Divisibilidad

1. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$

i) $a \cdot b \mid c \Rightarrow a \mid c \;\text{ y }\; b \mid c$

ii) $4 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid a$

iii) $2 \mid a \cdot b \Rightarrow 2 \mid a \;\text{ ó }\; 2 \mid b$

iv) $9 \mid a \cdot b \Rightarrow 9 \mid a \;\text{ ó }\; 9 \mid b$

v) $a \mid b + c \Rightarrow a \mid b \;\text{ ó }\; a \mid c$

vi) $a \mid c \;\text{ y }\; b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$

vii) $a \mid b \Rightarrow a \leq b$

viii) $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$

ix) $a \mid b + a^2 \Rightarrow a \mid b$

x) $a \mid b \Rightarrow a^n \mid b^n, \forall\, n \in \mathbb{N}$

i) $a.b|c \Rightarrow a|c \wedge b|c$

Supongo que vale izq.

$a|c = \frac{c}{a} \qquad b|c = \frac{c}{b}$

Ej: $c = 20,\ a = 5 \quad b = 2$

$5|20 \wedge 2|20$ ✓

Busco caso donde divida en la multi pero no solos.

$a.b|c = c = q(a.b) \iff \cdot\ c = \overbrace{(q\,a)}^{\in \mathbb{Z}}.b \Rightarrow c|b$ ✓

$\cdot\ c = \underbrace{(q.b)}_{\in \mathbb{Z}}.a \Rightarrow c|a$ ✓

VERDADERA.

ii) $4|a^2 \Rightarrow 2|a$

$a^2 = \underbrace{4k}_{\text{Busco conseguir } 2.\text{algo} = 4k} \iff a^2 = \overbrace{2.2k}^{4k} \iff 2|a^2 \Rightarrow 2|a$

VERDADERA

iii) $2 \mid a \cdot b \Rightarrow 2 \mid a \vee 2 \mid b$ $\quad a=5 \; b=2$

$2 \mid 10 \Rightarrow 2 \mid 5 \vee 2 \mid 2$ V.

Para que sea falsa no debería ni dividir a a ni a b y eso es imposible.
Mínimamente divide a alguno (múltiplo de 2)

VERDADERA. ¿Cómo lo pruebo?

iv) $9 \mid ab \Rightarrow 9 \mid a \vee 9 \mid b$ Falsa. $a=3 \; b=3$

$9 \mid 9 \not\Rightarrow 9 \mid 3 \vee 9 \mid 3$.

FALSA.

$c \mid ab \Rightarrow c \mid a \vee c \mid b$ solo funciona en c primos.

V) $a \mid b+c \Rightarrow a \mid b \vee a \mid c$ $\quad a=2, \; b=1, \; c=1$

$\frac{b+c}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} \vee \frac{c}{a}$

RDO: $b+c \geq a$

$2 \mid 2 \not\Rightarrow 2 \mid 1 \vee 2 \mid 1$ FALSA.

Vi) $a \mid c \wedge b \mid c \Rightarrow ab \mid c$

$\frac{c}{a} \wedge \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{c}{ab}$

Bueno que sea F pues V F = F

$c=4, a=2, b=4$ Para que no divida $ab > c$

$4 \wedge 4 \not\Rightarrow 4$ FALSA.

$2 \qquad 4 \qquad 8$

Vii) $a|b \Rightarrow a \leq b$ VERDADERA EN NATURALES.

$\frac{b}{a} \Rightarrow a \leq b$ Esto es VERDADERA pues si $a > b$, $\frac{b}{a} \notin \mathbb{N}$

Un Contraejemplo sería buscar en b mod a sea 0 pero si $a > b$ el resto es a.

FALSA EN ENTEROS

$a|b \Rightarrow a \leq b$

$\frac{b}{a} \Rightarrow a \leq b$

Contraejemplo $b = -8$ $a = 2$

$$\frac{-8}{2} \Rightarrow \overbrace{2 \leq -8}^{\text{FALSO}}$$

Viii) $a|b \Rightarrow |a| \leq |b|$

$\frac{b}{a} \Rightarrow |a| \leq |b|$ VERDADERA. Probado en teórica
listo como propiedad

ix) $a|b+a^2 \Rightarrow a|b$

¿Como lo hago? ¿Esto se puede?

$$b+a^2 = k.a \Leftrightarrow b = k.a + a^2 - a^2 \Leftrightarrow b = ka \Leftrightarrow a|b$$

x) $a|b \Rightarrow a^n|b^m$ VERDADERA. Está como propiedad.

2. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $3n - 1 \mid n + 7$

ii) $3n - 2 \mid 5n - 8$

iii) $2n + 1 \mid n^2 + 5$

iv) $n - 2 \mid n^3 - 8$

i) $3m-1 \mid m+7$

Yo sé que $3m-1 \mid 3m-1$ pues $\forall a \in \mathbb{Z},\ a \mid a$. Multiplico por otro entero. Pues sabe que $c \mid a$, también $c \mid ka$

$$\left.\begin{array}{l} 3m-1 \mid m+7 \\ 3m-1 \mid 3m-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3m-1 \mid 3(m+7)-(3m-1) \iff 3m-1 \mid 3m+21-3m+1$$

$$\iff 3m-1 \mid 22$$

$Div_+(22) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 11, \pm 22\}$ $\quad 3m-1 \in Div(22)$

Acá están los posibles divisores?

Pruebo igualando a cada Div para ver que m me da

$3m-1 = -1 \iff m = 0 \notin \mathbb{N}$

$3m-1 = 1 \iff m = \frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ ✗

$3m-1 = 2 \iff m = 1 \Rightarrow 3(1)-1 \mid 8 \iff 2 \mid 8$ ✓

$3m-1 = -2 \iff m = -1 \notin \mathbb{N}$

$3m-1 = 11 \iff m = 4 \Rightarrow 3(4)-1 \mid 4+7 \iff 11 \mid 11$ ✓

$3m-1 = -11 \iff m = -4 \notin \mathbb{N}$

$3m-1 = 22 \iff m = \frac{23}{3} \notin \mathbb{N}$ ✗

$3m-1 = -22 \iff m = -7 \notin \mathbb{N}$

Los m tales que $3m-1 \mid m+7$ son: $\{1, 4\}$

ii) $3m-2 \mid 5m-8$

Yo sé que $3m-2 \mid 3m-2$ pues $\forall a \in \mathbb{Z},\ a \mid a$.

Sea $a, c \in \mathbb{Z}$, si $a \mid c \iff a \mid -c$

$$\left.\begin{array}{l} 3m-2 \mid 5m-8 \\ 3m-2 \mid 3m-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 3m-2 \mid 3(5m-8)+(-5)(3m-2) \iff 3m-2 \mid -14 \iff 3m-2 \mid 14$$

$$3m-2 = 14$$

$Div(14) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 7; \pm 14\}$

$\hookrightarrow 2.7$

No me interesa. Todo a es divisible por 1.

$3m-2=1 \iff m=1 \Rightarrow 3(1)-2 \mid 5(1)-8 \iff 1 \mid x$ ✓

$3m-2=-1 \iff m=\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$

$3m-2=2 \iff m=0 \notin \mathbb{N}$

$3m-2=-2 \iff m=\frac{4}{3} \notin \mathbb{N}$

$3m-2=7 \iff m=3 \Rightarrow 3(3)-2 \mid 5(3)-8 \iff 7 \mid 7$ ✓

$3m-2=-7 \iff m=\frac{-5}{3} \notin \mathbb{N}$

$3m-2=14 \iff m=\frac{16}{3} \notin \mathbb{N}$

$3m-2=-14 \iff m=-4 \notin \mathbb{N}$

Los $m \in \mathbb{N}$ tales que $3m-2 \mid 5m-8 \in \{1,3\}$

iv) $m-2 \mid m^3-8$

Sé que $m-2 \mid m-2$ pues $\forall a \in \mathbb{Z}, a \mid a$

$$\left.\begin{array}{l} m-2 \mid m^3-8 \\ m-2 \mid m-2 \end{array}\right\} \Rightarrow m^3-8-m^2(m-2) \iff m-2 \mid \cancel{m^3}-8-\cancel{m^3}-2m^2$$

$$\iff (-2m^2-8)+2m(m-2) \iff (-4m-8)+4(m-2) \iff m-2 \mid 0$$

Vale $\forall m \in \mathbb{N}$.

4. Sea a un entero impar. Probar que $2^{n+2} \mid a^{2^n}-1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

CB: $m=1 \quad 2^3 \mid a^2-1 \iff 8 \mid a^2-1$

¿Cómo hago inducción con dos letras a la vez?

Preguntar:

B:

- Si yo tengo $2|a$, es $a=2k$? o ¿$k.$algo $=2$? Sí

- ¿Cómo demuestro? x ej: $2|ab \Rightarrow 2|a \vee 2|b$

Supongo que vale $2|ab$ y veo que $2|a \vee 2|b$ alguna de los dos o una se cumpla.

$ab=2k$

$a.b$ debe ser par. La única posibilidad de que se par es si al menos uno de los dos es par.

a debe ser par o b, osea $2|a \vee 2|b$.

- ¿Cómo demuestro? $a|b+a^2 \Rightarrow a|b$

me tengo que "deshacer" de la a^2

$b+a^2=ak$ y $a|a^2 \Leftrightarrow a^2=a.a$

$$\begin{array}{r} b+\cancel{a^2}=ak \\ -\quad \cancel{a^2}=a.a \\ \hline b=ak-(a.a) \\ b=a(\underbrace{k-a}_{\in \mathbb{Z}}) \end{array}$$

b/a

$a|b$

$b=k.a$

$a \mid b$

D:

- Si x ej: $3n-1 \mid (n+7)+(n^2+5)$ suponiendo que esto valdría, se resuelve igual?

 O sea, aclarando que $3n-1 \mid 3n-1$ y haciendo operaciones, ej: $x \mid 3n-1 \mid \pm [(n+7)+(n^2+5)]$

 Pregunto xq $c \mid a+b \not\Rightarrow c \mid a \vee c \mid b$

- Siempre el mín que puedo hay que buscar un divisor, luego probar $i \in \mathbb{Z} \mid$ Div y ver si funcionó?

 Ej.: $3n-1$ $\quad Div_+(22) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 11, \pm 22\}$

 Pruebo con $3n-1 = \pm 1, \pm 2 \ldots$ y el n que me da, si es $\mathbb{N}$ y luego verifico $3n-1 \mid n+7$ ya bastaría?

 O sea no entiendo el xq buscar los divisores xq luego si verifico debería ser divisible.

Algoritmo de División

8. Calcular el cociente y el resto de la división de a por b en los casos:

i) $a = 133, \quad b = -14.$

ii) $a = 13, \quad b = 111.$

iii) $a = 3b + 7, \quad b \neq 0.$

iv) $a = b^2 - 6, \quad b \neq 0.$

v) $a = n^2 + 5, \quad b = n + 2 \ (n \in \mathbb{N}).$

vi) $a = n + 3, \quad b = n^2 + 1 \ (n \in \mathbb{N}).$

$a = qb + r$ Realizo proceso hasta que $r \leq q$

$133 = q.(-14) + r \Leftrightarrow 133 = 9(-14) + 7$

$126 = 18(7) + 0$

$a = qb + r$

Cociente : 18 Resto : 0

ii) $a = 13, \ b = 111$

Empez: si $b > a \Rightarrow q = 0$

$13 = 0.111 + 13$

iii) $a = 3b + 7 \quad b \neq 0$

· b puede ser 7 si $r \leq |b|$, en este caso $|b| \geq 7$.

· $|b| \leq 7$ lo hago a mano. $\pm(1,7)$

Caso $b = 1$

$a = 10, \ a = 3.1 + 7$

Caso $b = 2$

$a = 13, \quad a = 6k + r$

$13 = 2 \cdot 6 + 1$

Caso $b = 7$

$a = 28, \quad a =$

9. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de

i) la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18.

ii) la división de a por 3.

iii) la división de $4a + 1$ por 9.

iv) la división de $7a^2 + 12$ por 28.

i) $18 \mid a^2 - 3a + 11 \qquad 18 \mid a = 5$

$r_{a^2}(18) = 25 \qquad r_a(18) = 5 \qquad r_{11}(18) = 11$

$r = 25 - 15 + 11 = 31$

iii) $a \equiv 5 (18) \Rightarrow r_{18}(a) = 5, \; a = 18k + 5 \underset{(9)}{\equiv} 5$

$4(5) + 1 \underset{9}{\equiv} 3 (9)$

iv) $7(18k+5)^2 + 12 \underset{28}{\equiv} 7((18k)^2 + 2 \cdot 18k \cdot 5 + 25) + 12$

$2268k^2 + 1260k + 187 \underset{28}{\equiv} 19 (28)$

• Si quiero pasar de mod más grande a pequeño (DE) (MÚLTIPLO): Calculo fórmula

MOD GRANDE: EN FORMA $a = kb + r$ y a eso le hago MOD PEQUEÑO

PASAR MOD 18 a 9. $a \equiv 5 (18) \Leftrightarrow a = 18k+5 \ (\text{MOD } 9) = 5 \Rightarrow a \equiv 5 (9)$

- Si quiero pasar MOD PEQUEÑO A MOD MAS GRANDE (NO MULTIPLO)
  PASO MOD PEQUEÑO a FORMA $a = kb + r$ y lo meto en el GRANDE

Ej: PASAR MOD 18 A 28 y Calcular $r_{28}(a)$.

$a \equiv 5(18) \Leftrightarrow a = 18k+5 \Rightarrow 7a^2 + 12 \underset{28}{\equiv} 7(18k+5)^2 + 12 \ldots$ y menor resolviendo

10. i) Si $a \equiv 22 \ (14)$, hallar el resto de dividir a a por 14, por 2 y por 7.

ii) Si $a \equiv 13 \ (5)$, hallar el resto de dividir a $33a^3 + 3a^2 - 197a + 2$ por 5.

iii) Hallar, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de la división de $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot i!$ por 12.

i) $a \underset{(14)}{\equiv} 22 \Leftrightarrow a \equiv 8 (14) \Leftrightarrow a = 14k + 8$

- $r_{14}(a) = 8$

$a \equiv 22(14) \Leftrightarrow a \equiv 8(14) <$ $a \equiv 8(7) \Leftrightarrow a \equiv 1(7)$; $a \equiv 8(2) \Leftrightarrow a \equiv 0(2)$

$a = 14k + 8 \underset{(2)}{\equiv} 0(2) \Rightarrow \cdot\, r_2(a) = 0$

$a = 14k + 8 \underset{(7)}{\equiv} 1(7) \Rightarrow \cdot\, r_7(a) = 1$

ii) $a \underset{(5)}{\equiv} 3(5) \Leftrightarrow a = 5k+3$

$33a^3 + 3a^2 - 197a + 2 \underset{(5)}{\equiv} 3(5k+3)^2 . 3(5k+3) + 3(5k+3) - 197(5k+3) + 2$

$\underset{(5)}{\equiv} 3(25k^2 + 30k + 9).(15k+9) + 15k + 9 - 985k - 591 + 2$

ACA PUEDO APLICAR MOD O SI O SI PRIMERO MULT? PRUEBO

$\underset{(5)}{\equiv} (75k^2 + 90k + 27).(15k+9) - 970k - 580$

OP 1: APLICO MOD ACÁ | OPT 2: DESARROLLO

$\equiv 27 \cdot 9 \equiv 3(5)$ ✓

(5)

$\equiv 1125k^3 + 675k^2 + 1350k^2 + 810k + 405k + 243 - 990k - 5\ldots$

$\underset{(5)}{\equiv} 3\ (5)$ ✓

PREGUNTAR

10. i) Si $a \equiv 22\ (14)$, hallar el resto de dividir a a por 14, por 2 y por 7.

ii) Si $a \equiv 13\ (5)$, hallar el resto de dividir a $33a^3 + 3a^2 - 197a + 2$ por 5.

iii) Hallar, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de la división de $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot i!$ por 12.

iii) Tengo 12 clases de equivalencia: $r_0, r_1, \ldots, r_{11}$.

TODO, si hago tabla de restos, ¿Cómo manejo los i?

11. i) Probar que $a^2 \equiv -1\ (5) \Leftrightarrow a \equiv 2\ (5)$ ó $a \equiv 3\ (5)$.

ii) Probar que no existe ningún entero a tal que $a^3 \equiv -3\ (7)$.

iii) Probar que $a^7 \equiv a\ (7)$ para todo $a \in \mathbb{Z}$.

iv) Probar que $7 \mid a^2 + b^2 \Leftrightarrow 7 \mid a$ y $7 \mid b$.

v) Probar que $5 \mid a^2 + b^2 + 1 \Rightarrow 5 \mid a$ ó $5 \mid b$ ¿Vale la implicación recíproca?

$a^2 \equiv -1 (5) \iff a^2 \equiv (-1)^2 (5) \iff a^2 \equiv 1 (5)$

$a^2 \equiv -1 (5)$ Yo sé que un número a el "resto" es -1 cuando el mod era 1 unidad mas grande al "obtener el resto"

$\Leftarrow$) hay que ver que 1. $a \equiv 3 (5) \iff a^2 \underset{(5)}{\equiv} 3^2 \equiv 9 \equiv -1 (5) \Rightarrow a^2 \equiv -1 (5)$

2. $a \equiv 2 (5) \iff a^2 \underset{(5)}{\equiv} 2^2 \equiv 4 \equiv -1 (5)$

$\Rightarrow$) hay que ver $a^2 \equiv -1 (5) \iff a^2 \underset{(5)}{\equiv} (-1)^2 \equiv 1 (5)$

"c" "c" No creo q valga x c faltaría ser 3 o no. (debe ser igual

$a^2 \equiv -1 (5) \iff a . a \equiv -1 (5) \iff a . \tilde{a} \equiv -1 . \tilde{3} (5) \iff a^2 \equiv (-3)^2 (5)$

$$\Leftrightarrow a^2 \underset{(5)}{\equiv} 9 \equiv -1 (5)$$

PREGUNTAR

$$a^2 \equiv 4 (5) \Leftrightarrow a^2 \equiv 2^2 (5) \Leftrightarrow a \equiv 2 (5)$$

¿Algo así?

ii) $a^3 \equiv -3 (7) \Leftrightarrow a^3 \equiv 4 (7) \Leftrightarrow a^3 \equiv$

12. i) Probar que $2^{5k} \equiv 1\ (31)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

ii) Hallar el resto de la división de 2^{51833} por 31.

iii) Sea $k \in \mathbb{N}$. Sabiendo que $2^k \equiv 39\ (31)$, hallar el resto de la división de k por 5.

iv) Hallar el resto de la división de $43 \cdot 2^{163} + 11 \cdot 5^{221} + 61^{999}$ por 31.

i) $2^{5k} \equiv 1 (31) \underset{(31)}{\equiv} (2^5)^k \underset{(31)}{\equiv} (32)^k \equiv 1^k \underset{(31)}{\equiv} 1\ (31)$ ✓

2^k hasta llegar 32, y me sale 32 mod 31 = -1

ii) $r_{31}(2^{51833}) = r_{31}(r_{31} \cdot r_{31} \ldots) = (2^5)^{10366+3} = (2^5)^{10366} \cdot 2^3$

$(32)^{10366} \cdot 2^3 \underset{(31)}{\equiv} (-1)^{10366} \cdot 8 \equiv 8\ (31)$ ✓

iii) $2^K \equiv 8 \ (31)$, Calcule resto de k por 5.

$$2^K = 31k + 8$$

iV) $43 \cdot 2^{163} + 11 \cdot 5^{221} + 61^{999} \ (31)$

$$\underbrace{12 \cdot 2^{163}}_{1} + 11 \cdot 5^{221} + \underbrace{30^{999}}_{(-1)^{999}} \underset{(31)}{\equiv}$$

1. $\overset{12}{\overline{3 \cdot 4}} \cdot (2^5)^{32+3} \underset{(31)}{\equiv} 3 \cdot 4 \cdot (-1)^{35} \underset{(31)}{\equiv} -12 \equiv 19 \ (31)$

2. $31k = 31, 62, 93, 124, 155$

li: Consigo 5^3 fome

xq $125 \text{ MOD } 124 = 1$

Primo

$$\overline{11} \cdot 5^{221} \underset{(31)}{\equiv} 11 \cdot (5^3)^{73+2} \underset{(31)}{\equiv} 11 \cdot (1)^{73+2} \equiv 11 \ (31)$$

3. $30^{999} \underset{(31)}{\equiv} (-1)^{999} \equiv 30 \ (31)$

$$r_{31}(43 \cdot 2^{163}) = 19$$

$$\Rightarrow r_{31}(r_1 + r_2 + r_3) = r_{31}(60) = 29 \ \checkmark$$

$r_{31}(11.5^{22}) = 11$

$r_{31}(61^{999}) = 30$

13. Se define por recurrencia la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = -5 \ \text{ y } \ a_{n+2} = a_{n+1} - 6^{2n} \cdot a_n + 21^n \cdot n^{21} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $a_n \equiv 3^n (\text{mod } 7)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Caso base: Hay 2.

$n = 1$

$a_1 \equiv 3^1 (7) \overset{?}{\equiv} 3 \ (7)$

$n = 2$

$a_2 \equiv 3^2 (7) \underset{(7)}{\overset{?}{\equiv}} 2 \underset{(7)}{\equiv} -5 (7)$

P.I: Sea $h \in \mathbb{N}$, quiero ver que si $P(1), P(2) \ldots, P(h), P(h+1) \Rightarrow P(h+2)$

· HI: $a_k \equiv 3^k \quad a_{k+1} \equiv 3^{k+1}$

· QPQ: $a_{h+2} \equiv 3^{k+2} \equiv 3^h \cdot 9 \underset{(7)}{\equiv} 3^h \cdot 2$

Pero por def de la suc.

$a_{h+2} = a_{h+1} - 6^{2h} \cdot a_h + (21^h \cdot h^{21})$

$\underset{\substack{(7)\\ HI}}{\equiv} 3^{h+1} - 6^{2h} \cdot 3^h + (21^h \cdot h^{21})$

$\underset{(7)}{\equiv} 3^{h+1} - 6^{2h} \cdot 3^h + 0^h$

$\equiv 3^{h+1} - ((-1)^2)^h \cdot 3^h$

$$\equiv_{(7)} 3 \quad 4(-6)) \cdot 3$$

$$\equiv_{(7)} 3^{k+1} + 1^{k} \cdot 3^{k}$$

$$\equiv_{(7)} 3^{k+1} \cdot 3^{k}$$

$$\equiv_{(7)} 3^{k+2} \qquad \equiv 3^{k} \cdot 3^{2} \qquad \equiv 3^{k} \cdot 2$$

Por lo tanto probamos que $P(k), P(k+1) \Rightarrow P(k+2)$
Por lo tanto, $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$

Máximo común divisor

18. En cada uno de los siguientes casos calcular el máximo común divisor entre a y b y escribirlo como combinación lineal entera de a y b:

i) $a = 2532$, $b = 63$.
ii) $a = 131$, $b = 23$.
iii) $a = n^4 - 3$, $b = n^2 + 2$ $(n \in \mathbb{N})$.

RDO: El MCD es un divisor común de a y b.

· si $(a:0) = |a|$

· si a y b no ambos nulos, MCD min es 1.

· si a y b son ambos nulos, MCD min 0.

i) $2532 = q \cdot 63 + r$

$2532 = 40 \cdot 63 + 12$
$63 = q \cdot 12 + r$

$63 = 5 \cdot 12 + 3$

$12 = q \cdot 3 + r$

$12 = 4 \cdot 3 + 0$

MCD es el anterior a cuando el resto es 0.

$(a:b) = (2532:63) = 3$

Verif:

2532	2		63	3
	2		21	7
	3		3	3
211	211		1	

3^1 $\quad$ 3^2

Me quedo con factor min, luego 3 es el MCD.

ii) $131 = q \cdot 23 + r$

$131 = 5 \cdot 23 + 16$

$23 = q \cdot 16 + r$

$23 = 1 \cdot 16 + 7$

$16 = 2 \cdot 7 + 2$

$7 = 3 \cdot 2 + 1$

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

MCD: 1 (son COPRIMOS) y esto es cierto para 131 es primo

iii) $a = n^4 - 3$, $b = n^2 + 2$

$$(n^4 - 3 : n^2 + 2) = (n^4 - 3$$

19. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Sabiendo que el resto de dividir a a por b es 27 y que el resto de dividir b por 27 es 21, calcular $(a : b)$.

$$r_b(a) = 27 \iff a = bk + 27$$

$$r_{27}(b) = 21$$

$$r_{27}(b) = 21 \iff b \equiv 21 (27) \iff b = 27k + 21$$

a = POSIBLE MCD

Como sé que el resto de div a por b es 27

$$(\underbrace{a : b}_{\text{mismo de } a/b \text{ que } r_b(a)}) = (b : \overbrace{27}^{r_b(a)}) = (27 : 21) = (21 : 7) : (7 : 0) = 7$$

(Cuando nos piden el MCD nos obtenemos restos, como Euclides)

$$(a : b) = (b : r_1) = (r_1 : r_2) = (r_2 : r_3)$$

$(a:b) = (b, r_1) = (r_1 : r_2) = (r_2, \dots r_n)$

20. Sea $a \in \mathbb{Z}$. a

i) Probar que $(5a+8 : 7a+3) = 1$ o 41. Exhibir un valor de a para el cual da 1, y verificar que efectivamente para $a = 23$ da 41.

ii) Probar que $(2a^2+3a-1 : 5a+6) = 1$ o 43. Exhibir un valor de a para el cual da 1, y verificar que efectivamente para $a = 16$ da 43.

iii) Probar que $(a^2-3a+2 : 3a^3-5a^2) = 2$ ó 4, y exhibir un valor de a para cada caso. (Para este ítem es **indispensable** mostrar que el máximo común divisor nunca puede ser 1).

i) $(5a+8 : 7a+3) = 1$ MAL. Debo llegar a d/algo. Repaso algo.

$a=23 \quad (123 : 164) \stackrel{?}{=} (123 : 164-123) = (123:41) = (123-2.41:41)$

$= (41:41) = (41 : 41-1.41) = (41:0) = 41$ ✓

Busco a tq $(5a+8 : 7a+3)$ es 1 o sea, a me debe hacer coprimos al hacer $(5a+8 : 7a+3)$.

Para que sean coprimos:

1. Divido a ambos por MCD
2. Uno es primo y el otro no.

$a=1 \Rightarrow (5+8 : 10) = (13:10) = (13-10.1 : 10) = (3:10) = (3 : 10-3.3)$

$= (3:1) = 1$

Encontré un caso en el cual 13 es primo y 10 no es múltiplo de 13, el MCD es 1.

ii) Para que sean coprimos: Mal. Repaso algo.

1. Divido a ambos por MCD
2. Uno es primo y el otro no

$(2a^2+3a-1 : 5a+6) = 1$

$a=16 \quad (559 : 86) \stackrel{?}{=} (559-6.86 : 86) = (43:86) = (43 : 86-2.43)$

$= (43:0) = 43$ ✓

Como la expresión de la derecha es más fácil busco que sea primo y el de la izq no sea múltiplo.

$a = 1, \ (2(1)^2 + 3(1) - 1 : 5(1) + 6) = (4:11) = (4 : 11 - 4.2) = (4:3)$
$= (4 - 3.1 ; 3) = (1:3) = 1$

iii) $(a^2 - 3a + 2 : 3a^3 - 5a^2) \Rightarrow$ Debo mostrar que el MCD nunca puede ser 1, osea que $\forall a \in \mathbb{Z}$ nunca serán coprimos.

Teóricamente si quiero probar que nunca son coprimos bastaría con que uno sea múltiplo del otro

$3a^3 - 5a^2 \iff a^2(3a - 5)$ se parece BASTANTE a $a^2 - 3a + 2$ pero yo tengo -5 y lo DIST.

¿Capaz si "DIVIDO" (no puedo) o resto llego a lo de la izq xq si lo de lo der es MULT se escribe como $(a^2 - 3a + 2 : \underbrace{C.\text{algo}}_{3a^3 - 5a^2})$

Repaso el 20 después.

21. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos. Probar que $7a - 3b$ y $2a - b$ son coprimos.

Dos números son Coprimos sii $(a:b) = 1$ y $a \nmid b$ o $b \nmid a$
pues si $a | b$, $(a:b) = |a|$ y si $b | a$, $(a:b) = |b|$.

Ya me dicen que a y b son Coprimos osea $(a:b) = 1$.

Rdo Props:

$$(ca:cb) = (a:b)\cdot|c|$$
$$(a^k : b^l) = 1$$
$$a|c \quad b|c \Rightarrow ab|c$$
$$a|bc \Rightarrow a|c$$

$$d = (7a - 3b : 2a - b)$$

$$d \mid 7a - 3b \ \wedge \ d \mid 2a - b$$

1. $d \mid 2(7a-3b) - 7(2a-b) \Rightarrow d \mid b$
2. $d \mid (7a-3b) - 3(2a-b) \Rightarrow d \mid a$

$\Rightarrow d \mid (a:b)$

$$\Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow Div_+(1) = \{1\}$$

$\Rightarrow d$ debe ser 1.

(si hay más de un divisor posible debo exhibir valores de a tal que MCD sea alguno de los divisores, en este caso al tener solo 1 es suficiente pero si me quedaba no sé $\{1,2\}$ debería probar que nunca d sea 2 xq no serían Coprimos

20. Sea $a \in \mathbb{Z}$. $\quad d \in \mathbb{Z}_{>0}$

i) Probar que $(5a+8 : 7a+3) = 1$ o 41. Exhibir un valor de a para el cual da 1, y verificar que efectivamente para $a = 23$ da 41.

ii) Probar que $(2a^2+3a-1 : 5a+6) = 1$ o 43. Exhibir un valor de a para el cual da 1, y verificar que efectivamente para $a = 16$ da 43.

iii) Probar que $(a^2 - 3a + 2 : 3a^3 - 5a^2) = 2$ ó 4, y exhibir un valor de a para cada caso. (Para este ítem es **indispensable** mostrar que el máximo común divisor nunca puede ser 1).

i) $d \mid 5a+8 \wedge d \mid 7a+3 \Rightarrow d \mid 7(5a+8)-5(7a+3)$

$\Rightarrow d \mid 56-15 \Rightarrow d \mid 41$

POSIBLES $Div_{+}\{41\} = \{1;41\}$

Ahora busco valores de a que cumplan que $d=41$ y $d=1$.

· Si $a=1$ $(5+8:7+3)=(13:10)=(3:1)=(0:1)=1 \leftarrow d$

· Si $a=23$ $(123:164) \stackrel{?}{=} (123:164-123)=(123:41)=(123-2.41:41)$

$=(41:41)=(41:41-1.41)=(41:0)=41 \leftarrow d$

Entonces hallamos los a tal que $d \in \{1, 41\}$

ii) $(2a^2+3a-1:5a+6)$

$d=(2a^2+3a-1:5a+6)$

$d \mid 2a^2+3a-1 \wedge d \mid 5a+6$ pues es el MCD

$d \mid 5(2a^2+3a-1)-2a(5a+6) \Rightarrow d \mid 3a-5$

$\Rightarrow d \mid 3a-5 \Rightarrow d \mid -5(3a-5)+3(5a+6)$

$\Rightarrow d \mid 43$, 43 es primo.

Posibles d son los divisores del 43 y como 43 es primo tiene exactamente 2 positivos

$Div_{+}(43) = \{1, 43\}$

Ahora busco a tal que d sea 1 y 43

- Si quiero que sea 1 deben ser coprimos, es decir $a \nmid b$ ni $b \nmid a$. Como la expresión de la derecha es más fácil, la hago primo y veo que no sean múltiplos.

$a = 1$, $(2(1)^2 + 3(1) - 1 : 5+6) = (4 : 11) = (3 : 4) = (1 : 3) = (0 : 1) = 1$ ✓

- Si quiero que sea 43, ambos deben ser múltiplos de 43.

Veo que $5a+6$ nunca será 43 pues $5.8+6 = 46$ pero $43.2 = 86$ y $5.16+6 = 86$ y 86 es múltiplo de 43.

$a = 16$, $(2(16)^2 + 3(16) - 1 : 5(16)+6) = (559 : 86)$
$= (86 : 43) = (0 : 43) = 43$ ✓

iii) $(a^2 - 3a + 2 : 3a^3 - 5a^2)$

$d = (a^2 - 3a + 2 : 3a^3 - 5a^2)$

Como d es el MCD vale que $d \mid a^2 - 3a + 2 \wedge d \mid 3a^3 - 5a^2$

$d \mid -3a(a^2 - 3a + 2) + (3a^3 - 5a^2) \Rightarrow d \mid 4a^2 - 6 \Rightarrow d \mid -4(a^2 - 3a + 2) + (4a^2 - 6)$
$\Rightarrow d \mid 12a - 14$.

Notación: Puedo combinar cualquier instancia con cualquier otra.
Es decir yo llegué a $12a - 14$ pero me falta sacar la a
Puedo seguir haciendo operaciones con cualquiera de las anteriores hasta sacarmela de encima.

$d \mid a(12a - 14) - 12(a^2 - 3a + 2) \Rightarrow d \mid 36a - 14a - 24 \Rightarrow d \mid 22a - 24$

$\Rightarrow d \mid -22(12a-14)+12(22a-24) \Rightarrow d \mid 88$ × Prueba muy fuerte

$d \mid a(12a-14) - 3(4a^2-6) \Rightarrow d \mid -14a+18$

$\Rightarrow d \mid (-14a+18)+(12a-14) \Rightarrow d \mid -2a-6$

Anotación breve.
lo tiempo al 4' (no divide 50

$\Rightarrow (12a-14)+6(-2a-6) \Rightarrow d \mid -14-36 \Rightarrow d \mid 50$

Ahora, los posibles d valen de $Div_+(50)$.

Factorizo en primos:

$$\begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \Rightarrow Div_+(50) = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$$

Caso $2 \mid d$: Hago tabla de restos para ver lo para PAR O IMPAR
$2 \mid d$

r	$a^2 \overset{-1a}{-3a} \overset{0}{+2}$	$\overset{1}{3a^3} \overset{1}{-5a^2} = a^3 - a^2$
0	0	0
1	0	0

MOD 2

Sea a par o impar, vale siempre que $a \equiv 0 \ (2)$.

Verifiquemos $a = 3$, $3^2 - 3 \mid 3^3 - 3^2$ mod 2

$6 \mid 18$ mod 2 ✓

Con esto, descartamos la posibilidad de que el d pueda ser 1.

Ahora veo si el 5 divide, si el 5 divide tengo que ver si $\overbrace{5.5}^{25} \mid d$

5^2 $2 \mid d$ o $5.2 \mid d$

50

Como $5 \mid d$:

r	$a^2 \overbrace{-3a}^{2a} + 2$	$3a^3 \overbrace{-5a^2}^{0} = 3a^3$	MOD 5
0	2	0	
1	0	3	
2	2	4	
3	0	1	
4	0	2	

El 5 no divide nunca, x lo tanto quienes recibieron a este jamás división por 5 no divide, su múltiplo tampoco.
Por lo tanto el único d posible es 2 pues $2 \mid d \ \forall a \in \mathbb{Z}$.

a = Cualquiera sirve para que $d = 2$.

$a = 1 \quad (1^2 - 3.1 + 2 : 3.1^3 - 5.1^2) = (0 : -2) = (0 : 2) = |2| = 2.$

22. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ con $(a : b) = 2$. Probar que los valores posibles para $(7a + 3b : 4a - 5b)$ son 2 y 94. Exhibir valores de a y b para los cuales da 2 y para los cuales da 94.

$d = (7a + 3b : 4a - 5b)$

$d \mid 7a + 3b \quad \wedge \quad d \mid 4a - 5b$

$d \mid 5(7a + 3b) + 3(4a - 5b) \Rightarrow d \mid 35a + 12a$

$\Rightarrow d \mid 47a$

$d \mid 4(7a + 3b) - 7(4a - 5b) \Rightarrow d \mid 12b + 35b \Rightarrow d \mid 47b$

Como $d \mid 47a \wedge d \mid 47b \Rightarrow d \mid (47a:47b)$

$\Rightarrow d \mid 47(a:b) \Rightarrow d \mid 47(2) \Rightarrow d \mid 94$

$Div_+(94) = \{2; 47\}$

Buscamos a,b tales que $d=2 \wedge d=47$

si d debería ser 2, deben ser ambos múltiplos de 2.

$$\text{Ej: } (2:4),\ \underset{\to NO}{(4:8)},\ \underset{\text{si}}{(4:6)},\ \underset{\text{si}}{(8,10)}$$

En izq tengo 7 y 3, si quiero que sea par,

$7 \cdot PAR = PAR$ $\quad 3 \cdot PAR = PAR$ $\quad PAR + PAR = PAR$

a y b deben ser pares pero de la derecha tengo

$4a - 5b$ x lo tanto a debe ser MÁS GRANDE

que b si o si

- $a = 4,\ b = 2$

$(34:6) = (6:4) = (4:2) = (2:0) = 2$ ✓

- si quiero que sea 47 debe quedar $(47:0) = |47|$

¿Por qué sólo existía para $d = 94$? si los div de 94 son 2 y 47.

Me faltó COPRIMIZAR

$a = 2a'$
$b = 2b'$ con $a' \perp b'$ $\qquad d = (7a+3b : 4a-5b)$

Coprimizo $\Rightarrow (7(2a') + 3(2b') : 4(2a') - 5(2b'))$

$\Rightarrow (14a' + 6b' : 8a' - 10b')$

$\Rightarrow (\overset{c}{2}(7a'+3b') : \overset{c}{2}(4a'-5b'))$

$\Rightarrow \underbrace{(7a'+3b' : 4a'-5b')}_{1 \text{ ó } 47} \cdot 2 \quad = 2 \text{ ó } 94$

$(a':b') = 1$

Como $d' = (7a'+3b' : 4a'-5b')$

$d' \mid 7a'+3b' \quad \wedge \quad d' \mid 4a'-5b'$

1. $d' \mid 4(7a'+3b') - 7(4a'-5b') \Rightarrow d' \mid 12b'+35b' \Rightarrow d' \mid 47b'$

2. $d' \mid 5(7a'+3b') + 3(4a'-5b') \Rightarrow d' \mid 12a'+35a' \Rightarrow d' \mid 47a'$

¿Cómo es que llego siempre a lo mismo? osea $47a'$ y $47b'$

$c(a:b)$

Luego, sé que $d'|47b'$ y $d|47a'$ $\Rightarrow d'|(47a':47b') \Rightarrow$

$d'|47\underbrace{(a':b')}^{1} \Rightarrow d|47$

Los $Div_+(47)$ son: $\{1, 47\}$ pues 47 es primo, y un número primo sólo tiene 2 divisores positivos. $d \in \{1, 47\}$

$d|Div(47).2 \Rightarrow Div_+(94) = \{2; 47\}$

a' y b' son COPRIMOS ¿Está bien donde solo valores a a' y b'? ¿O debería distribuir el 2 y buscar a y b?

· $d = 2 \Rightarrow a' = 2 \quad b' = 1$

$2(7(2)+3(1) : 4.2-5.1) = 2.\overbrace{(17:3)}^{1} = 2$

vale pues $|c|(a:b) = (ca:cb)$ para $a, b, c \in \mathbb{Z}$

· $d = 94$ ambos son divisibles por 47, luego $2.47(a' \angle b')$.
Veo si llego a $(47:0)$

$2.(7a'+3b' : 4a'-5b')$

$a = 5 \quad b = 4$

PREGUNTAR SI ESTÁ BIEN

$2.(35+12 : 20-20) = 2.(47:0) = 2.|47| = 94$

20. Sea $a \in \mathbb{Z}$.

i) Probar que $(5a+8 : 7a+3) = 1$ o 41. Exhibir un valor de a para el cual da 1, y verificar que efectivamente para $a = 23$ da 41.

ii) Probar que $(2a^2+3a-1 : 5a+6) = 1$ o 43. Exhibir un valor de a para el cual da 1, y verificar que efectivamente para $a = 16$ da 43.

iii) Probar que $(a^2-3a+2 : 3a^3-5a^2) = 2$ ó 4, y exhibir un valor de a para cada caso. (Para este ítem es **indispensable** mostrar que el máximo común divisor nunca puede ser 1).

Para iii) ... sólo llego a ... $d|b$ ... 2 ...

Porque así si d se llegara a ser 8 o d | 0 sea ≠ 0 tenga al 2 como divisor y al 2^2 (4).

d debe ser 2 o 4.

Defino $d = (a^2 - 3a + 2 : 3a^3 - 5a^2)$

Hago operaciones entre ellos pues sé que $d \mid a^2 - 3a + 2 \wedge d \mid 3a^3 - 5a^2$ ya que d es el MCD.

$d \mid (3a^3 - 5a^2) \underbrace{- 3a(a^2 - 3a + 2)}_{+(-3a^3 + 9a^2 - 6a)} \Rightarrow d \mid 4a^2 - 6a \Rightarrow d \mid -4(a^2 - 3a + 2) + (4a^2 - 6a)$

$\Rightarrow d \mid 6a - 8 \Rightarrow d \mid -6(a^2 - 3a + 2) + a(6a - 8)$

$\Rightarrow d \mid \cancel{-6a^2} + 18a - 12 \cancel{+6a^2} - 8a \Rightarrow d \mid 10a - 12$

$\Rightarrow d \mid 6a - 8 + 10a - 12 \Rightarrow d \mid 16a - 20$

$\Rightarrow 16(6a - 8) - 6(16a - 20) \Rightarrow d \mid -128 + 120 \Rightarrow d \mid -8$

$\Rightarrow d \mid 8$

Los posibles d valen de los $Div_+(8) = \{1, 2, 4, 8\}$

Como $2 \mid d$:

	r	$\overbrace{a^2 - 3a + 2}^{a^2 + a}$	$\overbrace{3a^3 - 5a^2}^{a^3 + a^2}$
PAR ⇒	0	0	0
IMPAR ⇒	1	0	0

MOD 2

Vimos que $2 \mid d$ sea a par o impar. Descartamos el 1.

Ahora tenemos 3 posibles: $\{\underbrace{2}_{\text{ya } 2|d},\ \underbrace{4}_{\text{ya } 4|d \text{ sii } a\equiv 2(4)},\ 8\} \to 2^3$

Caso $4|d$

r	$\overbrace{a^2-3a+2}^{a^2+a+2}$	$\overbrace{3a^3-5a^2}^{3a^3+3a^2}$
0	2	0
1	0	2
2	0	0
3	2	0

mod 4

Vemos entonces que $4|d$ sii $a \equiv 2(4)$

Caso $8|d$: Veamos si $2^3|d$. $\boxed{\text{¿Es posible deducir si } 2^3 \text{ vale si hacía } 2^2|d\text{?}}$

r	$\overbrace{a^2-3a+2}^{a^2+5a+2}$	$\overbrace{3a^3-5a^2}^{3a^3+3a^2}$
0	2	0
1	0	2
2	0	0
3	2	0
4	5	0
5	4	2
6	8	4
7	6	0

mod 8

2^3 jamás divide.

Entonces, $\boxed{\text{si } a \text{ es par,}}$ $a \equiv 2(4) \Rightarrow 4|d \Rightarrow d = 4$

Si a es IMPAR, $a \equiv 0(2) \Rightarrow 2 | d \Rightarrow d = 2$

¿Esto es VERDAD? xq $a \equiv 2(4)$ sii $a = 2$ y $a \equiv 0(2)$ $\forall$ valor de a.

- Caso $d = 2$, $a = 1$ $(a^2 - 3a + 2 : 3a^3 - 5a^2) = (1^2 - 3 + 2 : 3 - 5) = (0 : -2)$
$= (0 : 2) = |2| = 2.$

- Caso $d = 4$, $a = 2$ $(a^2 - 3a + 2 : 3(a)^3 - 5a^2) = (0 : 4) = |4| = 4.$

Por lo tanto hallamos $a = 2$ para que MCD sea 4 y $a = 1$ para que MCD sea 2.

PREGUNTAR SI ESTÁ BIEN

23. i) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{b+4}{a} + \dfrac{5}{b} \in \mathbb{Z}$.

ii) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{9a}{b} + \dfrac{7a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$.

iii) Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $\dfrac{2a+3}{a+1} + \dfrac{a+2}{4} \in \mathbb{Z}$.

i) a y b COPRIMOS. Osea sólo buscar a y b para que la suma dé entero

Ej: $a = 5, b = 1$ $\quad \dfrac{1+4}{5} + \dfrac{5}{1} = 6$

$$\frac{b+4}{a} + \frac{5}{b} = \frac{b^2 + 4b + 5a}{ab} = ab | b^2 + 4b + 5a$$

Como a y b coprimos, ej: 2 y 3 osea ab NO es primo

MULT 6.

$b | (b^2 + 4b + 5a) - (b^2 + 4b)$

POR OPERACIONES DE RESTA DE DIVIS:

RDO: $c | a \wedge d | a \Leftrightarrow cd | a$ $\qquad b | b^2 + 4b \Rightarrow b | 5a$

$ab | b^2 + 4b + 5a \Rightarrow 1.\ a | b^2 + 4b + 5a \wedge 2.\ b | b^2 + 4b + 5a \Rightarrow$

2. Como $a \perp b$ ∧ $b \mid 5a \Rightarrow b \mid 5$

Como tengo b reemplazo en la expresión y busco $a / a \perp b$

Busco los a usando los Div de 5: $\{\pm 1; \pm 5\}$

Con $b = 1$ $\quad \frac{5}{a} + 5 = \frac{5+5a}{a}$ debe $\in \mathbb{Z} \Rightarrow a \mid 5+5a$

$a \mid 5a \Rightarrow a \mid 5 \Rightarrow a$ vale de los Div de $5 = \{\pm 1; \pm 5\}$

· Con $b = 1$, cualquier valor de a es COPRIMO con b.

· Con $b = 5$, $\frac{9}{a} + 1 = \frac{9+a}{a} \Rightarrow a \mid 9 + a$:)

$a \mid a \Rightarrow a \mid 9$. Así $a \in \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\}$

y todos valen para $\forall a,\ a \perp b = 5$.

Faltan los otros casos. El pendiente es el 3.

→ × la razón de

Vale siempre que $a \mid 5b + 7a \Rightarrow a \mid 5b$ pues

$a \mid 7a$ xq es múltiplo entonces $a \mid 5b$.

Ojo: $a + 1 \mid 56 + a$ No vale que $a+1 \mid 56$ pues

$a + 1 \nmid a$.

Otro Ej: $\frac{36+a}{a+1}$ no vale que $a+1 \mid 36$ pues $a+1 \nmid a$.

Caso $b=-1$, $\dfrac{b+4}{a} + \dfrac{5}{b} = \dfrac{3}{a} - 5 = \dfrac{3-5a}{a} \Rightarrow a \mid 3-5a$

$\Rightarrow a \mid -5a \Rightarrow a \mid 5a \Rightarrow a \mid 3.$ ✓

a vale de los divisores de $3 \Rightarrow \{\pm 1; \pm 3\}$ y ambos son coprimos con $b=-1$.

Caso $b=-5$ $\quad -\dfrac{1}{a} - 1 = \dfrac{-1-a}{a} \Rightarrow a \mid -1-a \Rightarrow a \mid a \Rightarrow a \mid -1$

$\Rightarrow$ a vale de los divisores de $1 \Rightarrow \{\pm 1\}$ y ± 1 siempre es coprimo con 5. ✓ ✓

ii) $\dfrac{9a}{b} + \dfrac{7a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$

$$\frac{b}{b} \cdot \frac{9a}{b} + \frac{7a^2}{b^2} = \frac{9ab}{b^2} + \frac{7a^2}{b^2} =$$

$$\frac{9ab+7a^2}{b^2} \Rightarrow b^2 \mid 9ab+7a^2 \overset{b \mid 9ab}{\Rightarrow} \overset{1.}{b^2 \mid 9ab} \wedge \overset{2.}{b^2 \mid 7a^2}$$

1. $b^2 \mid 9ab \Rightarrow b^2 \mid ab \overset{b^2 \mid b}{\Rightarrow} b \mid a$ ABS esto es imposible pues a y b son coprimos

2. $b^2 \mid 7a^2 \overset{b^n \mid a^n \Rightarrow b \mid a}{\Rightarrow} b \mid 7a \Rightarrow b \mid 7 \Rightarrow b \in \mathrm{Div}(7) = \pm 1$ ó ± 7

Caso $b=1$

$$\frac{9a}{b} + \frac{7a^2}{b^2} = 9a + 7a^2 \Rightarrow 1 \mid 9a + 7a^2$$ Vale $\forall a \in \mathbb{Z}$ pero $\forall a, b \perp a$

Vale también $b = -1$

Caso $b = 7$

$$\frac{9a(7)}{49} + \frac{7a^2}{49} = \frac{\cancel{7}(9a + a^2)}{\cancel{49}}$$

$$\Rightarrow \frac{9a + a^2}{7} \Rightarrow 7 \mid 9a + a^2$$

Tabla de restos

r	$9a + a^2$
$\boxed{0}$	$\boxed{0}$
1	3
2	1
3	1
4	3
$\boxed{5}$	$\boxed{0}$
6	6

Mod 7

$\Rightarrow$ Descarto porque $a \equiv 0 (7) \Rightarrow$ a debería ser multiplo de 7 pero no es posible pues $a \perp b$.

$\Rightarrow a \equiv 5(7)$ entonces vale pues este a no es multiplo de 7 $\cancel{7}$

Al dividir el resto es 5.

Caso -7:

23. i) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{b+4}{a} + \dfrac{5}{b} \in \mathbb{Z}$.

ii) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{9a}{b} + \dfrac{7a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$.

iii) Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $\dfrac{2a+3}{a+1} + \dfrac{a+2}{4} \in \mathbb{Z}$.

iii) $\dfrac{2a+3}{a+1} + \dfrac{a+2}{4} = \dfrac{4}{4} \cdot \dfrac{2a+3}{a+1} + \dfrac{a+2}{4} \cdot \dfrac{a+1}{a+1}$

$= \dfrac{8a+12}{4(a+1)} + \dfrac{a^2+3a+2}{4(a+1)} = 4(a+1) \mid a^2+11a+14 \Rightarrow$

$4(a+1) \mid 4(a+1)$ (Cuando tengo una letra, divido por sí mismo)

$4(a+1) \mid 4(a^2+11a+14) - a(4(a+1)) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(a+1) \mid 40a+56 \Rightarrow d \mid 10(4(a+1)) - (40a+56)$

$\Rightarrow d \mid 16 \Rightarrow$ Son $a \in Div(16)$.

Debo ver qué valores me dan que hacen que la expresión esté en los $\mathbb{Z}$.

$\text{Div}(16) = \{\pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 16\}$

Caso $a = 2$, no vale pues $\frac{7}{4} + 2 \notin \mathbb{Z}$.

Caso $a = -2$, $1 + 0 = 1 \in \mathbb{Z}$. -2 vale

y $a = -2 \in \mathbb{Z}$ ✓

Caso $a = 4$, $a = 8$, $a = 16$ no valen. siempre

lo de la izq $\notin \mathbb{Z}$.

Caso $a = -4$, no vale.

Caso $a = -8$, no vale.

solo vale $a = -2$.

35. (a) Sea $k \in \mathbb{N}$. Probar que $(2^k + 7^k : 2^k - 7^k) = 1$.

Lo que me dice esto es que $2^K + 7^K$ y $2^K - 7^K$ son COPRIMOS

pues el MCD es 1.

Como d es el MCD vale que $d \mid (2^K + 7^K) \wedge d \mid (2^K - 7^K)$

y por prop de la divisibilidad se que $d \mid a \pm b$

$d \mid (2^K + 7^K) - (2^K - 7^K) \Rightarrow d \mid 2.7^K$

La expresión 2.7^K es siempre múltiplo de 7, o 7^K es siempre una potencia de 7.

Por otro lado, $d \mid (2^k+7^k) + (2^k - 7^k) \Rightarrow d \mid 2.2^k$

$(ca:cb) = c(a:b)$

así $d \mid (2.7^k : 2.2^k) \Rightarrow d \mid 2(7^k : 2^k) \Rightarrow d \in Div_+(2) = \{1, 2\}$

PROP COPRIMOS

Pero $(2^k : 7^k) = 1$ pues 7 es primo y 2 tmb.

Eso vale $(2:7)^k = 1$, o sea que $k=1$

Por lo tanto $d = 1$

(b) Sea $k \in \mathbb{N}$. Probar que $(2^k + 5^{k+1} : 2^{k+1} + 5^k) = 3$ ó 9, y dar un ejemplo para cada caso.

Acá se supone que voy a llegar a $d \mid$ múltiplo de 3.

Si 3 divide, veo si 3^2 también.

$d = (2^k + 5^{k+1} : 2^{k+1} + 5^k)$ POR PROP MCD vale que $d \mid (2^k + 5^{k+1}) \wedge d \mid 2^{k+1} + 5$

OJO. No usar prop de coprimos como $b^2 \mid b$ o $b \mid a+c$ y $b \mid a \Rightarrow b \mid c$.

Por prop de la divisibilidad vale que $d \mid a \pm b \Rightarrow$

1. $d \mid (2^k + 5^{k+1}) - (2^{k+1} + 5^k) \Rightarrow d \mid 2(2^k + 5^{k+1}) - (2^{k+1} + 5^k)$

$\Rightarrow d \mid \cancel{2^{k+1}} + 2.5^{k+1} \cancel{- 2^{k+1}} - 5^k \Rightarrow d \mid 2.5^{k+1} - 5^k$

$\Rightarrow d \mid 2.5^k.5 - 5^k \Rightarrow d \mid 5^k(10-1) \Rightarrow \boxed{d \mid 9.5^k}$

2. $d \mid (2^k + 5^{k+1}) - (2^{k+1} + 5^k) \Rightarrow d \mid (2^k + 5^{k+1}) - 5(2^{k+1} + 5^k)$

$\Rightarrow d \mid 2^k + \cancel{5^{k+1}} - 5 \cdot 2^{k+1} - \cancel{5^{k+1}} \Rightarrow d \mid 2^k - 5 \cdot 2^k \cdot 2$

$\Rightarrow d \mid 2^k (1 - 10) \Rightarrow d \mid 2^k(-9) \Rightarrow \boxed{d \mid 2^k \cdot 9}$

→ ME PIDEN VER 3, O 9
CAPAZ con 1

En ambos casos, $d \mid 9$, osea $d \in Div(9) = \{1, 3, 9\}$

3) $\Rightarrow d \mid ((9 \cdot 5^k) : (9 \cdot 2^k)) \Rightarrow d \mid 9(5^k - 2^k) \Rightarrow d \mid 9$

Una vez que tengo ambos d, hago MCD entre ellos 2.

Ahora para que $d \mid 3$ o $d \mid 9$ habría con que

Caso $d = 3$, $2^k + 5^{k+1} \underset{(3)}{\equiv} (-1)^k + 2^{k+1} \equiv -1 + \overbrace{2^{k+1}}^{>0 \text{ y par}} \equiv 0 (3)$ ✓

$2^{k+1} + 5^k \underset{(3)}{\equiv} (-1)^{k+1} + 2^k \underset{(3)}{\equiv} (-1)^{k+1} + (-1)^k \equiv 0(3)$

Luego, $d \neq 1$.

Para que el MCD sea 9, $k = 1$, $(2 + 5^2 : 2^2 + 5) = (27 : 9) = 3$

Para que MCD sea 9 (no encontré)

Lo rehago.

35. (a) Sea $k \in \mathbb{N}$. Probar que $(2^k + 7^k : 2^k - 7^k) = 1$.

a) Me dicen que ambos son coprimos dos a dos pues el MCD es 1.

Necesito llegar a $d \mid (ca:cb)$ y usar prop

Como $d = (2^k+7^k : 2^k-7^k)$ y $d \mid 2^k+7^k \wedge d \mid 2^k-7^k$

Ent. $\cdot\ d \mid (2^k+7^k)+(2^k-7^k) \Rightarrow d \mid 2.2^k$

$\cdot\ d \mid (2^k+7^k)-(2^k-7^k) \Rightarrow d \mid 2.7^k$

$(ca:cb) = c(a:b)$

Ent. el MCD vale de $d \mid (2.2^k : 2.7^k) \Rightarrow$

$$d \mid 2\underbrace{(2^k:7^k)}_{1 \text{ pues } 2 \perp 7} \Rightarrow d \mid 2,\ d \in Div(2) = \{1,2\}$$

Como nos dice que el MCD entre ambos es uno, debo descartar el 2.

$2^k+7^k \underset{(2)}{\equiv} 1^k\ (2)$ | $2^k-7^k \underset{(2)}{\equiv} 1^k\ (2)$

Luego, el MCD no es 2.

Y como 2 no divide a la expresión,

ent. el MCD es 1.

(b) Sea $k \in \mathbb{N}$. Probar que $(2^k + 5^{k+1} : 2^{k+1} + 5^k) = 3$ ó 9, y dar un ejemplo para cada caso.

$d = (2^k + 5^{k+1} : 2^{k+1} + 5^k)$

Como el MCD aparenta ser 3 o 9, debo llegar a $d \mid 9$. (∴) pues 9 es múltiplo de 3.

$d \mid (2^k + 5^{k+1}) \wedge d \mid (2^{k+1} + 5^k)$ por prop del MCD

y además x divisibilidad, $d \mid 2^k + 5^{k+1} \pm 2^{k+1} + 5^k$

Luego, $d \mid 2(2^k + 5^{k+1}) - (2^{k+1} + 5^k) \Rightarrow$

$\Rightarrow d \mid 2 . 5^{k+1} - 5^k \Rightarrow d \mid 2 . 5^k . 5 - 5^k$

Fc 5^k

$\Rightarrow d \mid 5^k (2.5 - 1) \Rightarrow d \mid 5^k . 9$

Por otro lado,

$d \mid (2^k + 5^{k+1}) - 5(2^{k+1} + 5^k) \Rightarrow d \mid (2^k + 5^{k+1}) - 5 . 2^{k+1}$

$-5^{k+1} \Rightarrow d \mid 2^k - 5\cdot 2^{k+1} \Rightarrow d \mid 2^k - 5\cdot 2^k\cdot 2$

$\overset{FC\ 2^k}{\Rightarrow} d \mid 2^k(-5\cdot 2+1) \Rightarrow d \mid 2^k\cdot 9$

$(ca:cb) = c(a:b)$

luego, $d \mid (5^k\cdot 9 : 2^k\cdot 9) \Rightarrow d \mid 9\underbrace{(5^k : 2^k)}_{1 \text{ por } 2\perp 5}$

$d \in Div(9) = \{3; 9\}$

Caso 3:

r	$2^k + \overset{2^{k+1}}{5^{k+1}}$	$2^{k+1} + \overset{2^k}{5^k}$
0	$3 \equiv 0$	$3 \equiv 0$
1	0	0
2	0	0

mod 3

3 divide siempre a la exp, los posibles restos $(0,1,2)$ mod 3 siempre dan 0.

Caso 9:

r	$2^k + 5^{k+1}$	$2^{k+1} + 5^k$
0	$1+5=6$	3
✓ 1	$2+25=27\equiv 0$	$4+5=9\equiv 0$

mod 9

2	$4+125=3$	6
3	$633=3$	6
✓ 4	0	0
5	$\neq 0$	$\neq 0$
6	$\neq 0$	$\neq 0$
✓ 7	0	0
8		

Se repiten restos o caso 2 a partir de $r=0$

$r=1$, entonces vale mod 3 y mod 9 y x lo tanto 9 divide.

$k=1$, $(2+5^2 : 2^2+5) = (27:9) = (9:0) = |9| = 9$

$k=2$ entonces 3 divide pero 9 no.

$$(2^2+5^3 : 2^3+5^2) = (129:33) = (33:30)$$

$$= (30:3) = (3:0) = |3| = 3.$$

Ya hallamos dos casos de K tales que vale

q d vale 3 o 9.

TODO: Ver tabla de restos en exp con PTF.

38. i) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a:b)=3$. Calcular los posibles valores de $(a^2+15b+57:4050)$ y dar un ejemplo para cada caso.

ii) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Sabiendo que $b \equiv 6 \pmod{24}$ y que $(a:b)=13$, calcular $(5a^2+11b+117:624)$.

ii) $(a:b)=13$ coprimizo

$a = 13a'$

$b = 13b'$

$$d = \left(5(13a')^2 + 11(13b') + 117 : 624\right)$$
$$= \left(5.13^2.a'^2 + 11.13b' + 117 : 624\right)$$
$$= \left(13\left(\underbrace{5.13a'^2 + 11b' + 9 : 2^4.3.13}\right)\right)$$

$b \equiv 6 (24) \Rightarrow$

no sé a qué tengo que llegar.

¿se supone que 1?