Generalidades.

1. Calcular el grado y el coeficiente principal de los siguientes polinomios en $\mathbb{Q}[X]$:

i) $(4X^6 - 2X^5 + 3X^2 - 2X + 7)^{77}$, · H

ii) $(-3X^7 + 5X^3 + X^2 - X + 5)^4 - (6X^4 + 2X^3 + X - 2)^7$, · H

iii) $(-3X^5 + X^4 - X + 5)^4 - 81X^{20} + 19X^{19}$. · H

$gr(fg) = gr(f) + gr(g)$

$CP(fg) = CP(f) \cdot CP(g)$

i) grado: $77 . 6$ ✓ $\Rightarrow$ Como 6 es el grado mayor, así 6.77 lo será luego.

CP: 4^{77} ✓

ii) $f: (-3x^4 + 5x^3 + x^2 - x + 5)^4$ $gr(f) = 7.4$ $CP(f) = (-3)^4$

$g: (6x^4 + 2x^3 + x - 2)^7$ $gr(g) = 4.7$ $CP(g) = 6^7$

$gr(f-g)$ Como $gr(f) - gr(g) = 0$ así el grado es el $MAX\{gr(f), gr(g)\}$

$gr(f-g) = 3.7$ pues g forma $(2x^3)^7$ y f forma $(5x^3)^4$ y $3.7 > 3.4$.

$CP(f-g) = 2^7$ pues el CP acompaña al MAYOR grado.

iii) $gr(f) = 20$ NO! xq $(-3)^4$ se cancela con $-81x^{20}$

$gr(f) = 19$ $CP(f) = 19$

2. Calcular el coeficiente de X^{20} de los siguientes polinomios

i) $(X^{18}+X^{16}+1)(X^5+X^4+X^3+X^2+X+1)$ en $\mathbb{Q}[X]$ y en $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$,

ii) $(X-3\,i)^{133}$ en $\mathbb{C}[X]$,

iii) $(X-1)^4(X+5)^{19}+X^{33}-5X^{20}+7$ en $\mathbb{Q}[X]$,

iv) $f=X^{10}(X^5+4)^7$ en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$.

i) PREGUNTAR $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$?

$$(x^{18}+x^{16}+1)(x^5+x^4+x^2+x+1)$$

$$x^{20}=x^{16}\cdot x^4 \quad \vee \quad x^{20}=x^{18}\cdot x^2$$

Ent, $x^{20}+x^{20} \Rightarrow$ el coeficiente es 2.

ii) ? ¿La potencia?

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

$$(x-3i)^{133} = \sum_{k=0}^{133}\binom{133}{k}(-3i)^{133-k}x^k$$

iii)

iv) $f = x^{10}(x^5+4)^7$ $\qquad x^{20} = 5.4$

$$= x^{10}(x^5+4)^4\cdot(x^5+4)^3$$

3. Hallar, cuando existan, todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que

i) $f^2 = Xf + X + 1$,

ii) $f^2 - Xf = -X^2 + 1$,

iii) $(X+1)f^2 = X^6 + Xf$,

iv) $f \neq 0$ y $f^3 = \mathrm{gr}(f) \cdot X^2 f$.

i) f no puede ser 0 pues $0^2 \neq X+1$

$f \neq 0$

$n := gr(f)$

$$gr(f^2) = 2gr(f) = 2n$$

$$gr(Xf + X + 1) \leq \max\{gr(Xf), gr(X), gr(1)\} = \max\{gr(X) + gr(f), 1, 0\} = \max\{gr(f)+1, 1, 0\} = gr(f)+1$$

$n+1 \quad 1 \quad 0$

$n \geq 0 \therefore n+1 > 1 > 0$

$f = ax + b$

Luego,

$gr(f^2) = 2n = gr(xf + x + 1) \leq n+1$

$2n \leq n+1$

$n \leq 1$

ii) $f^2 - Xf = -x^2 + 1$

$$gr(f^2) = 2\,gr(f)$$

$$gr(f+g) \leq \max\{gr(f), gr(g)\}$$

- $gr(f^2 - Xf) \Rightarrow gr(f^2 - Xf) \leq \max\{gr(f^2), gr(-Xf)\}$

$$\max\{gr(f^2), gr(-Xf)\} = \max\{2\,gr(f),\ gr(X) + gr(f)\} = \max\{2\,gr(f),\ 1 + gr(f)\}$$

- $gr(-x^2+1) \Rightarrow gr(-x^2+1) \leq \max\{gr(-x^2), gr(1)\}$

$$\max\{gr(-x^2), gr(1)\} = \max\{2,\ 0\}$$

4. Hallar el cociente y el resto de la división de f por g en los casos

i) $f = 5X^4 + 2X^3 - X + 4, \;\; g = X^2 + 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$,

ii) $f = 4X^4 + X^3 - 4, \;\; g = 2X^2 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,

iii) $f = X^n - 1, \;\; g = X - 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.

i)

$$
\begin{array}{l|l}
5x^4 + 2x^3 - x + 4 & x^2 + 2 \\ \hline
-(5x^4 + 10x^2) & 5x^2 + 2x - 10 \\ \hline
2x^3 - 10x^2 - x + 4 & \\
-(2x^3 + 4x) & \\ \hline
-10x^2 - 5x + 4 & \\
-(-10x^2 - 20) & \\ \hline
-5x + 24 &
\end{array}
$$

Luego, como $\text{gr}(-5x+4) < \text{gr}(x^2+2)$

resto: $-5x + 24$

cociente: $5x^2 + 2x - 10$

$\Rightarrow 5x^4 + 2x^3 - x + 4 = (x^2+2)(5x^2 + 2x - 10) + (-5x + 24)$

$= 5x^4 + \cancel{10x^2} + 2x^3 + 4x - \cancel{10x^2} - 20 - 5x + 24$

$= 5x^4 + 2x^3 - x + 4$ ✓

Preg como me doy cuenta

y estos coeficientes valen en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}[X]$.

ii) $\cancel{4x^4} + x^3 - 4 \;\underline{\big|\, 2x^2 + 1}$

$-\left(\cancel{4x^4} + 2x\right)$ $\quad 2x^2 + \frac{1}{2}x \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} 4x^2 + 2x$ ¿se puede?

$2x^2 + \frac{1}{2}x \sim 4x^2 + 2x$

$\cancel{x^3} - 2x - 4$

$-\left(\cancel{x^3} + \frac{1}{2}x\right)$

$-\frac{5}{2}x - 4 \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} -5x - 8$ ¿se puede? $\quad -\frac{5}{2}x - 4 \sim -5x - 8$

Luego, $gr(-5x-8) < gr(2x^2+1)$ Termina

Resto: $-5x - 8$

Cociente: $4x^2 + 2x$ ¿me llevaría mucho, no?

Así, $4x^4 + x^3 - 4 = (4x^2 + 2x)(2x^2 + 1) + (-5x - 8)$

$= 8x^4 + 4x^2 + 4x^3 + 2x - 5x - 8$

$4x^4 + x^3 - 4 = 8x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 3x - 8$

Sin multiplicar

$4x^4 + x^3 - 4 = \left(2x^2 + \frac{1}{2}x\right)(2x^2 + 1) + \left(-\frac{5}{2}x - 4\right)$

$= 4x^4 + 2x^2 + x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}x - 4$

$= 4x^4 + 3x^2$ ok. algo está (sin calculadora)

$\cancel{4x^4} + x^3 - 4 \;\underline{\big|\, 2x^2 + 1}$

$-\left(\cancel{4x^4} + 2x^2\right)$ $\quad 2x^2 + \frac{1}{2}x - 2 \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} 4x^2 + x - 4$

$\left(2x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right) \sim \left(4x^2 + x - 4\right)$

$x^3 - 2x^2 - 4$

$-\left(x^3 + \frac{1}{2}x\right)$

¿Vale hacer esto?

$$-2x^2 - \frac{1}{2}x - 4 \quad \cdot 2$$

$$-\cancel{4x^2} - x - 8 \qquad (-2x^2 - \tfrac{1}{2}x - 4) \sim -4x^2 - x - 8$$

$$-(\cancel{-4x^2} - 2)$$

$$-x - 6$$

Como $gr(-x-6) < gr(2x^2+1)$, $-x-6$ es el resto

$$4x^4 + x^3 - 4 = (2x^2+1)\overbrace{\left(2x^2 + \tfrac{1}{2}x - 1\right)}^{q} + \overbrace{\left(-\tfrac{1}{2}x - 3\right)}^{r}$$

$$= 4x^4 + x^3 - \cancel{2x^2} + \cancel{2x^2} + \cancel{\tfrac{1}{2}x} - 1 - \cancel{\tfrac{1}{2}x} - 3$$

$$= 4x^4 + x^3 - 4$$

q y r valen en todos los cuerpos $\mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$ pero en $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ no.

En $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:

$$2x^2 + \tfrac{1}{2}x - 1 \sim 4x^2 + x - 2$$

$$q: \left(2x^2 + \tfrac{1}{2}x - 1\right) \cdot 2 = 4x^2 + x - 2$$

$$r: \left(-\tfrac{1}{2}x - 3\right) \cdot 2 = -x - 6$$

$$-\tfrac{1}{2}x - 3 \sim -x - 6$$

$$\begin{array}{l|l} 4x^4 + x^3 - 4 & 2x^2 + 1 \\ \hline -(4x^4 + 2x^2) & 2x^2 + \tfrac{1}{2}x \ \cdot 2 \Rightarrow 4x^2 + x - 2 \\ x^3 - 2x^2 - 4 & \\ -(x^3 + \tfrac{1}{2}x) & \\ \hline -2x^2 - \tfrac{1}{2}x - 4 \ \cdot 2 \Rightarrow -4x^2 - x - 8 & \end{array}$$

Aparentemente solo vale si lo hacemos al mismo tiempo.
PREGUNTAR

$$-4x^2 - x - 8$$
$$-(4x^2 - 2)$$
$$-x - 6$$

$$4x^4 + x^3 - 4 = (2x^2+1)(4x^2 + x - 2) + (-x-6)$$

$$= 8x^4 + 2x^3 \cancel{-4x^2} \cancel{+4x^2} \cancel{+x} - 2 \cancel{-x} - 6$$

$$4x^4 + x^3 - 4 = 8x^4 + 2x^3 - 8 \qquad (4x^4 + x^3 - 4 \sim 8x^4 + 2x^3 - 8)$$

$$4x^4 + x^3 - 4 \overset{/2}{=} 4x^4 + x^3 - 8 \checkmark$$

Luego, $q: 4x^2 + x - 2$ y $r: -x - 6$

iii) $x^n - 1 \;\; \lfloor x - 1$

$$-(x^n - x^{n-1}) \qquad x^{n-1} + x^{n-2}$$

$$x^{n-1} - 1$$
$$-(x^{n-1} - x^{n-2})$$
$$x^{n-2} - 1$$

Esto va hasta $x^{n-(n-1)}$

$$q: (x^{n-1} + x^{n-2} \dots x^{n-(n-1)})$$

$r: 0$ ¿ $x - 1 \;\lfloor x-1$ al final?

$$\boxed{\begin{array}{l} x^n - 1 \equiv ? \mod (x-1) \\ x - 1 \equiv 0\,(x-1) \\ x \equiv 1\,(x-1) \end{array}}$$

$$x^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0 \mod x - 1$$

$$\frac{x^n - 1}{x - 1} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$$

5. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que

i) $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ sea divisible por $X^2 + aX + 1$,

ii) $X^4 - aX^3 + 2X^2 + X + 1$ sea divisible por $X^2 + X + 1$,

iii) El resto de la división de $X^5 - 3X^3 - X^2 - 2X + 1$ por $X^2 + aX + 1$ sea $-8X + 4$.

i) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \;\lfloor x^2 + ax + 1$ (lema ...

$$\cancel{x^3} + 2x^2 + 2x + 1 \quad \Big| \quad \dots$$

$$-\left(\cancel{x^3} + ax^2 + x\right) \qquad x + \underbrace{(2-a)}_{1.}$$

(Bajo hallar a tal q

$r(f/g) = 0)$

$$\left(\cancel{2x^2 - ax^2}\right) + x + 1$$

$$-\left(\cancel{2x^2 - ax^2}\right) + (2ax - a^2x) + (2-a)$$

$$x^2 \cdot ? = 2x^2 - ax^2$$

$$-2ax + a^2x - 2 + a + x + 1$$

$$x^2(2-a)$$

$$(2-a)(ax) = 2ax - a^2x$$

$$-2ax + a^2x - 1 + a + x = 0$$

$$a^2x - 2ax + x - 1 + a = 0$$

$$\underbrace{x(a^2 - 2a + 1)}_{0} + \underbrace{(-1 + a)}_{0} = 0$$

-> ambos términos deben dar cero.
Condición simultánea

$$(a-1)^2 \Rightarrow a = 1$$

$$\begin{cases} x(a^2 - 2a + 1) = 0 \\ -1 + a \Rightarrow \boxed{a = 1} \end{cases}$$

Luego $a = 1$ hace q la división de resto 0

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 \quad \Big| \quad x^2 + x + 1$$

$$-\left(x^3 + x^2 + x\right) \qquad x + 1$$

$$x^2 + x + 1$$

$$-\frac{(x^2+x+1)}{0/}$$

ii) $\cancel{x^4 - ax^3} + 2x^2 + x + 1 \quad \big|\ x^2 + x + 1$

$(x^2 - ax) + (-x - a) + 2$

$$-\underline{\left(\cancel{(x^4 - ax^3)} + (x^3 - ax^2) + (x^2 - ax)\right)}$$

$$-\cancel{(x^3 - ax^2)} - (x^2 - ax) + 2x^2 + x + 1$$

$$-\underline{\left(\cancel{(x^3 - ax^2)} + (-x^2 - ax) + (-x - a)\right)}$$

$$(2x^2 + x + 1) + 2ax + (x + a)$$

$$-\underline{\left((2x^2 + 2x + 2)\right.}$$

$$-x - 1 + 2ax + (x + a)$$

$$x(-1 + 2a + 1) + a - 1 = 0$$

$$x(2a) + a - 1$$

$x^4 - ax^3 + 2x^2 + x + 1 \quad \big|\ x^2 + x + 1$

$x^2 + (-x - ax) + (2 + a)$

$$-\underline{(x^4 + x^3 + x^2)}$$

$$\cancel{(-x^3 - ax^3)} + x^2 + x + 1$$

$$-\underline{\left(\cancel{(-x^3 - ax^3)} + (-x^2 - ax^2) + (-x - ax)\right)}$$

$$\cancel{2x^2 + ax^2} + 2x + ax + 1$$

$$-\left(\left(\cancel{2x^3}+ax^2\right)+(2x+ax)+(2+a)\right)$$

$$1-2-a$$

$$1-2-a=0$$

$$\boxed{-1=a}$$

Entonces para que $g|f$, a debe ser -1 por

$a=-1$ hace que el resto sea 0

VERIF: TODO

iii)

$$\cancel{x^5}-3x^3-x^2-2x+1 \quad \Big| \; x^2+ax+1$$

$$x^3-ax^2-4x-1+(a^2x)+a^3+5a$$

$$-(\cancel{x^5}+ax^4+x^3)$$

$$-\cancel{a}x^4-4x^3-x^2-2x+1$$

$$-(-\cancel{a}x^4-a^2x^3-ax^2)$$

$$-\cancel{4}x^3+a^2x^3-x^2+ax^2-2x+1$$

$$-(-\cancel{4}x^3-4ax^2-4x)$$

$$a^2x^3\ \cancel{-x^2}+5ax^2+2x+1$$

$$-(\cancel{-x^2}-ax-1)$$

$$\cancel{a^2}x^3+ax+5ax^2+2x+2$$

$$-(a^2x^3+a^3x^2+a^2x)$$

$\cancel{a^3}x^2+a^2x+ax+5ax^2+2x+2$

$-(\cancel{a^3}x^2+a^4x+a^3)$

$\cancel{5a}x^2+a^2x+ax-a^4x-a^3+2x+2$

$-(\cancel{5a}x^2+5a^2x+5a)$

$-5a^2x-5a+a^2x+ax-a^4x-a^3+2x+2$

$x(-5a^2+a^2+a-a^4+2)-5a-a^3+2=-8x+4$

$\underbrace{x(-4a^2+a-a^4+2)}_{-8}\ \underbrace{-5a-a^3}_{2}=-8x+2$

$-5a-a^3=2$

$-a-a^3=\frac{2}{5}$ X

$=\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

TODO

$f=g\cdot q+r$

$f=\frac{x^5-1}{x-1}\cdot q+r$

$f=\underbrace{(x^4+x^3+x^2+x+1)}_{\frac{x^5-1}{x-1}}q+r$

$f(x-1)=(x^5-1)q+r(x-1)$

7. Hallar el resto de la división de f por g para

i) $f=X^{353}-X-1$ y $g=X^{31}-2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$,

ii) $f=X^{1000}+X^{40}+X^{20}+1$, $g=X^6+1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$,

iii) $f=X^{200}-3X^{101}+2$, $g=X^{100}-X+1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$,

iv) $f=X^{3016}+2X^{1833}-X^{174}+X^{137}+2X^4-X^3+1$, $g=X^4+X^3+X^2+X+1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$. (Sug: ver Ej. 4)iii)).

$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=x^5-1$

i) $x^{31} - 2 \equiv 0 \, (x^{31} - 2) \iff x^{31} \equiv 2 \, (x^{31} - 2)$

$353 = 31 . 11 + 12 \Rightarrow x^{353} \equiv (x^{31})^{11} . x^{12} \equiv 2^{11} x^{12} \, (x^{31} - 2)$

Ent, hagamos el hato fracción del resto.

$$2048 x^{12} - x - 1 \quad \underline{| \, x^{31} - 2}$$

Luego, como $gr(2048x^{12} - x - 1) < gr(x^{31} - 2)$

este es el resto.

ii) $x^6 + 1 \equiv 0 \, (x^6 + 1) \Rightarrow x^6 \equiv -1 \, (x^6 + 1)$

$1000 = 6 . 166 + 4$

$40 = 6 . 6 + 4$

$20 = 6 . 3 + 2$

$$(x^6)^{166 + 4} + (x^6)^{6+4} + (x^6)^{3+2} + 1$$

$$\equiv (x^6 + 1)$$

$$(x^6)^{166} . x^4 + (x^6)^6 . x^4 + (x^6)^3 . x^2 + 1$$

$$\equiv (x^6 + 1)$$

$$(-1)^{166} . x^4 + (-1)^6 . x^4 + (-1)^3 . x^2 + 1$$

$$|||\ (x^6+1)$$

$$x^4+x^4-x^2+1 \Rightarrow 2x^4-x^2+1$$

Luego, como $gr(2x^4-x^2+1) < gr(x^6+1)$ ent

el resto es $2x^4-x^2+1$ ✓

Si bien me sale, pregunto el por qué hacen

$x^6 \equiv 1 (x^6+1)$ supongo que xq la idea

es dividir al polinomio hasta tener resto menor?

Creo algo así $\overset{n}{a} \underline{|b}^{m}$ y llegar a que

$gr(n) < gr(m)$

$a^{p-1} \equiv 1(p) \qquad a^p \equiv a(p) \qquad a^p \equiv a^{r_{p-1}(n)}(p) \qquad PTF$

---

iii) $x^{100}-x+1 \equiv 0(x^{100}-x+1) \Leftrightarrow x^{100} \equiv x-1(x^{100}-x+1)$

$200 = 100.2+0$

$101 = 100.1+1$

$(x^{100})^2.x^0 \ -3(x^{100})^1.x+2$

$$||| \; (x^{100}-x+1)$$

$$(x-1)^2 \cdot 1 - 3(x-1) \cdot x + 2$$
$$||| \; (x^{100}-x+1)$$

$$x^2 - 2x + 1 - 3(x^2-x) + 2$$
$$||| \; (x^{100}-x+1)$$

$$x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x + 2 \Rightarrow -2x^2 + x + 3$$

Luego, como $gr(-2x^2+x+3) < gr(x^{100}-x+1)$

entonces el resto es $-2x^2+x+3$

iv)

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \equiv 0 \; (x^4+x^3+x^2+x+1)$$

$$x^4 \equiv -x^3 - x^2 - x - 1 \; (x^4+x^3+x^2+x+1)$$

TODO

8. Sea K un cuerpo. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $a \in K$.

i) Probar que $X - a \mid X^n - a^n$ en $K[X]$.
ii) Probar que si n es impar entonces $X + a \mid X^n + a^n$ en $K[X]$.
iii) Probar que si n par entonces $X + a \mid X^n - a^n$ en $K[X]$.

Calcular los cocientes en cada caso.

i) $X-a \mid X^n - a^n$

1.
$$\boxed{\begin{array}{l} X-a \equiv 0\,(X-a) \\ X \equiv a\,(X-a) \end{array}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X^n - a^n \underset{(X-a)}{\equiv} a^n - a^n \equiv 0\,(X-a)$$

2. $X^n - a^n \equiv 0\,(X^n - a^n)$

$\shortparallel$

$X^n \equiv a^n\,(X^n - a^n)$

$\shortparallel$ ¿→ Vale aún en $\mathbb{Z}[X]$? $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$

$X \equiv \sqrt[n]{a^n}\,(X^n - a^n)$

$\shortparallel$

$X \equiv a\,(X^n - a^n)$

$\shortparallel$

$X - a \equiv 0\,(X^n - a^n)$

¿?

ii) $X + a \mid X^n + a^n$ en $K[X]$

$$X + a \equiv 0\,(X+a) \Rightarrow X \equiv -a\,(X+a)$$

↓ impar

Luego, $\underbrace{(-a)^n}_{-a^n} + a^n \underset{(X+a)}{\equiv} 0\,(X+a)$

$-a^n + a^n$

iii) $X + a \equiv 0\,(X+a) \Rightarrow X \equiv -a\,(X+a)$

↓ par

$$X^n - a^n \underset{(X+a)}{\equiv} (-a)^n - a^n \underset{(X+a)}{\equiv} 0\,(X+a)$$

$a^n - a^n$

9. Calcular el máximo común divisor entre f y g en $\mathbb{Q}[X]$ y escribirlo como combinación polinomial de f y g siendo

i) $f = X^5 + X^3 - 6X^2 + 2X + 2, \quad g = X^4 - X^3 - X^2 + 1,$

ii) $f = X^6 + X^4 + X^2 + 1, \quad g = X^3 + X,$

iii) $f = 2X^6 - 4X^5 + X^4 + 4X^3 - 6X^2 + 4X + 1, \quad g = X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 3X + 1.$

¿Cambia algo si se consideran los polinomios en $\mathbb{R}[X]$ o $\mathbb{C}[X]$?

$$\cancel{x^5} + x^3 - 6x^2 + 2x + 2 \quad \big|\ x^4 - x^3 - x^2 + 1$$
$$-(\cancel{x^5} - x^4 - x^3 + x) \qquad x + 1$$
$$\cancel{x^4} + 2x^3 - 6x^2 - x + 2$$
$$-(\cancel{x^4} - x^3 - x^2 + 1)$$
$$3x^3 - 5x^2 - x + 1$$

$$\cancel{x^4} - x^3 - x^2 + 1 \quad \big|\ 3x^3 - 5x^2 - x + 1$$
$$-(\cancel{x^4} - \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x) \qquad \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$
$$\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 1 \quad \cdot 3$$
$$2\cancel{x^3} - 2x^2 - x + 3$$
$$-(2\cancel{x^3} - \frac{10}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{3})$$
$$\frac{4}{3}x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{7}{3} \quad \cdot 3$$

Que números más feos...

$$3\cancel{x^3} - 5x^2 - x + 1 \quad \big|\ 4x^2 - 5x + 7$$
$$-(3\cancel{x^3} - \frac{15}{4}x^2 + \frac{21}{4}x) \qquad \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$
$$-\frac{5}{4}x^2 - \frac{25}{4}x + 1 \quad \cdot 4$$
$$-5\cancel{x^2} - 25x + 4$$
$$-(-5\cancel{x^2} + \frac{25}{4}x - \frac{35}{4})$$
$$-\frac{125}{4}x + \frac{51}{4} \quad \cdot -4$$

$$4\cancel{x^2} - 5x + 7 \quad \big|\ 125x - 51$$
$$-(4\cancel{x^2} - \frac{204}{125}x) \qquad \frac{4}{125}x$$
$$-421 \quad x + 7$$

$$125x = 4$$

$$125x = \underline{-421}$$

125 125

ii) f: $\cancel{x^6}+\cancel{x^4}+x^2+1$, $\quad g$: x^3+x

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^6}+\cancel{x^4}+x^2+1 & x^3+x \\ \hline -(\cancel{x^6}+\cancel{x^4}) & x^3 \\ \hline \underbrace{x^2+1} & \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad f = \underbrace{x^3}_{q_1}.g + \underbrace{x^2+1}_{r_1} \qquad x^2+1 = 1.f - x^3.g$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^3}+\cancel{x} & x^2+1 \\ \hline -(\cancel{x^3}+\cancel{x}) & x \\ \hline 0/ & \end{array}$$

$$g = \underbrace{x}_{q_2}.r_1 + \underbrace{0}_{r_2}$$

Luego, $(x^6+x^4+x^2+1 : x^3+x) = (x^3+x : x^2+1) = (x^2+1 : 0) = x^2+1$

el MCD es x^2+1 y vale pues es mónico $\to x^2+1$

¿El MCD está bien? Si divido a f y g por MCD debería dar resto 0

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^6}+\cancel{x^4}+x^2+1 & x^2+1 \\ \hline -(\cancel{x^6}+\cancel{x^4}) & x^4+1 \\ \hline x^2+1 & \\ -(x^2+1) & \\ \hline 0/ & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^3+x & x^2+1 \\ \hline -(x^3+x) & x \\ \hline 0/ & \end{array}$$

El MCD está bien. Le erré a euclides

iii) $\cancel{2x^6} - \cancel{4x^5} + x^4 + \cancel{4x^3} - \cancel{6x^2} + 4x + 1 \;\lfloor\; x^5 - 2x^4 + 2x^2 - 3x + 1$

$-(\cancel{2x^6} - \cancel{4x^5} + \cancel{4x^3} - \cancel{6x^2} + 2x) \qquad 2x$

$x^4 + 2x + 1$

$\cancel{x^5} - 2x^4 + \cancel{2x^2} - 3x + 1 \;\lfloor\; x^4 + 2x + 1$

$-(\cancel{x^5} + \cancel{2x^2} + x) \qquad x - 2$

$$\begin{array}{r} -\cancel{2}x^4 - \cancel{4}x + 1 \\ -(-\cancel{2}x^4 - \cancel{4}x - 2) \\ \hline 3/ \end{array}$$

Luego, el MCD es 1 pues $\frac{3}{3} = 1$

$$(2x^6 - 4x^5 + x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 : x^5 - 2x^4 + 2x^2 - 3x + 1)$$

$$= (x^5 - 2x^4 + 2x^2 - 3x + 1 : x^4 + 2x + 1) = (x^4 + 2x + 1 : 3) = 1$$

FALTA COMB lineal

$$x^5 - 2x^4 + 2x^2 - 3x + 1 = (x^4 + 2x + 1)(x-2) + \underline{3}$$

$$\underline{x^5 - 2x^4 + 2x^2 - 3x + 1} - \underbrace{(x^4 + 2x + 1)(x-2)} = 3$$

tiene que aparecer

$2x^6 - 4x^5 \dots + 1$

$$2x^6 - 4x^5 + x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = (x^5 - 2x^4 + 2x^2 - 3x + 1)(2x) + x^4 + 2x + 1$$

$$\underbrace{(2x^6 - \dots + 1) - (x^5 - 2x^4 + \dots + 1)\,2x} = x^4 + 2x + 1$$

$$x^5 - 2x^4 + 2x^2 - 3x + 1 - \left[(2x^6 - \dots + 1) - (x^5 - \dots + 1)2x\right](x-2) = 3$$

$$(x-2)(2x^6 - \dots + 1) + (x^5 - \dots + 1)(1 - 2x(x-2)) = 3$$

Evaluación y raíces.

10. Sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $f(1) = -2$, $f(2) = 1$ y $f(-1) = 0$. Hallar el resto de la división de f por $X^3 - 2X^2 - X + 2$.

-1 en raiz de f.

$$\begin{cases} f(1) = -2 \\ f(2) = 1 \\ f(-1) = 0 \end{cases}$$

$$f(1) = r_f(x-1)$$

Ej: $x+1 \Rightarrow x = -1$

$$f(-1) = 0$$

$$\begin{array}{r|l} x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -(x+1) & 1 \\ \hline 0/ & \end{array}$$

Ensi $\begin{array}{r|l} f & x+1 \\ \cline{2-2} & \sim \\ 0/ & \end{array}$ $\begin{array}{r|l} f & x-2 \\ \cline{2-2} & \sim \\ 1/ & \end{array}$

$$\begin{array}{r|l} f & x-1 \\ \cline{2-2} & \sim \end{array}$$

$= 2/$

Necesito $r_g(f) \Rightarrow f \bmod g$

Así, $gr(f) \geq gr(g)$ pero

$0 \leq gr(r_g(f)) < 3 \Rightarrow$ Divido resto f f tenga grado MENOR a g

Luego, $f = ax^2 + bx + c$

$$f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c$$

$$= a - b + c = 0$$

$$f(2) = a(2)^2 + b(2) + c$$

$$= 4a + 2b + c = 1$$

$$f(1) = a(1)^2 + b(1) + c$$

$$= a + b + c = -2$$

$$\begin{cases} a - b + c = 0 & (1) \\ 4a + 2b + c = 1 & (2) \\ a + b + c = -2 & (3) \end{cases}$$

③ $a = -2 - b - c$

① $(-2-b-c) - b + c = 0$

$-2 - 2b = 0$

$$\boxed{b = -1}$$

③ $a = -2 - (-1) - c = a = -1 - c$

② $4(-2-b-c) + 2(-1) + c = 1$

$4(-2+1-c) - 2 + c = 1$

$4(-1-c) - 2 + c = 1$

$-4 - 4c - 2 + c = 1$

$-6 - 3c = 1$

$-3c = 7$

$c = -\frac{7}{3}$

luego, f = $a = -1 - \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{4}{3}$

VERIF.

$f(-1) \Rightarrow$ espero 0

$$f(-1) = \frac{4}{3}(-1)^2 - 1(-1) - \frac{7}{3}$$

$$= 0 \checkmark$$

$f(1)$ espero -1

$$f(1) = \frac{4}{3}(1)^2 - 1(1) - \frac{7}{3}$$

$$= -1$$

$f(2)$ espero 1

$$f(2) = \frac{4}{3}(2)^2 - 1(2) - \frac{7}{3}$$

$$= 1$$

Ahora hago la división pero como

$\frac{4}{3}x^2 - x - \frac{7}{3}$ es el resto pues

el $gr\left(\frac{4}{3}x^2 - x - \frac{7}{3}\right) < gr(x^3 - 2x^2 - x + 2)$

11. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Hallar el resto de la división de $X^{2n} + 3X^{n+1} + 3X^n - 5X^2 + 2X + 1$ por $X^3 - X$ en $\mathbb{Q}[X]$.

Min grado de x^{2n} .. es x^6

TEORIAS

$f: x-1$ $\qquad$ $f: x^{2n}+2x^n-3$

$n=1$

$$\begin{array}{l|l} x^2+2x-3 & x-1 \\ \hline -(x^2-x) & x+3 \\ \hline 3x-3 & \\ -(3x-3) & \\ \hline 0/ & \end{array}$$

¿Que pasa si $n=2$?

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^4}+2x^2-3 & x-1 \\ \hline -(\cancel{x^4}-x^3) & x^3+3x^2+3x+3 \\ \hline 3x^3-3 & \\ -(3x^3-3x^2) & \\ \hline 3\cancel{x}^2-3 & \\ -(\cancel{3x}^2-3x) & \end{array}$$

$$3x - 3$$
$$-(3x-3)$$
$$\overline{\quad 0 \quad}$$

¡vale TMB!

Creo que no x^2+2x-3 divide,
$x^{2n}+2^n-3$ TMB y el resto es el mismo

$$x^{2n}+3x^{n+1}+3x^n-5x^2+2x+1 \quad \underline{\big| \; x^3-x}$$

min $n=3$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{x^6}+3x^4+3x^3-5x^2+2x+1 & x^3-x \\ \hline
-(\cancel{x^6}-x^4) & x^3+4x+3 \\ \hline
\cancel{4x^4}+3x^3-5x^2+2x+1 & \\
-(\cancel{4x^4}-4x^2) & \\ \hline
\cancel{3x^3}-x^2+2x+1 & \\
-(\cancel{3x^3}-3x) & \\ \hline
-x^2+5x+1 &
\end{array}
$$

Luego, sea el n que sea, el resto será $-x^2+5x+1$

[illegible]

Y vale pues si divido debe quedar grado MENOR que $x^3 - x$.

PN: 6.

12. Hallar la forma binomial de cada una de las raíces complejas del polinomio $X^6 + X^3 - 2$.

La idea de este ejercicio es cambiar y expresar a la manera que $x^{\text{MENOR GRADO}} = w$, así nos queda CUADRÁTICA

$x^3 = w$

$w^2 + w - 2$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} \quad \begin{cases} \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\[2ex] \dfrac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

$w = 1 \lor w = -2$

$x^3 = 1$ G_3 $\lor x^3 = -2$

$\cdot\, x^3 = 1 + 0i$

$$\begin{cases} r^3 = 1 \iff r = \sqrt[3]{1} = 1 \end{cases}$$

$$\theta = \frac{0 + 2k\pi}{3} \quad \text{con } 0 \leq k < 3$$

$k = 0, \; e^{0} = 1$

$k = 1, \; e^{\frac{2\pi}{3}}$

$k = 2, \; e^{\frac{4\pi}{3}}$

$\Rightarrow \left\{ 1; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3} \right\}$

$\cdot x^3 = -2 \Rightarrow \arg|-2| = \pi$

$$\begin{cases} r^3 = |-2| \Rightarrow r = \sqrt[3]{2} \\ \theta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{3} \quad \text{con } 0 \leq k < 3 \end{cases}$$

$k = 0$

$\sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{\pi}{3} i}$

$k = 1$

$\sqrt[3]{2} \cdot e^{\pi i}$

$k = 2$

$\sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{3} i}$

$\Rightarrow \left\{ \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{\pi}{3} i}; \sqrt[3]{2} \cdot e^{\pi i}; \sqrt[3]{2} \cdot e^{\frac{5\pi}{3} i} \right\}$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (0, \ldots)^2 \to \frac{3}{4}$

Luego, los raíces del complejo son:

$$\left\{ 1 ; -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i ; -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i ; \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) ; -\sqrt[3]{2} ; \sqrt[3]{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \right\}$$

$f(\omega+\omega^2+\omega^4)=0$

13. Sea $\omega = e^{\frac{2\pi}{7}i}$. Probar que $\omega+\omega^2+\omega^4$ es raíz del polinomio X^2+X+2.

$$w = e^{\frac{2}{7}i} \Rightarrow \frac{2}{7} \Rightarrow w \in G^7$$

n

$$(w+w^2+w^4)^2 + (w+w^2+w^4)+2 = 0$$

w es raíz de x^7-1

w es raíz compleja $\Rightarrow$ $w+w^2+w^4$ raíz compleja

$$\overline{w+w^2+w^4} = \bar{w}+\bar{w}^2+\bar{w}^4 = w^{-1}+w^{-2}+w^{-4}$$
$$= w^6+w^5+w^3$$

$(x-(w+w^2+w^4))(x-(w^6+w^5+w^3))$ divide a x^2+x+2

3. Hallar, cuando existan, todos los $f \in \mathbb{C}[X]$ tales que

i) $f^2 = Xf + X + 1$, $\leftarrow$

ii) $f^2 - Xf = -X^2+1$, $\leftarrow$

iii) $(X+1)f^2 = X^6 + Xf$,

iv) $f \neq 0$ y $f^3 = \text{gr}(f)\cdot X^2 f$.

i) $gr(f^2) = 2\, gr(f)$

$gr(xf+x+1) = gr(x) + gr(f) + gr(x+1)$

Pondo $\boxed{f = x}$

$$gr(xf+x+1) = gr(x)+gr(f)+\overbrace{gr(x+1)}^{x}$$

$1 \quad 1 \quad 1 \quad = 3$

$xf + x + 1 = x^2 + x + 1 \quad gr = 2$

- Si f cte
  $gr(xf + x + 1) = 1$ → no es opción

- si $gr(f) \geq 1 \quad gr(xf + x + 1) = gr(x) + gr(f)$

$$2gr(f) = gr(x) + gr(f)$$
$$2gr(f) = 1 + gr(f)$$

$$gr(f) = 1$$

→ $\underline{\text{planteo } f = ax + b}$

ii) $\underbrace{f^2 - fx} = -x^2 + 1 \qquad gr(f^2 - fx) = gr(-x^2 + 1)$
$= 2$

¿ $gr(f^2 - fx)$? si $f = c$
$f^2 - fx = c^2 - c.x \quad gr = 1$
si $f = x \quad f^2 - fx = x^2 - x.x = 0$

$gr(f^2 - fx) \neq 2gr(f)$
si $f = x$ entonces $gr(f^2 - fx) = gr(0) = -\infty$ raro

7. Hallar el resto de la división de f por g para

i) $f = X^{353} - X - 1$ y $\quad g = X^{31} - 2$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$,

ii) $f = X^{1000} + X^{40} + X^{20} + 1$, $\quad g = X^6 + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$ y $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$,

iii) $f = X^{200} - 3X^{101} + 2$, $\quad g = X^{100} - X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$,

iv) $f = X^{3016} + 2X^{1833} - X^{174} + X^{137} + 2X^4 - X^3 + 1$, $\quad g = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ en $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{C}[X]$. (Sug: ver Ej. 4)iii)).

$$g(X - 1) = \underline{X^5 - 1}$$

$$f = q \cdot \cancel{(X^5 - 1)} + r = \underbrace{q\, g(x - 1)} + \underbrace{r}$$

$r = 3\ ...$

$r = 2g + s$

$$f = q(X-1)g + \xi g + s$$
$$= \underbrace{(q(X-1) + \xi)}\, g + s$$

$$(X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1)(X-1) = X^{n+1} - 1$$

$$X^n + X^{n-1} + \cdots + 1 = \frac{X^{n+1} - 1}{X - 1}$$

13. Sea $\omega = e^{\frac{2\pi}{7} i}$. Probar que $\omega + \omega^2 + \omega^4$ es raíz del polinomio $X^2 + X + 2$.

$w \neq 1$ pues $w = 1 . e^{\frac{2}{7}\pi i}$ $\quad G_7$ pues $n = 7$

Hay que ver $f(w + w^2 + w^4) = 0$

$$= (w + \underbrace{w^2 + w^4}_{b})^2 + (w + w^2 + w^4) + 2$$

$$\Rightarrow w^2 + 2w(w^2 + w^4) + (\underbrace{w^2}_{a} + \underbrace{w^4}_{b})^2 + (w + w^2 + w^4) + 2$$

$$\Rightarrow w^2 + 2w^3 + 2w^5 + (w^2)^2 + 2w^2 . w^4 + (w^4)^2 + (w + w^2 + w^4) + 2$$

$$\Rightarrow w^2 + 2w^3 + 2w^5 + w^4 + 2w^6 + w^8 + w + w^2 + w^4 + 2 \qquad w^8 \to w^1$$

$$\Rightarrow 2w^1 + 2w^2 + 2w^3 + 2w^4 + 2w^5 + 2w^6 + 2$$

$$\Rightarrow 2\left(w^1+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6+1\right)$$

↳ Como $w \neq 1$

$$\sum_{k=1}^{6} w^k = \left(\sum_{k=0}^{6} w^k\right) - w^0 = \frac{w^7-1}{w-1} = 0 - 1 = -1$$

$$\Rightarrow 2\left(-1+1\right) \Rightarrow 2(0) = 0$$

Luego, probamos que $w+w^2+w^4$ es Raíz

14. i) Probar que si $\omega = e^{\frac{2\pi}{5}i} \in G_5$, entonces

$$X^2+X-1 = \left[X-(\omega+\overset{w^4}{\omega^{-1}})\right]\left[X-(\overset{w^2}{\omega^2}+\omega^{-2})\right].$$

ii) Calcular, justificando cuidadosamente, el valor exacto de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

$w = e^{\frac{2\pi i}{5}} \Rightarrow \in G_5$ pues $n=5$. Osea $w^5=1$

$w^{-1} = w^4 \qquad w^{-2} = w^3$

También que ver que las raíces de x^2+x-1 son complejas y al elevar a la 5 dan 1 y tienen arg $e^{\frac{2\pi}{5}}$

$$\Delta(x^2+x-1) = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$$

¿tiene raíces reales?

$$w = e^{\frac{2}{5}\pi i}$$

$$w^2 = 2\, e^{\frac{2\pi \cdot 2 i}{5}} = 2\, e^{\frac{4}{5}\pi i}$$

$$w^4 = 4 \cdot e^{\frac{2}{3}\pi \cdot 4 i} = 4 \cdot e^{\frac{8}{5}\pi i}$$

$$w^3 = 3 \cdot e^{\frac{2}{5}\pi \cdot 3} = 3 \cdot e^{\frac{6}{5}\pi i}$$

$$\Big[x - \big(\underbrace{e^{\frac{2}{5}\pi i} + 4 \cdot e^{\frac{8}{5}\pi i}}_{\text{raíz de } x^2+x-1}\big)\Big]\Big[x - \big(\underbrace{2e^{\frac{4}{5}\pi i} + 3 \cdot e^{\frac{6}{5}\pi i}}_{\text{raíz de } x^2+x-1}\big)\Big]$$

$$e^{\frac{2}{5}\pi} = \left(\cos\left(\tfrac{2}{5}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{2}{5}\pi\right)\right)$$

$$2e^{\frac{4}{5}\pi} = 2\left(\cos\left(\tfrac{4}{5}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{4}{5}\pi\right)\right)$$

$$\left(e^{\frac{2}{5}\pi} + \left(2e^{\frac{4}{5}\pi}\right)\right)^2 + \left(e^{\frac{2}{5}\pi} + \left(2e^{\frac{4}{5}\pi}\right)\right) - 1 = 0$$

Creo que fue al pedo esto. Mi objetivo debería llegar a x^2+x-1 x q esto era un pol irreducible

$$[x-(w+w^4)][x-(w^2+w^3)]$$

$$\Rightarrow (x-w-w^4)(x-w^2-w^3)$$

$$\Rightarrow (x^2-xw^2-xw^3-wx+w^3+w^4-w^4x+w^6+w^7)$$

$$\Rightarrow (x^2-xw^2-xw^3-wx+w^3+w^4-w^4x+w+w^2)$$

$$\begin{cases} x^2 = x^2 \\ x = -xw^2-xw^3-xw-w^4x \\ -1 = \underbrace{w+w^2+w^3+w^4}_{} \end{cases} \quad 3$$

3 $\Rightarrow \displaystyle\sum_{k=1}^{4} w^k = \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{4} \frac{w^5-1}{w-1}}_{0}\right) - w^0$

-1 ✓

$$2 \quad x = -x\overbrace{\underbrace{(w+w^2+w^3+w^4)}_{-1}}^{\text{via } 3}$$

$$x = -x(-1) \Rightarrow x = x$$ ✓

Luego, probamos lo que queríamos

15. i) Sean $f, g \in \mathbb{C}[X]$ y sea $a \in \mathbb{C}$. Probar que a es raíz de f y de g si y sólo si a es raíz de $(f : g)$.

ii) Hallar todas las raíces complejas de $X^4 + 3X - 2$ sabiendo que tiene una raíz común con $X^4 + 3X^3 - 3X + 1$.

$a = a + bi$

si a es raíz de f y g implica que

$a \mid f \wedge a \mid g$ y como las raíces

complejas son irreducibles grado 1, significa

que a solo tiene los divisores asociados

luego, como $a \mid f \wedge a \mid g \Rightarrow a \mid (f : g)$

$2 \mid 4 \wedge 2 \mid 6 \Rightarrow 2 \mid (6:4) \Rightarrow 2 \mid 2$

PNG.

ii) si tienen una raíz en común luego el MCD puede dividir a cada

como esta en $\mathbb{C}$ por el TFA es irreducible en grado 1

y las raíces complejas vienen de a pares

$$\left(x^4+3x-2\,;\,x^4+3x^3-3x+1\right)$$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{x^4}+3x-2 & x^4+3x^3-3x+1 \\ \hline -\left(\cancel{x^4}+3x^3-3x+1\right) & 1 \\ \hline -3x^3+6x-3 \quad \cdot -\frac{1}{3} & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^4+3x^3-3x+1 & x^3-2x+1 \\ \hline -\left(x^4-2x^2+x\right) & x+3 \\ \hline 3x^3+2x^2-4x+1 & \\ -\left(3x^3-6x+3\right) & \\ \hline 2x^2+2x-2 \quad \cdot \frac{1}{2} & \end{array}$$

no cambia nada, no?

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x+1 & x^2+x-1 \\ \hline -\left(x^3+x^2-x\right) & x-1 \\ \hline -x^2-x+1 & \\ -\left(-x^2-x+1\right) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Luego, el MCD es x^2+x-1 y vale pues es mónico

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+3x-2 & x^2+x-1 \\ \cline{2-2}
-(x^4+x^3-x^2) & x^2-x+2 \\ \cline{1-1}
-x^3+x^2+3x-2 & \\
-(-x^3-x^2+x) & \\ \cline{1-1}
2x^2+2x-2 & \\
-(2x^2+2x-2) & \\ \cline{1-1}
0 \checkmark &
\end{array}
$$

$$\overbrace{x^4-\cancel{x^3}+\cancel{2x^2}+\cancel{x^3}-\cancel{x^2}+2x-\cancel{x^2}+x-2}^{x^4+3x-2}$$

Luego, $x^4+3x-2=(x^2+x-1)(x^2-x+2)$

Ahora, aplico bhaskara

$$x^2+x-1=\frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4.1.(-1)}}{2}$$

$$= -1-\sqrt{5}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \left< \begin{array}{l} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ \\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array} \right.$$

$$x^2 - x + 2 = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.2}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \left< \begin{array}{l} \frac{1+\sqrt{-7}}{2} \; 7i \\ \\ \frac{1-\sqrt{-7}}{2} \; 7i \end{array} \right.$$

Luego, $x^4 + 3x - 2 = \left(x - \left(\frac{1-\sqrt{7i}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{1+\sqrt{7i}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$

Y como hicimos en $\mathbb{C}$ son irreducibles grado 1.

16. Determinar la multiplicidad de a como raíz de f en los casos

i) $f = X^5 - 2X^3 + X, \quad a = 1,$

ii) $f = X^6 - 3X^4 + 4, \quad a = i,$

iii) $f = (X-2)^2(X^2-4) + (X-2)^3(X-1), \quad a = 2,$

iv) $f = (X-2)^2(X^2-4) - 4(X-2)^3, \quad a = 2.$

i) Las raíces de f son $(x-a)$

$a = 1 \Rightarrow (x-1)$

$$f'(x) = 5x^4 - 6x^2 + 1 \Rightarrow f'(1) = 5 - 6 + 1 = 0$$

$$f''(x) = 20x^3 - 12x \Rightarrow f''(1) = 8$$

Luego, $\text{multi}(1, f) = 3$

ii) $a = i \Rightarrow (x - i)$ es raíz

$$f'(x) = 6x^5 - 12x^3 \Rightarrow i^5 = i \wedge i^3 = -i$$

$$\Rightarrow f'(i) = 6i + 12i = 18i$$

Luego, $\text{multi}(i, f) = 1$

iii) $a = 2 \Rightarrow (x - 2)$ ¿S?

$$f = (x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4) + (x^2 - 4x + 4)(x - 2)(x - 1)$$

$$\Rightarrow (x^4 \cancel{- 4x^2} - 4x^3 + 16x \cancel{+ 4x^2} - 16) + (x^3 - 2x^2 - 4x^2 + 8x + 4x - 8)(x - 1)$$

$$\Rightarrow (x^4 - 4x^3 + 16x - 16) + (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)(x - 1)$$

$$\Rightarrow (x^4 - 4x^3 + 16x - 16) + (x^4 - x^3 - 6x^3 + 6x^2 + 12x^2 - 12x - 8x + 8)$$

$$\Rightarrow 2x^4 - 11x^3 + 18x^2 - 4x - 8$$

$$f(2) = 0$$

$$f'(x) = 8x^3 - 33x^2 + 36x - 4 \Rightarrow f'(2) = 0$$

$$f''(x) = 24x^2 - 66x + 36 \Rightarrow f''(2) = 0$$

$f'''(x) = 48x - 66 \Rightarrow f'''(2) = 30$

Luego, multi$(2, f) = 3$

¿Hay alguna forma más rápida?

iv) $(x-2)^2(x^2-4) - 4(x-2)^3$ $\quad a = 2$

$(x-a) \Rightarrow (x-2)$ es raíz.

$f = (x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4) - 4(x-2)^3$

$= x^4 \cancel{-4x^2} - 4x^3 + 16x \cancel{+4x^2} - 16 - 4(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$

$= x^4 - 4x^3 + 16x - 16 - 4x^3 + 24x^2 - 48x + 32$

$= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

$f(2) = 0$

$f'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 48x - 32 \Rightarrow f'(2) = 0$

$f''(x) = 12x^2 - 48x + 48 \Rightarrow f''(2) = 0$

$f'''(x) = 24x - 48 \Rightarrow f'''(2) = 0$

Luego, multi$(2, f) = 4$

17. Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que $f = nX^{n+1} - (n+1)X^n + a$ tiene sólo raíces simples en $\mathbb{C}$.

Si tiene raíces simples significa que al evaluar el polinomio
en $f(x)$ en un punto y da 0, $f'(x)$ debe $\neq 0$.

$$f = m \cdot x^{m+1} - (m+1)x^m + a$$

$f' = (m+1) \cdot m \cdot x^m - (m)(m+1)x^{m-1}$ la derivada NO tiene a "a"
x lo tanto no influye.

f tiene $m+1$ raíces, y se escriben de la forma

$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdots (x - \alpha_{m+1})$ con $0 \leq m \leq m+1$

$m = 1$, $x^2 - 2x + a \Rightarrow \overbrace{a = 1} \Rightarrow x = 1$ es raíz.
$\Rightarrow f'(x) = 2x - 2 \Rightarrow x = 1$ es raíz. $a = 1$ NO vale.

$m = 2$, $2x^3 - 3x^2 + a$

$m = 3$, $3x^4 - 4x^3 + a$

Luego, observo que el primer término es
numerador en el exp del que le sigue y en
la derivada pueden igualar en COEFS:

- $x^2 - 2x \overset{f'}{\Rightarrow} 2x - 2$

$\Rightarrow$ si $a = 0$, el polinomio NO tiene raíces múltiples

$$x^2 - 2x + 0 \Rightarrow \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2} \left\langle \begin{array}{l} \frac{2 + \sqrt{4}}{2} = 2 \\ \frac{2 - \sqrt{4}}{2} = 0 \end{array} \right.$$

Luego, ambas son diferentes.

$m = 2,\ 2x^3 - 3x^2 \Rightarrow 0$ es raíz

$\Rightarrow f' = 6x^2 - 6x \Rightarrow 0$ es raíz

$\Rightarrow f'' = 12x - 6 \Rightarrow 0$ NO es raíz

$\Rightarrow f''' = 12 \Rightarrow 0$ NO es raíz

Pruebo $a = 2$ para foto 3.

$m = 2,\ 2x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow \text{Div}_{a_i} = \pm\{1;2\} \Rightarrow \pm\{1; \tfrac{1}{2}; 2\}$

$\text{Div}_{cp} = \pm\{1;2\}$

$a \in \{0,1\}$.

$f' = (m+1)\cdot m\cdot x^m - (m)(m+1)x^{m-1}$

si $x = 0 \vee x = 1$, serán las raíces del polinomio son $x_0 = 0 \wedge x_1 = 1$.

Luego, ¿Qué valores me hacen que $f(x)$ NO tenga como raíces $x_0 \wedge x_1$?

$f = m\cdot x^{m+1} - (m+1)x^m + a$

$f(0) = m\cdot 0^{m+1} - (m+1)0^m + a$

$= 0 \Rightarrow$ si $x = 0$ ...

$= a \Rightarrow$ si $x=0$ el polinomio se

anula sii $a=0$

$f(1) = n-(n+1)+a$

$= -1+a \Rightarrow$ si $x=1$ el polinomio

se anula sii $a=1$.

f tiene raíces simples sii $a \in \{0,1\}$

PREGUNTAR. Lo hice así pero dudé mucho.

19. Sea $f = X^{20} + 8X^{10} + 2a$. Determinar todos los valores de $a \in \mathbb{C}$ para los cuales f admite una raíz múltiple en $\mathbb{C}$. Para cada valor hallado determinar cuántas raíces distintas tiene f y la multiplicidad de cada una de ellas.

Si f tiene raíces múltiples $\Rightarrow f(x)=0 \wedge f'(x)=0$

$f' = 20x^{19} + 80x^{9}$

$\Rightarrow 20x^{9}(x^{10}+4)$

$\Rightarrow$ si $x=0$ ent. $x=0$ tiene multiplicidad

$$9, \vee \; x^{10} = -4$$

Luego, miro

$$f(0) = 0^{20} + 8(0)^{10} + 2a$$

$$= 2a$$

luego si $x=0$ y $a=0$ entonces tiene raíz múltiple $\Rightarrow$ mult$(0,f) = 10$ y otra 10.

Ahora, $x^{10} = -4 \Rightarrow$ si $x = z$

$$z^{10} = -4$$

$\arg(z) = \pi \quad |z| = 4$

$$\begin{cases} r^{10} = 4 \Rightarrow r = \sqrt[10]{4} \\ \theta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{10} \quad \text{con } 0 \le k < 10 \end{cases}$$

¿ Cómo sigo? no se como avanzar

para $X^{10} = -4$

$f(z)=0 \quad z^{10}=-4$

$$0 = z^{20} + 8z^{10} + 2a = (z^{10})^2 + 8z^{10} + 2a = (-4)^2 + 8(-4) + 2a$$

$$= 16 - 32 + 2a \qquad a = 8$$

20. Sea $f = X^{68} - 17X^4 - 16 \in \mathbb{C}[X]$. Determinar la forma binomial de cada raíz *múltiple* de f en $\mathbb{C}$ y la multiplicidad de cada una de ellas.

$$f' = 68x^{67} - 68x^3 = 68(x^{67} - x^3)$$

$$= \underbrace{x^3}\,\underbrace{(x^{64} - 1)}$$

↳ 0 es raíz 3 veces $(x-0)^3$

$x = 0 \lor x^{64} = 1$

Verifico si $x=0$ es raíz en $f(0)$.

$f(0) = 0^{68} - 17(0)^4 - 16 = -16.$

Entonces 0 no es raíz. ⇒ no me importa $x=0$

↳ ACA VIENE MI DUDA. si $f(0) \neq 0$ pero $f'(0)$ y $f''(0) = 0$ ¿no sería mult$(0,f) = 2$?

Pruebo con $x^{64} = 1$

$\Rightarrow (x^{64})^4 - 17x^4 - 16$

Si $z^{64} = 1$

veamos

$f(z) = z^{68} - 17z^4 - 16$

$\Rightarrow 1 \cdot x^4 - 17x^4 - 16$

$\Rightarrow -16x^4 - 16$

$\Rightarrow -16(x^4+1)$

$= \underbrace{z^{64}}_{1} \cdot z^4 - 17z^4 - 16$

$= z^4 - 17z^4 - 16$

$= -16z^4 - 16 = 0?$

$\underline{z^4 = -1}$

Luego, $x^4 = 1$ Solo voy usando el ovalo

llamo z a x por comodidad

$z^4 = -1 \Rightarrow G_4$

$$\begin{cases} r = \sqrt[4]{1} \Rightarrow r = 1 \\ \theta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4} \quad \text{con } 0 \leq k < 4 \end{cases}$$

Luego,

$z_0 = e^{\frac{\pi}{4}}$

$z_1 = 1 \cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$

$z_2 = 1 \cdot e^{\frac{5\pi}{4}}$

$z_3 = 1 \cdot e^{\frac{7\pi}{4}}$

Luego, en forma BINOMIAL:

$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ $\quad z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ $\quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

4 DISTINTAS. $\overline{z_0} = z_3$

$\overline{z_1} = z_2$

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Luego, la multi de cada una es 2.

Pues anula a f y f'. $\Rightarrow$ $\text{multi}(z_K, f) = 2$

$$f'' = 68\cdot 67\, x^{66} - 68\cdot 3x^2$$

$$= 4556x^{66} - 204x^2$$

$$= \underbrace{x^2}(4556x^{64} - 204)$$

= ↳ si 0 no es raíz de f, pero si en f' y f'' es posible?

No entiendo cuando paran en este ejercicio...

si nos piden la multiplicidad ¿xq para de buscar f'? ¿no debería seguir?

xq x ejemplo ¿no podría suceder que 2 sea raíz de f' y f'' pero no de f?

¿Cómo evalúo un polinomio x raíz compleja?

Ej: $f'' = \underbrace{x^2}_{20}\left(\frac{4'556x^{64} - 204'}{20}\right)$

$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2\left(4556\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{64} - 204'\right)$

¿Cómo evalúo el polinomio con una potencia 64?

22. Determinar todos los $a \in \mathbb{C}$ tales que 1 sea raíz *doble* de $X^4 - aX^3 - 3X^2 + (2+3a)X - 2a$.

1 es raíz doble $\Rightarrow (x-1)^2$

$f' = 4x^3 - 3ax^2 - 6x + (2+3a)$

$f'' = 12x^2 - 6ax - 6$ $\Rightarrow$ El valor de a hace $f''(a) \neq 0$

$\cancel{4x^3} - 3ax^2 - 6x + (2+3a)$ | $x-1$

$-(\cancel{4x^3} - 4x^2)$ | $4x^2 + 4x - 3ax + (-2-3a)$

$\cancel{4x^2} - 3ax^2 - 6x + (2+3a)$

$-(\cancel{4x^2} - 4x)$

$-3\cancel{a}x^2 - 2x + (2+3a)$

$-(-3\cancel{a}x^2 + 3ax)$

$\cancel{-2x - 3ax} + (2+3a)$

$-(\cancel{-2x - 3ax}) + (2+3a)$

0

¿ Vale $\forall a$? Vero f → FALSÓ f'' zero di vale $\forall a$ eccetto $a = 1$ *

$\cancel{x^4} - ax^3 - 3x^2 + (2+3a)x - 2a \quad \big\lfloor\; x - 1$

$x^3 + (x^2 - ax^2) + (-2-a)x + 2a$

$-(\cancel{x^4} - x^3)$

$\cancel{x^3} - \cancel{ax^3} - 3x^2 + (2+3a)x - 2a$

$-(\cancel{x^3} - \cancel{ax^3} - x^2 + ax^2)$

$\cancel{-2x^2} \cancel{- ax^2} + (2+3a)x - 2a$

$-(\cancel{-2x^2} \cancel{- ax^2} + 2x + ax)$

$2ax - 2a$

$-(2ax - 2a)$

0

$$f(1) = 1^4 - a - 3 + (2+3a) - 2a$$
$$= -2 - a + 2 + 3a - 2a$$
$$= 0$$

$$f'(1) = 4x^3 - 3ax^2 - 6x + (2+3a)$$
$$= 4 - 3a - 6 + 2 + 3a$$
$$= 0$$

$$f''(1) = 12x^2 - 6ax - 6$$
$$= 6 - 6a \qquad *$$

$\Rightarrow a = 1$ ent. f es raíz triple.

Luego, si $a \neq 1$ ent. 1 es raíz doble.

La idea de este ejercicio fue evaluar $f(1), f'(1)$ y $f''(1)$ para ver que podemos hacer para que $f''(1)$ NO sea raíz.

Osea, llegamos hasta $f'(1)$ es raíz y vemos que a hace que $f''(1) = 0$ entonces ese caso hay que excluirlo xq si no lo hacemos

1 sería raíz triple

Del 22 al 26 son todos fotos cosas de polinomios con inducción, son de final.

27. i) Hallar todas las raíces racionales de

(a) $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$,

(b) $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{2}X - 3$,

ii) Probar que $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$ no tiene raíces racionales.

Las raíces racionales las podemos obtener usando el lema de Gauss PERO el POLINOMIO DEBE TENER COEFS enteros.

i) $2x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x \Rightarrow \boxed{x}(2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1)$

0 es Raíz.

* $2x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 1$.

Por lema de Gauss: $Div(1) = \pm 1$ y $Div(2) = \pm 1; \pm 2$

luego $\frac{p}{q} \Rightarrow \{1; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\}$

Pruebo,

$$f(-1) = 2(-1)^4 + 3(-1)^3 + 2(-1)^2 - 1 = 0$$
$$= 2 - 3 + 2 - 1 = 0$$

Luego, $\boxed{-1 \text{ es Raíz.}}$

Veo si es RAIZ MULTIPLE

$$f' = 8x^3 + 9x^2 + 4x \Rightarrow \underbrace{x}_{0 \text{ es RAIZ}}(\underbrace{8x^2 + 9x + 4}_{g})$$

Luego, -1 NO es RAIZ MULTIPLE pues $g(-1) = 3 \neq 0$

$\Delta: 9^2 - 4.8.4 = -47$ luego, las raíces restantes

$\notin \mathbb{Q}$

Las raíces racionales son 0 y -1.

Me faltó $\frac{1}{2}$. Otra vez lo mismo. ¿Xq solo me funciona con * pero ya la * no? Xq había usado la def que NO sirve.

Bajamos el grado:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 3 & 2 & 0 & -1 \\
-1 & & -2 & -1 & -1 & 1 \\
\hline
 & 2 & 1 & 1 & -1 & \boxed{0}
\end{array}$$

$2x^3 + x^2 + x - 1$ Ahora, ya encontramos dos raíces $\Rightarrow$ 0 y -1. Bajamos el grado dos niveles. Me quedan por probar $\frac{1}{2}$ y $-\frac{1}{2}$.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ✓ $\frac{1}{2}$ es raíz

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 1 & 1 & -1 \\
\frac{1}{2} & & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 2 & 2 & 2 & \boxed{0}
\end{array}
$$

$$2x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$2(\underbrace{x^2 + x + 1})$$

$\Delta : 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow < 0$

Se incluyen los NO calculados por Ruffini?

Luego, las raíces racionales son: -1 y $\frac{1}{2}$

Pero sus raíces (completas) son:

$$(x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)x\left(x^2 + x + 1\right)$$

b) $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}x - 3$

$\cdot 2 \Rightarrow \; 2x^5 - x^4 - 4x^3 + x^2 - 7x - 6$

Ahora, como los coeficientes son todos enteros aplico el lema de Gauss.

$P = \pm\{1;2;3;6\} \quad Q = \pm\{1;2\} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \pm\{\cancel{1};\cancel{\tfrac{1}{2}};2;\cancel{3};\tfrac{3}{2};6\}$

$f(1)$: NO $\quad f(\frac{1}{2})$ NO $\quad f(3)$: NO $\quad f(\frac{3}{2})$: NO

$f(-1)$: NO. $\quad f(-\frac{1}{2})$ NO $\quad f(-3)$ NO $\quad \boxed{f(-\frac{3}{2}) = \text{Sí}}$

$f(2)$: Sí

Veo si $-\frac{3}{2}$ es RAIZ MULT.

$10x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2x - 7$ NO, no es MÚLTIPLE

Entonces las ÚNICAS RACIONALES son $(X + \frac{3}{2})(X-2)$

27. i) Hallar todas las raíces racionales de

(a) $2X^5 + 3X^4 + 2X^3 - X$,

(b) $X^5 - \frac{1}{2}X^4 - 2X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{7}{2}X - 3$,

ii) Probar que $X^4 + 2X^3 - 3X^2 - 2$ no tiene raíces racionales.

ii) $P = \pm\{1;2\} \quad Q = \pm\{1\}$

x lema de Gauss ... [illegible]

* teorema de Gauss, como el polinomio tiene coef. enteros sus raíces salen de $\frac{p}{q} \Rightarrow \{-1; 1; -2; +2\}$

Ahora veo que no vale ninguna.

$$f(-1) = (-1)^4 + 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 2 = 1 - 2 - 3 - 2 \neq 0$$
$$f(1) = 1^4 + 2(1)^3 - 3(1)^2 - 2 = 1 + 2 - 3 - 2 \neq 0$$
$$f(-2) = (-2)^4 + 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 2 = 16 - 16 - 12 - 2 \neq 0$$
$$f(2) = (2)^4 + 2(2)^3 - 3(2)^2 - 2 = 16 + 16 - 12 - 2 \neq 0$$

Luego, no tiene raíces racionales

Factorización.

28. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$ y en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$ los polinomios cuadráticos

i) $X^2 + 6X - 2$, ii) $X^2 + X - 6$, iii) $X^2 - 2X + 10$.

i) Como tiene grado 2 hay 2 opc.

1. Sus raíces No están en $\mathbb{R} \Rightarrow$ no están en $\mathbb{Q}$
2. Sus raíces están en $\mathbb{R} \Rightarrow$ Irreducible en grado 1 en todos los cuerpos.

Obtengo el $\Delta = 6^2 - 4.1.(-2) = 36 + 8 = 44$

Luego, tiene raíces $\in \mathbb{R}$.

IRRACIONAL

$$\frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.1.(-2)}}{2} \to \frac{-6 + \sqrt{44}}{2} \notin \mathbb{Q}, \quad \frac{-6 - \sqrt{44}}{2} \notin \mathbb{Q}$$

Luego:

$$\mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]: \left(x - \left(\frac{-6 + \sqrt{44}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-6 - \sqrt{44}}{2}\right)\right)$$

$$\mathbb{Q}[x]: x^2 + 6x - 2$$

ii) x^2+x-6

$\Delta: 1^2-4.1.(-6) = 25$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} \begin{cases} \frac{-1+5}{2} = 2 \\ \frac{-1-5}{2} = -3 \end{cases}$$

Luego, como $\Delta > 0$ tiene raíces reales.

En $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{C}[x]$: $(x-2)(x+3)$

VERIF: $x^2+3x-2x-6 \Rightarrow x^2+x-6$

iii) $x^2-2x+10$

$\Delta: (-2)^2-4.1.10 = -36$

Luego, no hay raíces reales.

$$\frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2-4.1.10}}{2} \begin{cases} \frac{2+6i}{2} = 1+3i \\ \frac{2-6i}{2} = 1-3i \end{cases}$$

Factorización en $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$: $x^2-2x+10$

" en $\mathbb{C}[x]$: $(x-(1+3i))(x-(1-3i))$

VERIF: $(x-(1+3i))(x-(1-3i)) = (x-1-3i)(x-1+3i)$

$= x^2 - x + \cancel{3xi} - x + 1 - \cancel{3i} - \cancel{3xi} + \cancel{3i} - (3i)^2$

$= x^2-2x+1-3^2i^2$

$= x^2-2x+10$

29. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$ los polinomios

i) $X^2 + (1+2i)X + 2i$, ii) $X^8 - 1$, iii) $X^6 - (2-2i)^{12}$.

i) $\dfrac{-(1+2i) \pm \sqrt{(1+2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2i}}{2 \cdot (1+2i)}$ $= \sqrt{3+4i}$

$= |3+4i| = 5$

$= \sqrt{5} \cdot \sqrt{e^{\theta i}} = \pm\sqrt{5} \cdot e^{\frac{\theta i}{2}}$

ii) $X^8 - 1 \Rightarrow X^8 = 1$

$X^8 = 1 \in G_8$

$|x| = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt[8]{1} = 1 \\ \theta = \dfrac{0 + 2k\pi}{8} \quad \text{con } 0 \leq k < 8 \end{cases}$

$\arg(x) = 0$

Luego, $\left\{ 1;\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3}{4}\pi;\ \pi;\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{3}{2}\pi;\ \frac{7\pi}{4} \right\}$

$\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$

$\frac{\pi}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

$\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)$

iii) $\underbrace{x^6 - (2-2i)^{12}}_{w}$

$w = (2-2i)^{12}$ $\quad |w| = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$

$\operatorname{Arg}(w) = \arctan\left(\frac{2}{2}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

$= 2\pi - \frac{\pi}{4}$

$= \frac{7\pi}{4}$

Luego, $(\sqrt{8})^{12} \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4} \cdot 12\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{7}{4}\pi \cdot 12\right)\right)$

$\frac{7\pi}{4} \cdot 12 = \frac{84\pi}{4} = 21\pi = \pi \qquad \frac{7}{4}\pi \cdot 12 = 21\pi = \pi$

$\Rightarrow (\sqrt{8})^{12} \cdot (\cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi))$

$=$

$\Rightarrow (\sqrt{8})^{12} \cdot (-1 + 0) \Rightarrow \left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{12} = 8^6$

$\Rightarrow -8^6 \Rightarrow$ Término siendo real negativo

$x^6 - (-8^6) \Rightarrow x^6 + 8^6 \Rightarrow x^6 = -8^6$? Revisar $(\sqrt{8})^{12}$

$|x| = 8^6$

$|x| = 8$

$arg(x) = \pi$

$$\begin{cases} r^6 = 8^6 \iff r = \sqrt[6]{8^6} \iff r = 8 \\ \theta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{6} \quad \text{con } 0 \leq k < 6 \end{cases}$$

$x_0 = 8e^{\frac{\pi}{6}i}$ $\quad x_1 = 8e^{\frac{\pi}{2}i}$ $\quad x_2 = 8e^{\frac{5}{6}\pi i}$

$x_3 = 8e^{\frac{7\pi}{6}i}$ $\quad x_4 = 8e^{\frac{3}{2}\pi}$ $\quad x_5 = 8e^{\frac{11\pi}{6}}$

VERIF:

$x_0 = 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4\sqrt{3} + 4i$

¿Como hago la factorización?

$(x - x_0) \ldots \ldots (x - x_5)$

$\left(x - \left(8e^{\frac{\pi}{6}i}\right)\right)\left(x - \left(8e^{3/2\pi i}\right)\right)$ ✓

30. Factorizar en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ los polinomios

i) $X^6 - 9$, ii) $X^4 + 3$, iii) $X^4 - X^3 + X^2 - 3X - 6$.

i) $x^6 = 9$ 6 Complejos

$$\begin{cases} r^6 = 9 \iff r = \sqrt[6]{9} = \sqrt[6]{(3^2)} = \sqrt[3]{3} \\ \theta = \dfrac{0 + 2k\pi}{6} \quad \text{con } 0 \leq k < 6 \end{cases}$$

$x_0 = \sqrt[3]{3} \cdot e^{0i}$ $x_1 = \sqrt[3]{3} \cdot e^{\frac{\pi}{3}i}$ $x_2 = \sqrt[3]{3} \cdot e^{\frac{2\pi i}{3}}$

$x_3 = \sqrt[3]{3} \cdot e^{\pi i}$ $x_4 = \sqrt[3]{3} \cdot e^{\frac{4}{3}\pi i}$ $x_5 = \sqrt[3]{3} \cdot e^{\frac{5}{3}\pi i}$

Binómica:

$x_0 = \sqrt[3]{3}$ $x_1 = \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ $x_2 = \sqrt[3]{3}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$x_3 = \sqrt[3]{3}(-1)$ $x_4 = \sqrt[3]{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $x_5 = \sqrt[3]{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

1 o 2

→ cualq frac

FACTORIZACION en $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$:

¿ $(x^3-3)(x^3+3)$ v (x^6-9)?

Factorización en $\mathbb{C}[X]$: grado 1

$$\left(x-\sqrt[3]{3}\right)\left(X-\left(\frac{\sqrt[2]{3}}{2}+\sqrt[3]{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(X-\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}+\sqrt[3]{3}\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$$

$$\left(X+\sqrt[3]{3}\right)\left(X-\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}-\sqrt[3]{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(X-\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{2}-\sqrt[3]{3}\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$$

PREGUNTAR.

ii) x^4+3 $\Rightarrow$ Por complejos vienen de a pares.

o tiene 2 raíces o ninguna en $\mathbb{Q}$

o las 4 en $\mathbb{C}$

No $\exists$ número real / $(x^4)+3=0$

pues $x^4 \geq 0$ sea $x>0$ o $X\leq 0$

$$X^4=-3$$

$$r = \sqrt[4]{3}$$

$$\theta = \frac{\pi + 2k\pi}{4} \quad \text{con } 0 \leq k < 4$$

$$x_0 = \sqrt[4]{3} \cdot e^{\pi/4\, i} \qquad x_1 = \sqrt[4]{3} \cdot e^{\frac{3\pi}{4} i}$$

$$x_2 = \sqrt[4]{3} \cdot e^{\frac{5\pi}{4} i} \qquad x_3 = \sqrt[4]{3} \cdot e^{\frac{7\pi}{4} i}$$

Otra forma.

$$x^2 = w$$

$$w^2 + 4 \Rightarrow \Delta(w^2+4) = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -16$$

Luego, las 4 son complejas.

Factorización en $\mathbb{C}$: $\left(x - \left(\sqrt[4]{3} \ldots\right)\right)$

Factorización en $\mathbb{R}[x]$: si multiplico dos complejos me da real.

$$x_0 = \sqrt[4]{3}\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, i\right) \qquad x_1 = \sqrt[4]{3}\left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\, i\right)$$

$x_2 = \sqrt{3}\left(-\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}i\right) \quad x_3 = \sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}i\right)$

$x_3 = \overline{x_0} \qquad x_2 = \overline{x_1}$

$x_3 \cdot x_0$ me da real.

$x_2 \cdot x_1$ me da real.

PREGUNTAR COMO FACTORIZO LAS RAICES EN $\mathbb{C}$ DE ESE TIPO.

Si los MULTIPLICO ME DA en $\mathbb{Q}$

iii) $x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6$

Como es un polinomio con COEFS enteros

...

Uso el tema de Gauss.

$P = \pm\{1; 2; 3; 6\}$ $Q = \pm\{1\}$

$\dfrac{P}{Q} = \pm\{1; 2; 3; 6\}$

-1 es raíz

Uso Ruffini para bajar grado

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -1 & 1 & -3 & -6 \\
-1 & & -1 & 2 & -3 & 6 \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & -6 & \multicolumn{1}{|r}{0}
\end{array}$$

$(x+1)(x^3 - 2x^2 + 3x - 6)$

¿Es múltiple? no

$f' = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 3$

$= 4(-1)^3 - 3(-1)^2 + 2(-1) - 3 = -12 \neq 0$

2 es raíz

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -2 & 3 & -6 \\
2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ Uso división normal

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - 2x^2 + 3x - 6 & x-2 \\
\hline
-(x^3 - 2x^2) & x^2+3 \\
\hline
\quad 3x - 6 & \\
-(3x - 6) & \\
\hline
\quad 0 &
\end{array}
$$

Entonces, $(x-2)(x+1)(x^2+3)$

$\Delta(x^2+3) = 0^2 - 4.1.3 = -12 \Rightarrow$ Raíces en $\mathbb{C}$

Factorización en $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$:

$(x-2)(x+1)(x^2+3)$

$x^2 = -3$

$$
\begin{cases}
r^2 = 3 \Leftrightarrow r = \sqrt[2]{3} \\
\theta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{2} \quad \text{con } 0 \leq k < 2
\end{cases}
$$

$x_0 = \sqrt[2]{3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

$$X_1 = \sqrt[2]{3}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

En binom:

$$x_0 = \sqrt[2]{3}\,i \qquad x_1 = -\sqrt[2]{3}\,i$$

Factorización en $\mathbb{C}$:

$$(x - \sqrt[2]{3}\,i)(x + \sqrt[2]{3}\,i)(x+1)(x-2)$$

31. Factorizar los polinomios

i) $X^4 - 1$ en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})[X]$ y $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,

ii) $X^4 + 3$ en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,

iii) $X^4 + X^3 + X^2$ en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$,

iv) $X^7 - X$ en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})[X]$.

i) $x^4 - 1 \Rightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

$x^2 = 1 \Rightarrow G_2 \Rightarrow (x-1)(x+1)$

$x^2 + 1 = (x+a)(x+b)$

$x^2 + 1 = x^2 + \underbrace{(a+b)}x + \underbrace{ab}$

Ent

Factorización en $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$

$(x+1)(x+\underbrace{4}_{-1 \bmod 5})(x^2+1)$

Factorización en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$

$(x+1)(x+6)(x^2+1)$

PREGUNTAR

$-1 \bmod 7$

ii) $x^4+3 \quad (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$

Son complejos. No $\exists$ x^4 tales que $+3$ es 0 pues x^4 como la potencia es par, siempre es >0 y además x deben ser enteros pues estamos en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$

Luego, factorización en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$

¿(x^4+3)?

PREGUNTAR, supongo que tengo que buscar los complejos y hacer $w \cdot \bar{w}$ para todos los

iii) $x^4+x^3+x^2$ en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$

$$\underbrace{x^2}(x^2+x+1)$$

0 es raíz 2 veces

$$\Delta(x^2+x+1) = 1^2-4.1.1 = -3$$

$\hookrightarrow$ Luego, x^2+x+1 es irreducible en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$

$$x^2(x^2+x+1)$$

$$\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4.1.1}}{2.1} \left\langle \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} \left\langle \begin{array}{l} \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{array}\right.\right.$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) \cdot \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) = \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2.\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 i^2\right)$$

iv) x^7-x en $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$

$$x(\underbrace{x^6-1})$$

$$x^6 = 1 \Rightarrow G_6$$

$$\begin{cases} r = \sqrt[6]{1} \Leftrightarrow r = 1 \\ \theta = \dfrac{2k\pi}{6} \quad \text{con } 0 \le k < 6 \end{cases}$$

$k=0, \quad 1(\cos(0) + i\,\text{sen}(0))$

$k=1, \quad 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$k=2, \quad 1\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

$k=3, \quad 1(\cos(\pi) + i\,\text{sen}(\pi))$

$k=4, \quad 1\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

$k=5, \quad 1\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$

PREGUNTAR.

1 raíz

$(x-2)(x-1)$

$\boxed{x^2 - 3x + 2}$

$\frac{1}{2}$

$k=0$

$a + b\sqrt{\ }$

$a - b\sqrt{\ }$

33. Factorizar los siguientes polinomios en $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$

i) $X^5 - 4X^4 - X^3 + 9X^2 - 6X + 1$ sabiendo que $2 - \sqrt{3}$ es raíz.

ii) $X^5 - X^3 + 17X^2 - 16X + 15$ sabiendo que $1 + 2i$ es raíz.

iii) $X^6 + X^5 + 5X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 4X + 4$ sabiendo que $\sqrt{2}\,i$ es raíz múltiple.

iv) $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 10X - 10$ sabiendo que tiene una raíz imaginaria pura.

v) $X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 13X^2 - 15X + 10$ sabiendo que tiene alguna raíz en común con $X^3 + 1$.

vi) $f = X^4 - 6X^3 + 11X^2 - 2X - 10$, sabiendo que tiene alguna raíz en común con el polinomio $g = X^4 - 5X^3 + 7X^2 - 6$.

i) PREGUNTAR. ¿Si no me dicen en donde está el polinomio, me guío por sus coeffs?

$x^5-4x^4-x^3+9x^2-6x+1$ está con COEFFS en $\mathbb{Z}$ pero también valdrían para $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ no? O sea las PROPS que puedo usar para $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ también me sirven no?

Como es de grado 5, no es irreducible en $\mathbb{R}$ ni $\mathbb{C}$ pero como $2-\sqrt{3}$ es raíz, $2+\sqrt{3}$ también pues los COEFFS de f están en $\mathbb{Q}[X]$.

Ent, $(x-(2-\sqrt{3}))(x-(2+\sqrt{3}))$

$$\Rightarrow (x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow x^2-2x\cancel{-\sqrt{3}x}-2x+4\cancel{+2\sqrt{3}}\cancel{+\sqrt{3}x}\cancel{-2\sqrt{3}}+\overset{-3}{(-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3})}$$

$$\Rightarrow x^2-2x+1$$

$$x^5-4x^4-x^3+9x^2-6x+1 \quad \underline{|\,x^2-2x+1}$$

f y g tienen lo común

$9 \quad 12$

$9 \nmid 12$

$9 \,\underline{\nmid}\, 12$