Ecuaciones Diofánticas y de Congruencia

1. Determinar, cuando existan, todos los $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ que satisfacen

i) $7a + 11b = 10$ ii) $20a + 16b = 36$ iii) $39a - 24b = 6$ iv) $1555a - 300b = 11$

Una ecuación diofántica tiene solución si $(a:b) | c$.

$7a + 11b = 10$ $(7:11) = 1$, ¿$1 | 10$? sí.

Coprimos

$7a + 11b = 10$

7 14 21 28 35 42 49 56 63 70

11 22 33 44 55 66 77 88 99

solución particular

$a = -8 \quad b = 6$

solución homogénea

$a = -11 \quad b = 7$

solución general

$(-8 - 11k ; 6 + 7k)$ con $k \in \mathbb{Z}$

VERIF: $k = 1$, $(-19 ; 13)$, $7(-19) + 11(13) = 10$ ✓

ii) $20a + 16b = 36$ $(20:16) = (2^2 . 5 : 2^4) = 2^2$, ¿$2^2 | 36$? sí

$5a + 4b = 9$

solución particular

$a = 1 \quad b = 1$

solución homogénea

$a = -4 \quad b = 5$

solución general

$(1 - 4k ; 1 + 5k)$ con $k \in \mathbb{Z}$

VERIF: $k=1$, $(-3;6)$, $5(-3)+4(6)=9$ ✓

iii) $39a-24b=6$ $\qquad (39:24)=(3.13:2^3.3)=3$, ¿$3|6$? sí

$13a-8b=2$

solución particular $\qquad$ solución homogénea

$a=2$, $b=3$ $\qquad$ $a=8$ $b=13$

solución general

$(2+8k;\ 3+13k)$ con $k\in\mathbb{Z}$

VERIF: $k=0$, $(2,3)$, $13(2)-8(3)=2$ ✓ ✓

iv) $1555a-300b=11$ $\qquad (5.311:2^2.3.5^2)=5$, ¿$5|11$? no.

no $\exists$ solución. ✓

2. Determinar todos los $(a,b)\in\mathbb{Z}^2$ que satisfacen simultáneamente $4\mid a$, $8\mid b$ y $33a+9b=120$.

$33a+9b=120$ $\qquad (33:9)=(3.11:3^2)=3$, ¿$3|120$? sí

COPRIMIZO

$11a+3b=40$

11 22 33 44 55 66 77 88

3 6 9 12 15 18 21 24 27 30

33 36 39 42 45 48 51 54 57

solución particular

$a=2$, $b=6$

solución homogénea $\qquad$ solución general:

$a=3$, $b=-11$ $\qquad$ $(\underbrace{2+3k}_{a};\ \underbrace{6-11k}_{b})$ con $k\in\mathbb{Z}$

$4 \mid 2+3K$, $2+3K \,(4) \iff 2-K\,(4) \iff -K \equiv -2\,(4) \iff K \equiv 2\,(4)$

$\Rightarrow K = 4q+2$

$8 \mid 6-11K$, $6-11K \underset{(8)}{\equiv} 6+5K\,(8) \iff 5K \equiv -6\,(8) \iff \overset{\cdot 3,\, 3\cdot 8}{5K} \equiv 2\,(8)$

$\iff -K \equiv 6\,(8)$

$\iff K \equiv 2\,(8)$

$\Rightarrow K = 8q+2$

Luego, $4/8$, x lo tanto $\overset{K\equiv 2(8)}{\Uparrow}\ 2 \equiv 2\,(4)$ luego, $K = 8q+2$

Ent, $(2+3(8q+2);\ 6-11(8q+2)) = (8+24q;\ -16-88q)$ con $q \in \mathbb{Z}$

OBS: Como ambas condiciones deben cumplirse al mismo tiempo en el mismo valor de K.

VERIF: $q=0$, $\overset{4|a}{\widetilde{4 \mid 8}}$, $\overset{4|b}{\widetilde{8 \mid -16}}$ ✓, $33(8)+9(-16)=120$ ✓ Cumplimos las 3 COND. ✓

3. Si se sabe que cada unidad de un cierto producto A cuesta 39 pesos y que cada unidad de un cierto producto B cuesta 48 pesos, ¿cuántas unidades de cada producto se pueden comprar gastando exactamente 135 pesos?

→ CANT UNIDADES

$39a + 48b = 135$ $\quad (39:48) = (3.13 : 2^4 . 3) = 3$, ¿ $3 \mid 135$? ✓

Coprimizo,

$13a + 16b = 45$ $\quad$ 13 26 39 52

16 32

solución particular

$a = 1,\ b = 2$

solución homogénea

$a = -16 \quad b = 13$

solución gral

$(1-16K;\ 2+13K)$

Luego, verif: $K=1$, $(-15;15) \Rightarrow 39(-15)+48(15)=135$

4. Hallar, cuando existan, todas las soluciones de las siguientes ecuaciones de congruencia:

i) $17X \equiv 3\ (11)$ ii) $56X \equiv 28\ (35)$ iii) $56X \equiv 2\ (884)$ iv) $78X \equiv 30\ (12126)$

i) $17x \equiv 3(11)$ ¿$(17:11) | 3$? sí $1|3$. $17x \equiv 3(11) \Leftrightarrow 17x = 11q + 3$

$17x - 11q = 3$

$6x \equiv 3(11) \overset{\cdot 2,\ 2\perp 11}{\Leftrightarrow} x \equiv 6(11)$

ii) $56x \equiv 28(35) \Leftrightarrow 21x \equiv 28(35)$ $(21:35) = 7$, $7 | 28$ ✓

$\overset{/7}{\Leftrightarrow} 3x \equiv 4(5) \overset{\cdot 2,\ 2\perp 5}{\Leftrightarrow} 6x \equiv 8(5) \Leftrightarrow x \equiv 3(5)$

iii) $56x \equiv 2(884)$ $(56:884) = (2^3 . 7 : 2^2 . 13 . 17) = 2^2$, ¿$2^2 | 2$? No.

No ∃ solución

iv) $78x \equiv 30(12126)$ $(78:12126) = (2.3.13 : 2.3.2021) = 6$, ¿$6|30$? sí

$13x \equiv 5(2021) \overset{\cdot 156}{\Leftrightarrow} 7x \equiv 780(2021) \overset{\cdot 289}{\Leftrightarrow} 2x \equiv 1089(2021) \overset{\cdot 1011}{\Leftrightarrow}$

$x \equiv 1555(2021)$

$b = 5k + 2a$

5. Hallar todos los $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tales que $b \equiv 2a \pmod 5$ y $28a + 10b = 26$.

$28a + 10b = 26$ $(28:10) = (2^2.7 : 5.2) =$ ¿$2 | 26$? sí

$14a + 5b = 13$ 14 28 42

5 10 15 20 25

solución particular solución homogénea

$a = 2,\ b = -3$ $a = -5$ $b = 14$

$7 | a$

$5 | b$

$a \equiv 0 (7)$

solución fnl

$(\underbrace{2-5K}_{a};\ \underbrace{-3+14K}_{b})$

$b \equiv 0\,(5)$

$b = 5K$

$a = 7K$

$b \equiv 2a\,(5) \iff -3+14K \equiv 2(2-5K)\,(5)$

$\Rightarrow -3+14K \underset{(5)}{\equiv} 4-10K \iff 24K \equiv 7\,(5) \iff -K \equiv 7(5) \iff K \equiv 3(5)$

Ent, $(2-5(5K+3);\ -3+14(5K+3)) = (-13-25K;\ 39+70K)$

VERIF: $K=0$, $(-13;\ 39)$ $\quad 14(-13)+5(39) = 13$ ✓

$39 \equiv 2(-13)\,(5) \iff 39 \equiv -26\,(5) \iff 4 \equiv 4(5)$ ✓

Por lo tanto cumplimos todas las condiciones

6. Hallar el resto de la división de un entero a por 18, sabiendo que el resto de la división de $7a$ por 18 es 5.

$r_{18}(a) = ?$ $\qquad r_{18}(7a) = 5.$

$7a \equiv 5\,(18) \overset{\cdot 5}{\iff} -a \equiv 7(18) \iff a \equiv 11(18)$

$18K+11 \underset{(18)}{\equiv} 11\,(18)$

Luego, el resto de dividir a por 18 es 11.

7. Hallar todas las soluciones $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de la ecuación

$$110x + 250y = 100$$

que satisfacen simultáneamente que $37^2 \mid (x-y)^{4321}$.

$110x + 250y = 100$ $\qquad (110:250) = (2.5.11 : 2.5^3) = 10$, ¿$10|100$? ✓

Coprimizo

$11x + 25y = 10$

11 22 33 44 55 66 77 88 99 110 121

25 50 75 100 125

Solución particular

$x = 10 \quad y = -4$

Solución final

Solución homogénea

$11x + 25y = 0$

$x = 25, \; y = -11$

$$(\underbrace{10 + 25k}_{x} ; \underbrace{-4 - 11k}_{y})$$

Luego, $37^2 \mid (x-y)^{4327}$

Como 37 es primo y $2 < 4327$ vale que

$37 \mid (x-y)$.

Entonces,

$$37 \mid (10 + 25k - (-4 - 11k))$$

$$\Downarrow$$

$$14 + 36k \underset{(37)}{\equiv} \overbrace{14 - k}^{-k \equiv -14(37)} \;(37) \iff k \equiv 14 (37) \Rightarrow k = 37q + 14$$

con $q \in \mathbb{Z}$

Por lo tanto,

$$(10 + 25(37q + 14) ; -4 - 11(37q + 14))$$

$$\Updownarrow$$

$$(360 + 925q \; ; -158 - 407q)$$

Verif:

$q = 0, \; (360 ; -158) \iff 37 \mid (360 - (-158))$

$\iff 37 \mid 518$ ✓ ✓

$$110x + 250y = 100$$

$$110(360) + 250(-158) = 100 \ \checkmark \checkmark$$

8. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ para los cuales $(2a-3 : 4a^2+10a-10) \neq 1$.

$d = (2a-3 : 4a^2+10a-10)$

Por prop del MCD sé que $d \mid 2a-3 \wedge d \mid 4a^2+10a-10$

y $d \mid (2a-3) \pm (4a^2+10a-10)$ por prop de divisibilidad

$d \mid \overbrace{2a(2a-3)}^{4a^2-6a} - (\cancel{4a^2}+10a-10) \Rightarrow d \mid -16a+10$

$\Rightarrow d \mid \overbrace{8(2a-3)}^{16a-24} + (-16a+10) \Rightarrow d \mid -14 \iff d \mid 14$

Luego, $d \in Div_+(14) = \{1; 2; 7; 14\}$ pero necesito que 2, 7 o 14 divida.

Caso 2:

a	0	1
$2a-3$	1	1
$4a^2+10a-10$	0	0

MOD 2

Luego, 2 no divide.

$2a-3 \overset{\cdot 4}{\underset{(7)}{\equiv}} 0\ (7) \iff a \equiv -16\ (7)$

$\iff a \equiv 5\ (7)$

Caso 7:

$\wedge =$

a	0	1	2	3	4	$\boxed{5}$	6
$2a-3$	4	6	1	2	5	$\boxed{0}$	2

MOD 7

$4a^2+10a-10 \mid 4$ $\boxed{0}$

Luego, 7 divide si $a \equiv 5(7)$.

Caso 14: no es necesario pues $14 = 7 \cdot 2$ y 2 no divide.

Por lo tanto los únicos a tales que el MCD $\neq 1$ son los $a \equiv 5(7)$.

9. Describir los valores de $(5a+8 : 7a+3)$ en función de los valores de $a \in \mathbb{Z}$.

Tengo que decir los MCD según los a.

$d = (5a+8 : 7a+3)$, Por prop del MCD, $d \mid 5a+8 \wedge d \mid 7a+3$

$d \mid \underbrace{7(5a+8)}^{35a+56} \underbrace{-5(7a+3)}^{-35a-15} \Rightarrow d \mid 41$, luego, los posibles d son los $Div_+(41) = \{1, 41\}$

Caso 41:

- $5a+8 \equiv ?(41) \Leftrightarrow 5a \equiv -8(41) \Leftrightarrow 5a \overset{\cdot 8}{\equiv} 33(41)$

$\Leftrightarrow -a \equiv 264(41) \Leftrightarrow \boxed{a \equiv 23(41)}$

- $7a+3 \equiv ?(41) \overset{\cdot 6}{\Leftrightarrow} a \equiv -18(41) \Leftrightarrow \boxed{a \equiv 23(41)}$

$a = 41k + 23, \; k = 0, \; a = 23$

$$7(23) + 3 \equiv 0(41) \quad \wedge \quad 5(23) + 8 \equiv 0(41)$$

(41)

Luego, si $a \equiv 23(41)$ el MCD es 41, si $a \not\equiv 23(41)$ el MCD es 1.

OBS: Cuando el número es MUY GRANDE (MOD) hacemos congruencia. Cuando la a nos quede sola, la metemos en ambas ecuaciones y deberían dar resto 0.

(Ejercicio MCD sin potencias)