Cardinal de conjuntos y cantidad de relaciones y funciones

.PREGUNTAR SI ESTA OK

1. Dado el conjunto referencial $V = \{n \in \mathbb{N} : n$ es múltiplo de $15\}$, determinar el cardinal del complemento del subconjunto A de V definido por $A = \{n \in V : n \geq 132\}$. •

2. ¿Cuántos números naturales hay menores o iguales que 1000 que no son ni múltiplos de 3 ni múltiplos de 5? •

3. Dados subconjuntos finitos A, B, C de un conjunto referencial V, calcular $\#(A \cup B \cup C)$ en términos de los cardinales de A, B, C y sus intersecciones.

1) Ejemplo $V: \{15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150\}$

$A \subseteq V$, $A = \{132, 133, 134, \underbrace{135}_{\text{es múltiplo de 15.}}, 136, \ldots\}$

El complemento de A serían los múltiplos de 15 que están en V pero NO en A.

Como A empieza a partir del 135, el complemento de A sería: $\{15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120\}$ pues son los elementos de V que NO están en A.

$$\boxed{\# A^c = 8}$$

2) Si NO son múltiplos de 3 ni 5 a la vez debemos excluir aquellos múltiplos de 15 pues $15 = 5 . 3$.

La cantidad de elementos múltiplos de 15 que hay son:

$$15m \leq 1000$$
$$m \leq 66.6$$ aprox pero los números son 1, 0 2. no puede tener decimales

Observo que si 15.67 es 1005 me paso, por lo tanto el último múltiplo de 15 hasta el 1000 es 995 osea $m=66$.

Entonces $\Rightarrow 1000-66=934$ números que no son múltiplos de 15.

Ahora pienso, se supone que si cuento los casos de: múltiplos de 5 $\wedge$ múltiplos de 3 por separado debería restarlos xq yo no necesito los múltiplos de 3 ó 5 solos.

· $3m \leq 1000$

$m \leq 333.33 \Rightarrow \boxed{m\ max = 333}$ pues $3.333=999$

· $5m \leq 1000$

$m \leq 200 \Rightarrow \boxed{m\ MAX = 200}$ pues $200.5=1000$

· múltiplos de 5: 200
· múltiplos de 3: 333
· múltiplos de 15: 66

Ej: 15 vale, pero $3.3.3.3.3=15$ también, luego $5.5.5$ también es 15. Restarlos q solo son mult de 3 o de 5 pero no ambos a la vez.

Entonces: $1000 - \underbrace{200}_{\text{MULT 5}} - \underbrace{33}_{\text{MULT 3}} + \underbrace{66}_{\substack{\text{NI MULT 5} \\ \text{NI MULT 3}}} = 533$

3) $\#(A \cup B \cup C)$: Uso principio inclusión exclusión

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

$$\#(A \cup B \cup C) = \#(A \cup B) + \#C = \#(A \cup B) + \#C - (\#(A \cup B) \cap \#C)$$

$$= \#A + \#B - \#(A \cap B) + \#C - (\#(A \cap C) \cup \#(B \cap C))$$

$$= \#A + \#B - \#(A \cap B) + \#C - (\#(A \cap C) + \#(B \cap C) - \#(A \cap B \cap C))$$

$$= \#A + \#B - \#(A \cap B) + \#C - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$$

4. i) En el listado de inscripciones de un grupo de 150 estudiantes, figuran 83 inscripciones en Análisis y 67 en Álgebra. Además se sabe que 45 de los estudiantes se anotaron en ambas materias. ¿Cuántos de los estudiantes no están inscriptos en ningún curso?

ii) En un instituto de idiomas donde hay 110 alumnos, las clases de inglés tienen 63 inscriptos, las de alemán 30 y las de francés 50. Se sabe que 7 alumnos estudian los tres idiomas, 30 solo estudian inglés, 13 solo estudian alemán y 25 solo estudian francés. ¿Cuántos alumnos estudian exactamente dos idiomas? ¿Cuántos inglés y alemán pero no francés? ¿Cuántos no estudian ninguno de esos idiomas?

5. Si hay 3 rutas distintas para ir de Buenos Aires a Rosario, 4 rutas distintas para ir de Rosario a Santa Fe, y 2 para ir de Santa Fe a Reconquista ¿cuántos formas distintas hay para ir de Buenos Aires a Reconquista pasando por las dos ciudades intermedias?

6. i) ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras (no pueden empezar con 0) hay que no contienen al dígito 5?

ii) ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras hay que contienen al dígito 7?

7. María tiene una colección de 17 libros distintos que quiere guardar en 3 cajas: una roja, una amarilla y una azul. ¿De cuántas maneras distintas puede distribuir los libros en las cajas?

8. Un estudiante puede elegir qué cursar entre 5 materias que se dictan este cuatrimestre. ¿De cuántas maneras distintas puede elegir qué materias cursar, incluyendo como posibilidad no cursar ninguna materia? ¿Y si tiene que cursar al menos dos materias?

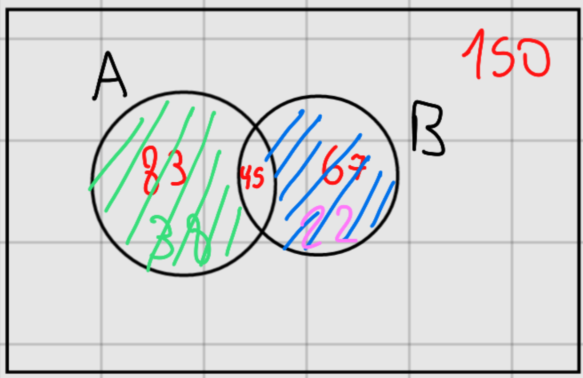
9. Si A es un conjunto con n elementos ¿Cuántas relaciones en A hay? ¿Cuántas de ellas son reflexivas? ¿Cuántas de ellas son simétricas? ¿Cuántas de ellas son reflexivas y simétricas?

4) i)

A = 83 ANOTADOS. ANÁLISIS B = 67 ANOTADOS. ÁLGEBRA

C = 45 ANOTADOS EN A Y B. D = TOTAL 150 ALUMNOS.

¿Cuántos no hay ninguno análisis?



Los de 45 están en álgebra y análisis.

· Solo cursan análisis: $83 - 45 = 38$

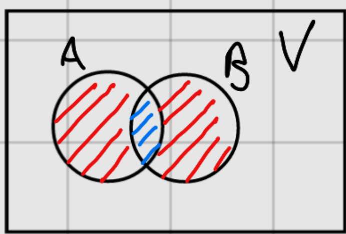
· Solo cursan álgebra: $67 - 45 = 22$

Cursan ambos: 45

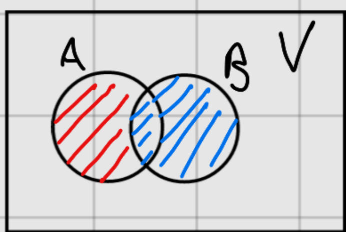
El problema que tengo es que:

· Tengo que saber cuántos cursan SOLO ÁLGEBRA.
· " " " " " " ANÁLISIS
· " " " " " LAS DOS pero sin incluir los que cursan una sola

1) $150 - (\overset{SA}{38} + \overset{SB}{22} + \overset{A \cap B}{45}) \Rightarrow$



2) OTRA FORMA $150 - (\overset{SA}{38} + \overset{B \text{ entero}}{67})$



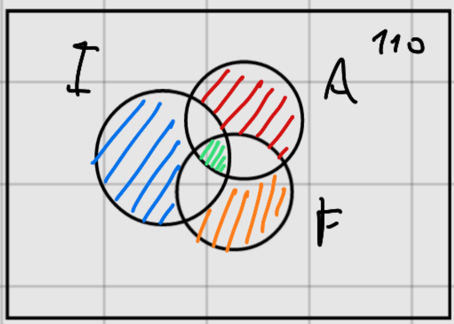
ii) $V = 110,\ I = 63,\ A = 30,\ F = 50$

IAF = 7   S.I = 30   S.A = 13   SF = 25

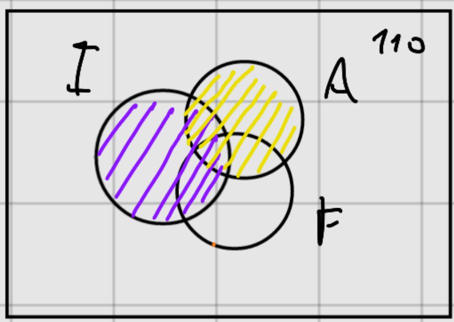
a. ¿Cuántos alumnos estudian 2 idiomas?

b. ¿Cuántos I, A pero NO F?

c. ¿Cuántos ningún idioma?



• Si   • SA   • SF   • IAF   • F   • I   • A



I entero toma: I, $I \cap A$, $I \cap A \cap F$, $I \cap F$.

a) $IF = \#Si + \#SF = 55$

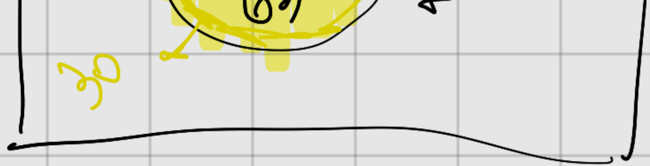
$AF = \#SA + \#SF = 38$ NO

$AI = \#SA + \#Si = 43$

$IF = \#I + \#F - \#($

$A + I - (A \cap I)$

$13 + 25 + 30 + 7$



#AUFUI =

#A + #F + #I + .

5) BSAS $\overset{3F}{=\!=\!=}$ ROSARIO $\overset{4F}{=\!=\!=}$ ST.FE $\overset{2F}{=\!=}$ R

Al ser casos disjuntos: 3 . 4 . 2 formas distintas

↳ no tengo ninguna condición

6) i) $\underset{8}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{9}{\_}$ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Calculo los que empiezan con 5, luego los excluyo

1. $\frac{5}{1}$ _ _ _ 0 _ 5 _ _ 0 _ _ 5 _ 0

_ _ _ 5 0 5 5 _ _ 0 _

Acá lo importante saber por qué mi razonamiento fue erróneo, porque hicha ponía los 5, caso por caso pero luego observé que tengo casos duplicados

$\frac{7}{1}$ $\frac{\ }{9}$ $\frac{\ }{9}$ $\frac{\ }{9}$ + $\frac{7}{9}$ $\frac{7}{1}$ $\frac{\ }{9}$ $\frac{\ }{9}$

Es el mismo caso.
Estoy duplicando 1 vez el caso.

Ej: (1) $\frac{7}{1}\ \overline{\ \ }_{9}\ \overline{\ \ }_{9}\ \overline{\ \ }_{9}$ y (2) $\overline{\ \ }_{9}\ \overline{\ \ }_{9}\ \frac{7}{1}\ \overline{\ \ }_{9}$

Lo duplicado fue en (1), el 7179 cubre (2).

Por el otro lado, en (2) 7179 cubre (1) también

y estamos duplicando el caso.

Entonces la idea es excluir el número de primeros.

ii) Como me piden que busque los q No tienen al
S.

1. Todo al 7

$\overline{\ \ }_{8}\ \overline{\ \ }_{9}\ \overline{\ \ }_{9}\ \overline{\ \ }_{9}$

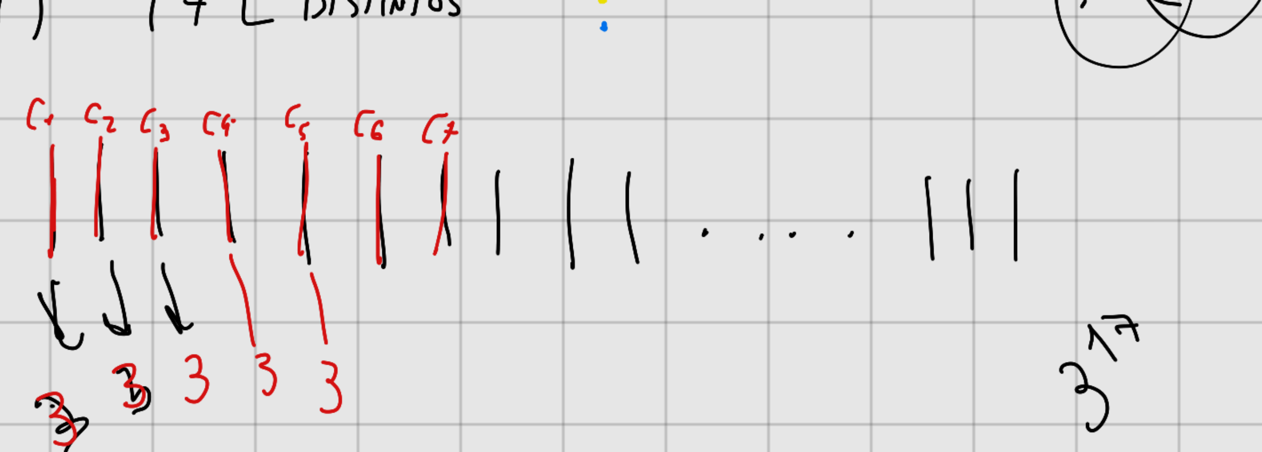
Preguntémonos "¿Por qué lo uso solo de ahí?" porque

$\overset{7}{\_}\ \_\ \_\ \_$ cubre los mismos que $\_\ \overset{7}{\_}\ \_\ \_$ y $\_\ \_\ \overset{7}{\_}\ \_$ y $\_\ \_\ \_\ \overset{7}{\_}$

Ahora, como sé que calculé el complemento (los que no tienen al 7, se lo resto al total que sí tienen al 7)

$$\overline{\ \ }_{9}\ \overline{\ \ }_{9}\ \overline{\ \ }_{9}\ \overline{\ \ }_{9} = 9^4 - \underbrace{8.9^3}_{\text{no tienen al 7.}}$$

7) ... 1.2.1 Distancias

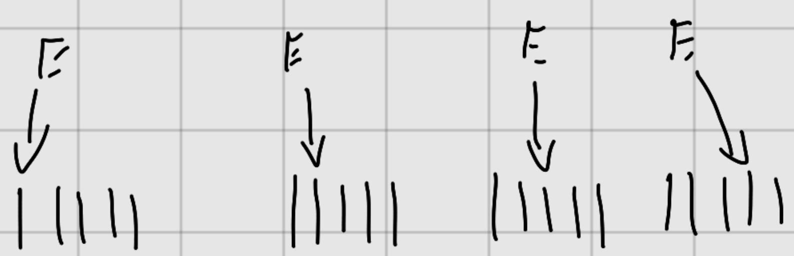


Esto debo pensarlo como: Los libros es mi Conjunto A, los cajas, el Conjunto B.

Entonces se que $\#A \geq \#B$, entonces $f: A \to B$ es sobreyectiva osea lleno todos los cajas.

Así, $\#B^{\#A} \Rightarrow 3^{17}$.

8)



4. i) En el listado de inscripciones de un grupo de 150 estudiantes, figuran 83 inscripciones en Análisis y 67 en Álgebra. Además se sabe que 45 de los estudiantes se anotaron en ambas materias. ¿Cuántos de los estudiantes no están inscriptos en ningún curso?

   ii) En un instituto de idiomas donde hay 110 alumnos, las clases de inglés tienen 63 inscriptos, las de alemán 30 y las de francés 50. Se sabe que 7 alumnos estudian los tres idiomas, 30 solo estudian inglés, 13 solo estudian alemán y 25 solo estudian francés. ¿Cuántos alumnos estudian exactamente dos idiomas? ¿Cuántos inglés y alemán pero no francés? ¿Cuántos no estudian ninguno de esos idiomas?

5. Si hay 3 rutas distintas para ir de Buenos Aires a Rosario, 4 rutas distintas para ir de Rosario a Santa Fe, y 2 para ir de Santa Fe a Reconquista ¿cuántos formas distintas hay para ir de Buenos Aires a Reconquista pasando por las dos ciudades intermedias?

6. i) ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras (no pueden empezar con 0) hay que no contienen al dígito 5?

   ii) ¿Cuántos números de exactamente 4 cifras hay que contienen al dígito 7?

7. María tiene una colección de 17 libros distintos que quiere guardar en 3 cajas: una roja, una amarilla y una azul. ¿De cuántas maneras distintas puede distribuir los libros en las cajas?

8. Un estudiante puede elegir qué cursar entre 5 materias que se dictan este cuatrimestre. ¿De cuántas maneras distintas puede elegir qué materias cursar, incluyendo como posibilidad no cursar ninguna materia? ¿Y si tiene que cursar al menos dos materias?

9. Si A es un conjunto con n elementos ¿Cuántas relaciones en A hay? ¿Cuántas de ellas son reflexivas? ¿Cuántas de ellas son simétricas? ¿Cuántas de ellas son reflexivas y simétricas?

9) $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Relaciones: salen de hacer $A \times A$ en este caso.

Ej: $A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3),$

$(3,1), (3,2), (3,3)\}$

Una R puede ser: $\{(1,1), (3,3)\}$, osea $\in P(A \times A)$

1. Hay 2^{n^2} relaciones pues $2^{n \cdot n}$ (si fuese $A \times B \Rightarrow n \cdot m$)

2. Sé que en $A \times A$ hay n pares de (a, b) donde $a = b$.

pues, si $A = \{1, 2, 3\}$ $A \times A = \{(1,1), (2,2), (3,3) \dots\}$ tiene

a lo sumo n elementos relacionados.

Si hago relación de $A \times A$, osea $P(A \times A)$ solo con reflexión:

$\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ $\{(1,1), (2,2)\}$ $\{(1,1), (3,3)\}$ $\{(2,2), (3,3)\}$

$\{(1,1)\}$ $\{(2,2)\}$ $\{(3,3)\}$ $\{\emptyset\}$

hay 6 posibles, osea 2^n $(2^3 = 8)$

Así, 2^n son reflexivas.

3. Para que sea simétrico, si $aRb \Rightarrow bRa$

Ej: si $A = \{1,2,3\}$ $A \times A = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,1),(3,1),(3,2),$
$(1,1),(2,2),(3,3)\}$

$R = \emptyset$, $R =$ unión (6)

Me trabé

10. Sean $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$. Sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todas las funciones $f : A \to B$.

i) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\mathcal{F}$?

ii) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : 10 \notin \mathrm{Im}(f)\}$?

iii) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : 10 \in \mathrm{Im}(f)\}$?

iv) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\{f \in \mathcal{F} : f(1) \in \{2,4,6\}\}$?

i) $12^5 \Rightarrow$ 12 de y para 5 de x. ✓

ii) $11^5 \Rightarrow$ lo quito como opción ✓

iii) Total - los q no lo tienen. $12^5 - 11^5$ ✓

iv) Mando 1, devuelve $\{2,4,6\}$. Casos independientes

$1 \to \{2,4,6\}$ $\quad 3 \to \{1,\dots,12\}$ $\quad 5 \to \{1,\dots,12\}$

$2 \to \{1,\dots 12\}$ $\quad 4 \to \{1,\dots,12\}$

$= 3 \cdot 12^4$ ✓

11. Sean $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ y $B = \{8,9,10,11,12,13,14\}$.

i) ¿Cuántas funciones biyectivas $f : A \to B$ hay?

ii) ¿Cuántas funciones biyectivas $f : A \to B$ hay tales que $f(\{1,2,3\}) = \{12,13,14\}$?

i) Es biyectiva si $\#A = \#B$.

Hay $7!$ ✓

En la 1: $(1,8)$ $(2,9)$ y en otra $(2,10)$ ...

2: $(1,9)$ $(2,10)$

3: $(1,10)$ $(2,11)$

$\vdots$ $\quad \vdots$

7: $(1,14)$ $(2,13)$

Cada x, un solo y.

ii) Si mando $\{1,2,3\}$ obtengo $\{12,13,14\}$

$\{1,2,3\} \to \{12,13,14\}$ $\quad \{6\} \to \{8,\dots,11\}$

$\{4\} \to \{8,\dots,11\}$ $\quad \{7\} \to \{8,\dots,11\}$

$\{5\} \to \{8, \dots, 11\}$ solo 1 puede agarrar.

$\underbrace{3!}_{1.} \cdot \underbrace{4!}_{2.}$

$\{3\}$ con 14 $\{2\}$ con 13

1. $\{3\}$ con 14 $\{2\}$ con 12

1. $\{1\}$ con 12 o $\{1\}$ con 13 o $\{1\}$ con $\{14\}$...

se forzan pa ser biyectivo

$\nearrow$ si 4 -> 8 => 5,6 o 7 ya no

2. Del 4 al 7, solo toman alguno del 8 al 11 inclusive. pueden usar el 8

12. ¿Cuántos números de 5 cifras distintas se pueden armar usando los dígitos del 1 al 5? ¿Y usando los dígitos del 1 al 7? ¿Y usando los dígitos del 1 al 7 de manera que el dígito de las centenas no sea el 2?

i) $\underset{5}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \underset{3}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{1}{\_} = 5!$

ii) $\underset{7}{\_}\ \underset{6}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \underset{3}{\_}$ $7!$

iii) $\underset{7}{\_}\ \underset{6}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \underset{3}{\_} - \left(\underset{6}{\_}\ \underset{5}{\_}\ \underset{1}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \underset{3}{\_}\right)$

13. Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

i) ¿Cuántas funciones inyectivas $f : A \to B$ hay?

ii) ¿Cuántas de ellas son tales que $f(1)$ es par? ¿Y cuántas tales que $f(1)$ y $f(2)$ son pares?

i) Inyectiva si $\# A \leq \# B$

$\frac{10!}{3!}$

$\frac{m!}{(m-n)!}$

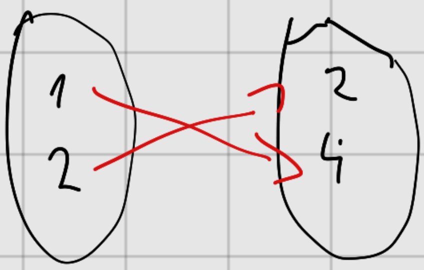
ii) a) $f(1)$ par: $f(1) = 2$ $f(1) = 8$

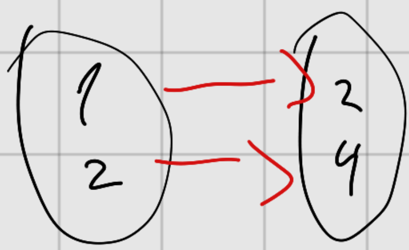
$f(1) = 4$

$f(1) = 10$

$f(1) = 6$

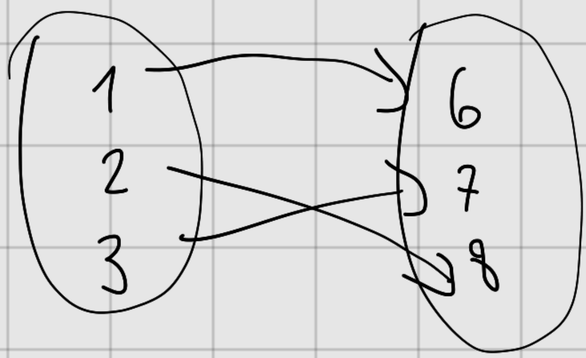
OPT 1: OPT 2:



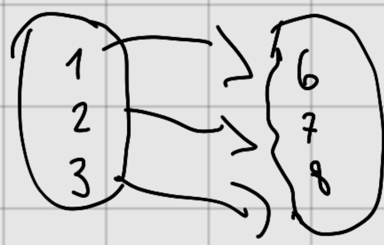


El 1 puede caer a 5 lugares pero hay muchas posibilidades según quién esté con los demás.

Ej:



es ≠



xq si bien el 1 va al 6 en ambos, no es la misma función xq en 1. $f(2) = 8$ y en 2. $f(2) = 7$

5 para el 1. Agarro uno, luego 9 libres

$$5 \cdot \frac{9!}{(9-6)!} = 5 \cdot \frac{9!}{3!}$$

$f(1)$ → ... → $f(2)$

ii) b) $\overset{1}{5} \cdot \overset{1}{4} \cdot \dfrac{8!}{(8-5)!} = 5 \cdot 4 \cdot \dfrac{8!}{3!}$

Ej: Para el 1: {2,4,6,8,10}

Para el 2: {4,6,8,10}

14. ¿Cuántas funciones biyectivas $f : \{1,2,3,4,5,6,7\} \to \{1,2,3,4,5,6,7\}$ tales que $f(\{1,2,3\}) \subseteq \{3,4,5,6,7\}$ hay?

Cuando envío {1,2,3} me da algún subconjunto de {3,4,5,6,7}?

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \underbrace{4!}_{\text{libres}}$

ANOTAR

¿5 · 4 · 3?

1 → 5 opc.

2 → 4 opc.

3 → 3 opc.

$\underline{5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 0} = \dfrac{5!}{2!}$

Número combinatorio

17. i) ¿Cuántos subconjuntos de 4 elementos tiene el conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7\}$?

ii) ¿Y si se pide que 1 pertenezca al subconjunto?

iii) ¿Y si se pide que 1 no pertenezca al subconjunto?

iv) ¿Y si se pide que 1 o 2 pertenezcan al subconjunto pero no simultáneamente los dos?

17) i) Del total de elem., agarro 4.

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!\,3!}$$

ii) Del total, agarro el 1 fijo y ...

luego los otros 3.

$$\binom{7}{1}\cdot\binom{6}{3}$$

iii) $\binom{7}{4} - \left(\binom{7}{1}\cdot\binom{6}{3}\right)$ o $\binom{6}{4}$

iv) $\underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{1 o 2, agarro 1.}}\cdot\binom{5}{3}$

18. Sea $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 20\}$. Calcular la cantidad de subconjuntos $B \subseteq A$ que cumplen las siguientes condiciones:

i) B tiene 10 elementos y contiene exactamente 4 múltiplos de 3.

ii) B tiene 5 elementos y no hay dos elementos de B cuya suma sea impar.

i) Ej: 1. $B = \{3,6,9,12,1,2,4,5,7,8\}$

2. $B = \{3,6,9,12,1,2,4,13,14,16\}$

$$\overbrace{\binom{6}{4}}^{\text{solo multi 3}}\cdot\overbrace{\binom{14}{6}}^{\text{sin multi 3.}}$$

"MÚLTIPLOS DE 3

los 6 restantes sin los 2 múltiplos de 3 que quedaban

$E \cap A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

En ej 1: Como ya agarré 3, 6, 9, 12 no puedo agarrar más múltiplos de 3 otros 15, 18.

ii) Es impar si: PAR + IMPAR

No es impar si: PAR + PAR
IMPAR + IMPAR

$\binom{10}{5}$ = solo impares

$\binom{10}{5}$ = solo pares.

20. Determinar cuántas funciones $f : \{1, 2, 3, \ldots, 11\} \to \{1, 2, 3, \ldots, 16\}$ satisfacen simultáneamente las condiciones:

- f es inyectiva,
- Si n es par, $f(n)$ es par,
- $f(1) \leq f(3) \leq f(5) \leq f(7)$.

- INY: $\dfrac{16!}{5!}$

2 – 8 POS   8 – 5 POS

4 – 7 POS   10 – 4 POS

6 – 6 POS

$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{11!}{6!}$$

21. ¿Cuántos anagramas tienen las palabras *estudio*, *elementos* y *combinatorio*?

ESTUDIO: $7! = \binom{7}{7}$ PONGO LAS E   PONGO EL RESTO

ELEMENTOS: $\frac{9!}{3!} = \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{6}$

VERIF: $\frac{9!}{3!\,\cancel{6!}} \cdot \cancel{6!} = \frac{9!}{3!}$

PONGO O   PONGO I   PONGO RESTO

COMBINATORIO $\dfrac{12!}{3!\,2!} = \binom{12}{3}\binom{9}{2}\binom{7}{7}$

VERIF:

$$\frac{12!}{3!\,\cancel{9!}} \cdot \frac{\cancel{9!}}{2!\,\cancel{7!}} \cdot \cancel{7!}$$

$$= \frac{12!}{3!\,2!}$$

22. ¿Cuántas palabras se pueden formar permutando las letras de *cuadros*

i) con la condición de que todas las vocales estén juntas?

ii) con la condición de que las consonantes mantengan el orden relativo original?

iii) con la condición de que nunca haya dos (o más) consonantes juntas?

i) VOCALES A E I O U

En Cuadros: A, O, U

$\boxed{AOU}$ CDRS

$\binom{7}{\ }$

$$\underbrace{\binom{\ }{3}}_{\text{Pongo las vocales}} \cdot \underbrace{4!}_{\text{Permuto las demás}}$$

ii) C _ A _ _ O S

_ C _ A _ O S

solo muevo vocales

$$\binom{7}{4} \cdot 3!$$

POSICIONO CONSONANTES

iii) Si no hay dos consonantes juntas, la combinación solo puede tener vocales a su izq y der.

Ej: C V C V C V C

$$\underbrace{\text{V C V C V C C}}$$

Si empieza por vocal, al ser menos letras se me juntan dos C.

$$\underbrace{\text{C V V C V C C}}$$

Si tengo dos vocales seguidas, estoy obligado a unir 2 C.

El único caso es CVCVCVC

4!	3!	3!	2!	2!	1!	1!
C	V	C	V	C	V	C

23. Con la palabra *polinomios*,

i) ¿Cuántos anagramas pueden formarse en los que las dos letras i no estén juntas?

ii) ¿Cuántos anagramas pueden formarse en los que la letra n aparezca a la izquierda de la letra s y la letra s aparezca a la izquierda de la letra p (no necesariamente una al lado de la otra)?

i) POLINONIOS

$\boxed{II}$

$$\frac{9!}{3!} \cdot$$ [Anagramas del bloque]

$$\frac{2!}{2! \cdot 5}$$, separado

CASOS DONDE LAS I JUNTAS:

$$\binom{10}{2} \cdot 8!$$

CASOS SIN LAS I JUNTAS:

$$10! - \binom{10}{2} \cdot 8!$$

$$10! - \frac{10!}{2!\,\cancel{8!}}\cancel{8!}$$

$$10! - \frac{10!}{2!}$$

ii) Coloco m, n, p y luego el resto (tiene duplicados)

$$\binom{10}{3} \cdot \frac{7!}{3!\,2!}$$

24. Pedro compró 14 unidades de fruta: 6 duraznos, 2 naranjas, 1 banana, 1 pera, 1 higo, 1 kiwi, 1 ciruela y 1 mandarina. Su propósito es comer una fruta en cada desayuno y merienda. Determinar de cuántas formas puede organizar sus refrigerios de esa semana si no quiere consumir más de una naranja por día.

X DIA: 2 FRUTAS. 1 DES, 1 MER.

Tiene solo dos naranjas x lo tanto, solo 1 día podría comer naranja si los come el mismo día.

POR COMPLEMENTO

Busco que casos con los q come los 2.

$$\binom{14}{2}\cdot 12! = \binom{14}{2}\cdot 12!$$

Sin comer dos naranjas el día:

$$\underbrace{14!}_{\#\text{TOTAL}} - \underbrace{\binom{14}{2}}_{\to \text{PREGUNTAR.}}\cdot \underbrace{12!}_{\text{RESTO}}$$

unidades

Mi idea fue de eran 14 opciones 2 naranjas

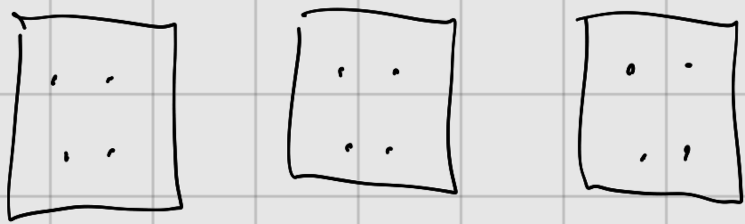
En CUBAWIKI hay un $14! - 7 \cdot 12!$

Creo que es xq hay 7 frutas sin la manzana
pero si pongo 7 no faltarían como?

25. Un grupo de 15 amigos organiza un asado en un club al que llegarán en 3 autos distintos (4 por auto) y 3 irán caminando. Sabiendo que solo importa en qué auto están o si van caminando, determinar de cuántas formas pueden viajar si se debe cumplir que al menos uno entre Lucía, María y Diego debe ir en auto, y que Juan y Nicolás tienen que viajar en el mismo auto.

26. Probar que $\binom{2n}{n} > n\,2^n, \ \forall n \geq 4$.

25.) 15 AMIGOS
12 EN AUTO
3 CAMINAN



a. Tomo a J y N como 1.
AUTO 1

26) $\binom{2n}{n} > n \cdot 2^n, \forall n \geq 4$

Caso base: $n = 4$ $\binom{8}{4} > 4 \cdot 2^4$

$$\frac{8!}{4!\,4!} > 4 \cdot 16$$

$$\frac{8!}{4!^2} > 64$$

$70 > 64$ ✓

P.I: Sea $K \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ fijo.

· Hi: $\binom{2k}{k} > k \cdot 2^k = \frac{2k!}{k!(2k-k)!} = \boxed{\frac{2k!}{k!\,k!} > k.2^k}$

· QPQ: $\binom{2(k+1)}{k+1} > (k+1) . 2^{k+1} = \frac{2k+2!}{(k+1)!\,((2k+2)-(k+1))!}$

$$= \frac{2k+2!}{(k+1)!\,(k+1)!} > (k+1).2^{k+1}$$

$$\frac{(2k+2)!}{(k+1)!\,(k+1)!} = \frac{(2k+2)\cdot(2k+1)\cdot 2k!}{k!(k+1)\ k!(k+1)} = \frac{(2k+2)\cdot(2k+1)\cdot 2k!}{k!(k+1).k!(k+1)}$$

$$\overset{Hi}{>} \frac{(2k+2)(2k+1).(k.2^k)}{(k+1)^2} \geq (k+1).2^{k+1}$$

Aux:

$$= \frac{(2\cancel{(k+1)})(2k+1)(k.2^k)}{\cancel{(k+1)}(k+1)}$$

$$= \frac{2(2k+1)(k\cdot 2^k)}{(k+1)}$$

$$= \frac{2(k\cdot \cancel{2^k})(2k+1)}{(k+1)} \geq (k+1)\,\cancel{2^k}\cdot 2$$

$$= \frac{\cancel{2}k(2k+1)}{(k+1)} \geq \cancel{2}(k+1)$$

$$= \frac{k(2k+1)}{(k+1)} \geq (k+1)$$

$$= k(2k+1) \geq (k+1)(k+1)$$

$$= \underbrace{2k^2}_{\geq k^2} + k \geq k^2 + 2k + 1$$

$-k^2$

$$= k^2 + k \geq 2k + 1$$

$-k$

$$= \underbrace{k^2}_{\geq 16} \geq \underbrace{k+1}_{\geq 5}$$

PREGUNTAR SI ESTÁ OK

Si está OK, como queríamos...

27. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 2 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = 4a_n - 2\frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Probar que $a_n = \binom{2n}{n}$.

INDUCCIÓN GLOBAL. Un caso base pues a_{n+1} solo requiere a_n

Caso base: $n=1$, $a_1 = \binom{2}{1} = \frac{2!}{1!(2-1)!}$; $2! \overset{?}{=} 2!$ ✓

P.I: Sea $h \in \mathbb{N}$, queremos que $P(1), P(2), \dots, P(h) \Rightarrow P(h+1)$

· HI: $a_k = \binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{k!\,k!}$ $\quad 1 \le k \le h$

· QPQ: $a_{h+1} = \binom{2(h+1)}{h+1} = \binom{2h+2}{h+1} = \frac{(2h+2)!}{(h+1)!\,(h+1)!}$

Pero por def de la suc:

$$a_{n+1} = 4 \cdot \binom{2n}{n} - 2\,\frac{(2n)!}{(n+1)!\,.\,n!}$$

$$\ast = 4 \cdot \frac{(2n)!}{n!\,n!} - 2 \cdot \frac{(2n)!}{(n+1)!\,.\,n!}$$

$$= 4 \cdot \frac{(2n)!}{n!\,n!} - 2 \cdot \frac{(2n)!}{(n+1)!\;n!}$$

$$= \frac{4 \cdot (2n)!\,\overbrace{(n+1)!}^{n!(n+1)} - 2\,(2n)!\,n!}{n!\,n!\,(n+1)!}$$

$$= \frac{2\,(2n)!\,n!\,\big(2(n+1) - 1\big)}{n!\;n!\;(n+1)!}$$

$$= \frac{2\,(2n)!\,\cancel{n!}\,(2n+1)}{n!\;\cancel{n!}\,(n+1)^2}$$

me falta el $2n+2$ $\Rightarrow$ lo agrego.

$$= \frac{2\,(2n)!\,(2n+1)}{n!\;(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{n+1}$$

$$= \frac{2\,(2n)!\,(2n+1)\,(2n+2)}{}$$

$$h! \quad (h+1) \quad (h+1)!$$

$$= \frac{2\,(2h+2)!}{(h+1)!\,(h+1)!}$$

$$= \frac{2\,(2h+2)!}{(h+1)!\,(h+1)!}$$

Como queríamos probar

Por lo tanto $P(1), P(2), P(h) \Rightarrow P(h+1)$

Así, $P(n)$ es V, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$

28. En este ejercicio no hace falta usar inducción.

i) Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ $\left(\text{sug: } \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\right)$.

ii) Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

iii) Probar que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 4^n$ y deducir que $\binom{2n}{n} < 4^n$.

iv) Calcular $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$ y deducir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

i) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = \binom{2n}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{m-k}\cdot\binom{m}{m-k} = \binom{2m}{m}$$

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{\;}$$

29. Sea $X=\{1,2,\dots,20\}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación de orden en $\mathcal{P}(X)$ definida por:

$$A\mathcal{R}B \iff A-B=\emptyset$$

¿Cuántos conjuntos $A\in\mathcal{P}(X)$ cumplen simultáneamente $\#A\geq 2$ y $A\mathcal{R}\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$?

$A\mathcal{R}\{1,\dots,9\}$

La relación está dada por $A-B=\emptyset$. Es decir,
$A-B$ vacío TODOS los elementos de A están en B.

$B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Como es de orden sé que
$A\mathcal{R}B \wedge B\mathcal{R}A \Rightarrow A=B$.

Si en A tengo elementos que en B no, $A\not\mathcal{R}B$

Ej: $A=\{10\}$ $B=\{1,\dots,9\}$

$A-B=\{10\} \Rightarrow A\not\mathcal{R}B$

$A=\{1\}$ $\quad B=\{1,\dots,9\}$

$A\,R\,B$ pues $A-B=\emptyset \iff A\subseteq B$

Así, A debe tener solo elementos del 1 al 9 sea cual sea el subconjunto pues del 1 al 9, B los tiene a todos y siempre $A-B=\emptyset$.

$A=\{1\}$ $\quad A=\{1,2\}$ $\quad A=\{1,2,3\}$ $\quad A=\{2,3\}$ ...

Como solo tengo los que son $\#A\geq 2$

Calculo los que tienen $\#A\leq 1$ y hago complemento

$A=\{1\}$ $\quad A=\{\}$ $\quad A=\{2\}$ $\quad A=\{3\}$

10

9

$$\#A\leq 1 = \binom{9}{0}+\binom{9}{1}$$ ¿Cuantos son + y cuantos ×?

OPT 1:

TOTALES: #TOTAL (todos los subconjuntos ≥ 2 del 1 al 9)

$$\binom{9}{2}+\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\binom{9}{5}+\binom{9}{6}+\binom{9}{7}+\binom{9}{8}+\binom{9}{9}$$

OPT 2: $2^{9} - \binom{9}{0} + \binom{9}{1}$

↳ Pregunto x cada elemento si está o no.

OTRA FORMA: 2^9 es la cantidad de subconjuntos de 0, 1, ... 9 elementos de B. Solo saco los que tengan 0 o 1 el.

Ambas RTA están bien. En la primera solo contemplo los subconjuntos de n elementos hasta $n \geq 2$.
En la segunda calculo todos los posibles subconjuntos (2^9) que incluyen los de 0 el, 1 el y luego le resto los que tienen 0 o 1 elemento

30. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 5, 7, 8, 9, 10\}$, y sea $\mathcal{R}$ la relación de equivalencia en $\mathcal{P}(X)$ definida por:

$$A \mathcal{R} B \iff A \cap \{1,2,3\} = B \cap \{1,2,3\}.$$

¿Cuántos conjuntos $B \in \mathcal{P}(X)$ de exactamente 5 elementos tiene la clase de equivalencia $\overline{A}$ de $A = \{1,3,5\}$?

Como es de equivalencia sé que si ARB y BRA no necesariamente A = B.

$A = \{1, 10\}$ $\qquad B = \{1\}$

$$\{1,10\} \cap \{1,2,3\} = \{1\} \cap \{1,2,3\}$$

$$\{1\} = \{1\} \Rightarrow A \mathcal{R} B \text{ y } A \neq B.$$

Para que ARB, ambos deben tener $\underbrace{1, 2 \text{ o } 3}_{2}$ o $\underbrace{\text{ninguno tenerlos}}_{1}$

1) Ej: $A = \{10\}$ $\qquad B = \{9\}$

$A \mathcal{R} B$ pues $\{10\} \cap \{1,2,3\} = \{9\} \cap \{1,2,3\}$

$$\emptyset = \emptyset$$

2) $A = \{1,2\}$ $\quad B = \{1,2,8\}$

$A \mathcal{R} B$ pues $\{1,2\} \cap \{1,2,3\} = \{1,2,8\} \cap \{1,2,3\}$

$$\{1,2\} = \{1,2\}$$

$A \not\mathcal{R} B$ si no tienen 1, 2 o 3 en ambos al mismo tiempo.

$A = \{1,2\}$ $\quad B = \{3,4\}$

$\notin$

$$\{1,2\} \cap \{1,2,3\} = \{3,4\} \cap \{1,2\}$$

$$\{1,2\} = \emptyset \Rightarrow A \not\mathcal{R} B$$

$A = \{1,2\}$ $\quad B = \{1\}$

$A \not\mathcal{R} B$ pues $2 \notin B$.

$$\{1,2\} \cap \{1,2,3\} = \{1\} \cap \{1,2,3\}$$

$$\{1,2\} = \{1\} \Rightarrow A \not\mathcal{R} B$$

Entonces $A \mathcal{R} B$ si:

- A y B no tienen ningún elemento en común
- A y B tienen los mismos elementos de 1, 2 o 3 en igual cant.

Si $A = \{1\}$ el B debe tener al $\{1\}$.

Definición de clase de equivalencia:

$$[x] = \{ y \in A, yRx \}$$

$$= \{ y \in A / B \cap \{1,2,3\} = A \cap \{1,2,3\} \}$$

Entonces $\dot{A} = \{1,3,5\} \Rightarrow \{ y \in A / B \cap \{1,2,3\} = \{1,3,5\} \cap \{1,2,3\} \}$

$$B \cap \{1,2,3\} = \{1,3,5\} \cap \{1,2,3\}$$

$$\underbrace{B \cap \{1,2,3\} = \{1,3\}}$$

¿Cuántos B cumplen esto siendo $\#B = 5$?

Como fijo, B debe tener el 1 y el 3 para que $\{1,3\} \cap \{1,2,3\} = \{1,3\}$

$$\{1,3\} = \{1,3\}$$

pero como son del 5, ocupamos 1 y 3 y luego relleno con 3 cualquiera. OJO, excluyo el 2 xq uno

$\{1,2,3\} \cap \{1,2,3\} \neq \{1,3\}$

$$2^1 \cdot 1 \cdot \binom{7}{3}$$

EN CUBAWSKI es mismo razonamiento pero la RTA es $\binom{7}{3}$

¿ xq no reserva el 1 y el 3?

xq el 1 y el 3 deben estar, RTA: $\binom{7}{3}$

entonces si o si los 2 primeros tienen una opción. El 1 y el 3

Acá el orden no importa (conjunto). Por eso no posiciono el 1 y el 3 con uno combinatorio

31. Sean $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 100\}$ y $A = \{1\}$ ¿Cuántos subconjuntos $B \subseteq X$ satisfacen que el conjunto $A \Delta B$ tiene a lo sumo 2 elementos?

Estos ejercicios pensarlos x la condición. En este hay 3 casos ($\# A \Delta B = 0,1,2$)

$\{1\} \Delta B$ max 2 elementos acá

B: 1) Puede tener a $\{1\}$ y luego máximo 2 diff.

Puede no tener a $\{1\}$ y luego máximo 1 diff.

1)

$B = \{1,2,3\}$ $\qquad \{1\} \Delta \{1,2,3\} = \{2,3\}$

$B = \{1,2\}$ $\qquad \{1\} \Delta \{1,2\} = \{2\}$

$B = \{1\}$ $\qquad \{1\} \Delta \{1\} = \emptyset$

2)

$B = \{2\}$ $\qquad \{1\} \Delta \{2\} = \{1,2\}$

$B = \{5\}$ $\qquad \{1\} \Delta \{5\} = \{1,5\}$

$B = \{\emptyset\}$ $\qquad \{1\} \Delta \{\emptyset\} = \{1\}$

No vale: $B = \{5, 2\}$ pues $\#(\{1\} \Delta \{5,2\}) > 2$

No vale: $B = \{1, 4, 5, 6\}$ pues $\#(\{1\} \Delta \{1,4,5,6\}) > 2$

Caso 1: $\#A \Delta B = 0 \iff 1 \in B$ pues $\boxed{\#\{1\} \Delta \{1\} = \emptyset}$

$\boxed{1 \text{ op.}}$

Caso 2: $\#A \Delta B = 1 \iff 1 \notin B$ y $B \neq \emptyset \Rightarrow \boxed{\#A \Delta B = 2}$

¡ABS!

$\boxed{\text{Entra en el caso de } \#A\Delta B = 2.}$ $\Longrightarrow \binom{99}{1}$

$\#A \Delta B = 1 \iff 1 \in B$ y cualquier $n \leq 100 \in B$

$\binom{99}{1}$ excepto el 1

Caso 3: $\#A \Delta B = 2 \iff 1 \in B$ y cualquier $n \leq 100 \in B$

$\binom{99}{2}$ excepto el 1.

$\#A \Delta B = 2 \iff 1 \notin B$ y cualquier $n \leq 100 \in B$

$\binom{99}{1}$ excepto el 1.

$$1 + 2\binom{99}{1} + \binom{99}{2}$$