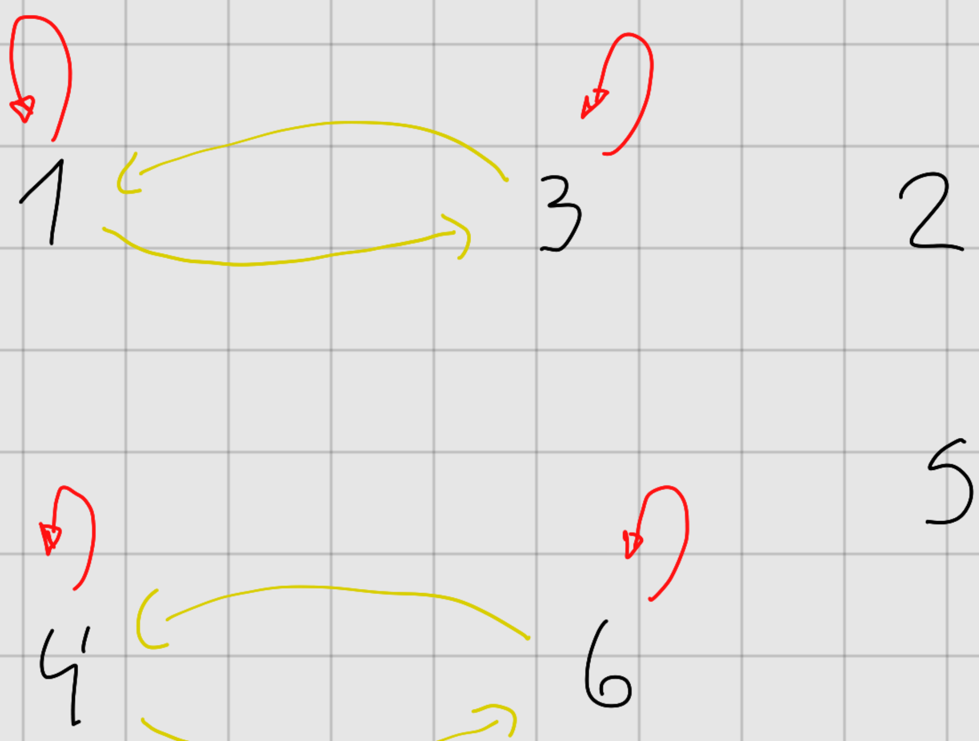
Ej: $fRe \wedge eRh \Rightarrow fRh$ ✓

$aRb \wedge bRa \Rightarrow aRa$ ✓

20. Sea $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. Graficar la relación

$$\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(3,1),(3,3),(6,4),(4,6),(4,4),(6,6)\}$$

como está hecho en el ejercicio anterior y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.



R Es reflexiva si $\forall a \in A$, aRa.

Contraejemplo: $2 \not R 2$. No es reflexiva

(S) Es simétrica si $\forall a, b \in A$,
si $aRb \Rightarrow bRa$

Es simétrica.

Ej: $6R4 \Rightarrow 4R6$
$1R3 \Rightarrow 3R1$

(AS) Es antisimétrica si $\forall a, b \in A$
si $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

Contraejemplo: $4R6 \wedge 6R4 \Rightarrow 4 = 6$
$V \quad V \Rightarrow F \quad = F$

Por lo tanto no es antisimétrica

(T) Es transitiva si $\forall a, b, c \in A$
suele que si $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

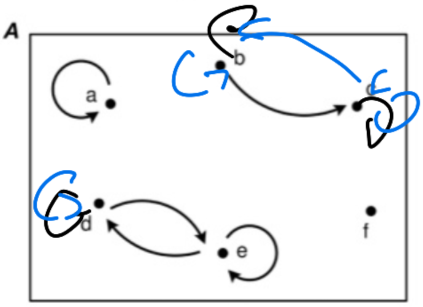
Ej: $4R6 \wedge 6R4 \Rightarrow 4R4$ ✓
$1R3 \wedge 3R1 \Rightarrow 1R1$ ✓

¿Cómo lo hago?

Es transitiva.

Caso x caso pruebo

21. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ y sea $\mathcal{R}$ la relación en A representada por el gráfico



$bRc \quad cRb$
$\Rightarrow bRb$

Hallar la mínima cantidad de pares que se deben agregar a $\mathcal{R}$ de manera que la nueva relación obtenida sea

i) reflexiva,
ii) simétrica,
iii) transitiva,
iv) reflexiva y simétrica,
v) simétrica y transitiva,
vi) de equivalencia.

i) 4. $(b,b), (c,c), (d,d), (f,f)$

ii) 1. (c,b) Pues si sale flecha debe volver, osea, $\forall a,b \in A$, si $aRb \Rightarrow bRa$

iii) 1. $dRe \wedge eRd \Rightarrow dRd$

iv) i) + ii), osea 5

si tengo (prov)

v) $(d,d), (c,b), (b,b), (c,c)$.

vi) V+ (f,f)

debo agregar si o si dos flechas para transitivo

22. En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, anti-simétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

i) $A = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(1,3),(2,5),(1,5)\}$

ii) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \,/\, a+b \text{ es par}\}$

iii) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \,/\, |a| \le |b|\}$

iv) $A = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R}$ definida por $a\,\mathcal{R}\,b \iff b$ es múltiplo de a $X R Y$ $\quad \cancel{X} R Z$

v) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por $X\,\mathcal{R}\,Y \iff \underline{X \cap \{1,2,3\}} \subseteq Y \cap \{1,2,3\}$ $\subseteq \underline{Z \cap \{1,2,3\}}$

vi) $A = \mathcal{P}(\{n \in \mathbb{N} / n \le 30\})$, $\mathcal{R}$ definida por $X\,\mathcal{R}\,Y \iff 2 \notin X \cap Y^c$

vii) $A = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ definida por $(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d) \iff bc$ es múltiplo de ad.

i)

R) Si pues $\forall a \in A$, aRa. Es reflexiva.

S) Para q sea simétrica, $\forall a,b \in A$, si $aRb \Rightarrow bRa$

Contraejemplo: $1R2 \Rightarrow 2 \not R 1$

$V \Rightarrow F = F.$

Por lo tanto, No es simétrica

(AS) Para que sea antisimétrica debe suceder q $\forall a,b \in A$ si $aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$

Como nunca se cumple $aRb \wedge bRa$ la implicación es verdadera.

Ej: $1R2 \wedge 2R1 \Rightarrow a = b$

$V \wedge F \Rightarrow F = V$

Por lo tanto, es antisimétrica.

(T) Para que sea transitiva debe suceder que $\forall a,b,c \in A$, si $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

El único ejemplo donde hay un aRb y un bRc es:

$(1,2) \wedge (2,5) \Rightarrow (1,5)$

$V \quad V \quad V$

Por lo tanto, es transitiva.

PREGUNTAR COMO DEMUESTRO

ii) $A = \mathbb{N}$, $R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,/\, a+b \text{ es par}\}$

Es PAR si $\underbrace{\text{IMPAR+IMPAR}}_{1}$, $\underbrace{\text{PAR+PAR}}_{2}$

Veo ejemplos...

1. $\underbrace{1R1}_{R}$, 1R3, 1R5, 1R7, 1R9
, $\boxed{3R1}$, 5R1, 7R1, 9R1

sim

2. 2R1, 2R2, 2R4, 2R6, 2R8
1R2, 2R2, 4R2, 6R2, 8R2

1. 3R1, 3R3, $\underbrace{3R5}$
T. $(1R3 \wedge 3R5 \Rightarrow 1R5)$

(R) si fuera $\forall a \in A$, aRa.

- si a es par: $a+a$ es par
- si a es impar: $a+a$ es impar

$\Rightarrow$ Es reflexiva

(S) Para q sea simétrica, $\forall a,b \in A$,
si $aRb \Rightarrow bRa$

Supongo que $a+b$ es par, por conmutatividad de la suma sé que $a+b=b+a$ por lo tanto si $aRb \Rightarrow bRa$ es verdadero.

Probamos que es simétrica.

(AS) Para que sea antisimétrica debe suceder q $\forall a,b \in A$ si $aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$

Contraejemplo: $1R2 \wedge 2R1 \Rightarrow 1=2$
$V \quad V \Rightarrow F = F.$

Por lo tanto, no es antisimétrica

(T) Para que sea transitiva debe suceder que $\forall a,b,c \in A$, si $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

Es transitiva. ¿Como lo pruebo?

Ej: $1R3 \wedge 3R5 \Rightarrow 1R5$
$V \quad V \quad V = V$

sé q un ejemplo no prueba nada pero lo anoto el por qué dije q es (T).

PREGUNTAR.

La relación es de EQUIVALENCIA

iii)

(R) $\forall a \in A$, es reflexiva si aRa.

En este caso es cierto pues $|a| \leq |a|$.

$1R1$, $-1R-1$, $2R2$.

Por lo tanto, es reflexiva.

(S) Para q sea simétrica, $\forall a,b \in A$, si $aRb \Rightarrow bRa$.

$$|a| \leq |b| \Rightarrow |b| \leq |a|$$

Contraejemplo: $a=1, b=2$

$$|1| \leq |2| \Rightarrow |2| \leq |1|$$

$$V \Rightarrow F = F.$$

Por lo tanto NO es simétrica

(AS) Para que sea antisimétrica debe suceder q $\forall a,b \in A$ si $aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$

si $|a| \leq |b| \wedge |b| \leq |a| \Rightarrow a = b$.

Contraejemplo: $a=2 \quad b=-2$

$$|2| \leq |-2| \wedge |-2| \leq |2| \Rightarrow 2=-2$$

$$V \wedge V \Rightarrow F = F$$

Por lo tanto NO es antisimétrica

(T) Para que sea transitivo debe suceder que $\forall a,b,c \in A$, si $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

si $|a| \leq |b| \wedge |b| \leq |c| \Rightarrow |a| \leq |c|$

Si sé que $|a| \leq |b|$ y al mismo tiempo

$|b| \leq |c|$. Al ser $|b| \geq |a|$ y $|b| \leq |c|$ significa que necesariamente $|a| \leq |c|$.

$$|a| \leq |b| \leq |c|$$

Esto es verdad. Es transitivo

$a=1,\ b=2,\ c=3$

Es reflexivo y transitivo

REPASO: DEMOSTRAR

$$P(A) \subseteq P(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$\Rightarrow)$ $P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B.$

[illegible] $P(A) \subseteq P(B)$ [illegible]

Supongo que no sale $P(A) = P(B)$. Cojo elemento de A.

$x = 1$ no se viene pues $\{1\} \subseteq P(A)$, $x = \{1,2\}$

$x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in P(A) \Rightarrow \{x\} \in P(B) \Rightarrow \{x\} \subseteq B$
$\Rightarrow x \in B$

$(\Leftarrow)$ $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

$Y \in P(A) \Rightarrow Y \subseteq A \Rightarrow Y \subseteq B \Rightarrow Y \in P(B)$

iv)

R: $\forall a \in \mathbb{R}$, aRa.

$aRa \Leftrightarrow a$ es múltiplo de a.

Como $\forall a$, todo número es múltiplo de sí mismo.

R es reflexiva.

S: si $aRb \Rightarrow bRa$

Ej: $a=2, b=4$

$2R4 \Rightarrow 4 \not R 2$

R no es simétrica

AS) Si $aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$

si b es múltiplo de a ^ a es múltiplo de b

24. Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la relación de equivalencia en A:

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(a,b),(b,a),(a,f),(f,a),(b,f),(f,b),(c,e),(e,c)\}$$

hallar la clase $\overline{a}$ de a, la clase $\overline{b}$ de b, la clase $\overline{c}$ de c, la clase $\overline{d}$ de d, y la partición asociada a $\mathcal{R}$.

Clases: $\overline{x} = \{y \in A : yRx\} \subseteq A$

→ VA ITERANDO en A, los y que cumplen yRa.

Ej: $\overline{a} = \{y \in A : yRa\} \subseteq X$

¿Qué y en A se relaciona con a?

a, b, f.

OJO: VALE TAMBIÉN

$\overline{x} = \{y \in A : xRy\} \subseteq A$ pues es simétrico

PROPOSICIÓN: si tengo clases de equivalencia o:

1) la intersección es vacía: $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$

2) son iguales: $\overline{x} = \overline{y}$

$[a] : \{a, b, f\} = [b] = [f]$ ✓

$[c] : \{c, e\} = [e]$ ✓

$[d] : \{d\}$ ✓

1) Ej: $[d] \cap [c] = \emptyset$

2) Ej: $[a] = [b]$

Los ítems 1 y 2 arman:

Partición Asociada: Con todas las clases de equivalencia.

Es un conjunto con todas las clases de equivalencia.

$$P(A) = \{\{a,b,f\},\{c,e\},\{d\}\}$$

25. Sea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Hallar y graficar la relación de equivalencia en A asociada a la partición $\{\{1,3\},\{2,6,7\},\{4,8,9,10\},\{5\}\}$. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.

Sabemos por definición de Partición que incluye a todas las clases de equivalencia.

Por lo tanto, tiene 4 clases de equivalencia distintas.

$$[1] = \{1,3\} = [3]$$

$$[2] = \{2,6,7\} = [6] = [7]$$

$[4] = \{4, 8, 9, 10\} = [8] = [9] = [10]$

$[5] = \{5\}$

Representante de clase: Es cualquier elemento de la clase de equivalencia q la "representa"

Ej: $[1] = \overline{1}$ Ej: $[4]$ $\overline{9}$

Ej: $[2] = \overline{2}$ Ej: $[5]$ $\overline{5}$

PREGUNTAR SI ESTÁ BIEN 24 y 25.

26. Sean $P = \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\})$ el conjunto de partes de $\{1,\ldots,10\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en P definida por

$$A\mathcal{R}B \iff (A \triangle B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y decidir si es antisimétrica (Sugerencia: usar adecuadamente el ejercicio **14iii)**).

ii) Hallar la clase de equivalencia de $A = \{1,2,3\}$.

ARB VALE SI: $(A \triangle B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

Si la intersección es vacía significa que:

1) A y B tienen al $\{1,2,3\}$ (desaparece x $A \triangle B$)

2) Ni A, ni B tienen al $\{1,2,3\}$. $\emptyset \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

R: Es reflexiva si $\forall a \in R$, aRa.

$$ARA \iff (A \Delta A) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$$

- Como
$$\begin{aligned} A \Delta A &= (x \in A \vee x \in A) \wedge (x \in A \wedge x \in C)^c \\ &= (x \in A) \wedge (x \notin A \wedge x \notin C) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Así, $\emptyset \cap \{1,2,3\} = \emptyset$.

Por lo tanto, R es reflexiva.

S Es simétrica si $ARB \Rightarrow BRA$

$$R = (A \Delta B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$$

$$ARB = (A \Delta B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$$
$$BRA = (B \Delta A) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$$

Por propiedad, sé que $A \Delta B = B \Delta A$ pues

$$\overbrace{(A \cup B) \cap (A \cap B)^c}^{A \Delta B} = \overbrace{(B \cup A) \cap (B \cap A)^c}^{B \Delta A}$$

$$(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) =$$

$$[(A \cup B) \cap A^c] \cup [(A \cup B) \cap B^c] =$$

Así $A R B \iff \emptyset \cap \{1,2,3\} = 0$

$\Rightarrow \emptyset$

Por otro lado $B R A \iff \emptyset \cap \{1,2,3\} = 0$

$\Rightarrow \emptyset$

Por lo tanto R es simétrica

(AS) si $A R B \wedge B R A \Rightarrow A = B$

Supongo que vale $A R B \wedge B R A$ y sólo si no se cumple $A = B$.

Acá lo q dice es que es "simétrica" pero sólo si $A = B$.

Busco con donde $A \neq B$ y sea simétrica

Como mencioné al inicio, voy a usar el item 2)
ninguno tiene al $\{1,2,3\}$ pero no son iguales.

$A = \{5,6,7\}$ $B = \{8,9,10\}$

$$ARB \iff (A \triangle B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$$
$$\Rightarrow \emptyset \cap \{1,2,3\} = \emptyset$$
$$\Rightarrow \emptyset = \emptyset$$
$$BRA \iff (B \triangle A) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$$
$$\Rightarrow \emptyset \cap \{1,2,3\} = \emptyset$$
$$\Rightarrow \emptyset = \emptyset$$

Y hallamos un contraejemplo. Vale que
ARB y BRA pero $A \neq B$

Por lo tanto, R no es antisimétrica.

(T) Es transitiva si $ARB \wedge BRC \Rightarrow ARC$

necesito camino de A a C.

$ARB \quad \wedge \quad BRC$

$ARC \Rightarrow ((A\Delta B) \cap \{1,2,3\}) \cap ((B\Delta C) \cap \{1,2,3\}) = \emptyset$

sí: $(A\Delta B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

$((B\Delta C) \cap \{1,2,3\}) = \emptyset$

14 iii:

$X\Delta Z \subseteq (X\Delta Y) \cup (Y\Delta Z)$

Qvq: $(A\Delta C) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

si $S \subseteq T \Rightarrow S \cap W \subseteq T \cap W$

Por ej 14.) iii) $\overbrace{A\Delta C}^{S} \subseteq \overbrace{(A\Delta B) \cup (B\Delta C)}^{T}$

$\overbrace{A\Delta C}^{S} \cap \overbrace{\{1,2,3\}}^{W} \subseteq ((A\Delta B) \cup (B\Delta C)) \cap \{1,2,3\}$

$\subseteq ((A\Delta B \cap \{1,2,3\}) \cup (B\Delta C \cap \{1,2,3\}))$

$\emptyset$

Entonces $A\Delta C \cap \{1,2,3\}$ porque podemos decir contenido en $\emptyset$

ii) Hallar la clase de equivalencia de $A=\{1,2,3\}$

Recordemos que la clase de equivalencia se da por las relaciones entre los elementos.

Si $A=\{1,2,3\}$ buscamos los B con los que se relaciona (los q da $\cap$ vacía por def de relación de enunciado)

Entonces $\{1,2,3\} R B \Leftrightarrow (\{1,2,3\}\Delta B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

Ahora que $B = \{1,2,3\}$ por ÍTEM 1. hace q

$(\{1,2,3\} \Delta \{1,2,3\}) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$ pues:

- Si B fuera distinto a $\{1,2,3\}$, la intersección NO sería vacía pues $A = \{1,2,3\}$

- Si B fuera $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ tampoco la intersección sería vacía pues:
  $(\{1,2,3\} \Delta \{1\}) \cap \{1,2,3\} = \{2,3\}$

Concluimos que la clase de equivalencia de A es $[A] = \{1,2,3\}$

27. Sean $A = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 92\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en A definida por

$$x \,\mathcal{R}\, y \iff x^2 - y^2 = 93x - 93y$$

i) Probar que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia ¿Es antisimétrica?

ii) Hallar la clase de equivalencia de cada $x \in A$. Deducir cuántas clases de equivalencia **distintas** determina la relación $\mathcal{R}$.

i)

La relación existe si $x^2 - y^2 = 93x - 93y$.

Mi $A = x$, $B = y$.

(R) Es reflexiva si $\forall x, x R x$

TOMO X,
QUEDA CUANDO
RESUELVO.

$$xRx \Leftrightarrow x^2 - x^2 = 93x - 93y$$
$$\Rightarrow 0 = 0$$

Por lo tanto, R es reflexiva.

S Es simétrica si $xRy \Rightarrow yRx$

$$(x^2 - y^2 = 93x - 93y) \Rightarrow (y^2 - x^2 = 93y - 93x)$$
$$-93x + 93y = y^2 - x^2$$
$$93y - 93x = y^2 - x^2$$

Como la igualdad vale en ambas direcciones, podemos que

R es simétrica

AS $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$.

$$x^2 - 93x = y^2 - 93y \qquad x, y \in \mathbb{N}$$

Sup $x \neq y$ (y sup que $0 < x < y$)

y que $x^2 < y^2$. Además $93x < 93y$

$\therefore$ $x^2 - 93x < y^2 - 93y$

Encontramos que si $X < Y$, nunca vale la igualdad.
Por lo tanto vale si son iguales.

Es antisimétrica

(T) Obtenemos una variable de un lado. Reconozco A, B y C.

$$x^2 - y^2 = 93x - 93y \wedge y^2 - z^2 = 93y - 93z \Rightarrow$$

TRANS de la igualdad

$A = B = C$
$\Downarrow$
$A = C$

$$\underbrace{x^2 - 93x}_{A} = \underbrace{y^2 - 93y}_{B} \wedge \underbrace{y^2 - 93y}_{B} = \underbrace{z^2 - 93z}_{C}$$

Como $A = B \wedge B = C$, entonces $A = C$.

$$x^2 - 93x = z^2 - 93z$$

Es transitiva

ii) Debo tomar un x, $\in \mathbb{N}$ y ver con que y se relaciona.

- Sé que es reflexiva, por lo tanto xRx. $y \in \mathbb{N}$
- Sé que es antisimétrica, por lo tanto, $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

¿ probarlo 42 Clases de Equivalencia?

$[1]=\{1\},\ [2]=\{2\},\ [3]=\{3\}$

$$[x] := \{ y \in A \,/\, y R x \}$$

$$= \{ y \in A \,/\, -y^2 + x^2 = -93y + 93x \} = *$$

Estudiemos $-y^2+x^2 = -93y+93x$

$$(y+x)\cdot(-y+x) = 93(-y+x)$$

$$\underline{(y+x)}\,\underline{(-y+x)}\ \underline{-93}\,\underline{(-y+x)} = 0 \qquad \underline{a}\cdot\underline{c}+\underline{a}\cdot\underline{b}$$

$$(-y+x)\big((y+x)-93\big) = 0 \qquad \underline{a}\,(\underline{c}+\underline{b})$$

Luego, sé que para que valga la ec.

1. $(-y+x)=0 \Rightarrow x=y$

2. $(y+x)-93=0 \Rightarrow x+y=93$

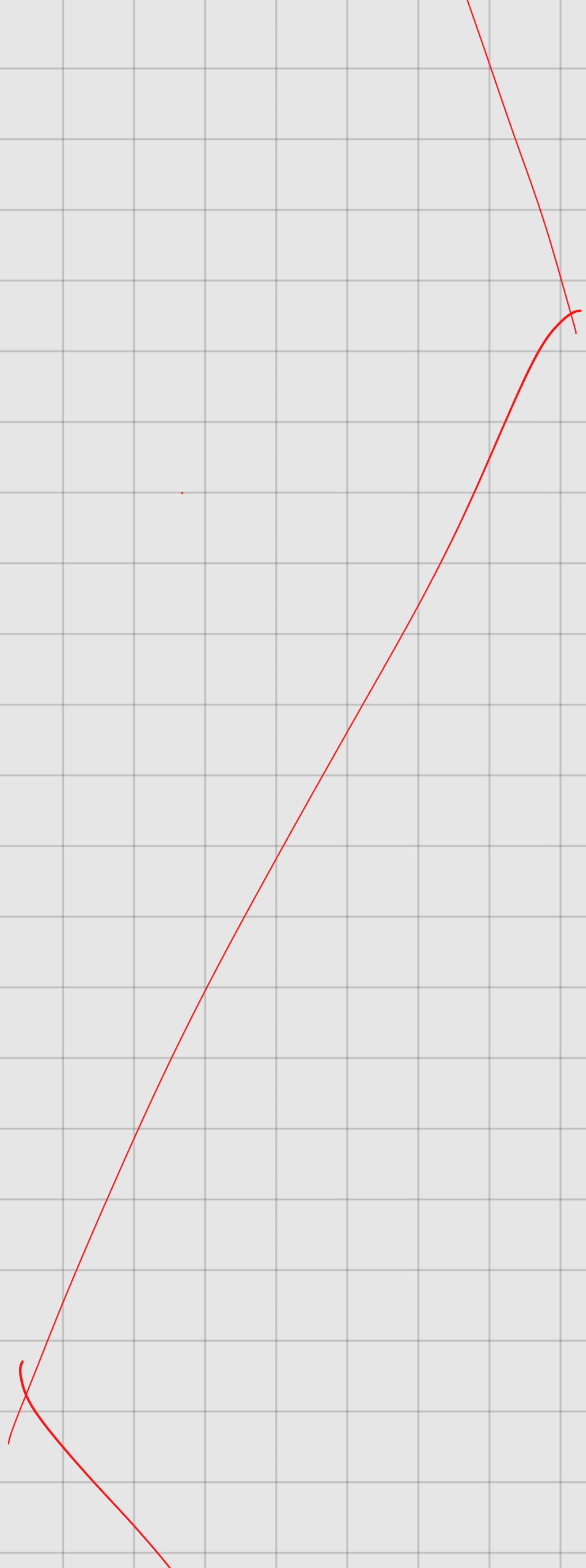
$$* = \{ y \in A \,/\, x=y \ \vee\ x+y=93 \}$$

$$[22] = \{ y \in A \,/\, \underbrace{22=y}\ \vee\ 22+y=93 \}$$

$$[x] = \{ x,\ 93-x \}$$

$\xi_1 : [1] = \{1, 92\}$

$\xi_2 : [2] = \{2, 91\}$



Funciones

29. Determinar si $\mathcal{R}$ es una función de A en B en los casos

i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, b), (5, c), (3, d)\}$

ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b)\}$

iii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $\mathcal{R} = \{(1, a), (2, a), (3, d), (4, b), (5, c)\}$

Es función si:

EXISTENCIA

Para todo a en A existe un único $b \in B$ tal que

UNICIDAD

$(a, b) \in f$

i) No es función.

No cumple unicidad pues para $f(3)$ existen dos valores del codominio posibles: a y d.

Cumple existencia.

ii) No es función.

No cumple existencia pues 5 no está relacionado con ningún elemento de B.

iii) Es función.

Cumple existencia y unicidad.

iv) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \,/\, a = 2b - 3\}$

v) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N} \,/\, a = 2b - 3\}$

vi) $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$, $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, a + b \text{ es divisible por } 5\}$

iv) Veo que a depende exclusivamente de 2b-3.
Busco que 2b-3 No sea natural pues según def
a ∈ IN y b ∈ IR y 2b-3 me da a natural.

$B = \{1, 2, 3, 4 \ldots, 10\}$

$\{(\underbrace{-1}_{}, 1), \quad \ldots \quad (7, 5), (9, 6), ($

$\hookrightarrow -1 \notin \mathbb{N}.$

No es función pues para b = 1, a no es un número natural.

V) Al revés que el iv. Acá sí cumple pues
a depende de b pero a ∈ IR y b tenemos libre
elección de 1 en adelante.

Vi) ¿Qué significa que "es DIVISOR"? ¿ $\frac{a+b}{5}$?

30. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para las que no sean sobreyectivas hallar la imagen.

i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^2 - 5$

ii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$

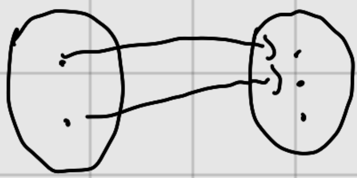
iii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + y, 2z)$

iv) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n + 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

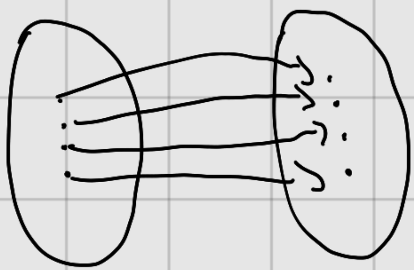
v) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(a, b) = 3a - 2b$

vi) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(a) = \begin{cases} 2a & \text{si } a > 0 \\ 1 - 2a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$

INYECTIVIDAD: Si x y x' se envian a f.
si $f(x)$ y $f(x')$ es igual, entonces $x=x'$.
En otras palabras, cada X va a un Y distinto



SOBREYECTIVIDAD: Si todo valor del codominio recibe un valor del dominio.



i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 12x^2 - 5$

$$y = 12x^2 - 5$$

(I) No es inyectiva por el exponente x^2, si mando $f(-1)$ y $f(1)$ me dan el mismo b, osea 7.

(S) Debo validar si desde $-\infty$ a ∞ todos los valores del Codominio recibe algún X.

$x=1,\ y=7$ $\quad x=2,\ y=43$ $\quad x=0,\ y=-5$

$x=-1,\ y=7$ $\quad x=-2,\ y=43.$

Observamos que cuando $x=\pm 1,\ y=7$ y $x=\pm 2,\ y=43.$

Es decir, la parte negativa de y en $\mathbb{R}$ no es cubierta y, por lo tanto f NO es SOBREYECTIVA
en su totalidad

La imagen de f es: $Im([-5;\infty))$

ii) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x+y$

$Z=x+y \Rightarrow (x,y,x+y) \Rightarrow x(1,0,1)+y(0,1,1)+(0,0,0)$

$x=-1,\ y=0$ $\quad P+0=(-1,0,-1)$

$x=0,\ y=-1$ $\quad P+0=(0,-1,-1)$

$x=0,\ y=0$ $\quad P+0=(0,0,0)$

$x=1,\ y=0$ $\quad P+0=(1,0,1)$

$x=0,\ y=1$ $\quad P+0=(0,1,1)$

¿Dice algo?

IV) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ par} \\ n+1 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$

$n=0$, $\frac{0}{2}=0$ $\quad$ $n=5$, $5+1=6$

$n=1$, $1+1=2$ $\quad$ $n=6$, $\frac{6}{2}=3$

$n=2$, $\frac{2}{2}=1$

$n=3$, $3+1=4$

$n=4$, $\frac{4}{2}=2$

(I) No es INYECTIVA pues para $n=1$ y $n=4$ nos da un $b=2$ y eso solo debe pasar si ambos n fueran iguales pero $1 \neq 4$

(S) · si n es par, 2, 4, 6, 8, 10 tenemos garantizado que la división nos dará un impar.

· si n es impar, 1, 3, 5, 7 tenemos garantizado que $n+1$ es par.

TOMO b, PAR e IMPAR: agarro valor del codominio y veo si llego.

Caso b PAR: $b = n+1$

$b-1 = n$ con b PAR, $b-1$ IMPAR

Caso b IMPAR: $b = \frac{n}{2}$

$2b = m$ con b IMPAR, $2b$ es PAR

V) $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a,b) = 3a - 2b$

Pares ordenados de enteros

$a=0,\ b=0 \Rightarrow f(a,b) = 0$ | $a=2,\ b=2 \Rightarrow 2$

$a=1,\ b=0 \Rightarrow f(a,b) = 3$

$a=0,\ b=1 \Rightarrow f(a,b) = -2$

$a=1,\ b=1 \Rightarrow f(a,b) = 1$

$a=3,\ b=4 \Rightarrow f(a,b) = 1$

diferentes

Lógica contraejemplo: ¿Qué pares (a,b) dan igual?

(I)

(I) No es inyectiva pues $(1,1) \neq (3,4)$ y, sin embargo ambos dan 1.

(S) Hay varias combinaciones posibles.

Como 3 es impar y 2 es par:

$a = \text{PAR} \Rightarrow 3a = \text{PAR}$

$a = \text{IMPAR} \Rightarrow 3a = \text{IMPAR}$

$b = \text{PAR} \Rightarrow 2b \Rightarrow \text{PAR}$

$b = \text{IMPAR} \Rightarrow 2b \Rightarrow \text{PAR}$

$$c = 3a - 2b$$

$$\frac{c+2b}{3} = a$$

Ocá Claro se ve lo no es inyectiva pues $\frac{c+2b}{3}$ siempre da mismo a.

30. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Para las que sean biyectivas hallar la inversa y para las que no sean sobreyectivas hallar la imagen.

i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 12x^2 - 5$

ii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x + y$

iii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x, y, z) = (x + y, 2z)$

iv) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ n+1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

v) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad f(a, b) = 3a - 2b$

vi) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(a) = \begin{cases} 2a & \text{si } a > 0 \\ 1 - 2a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$

vi) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \; f(a) = \begin{cases} 2a & \text{si } a > 0 \\ 1-2a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$

$a = -2, \; f(-2) = 5$

$a = -1, \; f(-1) = 1 - 2(-1) = 3$

$a = 0, \; f(0) = 1$

$a = 1, \; f(1) = 2$

$a = 2, \; f(2) = 4$

$a = 3, \; f(3) = 6$

$a = 3$, $f(3) = 6$

Los $a > 0$ caen siempre en PARES.
Los $a \leq 0$ caen siempre en IMPARES

Siempre caen en valores de b positivos, por lo tanto la IMAGEN CUBRE TODO EL CODOMINIO

I Sí, pues si $a > 0$ caen en pares distintos.
lo mismo con los $a \leq 0$ caen en impares distintos.

Por lo tanto f es INYECTIVA

S Sí. Pues $a > 0$ CUBRE PARES, $a < 0$ IMPARES

Por lo tanto f es SOBREYECTIVA.

$Im(f) = \mathbb{N}$

Por lo tanto, f es BIYECTIVA.

Como f es BIYECTIVA sí ...

Como vimos que es BIYECTIVA, se que es INVERSIBLE. Por lo tanto tiene UNA INVERSA.

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad g: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$\overbrace{f}^{\text{Cod}} \circ \overbrace{g}^{\text{Dom}} = I_B \qquad g \circ f = I_A$

$f \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

¿Cómo calculo la inversa?

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$2a$

$1-2a$

Caso >0:	Caso ≤ 0
$a=1,\ f(1)=2$	$a=-1,\ f(-1)=3$

$a>0 \xmapsto{f} 2a \xmapsto{g} a$

$a \leq 0 \overset{f}{\longmapsto} 1-2a \overset{g}{\longmapsto} a$

b par $\overset{g}{\longmapsto} \frac{b}{2}$

b impar $\longmapsto \frac{b-1}{-2} \in \mathbb{Z}$ pues si b impar, $b-1$ es par

Chequear que $g \circ f = id_{\mathbb{Z}}$
$f \circ g = id_{\mathbb{N}}$

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z} & & \mathbb{N} \\ \text{CASO } a>0: & a & — & 2a \end{array}$$

Mando a, devuelve el doble.

$$\overset{\mathbb{N}}{2a} \to \overset{\mathbb{Z}}{a} \Rightarrow \frac{a}{2} \text{ si } a \text{ par}$$

La inversa debe mandar a y devolver la mitad

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z} & & \mathbb{N} \\ \text{Caso } a \leq 0: & a & — & 1-2a \end{array}$$

: si a llega multiplicado por -2 y $+1$, en la inversa resto 1 y divido $\times 2$

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$g = \begin{cases} \dfrac{a}{2} & \text{si } b \text{ par} \\[2ex] \dfrac{a-1}{-2} & \text{si } b \text{ impar} \end{cases}$$

PAR, $\in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ PAR. Como a = IMPAR, $a-1$ = PAR $\Rightarrow$

$$\frac{a-1}{2} = \text{PAR}$$

$\Rightarrow \in \mathbb{N}$

$f(4) = 2$. $f(2) = 4$.

$\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\quad$ $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

VERIF: $g \circ f$

$$\underbrace{g \circ f}_{id_{\mathbb{N}}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} = g(f(x))$$

Caso $b \geq 0$ par: $\dfrac{f(b)}{2} = \dfrac{2b}{2} = b$

Caso $b \leq 0$ par: $\dfrac{f(b)}{2} = \dfrac{1-2b}{2} = \dfrac{1}{2} - b$

¿ABS?

Caso b impar: $\dfrac{f(x)-1}{-2} =$

$$\underbrace{f \circ g}_{id_{\mathbb{Z}}} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} = f(g(x))$$

TODO: 30) vi) y 27) ii)

Repaso los de la práctica. VIENDO COMO PROCEDER EN CADA CASO

Analice: 1) $f: \underset{A}{\mathbb{R}} \to \underset{B}{\mathbb{R}}$

$$f(x) = \begin{cases} 3x & x \leq 2 \\ x+2 & x > 2 \end{cases}$$

1)

I) Sean $x, x' \in \mathbb{R}$. Si $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Como tengo q ver si es inyectiva y es una función por partes primero veo los términos iniciales.

Obvserno q si: $x = 2 \wedge x' = 4$ el resultado

No da el mismo valor de b en el Codominio.

$$f(2) = 6$$

$$f(4) = 6$$

$$f(2) = f(4) \Rightarrow 2 = 4$$

V V F

Por lo tanto f no es inyectiva.

Analice: $f: \overset{A}{\mathbb{Z}} \to \overset{B}{\mathbb{Z}}$

$$f(n) = \begin{cases} n+1 & n \text{ impar} \\ n-1 & n \text{ par} \end{cases}$$

DEMUESTRE

~~Probar~~ que f es BIYECTIVA

I Sea $n, n' \in A$, si $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$

Como hay que probar sé que para un x, siempre hay un valor de $b \in B$.

Separo en casos:

- n par, n' impar ⟹ DEBERÍA SER DISTINTO, XQ LOS PARES CAEN EN $n-7$ Y LOS IMPARES EN $n+1$

$$n+1 = n'-7$$
$$\underbrace{n = n'-6}$$

¡ABS! ⟹ Como $n \neq n'$ dan diferente

- n par, n' par: DEBERÍA DAR igual. Ej, $2=2$. $f(2)=f(2)$

$$n-7 = n'-7$$
$$n = n'$$

- n impar, n impar

$$n+1 = n'+1$$
$$n = n'$$

f es inyectiva

1) S Quiero ver si $\forall_y \in B, \exists_x \in A / y = f(x)$

Tomo un y

1. $y = 3x$ para algún $x \leq 2$
2. $y = x+2$ para algún $x > 2$

1. $y = 3x \leq 3.2 = 6$

PREGUNTAR

2. $y = x+2 > 2+2 = 4$

$y = x+2 > 4$

31. i) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ es divisible por } 6 \\ 3n+1 & \text{en los otros casos} \end{cases} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(n,m) = n(m+1),$$

calcular, de ser posible, $(f \circ g)(3,4)$, $(f \circ g)(2,5)$ y $(f \circ g)(3,2)$.

ii) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 7 \\ 2x-1 & \text{si } x > 7 \end{cases} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ g(n) = \sqrt{n},$$

hallar, si existen, todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(f \circ g)(n) = 13$ y todos los $m \in \mathbb{N}$ tales que $(f \circ g)(m) = 15$.

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ es divisible por } 6 \\ 3n+1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Veo los primeros términos:

$n = 1,\ 4$ $\quad$ $n = 4,\ 13$ $\quad$ $n = 7,\ 22$

$n = 2,\ 7$ $\quad$ $n = 5,\ 16$

$n = 3,\ 10$ $\quad$ $n = 6,\ 18$

$$g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(n,m) = m(m+1)$$
$$C = m(m+1)$$

$$(f \circ g): \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$(f \circ g)(3,4)$: mando $(3,4)$ a g. $g(3,4) = 15$

Ahora $f(g(3,4)) = 46$

$(f \circ g)(2,5)$: $g(2,5) = 12$

$$f(g(2,5)) = \frac{12^2}{2} = 72$$

$(f \circ g)(3,2) = g(3,2) = 9$

$f(g(3,2)) = 28$

31. i) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ f(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2} & \text{si } n \text{ es divisible por 6} \\ 3n+1 & \text{en los otros casos} \end{cases} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(n,m) = n(m+1),$$

calcular, de ser posible, $(f \circ g)(3,4)$, $(f \circ g)(2,5)$ y $(f \circ g)(3,2)$.

ii) Dadas las funciones

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 7 \\ 2x-1 & \text{si } x > 7 \end{cases} \quad \text{y} \quad g : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ g(n) = \sqrt{n},$$

hallar, si existen, todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(f \circ g)(n) = 13$ y todos los $m \in \mathbb{N}$ tales que $(f \circ g)(m) = 15$.

$f \circ g : f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \circ g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vale pues $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$

Hallar $(f \circ g)(n) = 13$ y $(f \circ g)(m) = 15$

$(f \circ g) \Rightarrow f(g(n))$

$\Rightarrow g(n) = \sqrt{n}$

$\Rightarrow$ si $\sqrt{n} \le 7$, $f(\underbrace{(\sqrt{n})^2}_{n}) = 13$

2 si $\sqrt{m} > 7$, $f(2\sqrt{m}-1) = 13$

1 $(\sqrt{m})^2$ no es posible que ningún m^2 de 13.

FALSO. VER ABAJO

• CORRECCIÓN: $m = 13$. ✓

2. $2\sqrt{m} - 1 = 13$

$2\sqrt{m} = 14$

$\sqrt{m} = 7$ ¡ABS! $\sqrt{m} > 7$. ✓

VALE: $f(g(m)) = 13 \iff m = 13$

Hallar $(f \circ g)(m) = 15$

$(f \circ g) \Rightarrow f(g(m))$

$\Rightarrow g(m) = \sqrt{m}$

$\Rightarrow$ 1 si $\sqrt{m} \leq 7$, $f((\overbrace{\sqrt{m}}^{m})^2) = 15$

2 si $\sqrt{m} > 7$, $f(2\sqrt{m}-1) = 15$

2. $2\sqrt{m} - 1 = 15$

$\sqrt{m} = \frac{16}{2}$

$\sqrt{m} = 8$ y como $\sqrt{m} > 7$, vale! ✓

$m = \pm 64$

1. $(\cancel{\sqrt{m}})^{\cancel{2}} = 15$

$m = 15$ y como $\sqrt{15} \leq 7$ vale ✓

PREGUNTAR: ¿No le puedo sacar la raíz con el 2, no? xq $f((\sqrt{m})^2)$ yo entiendo que g le devuelve con la raíz aplicada. Ej: $m = 144$, $f((\sqrt{144})^2)$

$\|$

$f((12)^2)$

Joya, es lo mismo, 12^2 vuelve a ser 144

VALE: $f(g(m)) = 15 \iff m \in \{-64, 15, 64\}$

32. Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$ (cuando sea posible) en los casos · HECHO

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 18$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$ · PREGUNTAR SI ESTA OK

ii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} n - 2 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4 \\ n + 1 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4 \end{cases}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = 4n$!!

iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 5, 3x)$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(n) = \sqrt{n}$

i) $f \circ g = f(g(x))$, $\underset{\text{Dom } g}{\tilde{\mathbb{R}}} \to \underset{\text{codom } f}{\tilde{\mathbb{R}}}$

$$f(g(x)) = 2(x+3)^2 - 18$$
$$= 2(x^2+6x+9) - 18$$
$$y = 2x^2 + 12x + 18 - 18$$
$$y = 2x^2 + 12x$$
$$y = x^2 + 6x, \text{ Con } y \in \mathbb{R} > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}.$$

$g \circ f = g(f(x)) = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(f(x)) = (2x^2 - 18) + 3$$
$$y = 2x^2 - 15 \text{ Con } y \in \mathbb{R} > 0 \text{ y } x \in \mathbb{R}.$$

ii) $f \circ g$: Va a haber 2 casos.

Reescribo

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \bmod 4 = 0 \quad 1 \\ x+1 & \text{si } x \bmod 4 \neq 0 \quad 2 \end{cases}$$

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g(x) = 4x$

$f \circ g$: Veo que $g(x)$ es $4x$. Por lo tanto siempre será divisible por 4 1

En otras palabras, todo número multiplicado por 4, será divisible por 4.
Por lo tanto $f \circ g$ solo usará caso 1

$$f(g(4x)) = 4x - 2$$

$$\boxed{y = 4x - 2}$$

$f \circ g$: solo usa el caso 1 pues para cualquier x, devuelve natural pues $4x > -2 \; \forall x \in \mathbb{N}$

$g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$g(f(x))$: Ahora es diferente, tengo dos casos iniciales y luego, el resultado se transforma por g. $(4(f(x))$

Caso $x \overset{\text{MODULO}}{\text{MOD}} 4 = 0$

Sea un x divisible por 4, la composición es

$$g(f(x)) = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 8$$

$y = 4x - 8$

Caso $x \bmod 4 \neq 0$

$$f(f(x)) = 4(x+1)$$
$$y = 4x+4$$

CASO $x \bmod 4 = 0$: devuelve natural a partir de $x > 2$. vale para $\forall x \in \mathbb{N}_{>2}$

CASO $x \bmod 4 \neq 0$:

devuelve natural pues $4x+4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{N}$

32. Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$ (cuando sea posible) en los casos

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 18$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$

ii) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = \begin{cases} n-2 & \text{si } n \text{ es divisible por } 4 \\ n+1 & \text{si } n \text{ no es divisible por } 4 \end{cases}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(n) = 4n$

iii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (x+5, 3x)$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(n) = \sqrt{n}$

iii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $f(x) = (\underbrace{x+5}_{x}, \underbrace{3x}_{y})$

$g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $g(n) = \sqrt{n}$

$f \circ g: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$f(g(x)) = (\sqrt{x}+5,\ 3\sqrt{x})$$

$f \circ g$: Es válido pues retorna un par ordenado q tiene un codominio en $\mathbb{R}$.

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$g(f(x)) = \sqrt{(x+5, 3x)}$$ ¿Es válido?

PREGUNTA

PREGUNTA 2: si tengo $(3,4)$ ¿podría decir q $(a,b) \in \mathbb{R}$? supongo q sí pues $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$