Entonces, $2^{k+3} \geq 2^{k+2}$ y esto es verdadero.

Desarrollo $\cancel{2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \leq \cancel{2} - \frac{1}{k+1}$

$$-\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \leq -\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\frac{-(1)(k+1)+k}{k(k+1)} \leq -\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\frac{-1}{k(k+1)} \leq -\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\frac{1}{k(k+1)} \overset{\cdot(-1)}{\geq} \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\frac{1}{k^2+k} \geq \frac{1}{k^2+2k+1}$$

$$k^2+2k+1 \geq k^2+k$$
$$k+1 \geq 0$$

Probamos que para $k \geq 2$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Por lo tanto $P(n)$ V, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

3. [2.5 ptos] Calcular el resto de dividir

$$\sum_{k=4}^{134}(k! + k^3) \Rightarrow$$

por 7.

Empiezo desde $k=0$ (agrego los términos, veo cuales completan y luego resto $k=0$ hasta $k=3$)

Como debo dividir por 7, hay solo 7 restos posibles.

Mod 7: restos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$$\sum_{k=4}^{134} k! + k^3 = \sum_{k=4}^{134} k! + \sum_{k=4}^{134} k^3$$

- Si $k=4$, $4! = 24 \bmod 7 = 3$

  $k=5$, $5! = 120 \bmod 7 = 1$

  $k=6$, $6! = 720 \bmod 7 = 6$

  $k=7$, $7! = 5040 \bmod 7 = 0$

  $k=8$, $8! = 40320 \bmod 7 = 0$

A partir de 7!, el resto será 0 xq siempre serán múltiplos de 7.
O sea, $7! = 7.6\ldots$, $8! = 8.7\ldots$
Y en el caso del MOD sería
$8 \bmod 7 \cdot 7 \bmod 7 = 1 \cdot 0 = 0$
Así con los demás

$$\sum_{k=4}^{134} k! \bmod 7 = 10 \bmod 7 = 3.$$

- $\sum_{k=4}^{134} k^3 =$

r	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3	10^3
0				•			
1	•				•	•	
2							
3							
4							
5							
6		•	•				•

Va cambiando el resto cada dos.

se empieza a repetir

K	0	1	2	3	4	5	6	7
$K^3 \bmod 7$	0	1	1	6	1	6	6	0

Ahora, yo tengo hasta $K=134$ y $K=0,1,2,3$ no los tengo.

Si tengo desde el 0 al 134, si cada 7 se repite la secuencia tengo. $7 \cdot$ CANT VECES $- K \in \{0,1,2,3\}$

$$7\cdot(0+1+1+6+1+6+6) - \overbrace{(0+1+1+6)}^{K=0\ \ K=1\ \ K=2\ \ K=3} \bmod 7$$

$$7(21) - 8 = 139 \bmod 7 = 6 \bmod (7)$$!! MAL. sería 0.

Entonces $r_7\left(\sum_{K=4}^{134} K! \cdot K^3\right) = 3$

El problema es que desde 4 a 134, no tengo secuencias del 0 al 7 completas.

Pero eso, $(134-7)+1 = 128$ (secuencias entre $K=7$ y 134)

Entonces secuencias enteras tengo $\left(\frac{128}{7}\right) = 18$.

4. **[2.5 ptos]** Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 7$ y $b \equiv 1\ (3)$. Hallar los posibles valores de $(63a - b^2 : 42)$ y dar un ejemplo para cada caso

1) COPRIMIZO   2) si tengo uno fijo (42) factorizo los primos

3) luego de coprimizar veo si algún primo que forma el 42 divide a $63a'-b'^2$

4)

$$b \equiv 1(3) \Rightarrow \overbrace{b = 3k+1}^{\text{FORMA DE } b} \quad \text{o sea } r_3(b) = 1$$

$a = 1$

$b = 1$

El MCD entre a y b es 7, es decir $7 | a$ y $7 | b$.

$d | 42$

$a = 7a' \quad b = 7b'$

42	2
21	7
3	3
1	

$$(\underbrace{63(7a') - (7b')^2}_{} : 42)$$

$$(63 . 7 . a' - 7^2 . b'^2 : 42)$$

$$(9 . 7 . 7 . a' - 7^2 . b'^2 : 42)$$

$* \rightarrow (c a : c b) = |c| . (a : b)$

$$7 \, (9 . 7 . a' - 7 . b'^2 : 6)$$

$$d' = (9 . 7 . a' - 7 . b'^2 : \underbrace{6}_{2 . 3})$$

$\times$ el 3 no puede dividir al mcd porque $63a - b^2 \not\equiv 0 \bmod 3$ luego d no puede ser múltiplo de 3.

$$63a' - b'^2 \underset{(3)}{\equiv} 0 - 1^2 \bmod 3$$

$$\underset{(3)}{\equiv} -1 \bmod 3 *.$$

$\Rightarrow 3 \nmid 63a' - b'^2$ luego no puede ser

$b \equiv 1 (3)$

$b' \equiv 1 (3)$

el 2. El 7 vale siempre, trivio en ambos

$7b \equiv 1\ (\ )$

$b' \equiv 2\ (3)$

CASO 2:

$$6 \mid 3a' - b'^2 \underset{(2)}{\equiv} a' - b'^2 \equiv a' - b' \underset{(2)}{\equiv} a - (3k+1) \underset{(2)}{\equiv}$$

$b'^2 \equiv b$ $\Rightarrow$

$k \in \mathbb{Z}$

$a' \perp b'$

(Busco k y luego a para que $a - (3k+1) \equiv 0\ (2)$

Luego, como 2 $\nmid$ el MCD xq $b' = 3k+1$ y $a' \perp b'$ ent

el valor del MCD hijo me queda $7 \mid MCD'$

según lo como de MCD hay casos, hi hay $2 \mid MCD'$

Si $d = 7 . MCD_1$, sii.. $d = 7. MCD_2$, sii...

Creo la cond voy adelante, luego salió, vuelvo y tengo cond.

Ejercicio 2. Probar que para todo $n \geq 3$ vale que $4^n - 3^n > 2n^2$.

→ dado por $6 - 3k + 1$

Caso $d = 2.7$ $a = 1, b = 1$

Caso $d = 7$ $a = 2, b = 1$

Ejercicio 3. Hallar todos los $a \in \mathbb{N}$ tales que $3a + 6 | a^2 + 11$.

C.B: $n = 3$, $4^3 - 3^3 > 2(3)^2 = 37 > 18$.

P.I: Sea $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$, quiero ver que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

- Hi: $4^k - 3^k > 2k^2$
- QPQ: $4^{k+1} - 3^{k+1} > 2(k+1)^2$ $2(k^2 + 2k + 1) = 2k^2 + 4k + 2$

Estoy acotando x algo más chico, lo que le haga siempre será mayor.

$$4^k . 4 - 3^k . 3 > 4^k . 4 - 3^k . 4 > 4(4^k - 3^k) \overset{Hi}{>} 4 . 2k^2$$

$$= 4 . 2k^2 = 8k^2$$

$$8k^2 > 2k^2 + 4k + 2$$

$$6k^2 - 4k - 2 > 0$$

$$2(3k^2 - 2k - 1) > 0$$

$2\left((3k+1)(k-1)\right) > 0$ y esto es V para todo $k > 0$

pues si $k=3$, $3(7.1) = 21 > 0$.

Como queríamos probar, $P(k)$ V $\Rightarrow P(k+1)$ V con $k \geq 3$

Por lo tanto $P(n)$ es V, $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

$$\frac{a^2+11}{3a+6}$$

Por prop de divisib vale que $d \mid a \pm 6$

$d \mid (-3)(a^2+11) + a(3a+6) \Rightarrow d \mid -33+6a \Rightarrow d \mid (6a-33) \cdot (-2)(3a+6)$

$\Rightarrow d \mid -45$ y como los Div del 45 son iguales a los del $-45 \Rightarrow$

$d \mid 45$. $\quad 45 = 3^2 . 5$

Los posibles a son los $Div_+(45) = \{3, 9, 5\}$

5) Determinar los valores posibles de $d = (a^2 + 3a + 2 : 3a^3 + 5a^2)$ para cada $a \in \mathbb{Z}$. Para cada uno de los valores hallados de d, exhibir un valor de a para el cual el máximo común divisor sea d.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

Como d es el MCD, vale que

$d = (3a^3+5a^2 : a^2+3a+2)$

$d \mid 3a^3+5a^2 \wedge d \mid a^2+3a+2$

$$d \mid (3a^3+5a^2) - \overbrace{(3a)(a^2+3a+2)}^{-3a^2-9a^2-6a} \Rightarrow d \mid (\cancel{-4a^2}-6a) + \overbrace{(4)(a^2+3a+2)}^{4a^2+12a+8}$$

$\Rightarrow d \mid a(6a+8) - 6(a^2+3a+2)$

$\Rightarrow d \mid -18a+8a-12 \Rightarrow d \mid -10a-12$

$\Rightarrow d \mid 6a+8 -10a-12$

$\Rightarrow d \mid -4a-8 \Rightarrow d \mid 4(6a+8)+6(-4a-8)$

$\Rightarrow d \mid 32-48 \Rightarrow d \mid 12$

Para a par y a impar

$Div_+(12) = \{\cancel{1}; 2; \cancel{3}; 4; \cancel{6}; \cancel{12}\}$ si $2 \mid d$, descarto los impares menores.

- Descarto Casos: Quiero ver si $2 \mid d$.

a = PAR

$a^2+3a+2 \equiv 0 \ (2)$

$3a^3+5a^2 \equiv 0 \ (2)$

a IMPAR

$a^2+3a+2 \equiv 0 \ (2)$

$3a^3+5a^2 \equiv 0 \ (2)$

Los impares los descarto pues sin importar como sea a, siempre $2 \mid d \rightarrow d$ es par

Ahora como 4 está formado por 2^2,

si $2 \mid d$ pero puede que el 4 no.

- Pruebo si $3 \mid d$, restos 0, 1, 2: si $3 \nmid d$ descarto el 6 (3.2) y el 12 $(2^2.3)$

nótese que tiene sentido descartar el 6 y el 12 xq el 3 se forma con 3.2, el 2 vale siempre, osea $2|d$ pero si $3\nmid d$ no puede formar el 6 con primos diferentes. El 12 lo mismo, está formado por $2^2.3$, si $2\nmid d$ jamás armaríamos el 12, pero como $2|d$ tengo que ver que $2^2|d \wedge 3|d$

r	a^2+3a+2	$3a^3+5a^2$	(MOD 3)
0	2 →	0	este no importa
1	0	2	porque $3\nmid a^2+3a+2$
2	0	8	

3 nunca divide a d. Por lo tanto descarto el 6 y el 12.

- Pruebo $2^2|d$

r	a^2+3a+2	$3a^3+5a^2$	MOD 4
0	2	0	
1	2	0	
2	0	0	→ solo vale este
3	0	2	

En este momento me quedan 2 casos:

- Cuando $a \equiv 2\ (4)$ decimos que $4|d$

  $\Rightarrow d = 4$.

- Cuando $a \not\equiv 2\ (4)$ decimos que $4\nmid d \Rightarrow d = 2$.

"sobreviven" el 2 y el 4. El 2 vale siempre, pero el 4 vale si y solo si $a \equiv 2(4)$.

Entonces $a \equiv 2(4)$ incluye el 2 y el 2^2 pero los demás casos $(a \not\equiv 2(4))$ quedan con $2|d \Rightarrow d = 2$.

Busco los valores de a:

- $a = 6$, $6 \equiv 2(4) \Rightarrow (6^2 + 3(6) + 2 : 3(6)^3 + 5(6)^2)$

$$\Rightarrow (56 : 828)$$

$$\Rightarrow (8.7 : 2^2.3^2.23)$$

$$\Rightarrow (2^3.7 : 2^2.3^2.23)$$

$$\Rightarrow 2^2$$

Faltaría $a \not\equiv 2(4)$

- $a = 1$ $(1+3+2 : 3+5) = (6 : 8)$

$$= (2.3 : 2^3)$$

$$\Rightarrow 2$$

(de la guía, los 35 ii) $(2^K + 5^{K+1} : 2^{K+1} + 5^K) = 39$

o sean $(a:b) = 5$

$(ab : 5a - 10b)$

2) Probar que

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^3} \leq \frac{3}{8} - \frac{1}{n^2}$$

para todo $n \geq 2$.

Caso base: $n = 2$

$$\sum_{i=2}^{2} \frac{1}{i^3} \leq \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \leq \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \leq \frac{1}{8} \checkmark$$

PI: Sea $K \in \mathbb{N}$ fijo.

· Hi: $\displaystyle\sum_{i=2}^{K} \frac{1}{i^3} \leq \frac{3}{8} - \frac{1}{K^2}$

· QPQ: $\displaystyle\sum_{i=2}^{K+1} \frac{1}{i^3} \leq \frac{3}{8} - \frac{1}{(K+1)^2}$

$$\sum_{i=2}^{K+1} \frac{1}{i^3} = \underbrace{\sum_{i=2}^{K} \frac{1}{i^3}}_{\leq \frac{3}{8} - \frac{1}{K^2}\ \text{Hi}} + \frac{1}{(K+1)^3} \overset{\text{Hi}}{\leq} \frac{3}{8} - \frac{1}{K^2} + \underbrace{\frac{1}{(K+1)^3}}_{\text{Aux}}$$

Aux: $\displaystyle\frac{1}{(K^2+2K+1).(K+1)} = \frac{1}{K^3+K^2+2K^2+2K+K+1} = \frac{1}{K^3+3K^2+3K+1}$

$$= \frac{(3K^3+3K+1)(-1)+1}{K^3+3K^2+3K+1} = \frac{-3K^3-3K}{K^3+3K^2+3K+1} = \frac{-3K(K^2+1)}{(K+1)^3}$$

1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 30\}$. En $P(X)$ se define la relacion R de la forma:

$$A\ R\ B \Leftrightarrow 2 \notin A \cap B^c$$

a) Determinar si R es una relación reflexiva, simétrica, antisimétrica y/o transitiva.
b) Cuántos conjuntos $B \in P(X)$ satisfacen $\{2,6\}\ R\ B$

Si $2 \notin \widetilde{A \cap B^c}$ $\quad A \cap B^c = (A - B)$ Osea $2 \notin (A-B)$ osea 2 no está en A.

(R) R es reflexiva sii $\forall a \in P(X)$ aRa.

$$ARA \iff 2 \notin (A - A)$$
$$\iff 2 \notin \emptyset \quad \checkmark$$

Como $2 \notin \emptyset$ es cierto, R es reflexiva $\forall a \in P(X)$.

(S) R es simétrica si y solo si $ARB \Rightarrow BRA$

Busco que $ARB \not\Rightarrow BRA$

$A = \{3\} \qquad B = \{1, 4, 2\}$

$ARB \iff 2 \notin \{3\} - \{1,4,2\}$ $\qquad$ $BRA \iff 2 \notin \{1,4,2\} - \{3\}$

$\iff 2 \notin \{3\} \checkmark$ $\qquad$ $\iff 2 \notin \{1,4,2\}$ y esto es falso.

Hallamos un contraejemplo.
R no es simétrica.

(AS) R es antisimétrica si $ARB \wedge BRA \Rightarrow A = B$

La idea sería buscar un $ARB \wedge BRA$ pero $A \neq B$.

$A = \{3,4\} \qquad B = \{5,6\}$

$ARB \iff 2 \notin \{3,4\} - \{5,6\}$ $\qquad$ $BRA \iff 2 \notin \{5,6\} - \{3,4\}$

$\iff 2 \notin \{3,4\} \checkmark$ $\qquad$ $\iff 2 \notin \{5,6\} \checkmark$

Hallamos un Contraejemplo. Vale que $ARB \wedge BRA$ y $A \neq B$.

Por lo tanto R NO es Antisimétrica.

(T) R es transitiva si $ARB \wedge BRC \Rightarrow ARC$.

$ARB \Leftrightarrow 2 \notin A-B$
$BRC \Leftrightarrow 2 \notin B-C$
$ARC \Leftrightarrow 2 \notin A-C$.

Es Transitiva. Si $2 \notin A-B$ osea $2 \notin A$ $\wedge$ $2 \notin B-C$ osea, $2 \notin B$
Como $2 \notin A-C$, entonces $2 \notin A$.

R es transitiva

Preguntar si está bien. Faltan Considerar $2 \in A$ y $2 \in B$.

b) $A = \{2,6\}$

$ARB \Leftrightarrow 2 \notin A-B$ osea $\{2,6\} R B \Leftrightarrow 2 \notin \{2,6\} - B$

Por definición de la diferencia sabemos que siempre, el Conjunto $\{2,6\}$ en este Caso SIEMPRE tendrá al 2 por lo tanto para que ARB necesito poner al 2 SI O SI en B, y luego Completar Con Cualquiera pues el ÚNICO elemento que va a quedar en A es el 6 A MENOS que B tenga al 6 pero no nos IMPORTA xq
Ej: $2 \notin \{2,6\} - \{2,6\} \Rightarrow 2 \notin \emptyset$ y es V.

Pongo al 2 en B, luego Todos elem restantes de X pueden estar o no en B pero si o si el 2 debe $\in$ a B.

$1 \cdot 2^{29}$

2. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tal que:

$$a_0 = 2 \quad a_{n+1} = \frac{1+3^{n+1}}{2} + \sum_{i=0}^{n} a_i \quad \text{con } n \in \mathbb{N}_0$$

Probar que $a_n \le 3^n + 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Caso base: $n=0$ $\quad a_0 \le 3^0 + 2^0 = 2 \le 2$

P.I: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo quiero ver que $P(0), P(1) \dots P(k) \Rightarrow P(k+1)$

· Hi: $a_k \le 3^k + 2^k \qquad \forall k, 0 \le k \le h$

· QPQ: $a_{h+1} \le 3^{h+1} + 2^{h+1}$

Pero por def de la sucesión

$$\frac{1+3^{h+1}}{2} + \sum_{k=0}^{h} a_k \overset{Hi}{\le} \frac{1+3^{h+1}}{2} + \sum_{k=0}^{h} 3^k + 2^k$$

$$\sum_{k=0}^{h} 3^k + \sum_{k=0}^{h} 2^k \Rightarrow \text{Por serie geométrica.} \quad \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$$\sum_{k=0}^{h} 3^k = \frac{3^{h+1}-1}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{h} 2^k = 2^{h+1} - 1$$

Ent: $1 + 3^{h+1} \quad + \quad -1 + 3^{h+1} \quad + \quad 2^{h+1} - 1$

$$2 \qquad\qquad 2$$

$$= \frac{\cancel{2}\cdot 3^{k+1}}{\cancel{2}} + 2^{k+1} - 1$$

$$= 3^{k+1} + 2^{k+1} - 1 \le 3^{k+1} + 2^{k+1}$$

Y esto es obvio pues $3^{k+1} + 2^{k+1}$ está de ambos lados y se resta 1 al de la izq.

El caso base sería $k=0$ pero vale, $3^1 + 2^1 - 1 \le 3+2$

$$\Downarrow$$

$$4 \le 5.$$

Por lo tanto, vale que $P(0), P(1) \dots P(k) \Rightarrow P(k+1)$ $\forall$ con $0 \le k \le k$.

Así, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$

PREGUNTAR si justifiqué bien.

Sino... $2^{k+1} + 3^{k+1} - 1 \le 2^{k+1} + 3^{k+1}$

$$-1 \le 0 \quad = \quad 0 \ge -1.$$

3) Daniel define una función $f: \{1,2,3,\dots,12\} \to \{1,2,3,\dots,21\}$ que cumple simultáneamente:

- Es inyectiva
- $21 \in \mathrm{Im}(f)$
- $f(n) + n$ es par para todo $n = 1, \dots, 12$

¿Cuántas posibles funciones f bajo estas condiciones puede definir Daniel?

1) IMPARES PARES

2) VALOR | CANT OPC.

1	11	11	11	1	2
2	10	10		3	4
3	10	11	10	5	6
4	9	10		7	8
5	9			9	10
6	8			11	12
7	8			13	14
8	7			15	16
9	7			17	18
10	6			19	20
11	6			21	
12	5				

3)

$[6 \to 21$

10

9

8

7

6

10

9

8

7

6

5

RTA: (6.10.9.8.7.6) (10.9,8.7.6.5)

Mariano primero miró lo se $f(m)+m$ es par

Obs: m IMPAR, $f(m)$ IMPAR + m IMPAR = PAR

m PAR, $f(m)$ PAR + m PAR = PAR

INY y $f(m)+m$ es PAR

1 11 · IMPARES

2 10 · PARES

3	10
4	9
5	9
6	8
7	8
8	7
9	7
10	6
11	6
12	5

Ej: $\underbrace{\text{1 tiene 11 OPCIONES}}$ $\underbrace{f(n)+n \text{ es par}}$

↳ 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21

Ahora, cuando 1 va a alguno (Ej: 1→1 osea 1+1=2)
el $\underbrace{\text{3 tiene 10 OPC.}}_{\text{INY (se van quitando)}}$

Ahora, me falta que el $21 \in Im(f)$.

Como el 21 es impar, impar + impar = PAR
osea q' si o si a un impar lo
mando al 21.

El 21 puede elegir con cualquiera de los 6
impares que hay del 1 al 12.

Ent: IMPARES: 6 → $21 \in Im(f)$ | PARES: 10

IMPARES	PARES
6	10
10	9
9	8
8	7
7	6
6	5

3. Determinar cuántas $f = \{1, 2, 3, \ldots, 8\} \to \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$ satisfacen simultáneamente las condiciones:

a) f inyectiva
b) $f(1) \leq 6$
c) $f(5) + f(6) = 10$

4. Se define por recurrencia la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$:

$$a_1 = 6 \quad a_2 = -8$$

$$a_{n+2} = 4^{2n+1} \cdot a_{n+1} + 15^{n+1} \cdot a_n + 7n - 7 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n \equiv n (\text{mod } 5) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) Primero veo que $f(1) \leq 6$ pero $f(5)+f(6)$ me da más info.

Como en f hay 8 números (1 al 8), tengo q ubicar el 2do en base al primero.

Primero, reservo el $f(1)$ con alguno menor o igual a 6.

$6 \Rightarrow$ Cant. opciones que tiene $f(1)$ (1 al 6)

Ahora, en f me quedan 7 para usar y 11 en el codominio

$f(5)+f(6)=10$

Por combinaciones: $(5,6) \downarrow (2,8)=10$ | $(5,6) \downarrow (3,7)=10$ | $(5,6) \downarrow (4,6)=10$ | $(5,6) \downarrow (5,5)=10$ | $(5,6) \downarrow (6,4)=10$

$(5,6) \downarrow (7,3)=10$ | $(5,6) \downarrow (8,2)=10$

Luego, al ser simétrica la suma, pueden ser al revés, osea: $7.2 = 14$ casos donde $f(5)+f(6)=10$, pero tengo que eliminar 2 casos, porque se está usando el caso de $f(1)$, es decir, lo estaría contando demás.

Ent, $6 \cdot (6.2) = 6(12)$

3. Determinar cuántas $f = \{1,2,3,\ldots,8\} \to \{1,2,3,\ldots,12\}$ satisfacen simultáneamente las condiciones:

a) f inyectiva
b) $f(1) \leq 6$
c) $f(5)+f(6)=10$

4. Se define por recurrencia la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$:

$$a_1 = 6 \quad a_2 = -8$$

$$a_{n+2} = 4^{2n+1} \cdot a_{n+1} + 15^{n+1} \cdot a_n + 7n - 7 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n \equiv n (\text{mod } 5) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4) $a_1 = 6,\ a_2 = -8$

$$a_{n+2} = 4^{2n+1} \cdot a_{n+1} + 15^{n+1} \cdot a_n + 7n - 7$$

$$P(n): a_n \equiv n\,(5)$$

2 Casos base pues a_{n+2} está definido por a_{n+1} y a_n.

Caso base:

$n=1,\ a_1 \equiv 1(5) \iff 6 \equiv 1(5) \iff 1 \equiv 1(5)$ ✓

$n=2,\ a_2 \equiv 2(5) \iff -8 \equiv 2(5) \iff 2 \equiv 2(5)$ ✓

P.I: Sea $k \in \mathbb{N}_0$, qpq $P(1), P(2), \dots, P(k), P(k+1) \Rightarrow P(k+2)$

· HI: $a_k \equiv k\,(5)$ $\quad a_{k+1} \equiv (k+1)(5)$

· QPQ: $a_{k+2} \equiv (k+2)(5)$

Pero por def de la sucesión

$$a_{k+2} \equiv 4^{2k+1} \cdot a_{k+1} + 15^{k+1} \cdot a_k + 7k - 7$$

$$\underset{(5)}{\equiv} (-1)^{2k+1} \cdot a_{k+1} + 0^{k+1} \cdot a_k + 2k + 3$$

$$\overset{HI}{\underset{(5)}{\equiv}} (-1)^{2k+1} \cdot (k+1) + 2k + 3$$

siempre par (+) => 1

$$\equiv (-1)^{\underbrace{2k}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\text{IMPAR} \Rightarrow -1} (k+1) + 2k + 3$$

$$\equiv (1 \cdot -1) \cdot (k+1) + 2k + 3$$

$= (h+2)(s)$ ✓

Como queríamos probar, vale que $P(1), P(2), \ldots, P(h), P(h+1) \Rightarrow P(h+2)$

Por lo tanto, vale que $P(1), P(2), \ldots P(m). P(m+1) \Rightarrow P(m+2)$ V
$\forall m \in \mathbb{N}_0$.

Álgebra I

Segundo Cuatrimestre - Primer parcial - 10/10/2017

1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 10\}$ Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ definida por:

$$(A,B)\mathcal{R}(C,D) \text{ si } A \triangle B \subseteq C \triangle D.$$

   a) Decidir si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

   b) Sean $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{3,4,5,6,7,8\}$. Hallar la cantidad de elementos $(C,D) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ tales que $(A,B)\mathcal{R}(C,D)$.

2. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(1) = 3$$

y para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n+1) = \begin{cases} \dfrac{\left(2f(\frac{n+1}{2})\right)^2}{n+1} & \text{si } n+1 \text{ es par} \\ 3^{n+1} + 3f(n) & \text{si } n+1 \text{ es impar.} \end{cases}$$

Probar que $f(n) = n3^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar 23 bolitas azules numeradas y 7 bolitas verdes indistinguibles en 12 cajas numeradas de manera que haya a lo sumo una bolita verde en cada caja y que la primera caja no quede vacía?

4. Hallar el resto de la división de $\sum_{i=0}^{102} (i^6 + i)$ por 4 y por 5.

5. Para cada $a \in \mathbb{Z}$, hallar el valor de $d = (a^2 - 7a + 2 : 6 - a)$.

1) (R) R es reflexiva si $\forall (A,B) \in P(X)$, $(A,B) R (A,B)$

$(A,B) R (C,D) \iff A \Delta A \subseteq A \Delta A$

$\iff \emptyset \subseteq \emptyset$ y $A \Delta A = A \Delta A$

R es reflexiva

(S) R es simétrica si $ARB \Rightarrow BRA$

$(A,B) R (C,D) \iff A \Delta B \subseteq C \Delta D$

$(C,D) R (A,B) \iff C \Delta D \subseteq A \Delta B$

Bueno como sobre todo $A \Delta B$ está en $C \Delta D$ pero no al revés.

Un Conjunto está Contenido en el otro, si todos los elementos están dentro.

$A \Delta B = \{1,2\}$ $\quad C \Delta D = \{1,2,3,4\}$

$(A,B) R (C,D) \iff \{1,2\} \subseteq \{1,2,3,4\}$ ✓

Pero, no vale que

$(C,D) R (A,B) \iff \{1,2,3,4\} \subseteq \{1,2\}$ ✗

Por lo tanto R NO es simétrica pues hallamos Contraejemplo

(AS) R es AS si $(A,B) R (C,D) \wedge (C,D) R (A,B) \Rightarrow (A,B) = (C,D)$

Osea, valer: $ARB \wedge BRA \Rightarrow A = B$.

Como la relación está dada por la inclusión, solo vale para un solo lado. (que el Conjunto más chico esté en el más grande)

Si la inclusión depende de quién está contenido en el otro, la única forma de que valga es si $(A,B) = (C,D)$

Ej: $(A \Delta B) = \{1,2\}$ $\quad (C \Delta D) = \{1,2,3,4\}$
Vale $(A,B) R (C,D)$ pero no $(C,D) R (A,B)$ pues $3,4 \notin (A,B)$

Si $(A \Delta B) = (C \Delta D)$ entonces sí vale.

R es antisimétrica.

En el [illegible]

en A tenemos que se NO es AS

(T)

b) Mostrar que se cumple $(A,B) R (C,D)$.

$$(A,B) = A \Delta B = \{1,2,3,4,5,6\} \Delta \{3,4,5,6,7,8\}$$
$$= \{1,2,7,8\}$$

Si yo quiero que $(A,B) R (C,D)$ tengo que:

$$\{1,2,7,8\} \subseteq C \Delta D$$

¿Qué tiene que pasar con esto?

$C \Delta D$ debe tener obligatoriamente $\{1,2,7,8\}$ y luego, puede tener o no, los otros 6 elementos.

Acá hay varios casos:

C tiene $\{1,2,7,8\}$ y $D = \emptyset$
C tiene $\{1,2,7\}$ y $D = \{8\}$

Es decir NO puede pasar que C y D tengan los mismos elementos $\{1,2,7,8\}$

2^4 (los 4 el tienen 2 op, C o D)

Ahora me faltan 4 en el codominio libres y

¿$2^4 \cdot 4^2$?

5) $d = (a^2 - 7a + 2 : 6 - a)$

Como $d \mid (a^2 - 7a + 2) \wedge d \mid (6 - a)$ puedo aplicar operaciones de la divisibilidad

$d \mid 6(a^2 - 7a + 2) + 6a(-a + 6) \Rightarrow d \mid (-42a + 12) + (36a)$

$\Rightarrow d \mid -6a + 12 \Rightarrow d \mid (-6a + 12) + 6(-a + 6)$

$\Rightarrow d \mid 48$ Los valores de a toman de los divisores de 48, $Div_+(48) = \{1, 2, 4, 6, 12, 24, 48\}$
$= \{2, 2.3, 2.2\}$
$= 2^4 . 3$

Busco a tal que MCD sea 2, 4 o 6.

r	$(a^2 - 7a + 2$	$: 6 - a)$
0	0	0
1	0	1

MOD 2

$\to$ Tengo MCD 2.

a

$d = 2 \Leftrightarrow a$ es par.

Ej: $a = 0$, $(0^2 - 7.0 + 2 : 6 - 0) = (2 : 6) = |2| = 2$

Veo ahora si 4 divide ⇒ Como 2 divide solo a es por 2^2 no
si divide también

r	a^2-7a+2	$6-a$
0	2	2
~~1~~	~~0~~	~~1~~
2	2	0
~~3~~	~~0~~	~~3~~

MOD 4

Veo si 3 DIVIDE

r	a^2-7a+2	$6-a$
0	2	0
1	2	2
2	1	1

MOD 3

3 nunca divide, como luego mcd

tiene que dividir 2 o 1.

Caso a PAR $d=2$

CASO a IMPAR $d=1$

Ejercicio 5 editar

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ la sucesión de números reales definida por:

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = 15a_n^2 - 2.7^{12n+1} \qquad (n\in\mathbb{N})$$

Probar que, para todo $n\in\mathbb{N}_0$, $a_n\in\mathbb{Z}$ y $a_n\equiv 1\ (13)$

Caso base: $n=0$, $a_0 \equiv 1(13) \Leftrightarrow 1 \equiv 1(13)$

P.I: Sea $k\in\mathbb{N}_0$, qvq $P(0), P(1), \dots P(k) \Rightarrow P(k+1)$

· Hi: $a_k \equiv 1(13)$

· QPQ: $a_{k+1} \equiv 1(13)$

Pero por def de la sucesión

$$a_{k+1} = 15(a_k)^2 - 2.7^{12k+1}$$

$$\stackrel{Hi}{\equiv} 15(1)^2 - 2.7^{12k+1} \equiv 2 - \cancel{14}^{12k+1} \underset{(13)}{\equiv} 2 - 1^{12k+1}$$

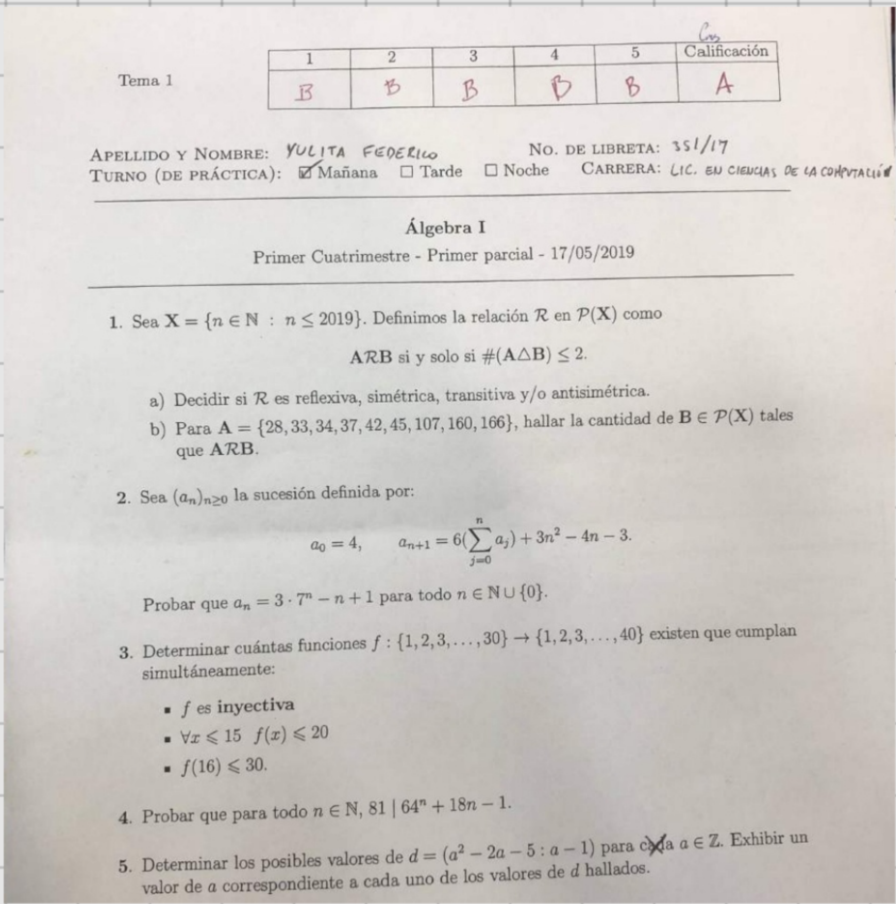
Como 12 es par, 12k siempre será par y el +1 lo hará luego.

$$\overset{13}{\equiv} 2 - 1 \overset{13}{\equiv} 1\ (13)$$

Como queríamos probar, $P(0), P(1), \dots, P(k) \Rightarrow P(k+1)$ V

Por lo tanto $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

$$\equiv 2 - 2.7^{12k}.7 \underset{(13)}{\equiv} 2 - 2.7^{12k}$$



Tema 1

1	2	3	4	5	Calificación
B	B	B	B	B	A

Apellido y Nombre: YULITA FEDERICO No. de libreta: 351/17
Turno (de práctica): ☑ Mañana ☐ Tarde ☐ Noche Carrera: LIC. EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Álgebra I

Primer Cuatrimestre - Primer parcial - 17/05/2019

1. Sea $\mathbf{X} = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 2019\}$. Definimos la relación $\mathcal{R}$ en $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ como

$$\mathbf{A}\mathcal{R}\mathbf{B} \text{ si y solo si } \#(\mathbf{A} \triangle \mathbf{B}) \leq 2.$$

a) Decidir si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, transitiva y/o antisimétrica.
b) Para $\mathbf{A} = \{28, 33, 34, 37, 42, 45, 107, 160, 166\}$, hallar la cantidad de $\mathbf{B} \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$ tales que $\mathbf{A}\mathcal{R}\mathbf{B}$.

2. Sea $(a_n)_{n \geq 0}$ la sucesión definida por:

$$a_0 = 4, \qquad a_{n+1} = 6\left(\sum_{j=0}^{n} a_j\right) + 3n^2 - 4n - 3.$$

Probar que $a_n = 3 \cdot 7^n - n + 1$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. Determinar cuántas funciones $f : \{1, 2, 3, \dots, 30\} \to \{1, 2, 3, \dots, 40\}$ existen que cumplan simultáneamente:

- f es inyectiva
- $\forall x \leqslant 15 \ \ f(x) \leqslant 20$
- $f(16) \leqslant 30$.

4. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $81 \mid 64^n + 18n - 1$.

5. Determinar los posibles valores de $d = (a^2 - 2a - 5 : a - 1)$ para cada $a \in \mathbb{Z}$. Exhibir un valor de a correspondiente a cada uno de los valores de d hallados.

4) $81 \mid 64^n + 18n - 1$

$$64^n + 18n - 1 \equiv 0\ (81)$$

Caso base $n=1$, $64 + 18 - 1 \underset{(81)}{\equiv} 0\ (81)$ ✓

P.I: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo, qvq si $P(1), P(2) \dots P(k)$ V $\Rightarrow P(k+1)$ V

· Hi: $81 \mid 64^k + 18k - 1 \iff 64^k + 18k - 1 \equiv 0\ (81)$

· QPQ: $81 \mid 64^{k+1} + 18(k+1) - 1 \iff 64^{k+1} + 18(k+1) - 1 \overset{?}{\equiv} 0\ (81)$

$$64^{k+1} + 18(k+1) - 1 \underset{(81)}{\equiv} 64^{k+1} + 18k + 17$$

Ejercicio 1. Sea $X = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 600\}$. Se define en $\mathcal{P}(X)$ la relación dada por

$$A\mathcal{R}B \iff \#(A \triangle B) \leq 2$$

(a) Determinar si $\mathcal{R}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

(b) Si $B = \{n \in X : n \equiv 2023 \ mod \ 14\}$, calcular el cardinal del conjunto

$$\{A \in P(X) : A\mathcal{R}B\}.$$

b) Para empezar, $n \equiv 2023 \underset{(14)}{\equiv} 7\ (14)$.

Ahora, B está fijo y tiene elementos de la forma $14k + 7$.

si $k = 0,\ 7$ $\qquad k \in \mathbb{Z}$

$\vdots$

si $k = 42,\ 595$

El máximo K para que B tenga elementos que cumpla 7(14) y $n \leq 600$ es $K = 42$.

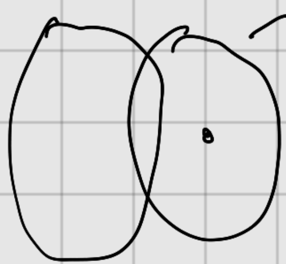
B está fijo y tiene 42 elementos, ahora la relación está dada por $\#(A \Delta B) \leq 2$ o sea tengo 3 casos:

1) $\#(A \Delta B) = 0$ ∨ 2) $\#(A \Delta B) = 1$ ∨ 3) $\#(A \Delta B) = 2$.

Al ser 3 casos distintos xq no se cumplen simultáneamente uno con el otro, están son disjuntos.

1. Si $\#(A \Delta B) = 0$ significa que $A = B$ y como B tiene 42 elementos, A deberá tener esos mismos 42 y como en conjuntos no importa el orden, hay $\boxed{1}$ sola posibilidad

2. Si $\#(A \Delta B) = 1$ hay 2 casos

a.  → B tiene 1 elemento más que A

b.  → A tiene 1 elemento más que B

2a: Si B tiene 42 elementos fijos y A tiene uno menos y $\#(A \Delta B) = 1$.

Entonces A tiene 41 elementos de los de B.

$$\rightarrow \binom{42}{41}$$

2b: Si B tiene 42 elementos y A tiene 1 más

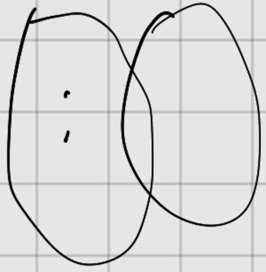
Ent. A tiene todos los de B ($\#A\Delta B = 0$) y agrego a A un elemento de los 600 sin contar los de B.

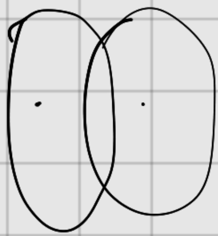
Como si o si debo agregar los 28 de B y NO importa el orden hay:

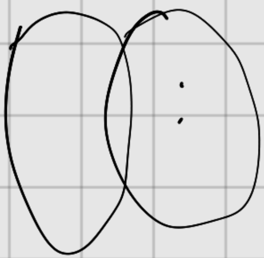
$$\rightarrow 1 \cdot \binom{577}{1}$$ posibilidades

→ Los 28 de B, ordenados de cualquier forma pero como los conjuntos no importa el orden, hay 1 sola

3. $\#(A \Delta B) = 2$

1.  : A tiene 2 elementos más que B

2.  A tiene 1 elemento que no está en B.
B tiene 1 elemento que no está en A.

3.  A tiene 2 elementos menos que B.

1. Si B es fijo con 42 elem, y A tiene 2 más. A si o si tiene los 42 y 2 más que NO están en B.

$$1 \cdot \binom{577}{2}$$

2. A tiene todos los de B excepto 1.

42