Ejercicio 1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : 1 \le n \le 600\}$. Se define en $\mathcal{P}(X)$ la relación dada por

$$A\mathcal{R}B \iff \#(A\triangle B) \le 2$$

(a) Determinar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

(b) Si $B = \{n \in X : n \equiv 2023 \ mod\ 14\}$, calcular el cardinal del conjunto

$$\{A \in P(X) : A\mathcal{R}B\}.$$

Para ponerme en contexto

$\#(A\triangle B) \le 2$, osea que la diff no debe ser > 2.

Ej: $A = \{1,2,3\}$ $\quad B = \{1,2,3,4\}$

$A\mathcal{R}B$ pues $\# A\triangle B = 1$

$A = \{1,2\}$ $\quad B = \emptyset$

$A\mathcal{R}B$

Osea básicamente deben solo variar hasta 2 elementos

(R) Es reflexiva si $\forall a \in P(X)$, $a\mathcal{R}a$.

$A\mathcal{R}A \iff \#(A\triangle A) \le 2$

$$\Rightarrow \#(\emptyset) \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq 2$$

R es reflexiva.

(S) Es simétrica si $aRb \Rightarrow bRa$ $\forall a,b \in X$.

$$\#(A \Delta B) \leq 2 \Rightarrow \#(B \Delta A) \leq 2$$

Esto es cierto pues por propiedad de la diferencia simétrica sabemos que $A \Delta B = B \Delta A$.

supongo que vale $\#(A \Delta B) \leq 2$.

sea $x \in (A \Delta B) \underset{\text{DEF } \Delta}{\Rightarrow} x \in ((A-B) \cup (B-A)) \underset{\substack{\text{DEF } \cup \\ A \cup B = B \cup A}}{\Rightarrow}$

$x \in ((B-A) \cup (A-B)) \underset{\text{DEF } \Delta}{\Rightarrow} x \in (B \Delta A)$

por lo tanto R es simétrica.

(AS) Es AS si $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

En este caso no vale siempre pues si $a = b$

$\#(A \Delta B) = 0$ pero la relación se cumple si el $\#(A \Delta B) \leq 2$ x lo tanto a y b pueden diferir en 2 elementos.

Contraejemplo:

$a = \{1,2\} \quad b = \{1,2,3,4\}$

$\# \{1,2\} \Delta \{1,2,3,4\} \leq 2 \Rightarrow$ VALE

y

$\# \{1,2,3,4\} \Delta \{1,2\} \leq 2 \Rightarrow$ VALE

Encontramos un contraejemplo donde aRb y bRa pero $a \neq b$.

R no es antisimétrica.

(T) Es transitiva si $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

$aRb: \#(A \Delta B) \leq 2$

$bRc: \#(B \Delta C) \leq 2$

$aRc: \#(A \Delta C) \leq 2$

$\#(A \Delta B) \leq 2 \wedge \#(B \Delta C) \leq 2 \Rightarrow \#(A \Delta C) \leq 2$

si la diff de A y B es menor o igual a 2 y

si la diff de B y C es menor o igual a 2

la diff de A y C es menor o igual a dos

Buscar $A \Delta B$ y $B \Delta C$ pero q no valga $A \Delta C \leq 2$.

fijo.

si B difiere con A en 2, y con C en 2. $A \Delta C = \emptyset$

$B = \{1,2,3\} \quad A = \{3,4,1,2\} \quad C = \{5,1,3\}$

$$\underbrace{\#(\{3,4,1,2\} \Delta \{1,2,3\})}_{1} \wedge \underbrace{\#(\{1,2,3\} \Delta \{5,1,3\})}_{2} \Rightarrow \#(A \Delta C)$$

$\Rightarrow \quad 3$

Encontramos contraejemplo.

R no es transitiva

Ejercicio 4. Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ la sucesión definida por recurrencia:

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 4\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - 6n^2 + 13n + 16, \quad \forall\, n \geq 0.$$

Probar que

$$a_n > 5^n + 3n - 4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Caso base: $n=0$, $a_0 > 5^0 + 3.0 - 4 = 1 > -4$ ✓

P.I: Seja $n \in \mathbb{N}$, quero ver que $P(0), P(1), \dots P(n) \Rightarrow P(n+1)$ ✓

· Hi: $a_k > 5^k + 3k - 4$ $\quad 1 \leq k \leq n$

· QPQ: $a_{n+1} > 5^{n+1} + 3(n+1) - 4$

Pero,

$$a_{n+1} = 4\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - 6n^2 + 13n + 16$$

$$\overset{Hi}{=} 4\left(\sum_{k=0}^{n} 5^k + 3k - 4\right) - 6n^2 + 13n + 16$$

$$= 4\left(\sum_{k=0}^{n} 5^k + \sum_{k=0}^{n} 3k - 4\sum_{k=0}^{n} 1\right) - 6n^2 + 13n + 16$$

$$= 4\underbrace{\sum_{k=0}^{n} 5^k} + 12\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k} - 16\underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}) - 6n^2 + 13n + 16$$

$$\sum_{k=0}^{n} 5^k = 5^0 + 5^1 + 5^2 \Rightarrow \text{serie geométrica}$$

$$= \frac{5^{n+1} - 1}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ xq tengo el $k=0$. (no) desde $k=1$

$= \cancel{4}\left(\frac{5^{n+1}-1}{\cancel{4}}\right) + \overset{6}{\cancel{12}}\, \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - 16n - 6n^2 + 13n + 16$

$= 5^{n+1} - 1 + 6(n^2+n) - 16n - 6n^2 + 13n + 16$

$= 5^{n+1} - 1 + \cancel{6n^2} + 6n - 16n \cancel{- 6n^2} + 13n + 16$

$a_{n+1} = 5^{n+1} + 3n - 1 \geq 5^{n+1} + 3n - 1$

Por lo tanto, $P(0), P(1) \ldots P(n) \Rightarrow P(n+1)$ V

Así, $P(m)$ V, $\forall m \in \mathbb{N}_0$

Ejercicio 4. Sea $(a_n)_{n\geq 0}$ la sucesión definida por recurrencia:

$$a_0 = 4, \quad a_{n+1} = 4\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - 6n^2 + 13n + 16, \quad \forall\, n \geq 0.$$

Probar que

$$a_n > 5^n + 3n - 4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Caso base: $m = 0$, $a_0 > 5^0 + 3.0 - 4 = 4 > -4$ ✓

P.I: Sea $n \in \mathbb{N}_0$, quiero ver si: $P(0), P(1) \ldots P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$\cdot$ HI: $a_k = 5^k + 3k - 4 \qquad 1 \le k \le n$

$\cdot$ QPQ: $a_{n+1} = 5^{n+1} + 3n - 1$

Pero, $a_{n+1} = 4\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) - 6n^2 + 13n + 16$

$$\overset{HI}{=} 4\left(\sum_{k=0}^{n} 5^k + 3k - 4\right) - 6n^2 + 13n + 16$$

$$= 4\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} 5^k}_{1.} + 3\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k}_{2.} - 4\underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}_{3.}\right) - 6n^2 + 13n + 16$$

1. $5^0 + 5^1 + \ldots \quad \dfrac{5^{n+1} - 1}{5 - 1}$

2. $0 + 1 + 2 + 3 \ldots n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

3. $0 + \overbrace{1 + 1 + 1 \ldots n}^{n} = n + 1$

$$= 4\left(\frac{5^{n+1} - 1}{4}\right) + 12 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 16(n+1) - 6n^2 + 13n + 16$$

$$= 5^{n+1} - 1 + 6n(n+1) - 16n - 16 - 6n^2 + 13n + 16$$

$$= 5^{n+1} - 1 + \cancel{6n^2} + 6n - 16n \cancel{- 16} \cancel{- 6n^2} + 13n \cancel{+ 16}$$

$$= 5^{n+1} + 3n - 1$$

$$5^{h+1} + 3h - 1 \geq 5^{h+1} + 3h - 1$$

Como queríamos probar.

Vale que $P(0), P(1) \ldots P(h) \Rightarrow P(h+1)$

Por lo tanto $P(n)$ es V, $\forall n \in \mathbb{N}_0$

2. Conjeturar una fórmula para el término general de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definida a continuación y probar su validez.

$$a_0 = 3 \quad \text{y} \quad a_n = \begin{cases} 2\,a_{n-1} & \text{si } n \text{ impar} \\ \frac{1}{3}\,a_{n/2}^2 & \text{si } n \text{ par} \end{cases}, \forall n \geq 1.$$

$h+1$

n impar; $n=2$

$a_0 = 3 \quad a_1 = 2.3 = 6 \quad a_2 = \frac{1}{3}\cdot\left(a_{\frac{2}{2}}\right)^2 = \frac{1}{3}(6)^2 = \frac{1}{3}(36) = 12$

n impar

$a_3 = 2.12 = 24 \quad a_4 = \frac{1}{3}(12)^2 = 46$

$3, 6, 12, 24, 46$

$3.2, 6.2, 12.2, 24.2$

$a_n = 3\, 2^n$

Es inducción global pues si $n=3$, $(2.a_2)$

y si $n=4$ $\left(\frac{1}{3} a\left(\frac{4}{2}\right)\right)$ necesito a_2.

necesito 2 anteriores si $n=4$, no solo el anterior.

Caso base: $a_0 = 3.2^0 = 3 \overset{?}{=} 3$

P.I: Sea $h \in \mathbb{N}$ fijo.

$\cdot$ Hi: $a_k = 3 \cdot 2$ $\quad 1 \le k \le h$

$\cdot$ QPQ: $a_{h+1} = 3 \cdot 2^{h+1}$

POR INDIC:

Como $h+1$ PAR $= \frac{1}{3}\left(a_{\frac{h+1}{2}}\right)^2$

$\frac{h+1}{2} \in \mathbb{Z}$ y uso Hi $\boxed{\frac{h+1}{2} \le h} \iff$

$h+1 \le 2h \iff h+1-2h \le 0$

$\iff -h+1 \le 0 \iff h \ge 1$

Entonces ahora como $\frac{h+1}{2} \le h$ uso Hi

$$\frac{1}{3}\left(3 \cdot 2^{\frac{h+1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{3}\left(3^2 \cdot \left(2^{\frac{h+1}{2}}\right)^2\right) = 3 \cdot 2^{h+1}$$

Como $h+1$ IMPAR: $2a_h \overset{Hi}{=} 2 \cdot 3 \cdot 2^h = 3 \cdot 2^{h+1}$

1. Sean $X = \{n \in \mathbb{N} : n \le 200\}$ e $Y = \{n \in \mathbb{N} : n \le 100\}$.
En $\mathcal{P}(X)$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la forma:

$$A \mathcal{R} B \iff B - A \subseteq Y.$$

a) Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

b) Sea $B = \{n \in X : n \text{ es par}\}$. ¿Cuántos conjuntos $A \in \mathcal{P}(X)$ satisfacen simultáneamente $A \mathcal{R} B$ y $\#(A \cap B) = 80$?

(R) R es reflexiva si $\forall a \in P(X)$, aRa.

$$ARA \iff A - A \subseteq Y$$

$$\iff \emptyset \subseteq Y \checkmark$$ pues el $\emptyset$ está incluido en todo conjunto.

R es reflexiva

(S) R es simétrica si para $a,b \in P(X)$ $aRb \Rightarrow bRa$

$$ARB \iff A - B \subseteq Y$$

$$BRA \iff B - A \subseteq Y$$

Como $A - B \neq B - A$ difícil sea simétrica

$A = \{1\}$ $\quad$ $B = \{150\}$

$$\{1\} R \{150\} \iff \{1\} - \{150\} \subseteq Y$$

$$\iff \{1\} \subseteq Y \checkmark$$

$$\{150\} R \{1\} \iff \{150\} - \{1\} \subseteq Y$$

$$\iff \{150\} \subseteq Y \quad F.$$

Por lo tanto, encontramos contraejemplo.

R no es simétrica pues $\{1\} R \{150\}$ pero $\{150\} \not R \{1\}$

(A15) Sea $a, b \in P(X)$. Es antisimétrica si $aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$

Busco donde la relación y $a \neq b$

$A = \{1\}, B = \{2\}$

$\{1\} R \{B\} = \{1\} - \{2\} \subseteq Y$

$= \{1\} \subseteq Y$ ✓

$\{2\} R \{1\} = \{2\} - \{1\} \subseteq Y$

$= \{2\} \subseteq Y$ ✓

Hallamos un contraejemplo para $aRb \wedge bRa$ pero $a \neq b$.

(T) Sea $a, b, c \in P(X)$. Es T si $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

$aRb \Leftrightarrow b - a \subseteq Y \Rightarrow b$

$bRc \Leftrightarrow c - b \subseteq Y \Rightarrow c$

$aRc \Leftrightarrow c - a \subseteq Y \Rightarrow c$

$$\underbrace{b - a \subseteq Y}_{1} \wedge \underbrace{c - b \subseteq Y}_{2} \Rightarrow \underbrace{c - a \subseteq Y}_{3}$$

1. $b \cap a^c$ 2. $c \cap b^c$ 3. $c \cap a^c$

Sea x genérico $\in P(X)$.

1. $x \in b \wedge x \in a^c \Rightarrow x \in b \wedge x \notin a \Rightarrow x \in b$

2. $x \in c \wedge x \in b^c \Rightarrow x \in c \wedge x \notin b \Rightarrow x \in c$

3. $x \in c \wedge x \notin a \Rightarrow x \in c$

$$x \in b \subseteq Y \wedge x \in c \subseteq Y \Rightarrow x \in c$$

R es TRANSITIVA

1. Sean $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 200\}$ e $Y = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$.
En $\mathcal{P}(X)$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la forma:

$$A \mathcal{R} B \iff B - A \subseteq Y.$$

a) Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

b) Sea $B = \{n \in X : n \text{ es par}\}$. ¿Cuántos conjuntos $A \in \mathcal{P}(X)$ satisfacen simultáneamente $A \mathcal{R} B$ y $\#(A \cap B) = 80$?

A y B viven en $P(X)$, X tiene elementos ≤ 200.
Si B tiene elementos ≥ 101, la relación no se cumple.
Ej: $B = \{101, 102\}$ $A = \{100, 101\}$

$$\{100, 101\} R \{101, 102\} \Leftrightarrow \{101, 102\} - \{100, 101\} \subseteq \overset{n \leq 100}{\widetilde{Y}}$$
$$\Rightarrow \{102\} \subseteq Y \text{ FALSO.}$$

R $\quad ARA \Leftrightarrow A - A \subseteq Y$

$\Rightarrow \emptyset \subseteq Y$

R es reflexiva xq el vacío está incluido en todo conjunto

(S) $ARB \Rightarrow BRA$ Busco mismos A y B que no se hagan V la relación (es fácil hacer $B-A \neq A-B$)

$B = \{100, 101\}$ $A = \{101, 102\}$

$ARB \Leftrightarrow B-A \subseteq Y$

$BRA \Leftrightarrow A-B \subseteq Y$

$ARB \Leftrightarrow \{100,101\} - \{101,102\} \subseteq Y$

$\Rightarrow \{100\} \subseteq Y$ ✓

$BRA \Leftrightarrow \{101,102\} - \{100,101\} \subseteq Y$

$\Rightarrow \{102\} \subseteq Y$ F.

Jhallamos un contraejemplo.

R no es simétrica

(AS) $ARB \wedge BRA \Rightarrow A=B$ Parece verdad xq la diferencia es igual sii ambos poseen los mismos elementos.

$(A-B = B-A$ sii $A=B)$

$A=\{1\}$ $B=\{2\}$

$ARB \Leftrightarrow \{2\} - \{1\} \subseteq Y$

$\Rightarrow \{2\} \subseteq Y$

$BRA \Leftrightarrow \{1\} - \{2\} \subseteq Y$

$\{1\} \subseteq Y$

$A\mathcal{R}B \wedge B\mathcal{R}A$ y $A \neq B$.

$\mathcal{R}$ no es antisimétrica

(T) $A\mathcal{R}B \wedge B\mathcal{R}C \Rightarrow A\mathcal{R}C$

$A-B \subseteq Y \wedge B-C \subseteq Y \Rightarrow A-C \subseteq Y$

$A\mathcal{R}B$ sii todos los elementos mayores de 100 tiene B los tiene A.

$B\mathcal{R}C$ sii todos los los elementos mayores de 100 tiene C los tiene B

$A\mathcal{R}C$ sii todos los elementos mayores a 100 que tiene C los tiene A.

1. Sean $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 200\}$ e $Y = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$.
En $\mathcal{P}(X)$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la forma:

$$A \mathcal{R} B \iff B - A \subseteq Y.$$

a) Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

b) Sea $B = \{n \in X : n \text{ es par}\}$. ¿Cuántos conjuntos $A \in \mathcal{P}(X)$ satisfacen simultáneamente $A\mathcal{R}B$ y $\#(A \cap B) = 80$?

b) $B = \{n \in X : n \text{ es par}\}$ O sea en parte B puede tomar mas n subconjuntos que tengan 1 al 100 (pares).

Para que $A\mathcal{R}B$ debe suceder que $B-A \subseteq Y$.
La otra condición nos dice que $\#(A \cap B) = 80$

si B que tiene pares tiene alguno ≥ 100, A deberá tenerlo pues si $A-B \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \not\subseteq Y$

Ej: $B = \{105\}$ $A = \{99\} = \{105\} \not\subseteq Y$
$A = \{105\}$ $B = \{99\}$ = DA IGUAL. $A\mathcal{R}B$.

$A=\{105\}$ $B=\{105\} = \emptyset \subseteq Y$

$B=\{101\}$ $A=\{101,102\} = \emptyset \subseteq Y$

Tengo para elegir 100 de B, y 200 de A.

si B tiene ≥ 100, debo obligar a A a tener el mismo para que $B-A=\emptyset$

1. Sean $X=\{n\in\mathbb{N} : n\leq 200\}$ e $Y=\{n\in\mathbb{N} : n\leq 100\}$.
En $\mathcal{P}(X)$ se define la relación $\mathcal{R}$ de la forma:

$$A\mathcal{R}B \iff B-A\subseteq Y.$$

a) Determinar si $\mathcal{R}$ es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.

b) Sea $B=\{n\in X : n \text{ es par}\}$. ¿Cuántos conjuntos $A\in\mathcal{P}(X)$ satisfacen simultáneamente $A\mathcal{R}B$ y $\#(A\cap B)=80$?

B fijo, tiene el 2,4,6... Tiene 100 pares en total

xq mire $B-A \not\subseteq Y$

A tiene los 50 pares de 100 a 200. = 1 forma (ARB)

Ahora de los 50 pares ≤ 100 elijo 30. $=\binom{50}{30}$

$\#(A\cap B)=80$

A Para que $50+30=80$

De los 100 impares, pueden estar o no en A.

2^{100}

La cantidad de conjuntos A que cumplen deben cumplir

$(50$ 100

$$1 \cdot \binom{30}{30} \cdot 2$$

PARCIAL 20/05/2023

Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 600\}$ se define en $P(X)$ la relación dada por

$$A R B \iff \#(A \Delta B) \leq 2$$

1) Determinar si es R, S, AS o T.

$\#(A \Delta B) = 0 \iff A = B \vee (A = \emptyset \wedge B = \emptyset)$

$\#(A \Delta B) = 1 \iff$ A y B difieren en 1 elemento

$\#(A \Delta B) = 2 \iff$ A y B " en 2 elementos

(R) $A R A \iff \#(A \Delta A) \leq 2$

$\Rightarrow \#(\emptyset) \leq 2$

$\Rightarrow 0 \leq 2$ ✓

R es reflexiva

(S) $A R B \Rightarrow B R A$

$A R B \iff \#(A \Delta B) \leq 2$

$B R A \iff \#(B \Delta A) \leq 2$

Es simétrica pues por propiedad de teoría $A \Delta B = B \Delta A$.
Entonces $\#(A \Delta B) = \#(B \Delta A)$

Vale pues la diferencia simétrica deja solamente aquellos elementos que NO están en ambos a la vez y lo tanto si intentas $A \Delta B$ o $B \Delta A$, el resultado es el mismo

$$A \Delta B = B \Delta A$$

$\Rightarrow$) Supongo que vale $A \Delta B$, pruebo $B \Delta A$ y veo si llego a $A \Delta B$

$$x \in (B \Delta A) \overset{\text{DEF}\Delta}{\Rightarrow} x \in (B - A \cup A - B) \overset{\text{DEF}}{\Rightarrow} x \in [(B \cap A^c \cup A \cap B^c)]$$

$$\Rightarrow (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)$$

$$\Rightarrow \text{Como } (A \cup B) = (B \cup A) \Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

$$\Rightarrow x \in (A \cap B^c) \vee x \in (B \cap A^c) \Rightarrow x \in (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

$$\Rightarrow x \in (A - B) \cup (B - A) \Rightarrow x \in (A \Delta B).$$

$$x \in (A \Delta B) \overset{\text{DEF}\Delta}{\Rightarrow} x \in (A - B) \cup (B - A) \overset{\text{DEF-}}{\Rightarrow} x \in [(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)]$$

$$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)$$

PROP $\cup$

$$\Rightarrow (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)$$

$A \cup B = B \cup A$

$$\Rightarrow x \in [(B \cap A^c) \cup (A \cap B^c)]$$

$$\Rightarrow x \in [(B - A) \cup (A - B)]$$

$\Rightarrow x \in (B \Delta A)$.

Por lo tanto R es simétrica

(AS) $ARB \wedge BRA \Rightarrow A = B$

Contraejemplo: $A = \{1\}$ $B = \{2\}$

$\{1\} R \{2\} \Leftrightarrow \#(\{1\} \Delta \{2\}) \leq 2$

$\Rightarrow 2 \leq 2$ ✓

$\{2\} R \{1\} \Leftrightarrow \#(\{2\} \Delta \{1\}) \leq 2$

$\Rightarrow 2 \leq 2$

Hallamos Contraejemplo

R no es Antisimétrica.

(T) $ARB \wedge BRC \Rightarrow ARC$

$ARB \Leftrightarrow \#(A \Delta B) \leq 2$

$BRC \Leftrightarrow \#(B \Delta C) \leq 2$

$ARC \Leftrightarrow \#(A \Delta C) \leq 2$

$A = \{1,2\}$ $B = \{2,3\}$ $C = \{3,4\}$

$\#(A \Delta B) = 2$ $\#(B \Delta C) = 2$

$\#(A \Delta C) = 4$

R no es transitiva.

b) Si $B = \{ n \in X : n \equiv 2023 (14) \}$ Calcule

el Cardinal del Conjunto

$$\{ A \in P(X) : ARB \}$$

$ARB \iff \#(A \Delta B) \leq 2.$

$n \underset{(14)}{\equiv} 2023 \iff 7 (14)$

$\underbrace{\text{14 clases de equiv}}$ $(0, \dots, 13)$

B tiene elementos que módulo 14 dan 7.

Del 1 al 600 hay 600 números

$n \equiv 7 (14) \iff n = 14k + 7$

Sea $(a_n)_{n \geq 0}$

$$a_0 = 3, \; a_{n+1} = 4\left(\sum^{n} a_k\right) - 6n^2 + 13n + 16$$

$\Big|_{k=0} \quad \Big|$

Probar que $a_n > 5^n + 3n - 4 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Inducción global xq necesito los términos anteriores en la sumatoria.
1 Caso base pues a_{n+1} está todo sólo por a_1 en el primer paso.

Caso base: $n = 0$, $a_0 > 5^0 + 3.0 - 4 \iff 3 > -3$ ✓

P.I: Sea $h \in \mathbb{N}$, quiero ver que $P(0), P(1) \dots P(h) \Rightarrow P(h+1)$

Hi: $a_k > 5^k + 3k - 4$

QPQ: $a_{h+1} > 5^{h+1} + 3h - 4$

Pero por def de la sucesión

$$4\left(\sum_{k=0}^{h} \underbrace{a_k}_{>5^k+3k-4}\right) - 6h^2 + 13h + 16$$

Hi $$4\left(\sum_{k=0}^{h} 5^k + 3k - 4\right) - 6h^2 + 13h + 16$$

$$4\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{h} 5^k}_{S.GEO} + 3\underbrace{\sum_{k=0}^{h} k}_{S.Gauss} - 4\underbrace{\sum_{k=0}^{h} 1}_{(h+1)}\right) - 6h^2 + 13h + 16 >$$

$$4 \cdot \left(\frac{5^{h+1} - 1}{4} + 3\,\frac{h(h+1)}{2} - 4(h+1)\right) - 6h^2 + 13h + 16$$

$$5^{h+1} - 1 + 6h(h+1) - 16(h+1) - 6h^2 + 13h + 16$$

$$5^{h+1} - 1 + 6(h^2 + h) - 16h - 16 - 6h^2 + 13h + 16$$

$$5^{h+1} - 1 + \cancel{6h^2} + 6h - 16h \cancel{-16} \cancel{-6h^2} + 13h \cancel{+16}$$

$$5^{h+1} + 3h - 1 > 5^{h+1} + 3h - 4$$

Y esto es V pues $5^{h+1} = 5^{h+1}$

$3h = 3h$

y $-1 > -4$.

Por lo tanto, $P(0), P(1) \dots P(h) \Rightarrow P(h+1)$

Así, $P(n)$ es V, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

PREGUNTAR ESCRITURA

Calcular el MCD para cada $n \in \mathbb{Z}$

$$(n^4 + 6n^3 - 27n + 7 : n^2 + 3n - 10)$$

$$d = (n^4 + 6n^3 - 27n + 7 : n^2 + 3n - 10)$$

Como d es el MCD, $d \mid n^4 + 6n^3 - 27n + 7 \ \wedge \ d \mid n^2 + 3n - 10$

$-n^4 - 3n^3 + 10n^2$

$$d \mid (n^4 + 6n^3 - 27n + 7) - n^2(n^2 + 3n - 10) \Rightarrow d \mid 3n^3 + 10n^2 - 27n + 7$$

$-\cancel{3n^3} - \cancel{9n^2} + \cancel{30n}$

$$\Rightarrow d \mid (3n^3 + 10n^2 - 27n + 7) - 3n(n^2 + 3n - 10) \Rightarrow d \mid n^2 + 3n + 7$$

$$\Rightarrow d \mid (n^2 + 3n + 7) - (n^2 + 3n - 10) \Rightarrow d \mid 17$$

$$\mathrm{Div}_+(17) = \{1, 17\}$$

Los n posibles son 1 o 17.

$\underbrace{M=1}_{\text{Rebelión}}$, $(-13:-6) \iff (13:16) = (3:13) = (1:3) = (0:1) = 1$

un Coprimos

$M=17$, $(112547:330) = (330:17) = (77:7) = (7:3) = (3:1)$

$= (1:0) = 1$

MAL. En la resolución dice algo de que Div(17) es 17^i con $i \in \{0,1\}$

y le da que es 17 si pasa algo, 1 si pasa otra cosa

1) Sea $P = \mathcal{P}(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\})$ el conjunto de partes de $\{1,\dots,10\}$ y $\mathcal{R}$ la relación en P

$A\mathcal{R}B$ si y solo si $(A\Delta B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

a) Decidir si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, relación de equivalencia y/u orden.

Sugerencia: Demostrar que dados tres conjuntos D, E, F, $D\Delta E \subseteq (D\Delta F) \cup (E\Delta F)$

b) Hallar todos los conjuntos $B \in P$ tales que $\{1,2,3\}\mathcal{R}B$.

(R) $ARA \iff (A\Delta A) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

$\Rightarrow \emptyset \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

$\Rightarrow \emptyset = \emptyset$

Como ARA vale, R es reflexiva.

(S) Es simétrica pues $(A\Delta B) \cap \{1,2,3\} = (B\Delta A) \cap \{1,2,3\}$

pues : Sea x un elemento

$A\Delta B = B\Delta A$. Pruebo x doble inclusión

$\Rightarrow) A\Delta B = (A-B) \cup (B-A) \Rightarrow (A\cap B^c) \cup (B\cap A^c) \Rightarrow x \in [(A\cap B^c) \cup (B\cap A^c)]$

$(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Rightarrow (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)$

$\Rightarrow (B \Delta A)$

$(\Leftarrow)$ $B \Delta A = (B - A) \cup (A - B) \Rightarrow (B \cap A^c) \cup (A \cap B^c) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in [(B \cap A^c) \cup (A \cap B^c)] \Rightarrow (x \in B \wedge x \notin A) \vee (x \in A \wedge x \notin B)$

$(A \cup B) = (B \cup A)$

$\Rightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \Rightarrow A \Delta B.$

Así, $ARB \Rightarrow BRA.$

pues $ARB \Leftrightarrow (A \Delta B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$
$BRA \Leftrightarrow (B \Delta A) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

y dados dos conjuntos A y B, será igual pues $(A \Delta B)$ y $(B \Delta A)$ da la misma salida.

R es simétrica

(As) $ARB \wedge BRA \Rightarrow A = B$

Contraejemplo: $A = \{4\}$ $B = \{5,6\}$

$ARB \Leftrightarrow (\{4\} \Delta \{5,6\}) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

$\Rightarrow \{4,5,6\} \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

$\Rightarrow \emptyset = \emptyset$

$BRA \Leftrightarrow (\{5,6\} \Delta \{4\}) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

$$\Rightarrow (\{5,6,4\}) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$$

$$\Rightarrow \quad \emptyset = \emptyset$$

Hallamos un contraejemplo tal que $A \neq B$ y vale que ARB y BRA.

Por lo tanto, se cumple $ARB \wedge BRA$ pero no la implicación entonces

R no es Antisimétrica

(T) $ARB \wedge BRC \Rightarrow ARC$

Esto es V porque la relación se da por:

$$ARB \iff (A \triangle B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$$
$$BRC \iff (B \triangle C) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$$
$$ARC \iff (A \triangle C) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$$

y si considero ARB y BRC como están dadas por la diferencia simétrica sé que en $ARB \wedge BRC$ hay elementos de B, pero al mismo tiempo en ARB están los de A y en BRC están los de C. Así al estar repetidos los de B solo quedan los de A y C.

si $\emptyset \wedge \emptyset \Rightarrow \emptyset$

$\emptyset \Rightarrow \emptyset$.

R es transitiva

Por lo tanto R es una relación de equivalencia

b) $B \in P$ tales que $\{1,2,3\} R B$.

Sé que para que valga $A R B \Leftrightarrow (A \Delta B) \cap \{1,2,3\} = \emptyset$

Pero aquí A está fijo $\Rightarrow A R B \Leftrightarrow (\{1,2,3\} \Delta B) \cap \{1,2,3\}) = \emptyset$

Para que la intersección sea vacía

$\{1,2,3\} \Delta B$ NO debe contener al $\{1,2,3\}$

Así, B puede ser solamente:

$B = \{1,2,3\}$

Si B fuera distinto al $\{1,2,3\}$ pasaría:

- Si B tuviera otros que no sea $\{1,2,3\}$ $A \Delta B$ jamás sería $\emptyset$
- si B tuviera $\{1,2,3\}$ y otros, $A \Delta B$ jamás sería $\emptyset$

2) Se define por recurrencia la sucesión $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $H_1 = 1$ y $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} H_j = (n+1)H_n - n$$

Por comodidad defino $H = a$

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n+1}$$

Probar que vale: $\underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_j = (n+1) \cdot a_n - n}_{P(n)}$

En inducción global ya requiero todos los términos anteriores la sumatoria.

Solo tengo un caso base pues para definir a_2 necesito solo a_1.

Caso base $n=1$. $\sum_{j=1}^{1} a_j = (2).1 - 1 \iff 1 = 1$. ✓

P.I: Sea $k \in \mathbb{N}$, quiero ver que $P(1), P(2) \dots P(k) \Rightarrow P(k+1)$

HI: $\sum_{j=1}^{k} a_j = (k+1).a_k - k$

QPQ: $\sum_{j=1}^{k+1} a_j = (k+2).a_{k+1} - (k+1)$

$$\sum_{j=1}^{k} a_j + (k+1) \overset{HI}{=} (k+1).a_k - k + (k+1).1$$
$$= (k+1)(a_k + 1) - k$$
$$=$$

PR56. ¿Donde aplico a_{k+1} del enunciado?

3) Daniel define una función $f: \{1,2,3,\dots,12\} \to \{1,2,3,\dots,21\}$ que cumple simultáneamente:

- Es inyectiva
- $21 \in \mathrm{Im}(f)$ Debo hacer caso por caso considerando el otro
- $f(n) + n$ es par para todo $n = 1, \dots, 12$

¿Cuántas posibles funciones f bajo estas condiciones puede definir Daniel?

Simultáneamente: No son disjuntos. No "·"

• Cant funciones inyectivas: $\frac{21!}{(21-12)!} = \boxed{\frac{21!}{9!}}$ 1.

$\frac{m!}{(m-n)!}$

Ej: $A = \{1, 2\}$ $B = \{3, 4\}$ Es Iny si $\forall a \in A$, si $f(x) = f(x')$ ent $x = x'$

$\frac{2!}{(2-2)!} = 2!$ pues OPT 1: $1 - 3$ y $2 - 4$
OPT 2: $2 - 3$ y $1 - 4$

• $21 \in Im(f)$: Por complemento, veo cuando $21 \notin Im f$ y luego resto.

20^{12} : $21 \notin Im(f)$

ent $((21^{12}) - 20^{12})$ $21 \in Im(f)$

Juntando Opciones tenemos $\left(\frac{21!}{9!} \cdot (21^{12} - 20^{12})\right)$

• $f(n) + n$ es par $\forall n \in \{1, \ldots, 12\}$

si $f(n) + n$ debe ser PAR hay 3 opciones:

- $f(n)$ IMPAR + n par: IMPAR. No puede pasar.
- $f(n)$ PAR + n impar: IMPAR. No puede pasar
- $f(n)$ PAR + n par: PAR. PUEDE PASAR.

Entonces a $f(m)$ lo solo obligo y retorna un PAR si $m \in \{1, \dots, 12\}$

PARES en el CODOM por extensión: $\{\underbrace{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20}_{10.}\}$

¿10^{12}? 12 valores de x y 10 posibles del COD para?

Mi duda acá es, ¿yo debería considerar las otras funciones para llegar acá o solo al final hago la multi?

$$\left(\frac{21!}{9!} \cdot \left(21^{12} - 20^{12}\right) \cdot 10^{12}\right)$$

4) Se define por recurrencia la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $a_1 = 3, a_2 = -1$ y

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 4^{2n}.a_n + 15^n.n^{15} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n \equiv 3^n (\text{mod } 5)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Inducción global con 2 casos base pues para definir a_{n+2} necesito a_{n+1} y a_n

Casos base:

$$a_1 \underset{(5)}{\equiv} 3^1 \overset{?}{\equiv} 3\ (5) \checkmark$$

$$a_2 \underset{(5)}{\equiv} 3^2 \underset{(5)}{\equiv} 9 \underset{(5)}{\equiv} -1\ (5) \checkmark$$

P.I: Sea $k \in \mathbb{N}$. Quiero ver que $P(1), P(2), \dots P(k), P(k+1) \Rightarrow P(k+2)$

· Hi: $a_k \equiv 3^k \, (5) \qquad a_{k+1} \equiv 3^{k+1} \, (5)$

· QPQ: $a_{k+2} \equiv 3^{k+2} \, (5)$

Pero x def de la sucesión

$$a_{k+2} = a_{k+1} + 4^{2k} \cdot a_k + 15^k \cdot k^{15}$$

$$\overset{hi}{\equiv} 3^{k+1} + 4^{2k} \cdot 3^k + \underbrace{15^k \cdot k^{15}}_{0(5)} \underset{(5)}{\equiv} 3^{k+1} + \overset{1}{\widehat{16^k}} \cdot 3k \underset{(5)}{\equiv} 3^{k+1} \cdot 3k \underset{(5)}{\equiv}$$

$\Rightarrow 3^{k+2} \, (5)$ Como queríamos probar.

$$P(k), P(k+1) \Rightarrow P(k+2) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto $P(n)$ V, $\forall n \in \mathbb{N}$

2. [2.5 ptos] Demostrar que para todo $n \geq 2$ vale que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{n}.$$

Inducción Corrida, $n_0 = 2$

Caso base: $n = 2$

$$\sum_{i=2}^{1} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{4} < \frac{3}{2} = \frac{5}{4} < \frac{3}{2} \checkmark$$

· P.I: Sea $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, quiero ver que si $P(k)$ V $\Rightarrow P(k+1)$ vale

Hi: $\displaystyle\sum_{i=2}^{K} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{K}$

QPQ: $\displaystyle\sum_{i=2}^{k+1} \frac{1}{i^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$

$$\sum_{i=2}^{k+1} \frac{1}{i^2} = \left(\sum_{i=2}^{k} \frac{1}{i^2}\right) + \frac{1}{(k+1)^2} \overset{Hi}{<} 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

Basta ahora con ver que $2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{k+1}$

RDO:

DESIGUALDADES:

- Puedo pasar lo que quiera de izq a derecha.
- Solo cambia sentido de desigualdad si multiplico por (-1).
- Siempre debo dejar expresiones simples a comparar, Ej:

  $k^2 + k + 1 \geq k + 1$ es más fácil $\Rightarrow k^2 \geq 0$

En Inducción, es algo así: "Cada vez que hago operación, puedo reemplazar x lo que quiera mientras no me pase"

Ej: $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

- CB: $n = 1$, $3 + 5 \geq 2^3 = 8 \geq 8$ ✓
- Hi: $3^k + 5^k \geq 2^{k+2}$
- QPQ: $3^{k+1} + 5^{k+1} \geq 2^{k+2}$

$3^k \cdot 3 + 5^k \cdot 5$, Como $3 \geq 2$ y $5 \geq 2$ puedo "achicar" el 3 y el 5 x el 2.

$3^k \cdot 2 + 5^k \cdot 2 \iff 2(3^k + 5^k) \overset{Hi}{\geq} 2 \cdot 2^{k+2} \not\geq 2^{k+2}$