Álgebra I
Práctica 2 - Números Naturales e Inducción

Sumatoria y Productoria

1. i) Reescribir cada una de las siguientes sumas usando el símbolo de sumatoria

(a) $1+2+3+4+\cdots+100$
(b) $1+2+4+8+16+\cdots+1024$
(c) $1+(-4)+9+(-16)+25+\cdots+(-144)$
(d) $1+9+25+49+\cdots+441$
(e) $1+3+5+\cdots+(2n+1)$
(f) $n+2n+3n+\cdots+n^2$

ii) Reescribir cada una de los siguientes productos usando el símbolo de productoria y/o de factorial

(a) $5\cdot 6\cdots 99\cdot 100$ (b) $1\cdot 2\cdot 4\cdot 8\cdot 16\cdots 1024$ (c) $n\cdot 2n\cdot 3n\cdots n^2$

2. Escribir los dos primeros y los dos últimos términos de las expresiones siguientes

i) $\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$ ii) $\sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i(i+1)}$ iii) $\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i}$ iv) $\sum_{i=1}^{n^2} \frac{n}{i}$ v) $\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3}$

3. Calcular

i) $\sum_{i=1}^{n}(4i+1)$ ii) $\sum_{i=6}^{n} 2(i-5)$

4. Calcular

i) $\sum_{i=0}^{n} 2^i$
iii) $\sum_{i=0}^{n} q^{2i}$, $q\in\mathbb{R}-\{0\}$
ii) $\sum_{i=1}^{n} q^i$, $q\in\mathbb{R}$
iv) $\sum_{i=n}^{2n} q^i$, $q\in\mathbb{R}$

1) i)

a) $\sum_{i=1}^{100} i$ b) $\sum_{i=0}^{10} 2^i$ c) IMPAR, PAR NEGATIVO

d) $1+9+25+49+\ldots+441$

$1^2+3^2+5^2+7^2$

$\sum_{i=0}^{10}(2i+1)^2$

e) $\sum_{i=1}^{2n+1} 2^i-1$ VER f) $\sum_{i=1}^{n^2} i\cdot n$ VER ii)

a) $\prod_{i=5}^{100} i$ b) $\prod_{i=0}^{10} 2^i$ c) $\prod_{i=1}^{m^2} i.m$

2)

i) PRIMEROS: $i=6,\ 2(6-5)=2$

$i=7,\ 2(7-5)=4$

ÚLTIMOS: $i=2((m-1)-5)=2(m-6)=2m-12$

$i=2(m-5)=2m-10$

ii) PRIMEROS: $i=m,\ \frac{1}{m(m+1)}=\frac{1}{m^2+m}$

$i=m+1,\ \frac{1}{(m+1)((m+1)+1)}=\frac{1}{(m+1)(m+2)}$

ULTIMOS: $i=2m-1,\ \frac{1}{2m(2m-1)}=\frac{1}{4m^2-2m}$

$i=2m,\ \frac{1}{4m^2+2m}$

iii) PRIMEROS: $i=1,\ \frac{m+1}{2}$

$i = 2$, $\frac{m+2}{4}$

ÚLTIMOS: $i = m-1$, $\frac{m+(m-1)}{2(m-1)} = \frac{m^2-m}{2m-2}$

$i = m$, $\frac{2m}{2m} = 1$

iv) PRIMEROS: $i = 1$, m

$i = 2$, $\frac{m}{2}$

ÚLTIMOS: m^2-1, $\frac{m}{m^2-1}$

m^2, $\frac{\cancel{m}}{\cancel{m^2}} = \frac{1}{m}$

V) PRIMEROS, $i = 1$, $-m-1$

$i = 2$, $m+2$

ÚLTIMOS, $i = m-1$, $\frac{m+(m-1)}{2(m-1)-3} = \frac{2m-1}{2m-5}$

$i = m$, $\frac{2m}{2m-3}$

3) Calcular

i) $\sum_{i=1}^{m} 4i+1 = \sum_{i=1}^{m} 4.i + \sum_{i=1}^{m} 1$

$1+1+1 = m$ veces

sumar $1+1+1$ es igual a $m=3$.

$= 4 \sum_{i=1}^{m} i + m$ → suma de Gauss

$= \cancel{4} \cdot \frac{m(m+1)}{\cancel{2}} + m$

$= 2m(m+1) + m$

$= 2m^2 + 2m + m$

$= 2m^2 + 3m$

ii) $\sum_{i=6}^{m} 2(i-5) = 2\sum_{i=6}^{m} i-5 = 2\left(\sum_{i=6}^{m} i - \sum_{i=6}^{m} 5\right)$

EMPIEZA DESDE 6

$5+5+5$ hasta $m-6+1$

$\frac{5(5+1)}{2}$

PREGUNTAR

$= 2\left(\left(\frac{m(m+1)}{2} - \frac{5(5+1)}{2}\right) - (m-5)5\right)$

$\underbrace{1+2+3+4+5+6+7+\ldots+m}_{\frac{m(m+1)}{2}}$

$= 2\left(\left(\frac{m^2+m-30}{2}\right) - (5m-25)\right)$

$= 2\left(\left(\frac{m^2+m-30+2(5m-25)}{2}\right)\right)$

$= \frac{m(m+1)}{2} -$

$\sum_{i=6}^{n} 5 = \underbrace{5+\ldots+5}$ $= (n-5)5$

$= \cancel{2}\left(\left(m^2+m-30+10m-50\right)\right)$

$\frac{\qquad}{2}$ $\qquad n \to 5$

$= m^2 + 11m - 90$

4) i) $M = 2$ $\quad 2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7.$

$\underbrace{2^3}_{8} - 1$, creo $2^{M+1} - 1$

ii) $\sum_{i=1}^{M} q^i, \; q \in \mathbb{R}$ $\qquad M = 2, \; q = 2$

$2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$

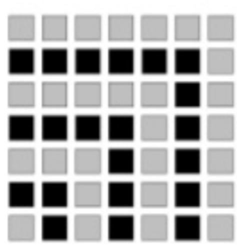
Luego $q^{M+1} - 1$

iii)

Inducción

5. Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$:

i) contando de dos maneras la cantidad total de cuadraditos del diagrama



ii) usando la suma aritmética (o suma de Gauss).

iii) usando el principio de inducción.

i) CADA FILA: n items] TOTAL: $n \cdot n$ ✓
CADA COL: n items

ii) $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)$:) RDO: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

$$\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2i-1 = \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=1}^{n} 1 = 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = 2 \cdot \left(\frac{n^2+n}{2}\right) - n = n^2 + n - n$$

$$= n^2$$ ✓

iii) $P(n) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$

· Caso base: $n=1$, $P(1) = \sum_{i=1}^{1} (2i-1) = 1 \stackrel{?}{=} 1^2 = 1$ ✓

· Paso inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo.

· HI: $\sum_{i=1}^{k} (2i-1) = k^2$

· QPQ: $\sum_{i=1}^{k+1} (2i-1) = (k+1)^2$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \sum_{i=1}^{k}(2i-1) + \overbrace{\big(2(k+1)-1\big)}^{\text{...que ÚLT TÉRMINO}}$$

$$\underset{Hi}{=} k^2 + (2k+1)$$

$$= k^2 + 2k + 1$$

$$= (k+1)^2 \quad \checkmark$$

Como queríamos probar, vale $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ V

Por lo tanto $P(n)$ es V, $\forall n \in \mathbb{N}$.

6. *(Suma de cuadrados y de cubos)* Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ✓ ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ✓

6) i) $P(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Caso base: $P(1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1 = \frac{1(2)(3)}{6} = 1 \overset{?}{=} 1 \quad \checkmark$

Paso inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo.

· Hi: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$\cdot$ QPQ : $\sum_{i=1} i^2 = \frac{(k+1)(k+1+1)(2(k+1)+1)}{6}$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$$

$$= \frac{(k^2+3k+2)(2k+3)}{6}$$

$$= \frac{2k^3+3k^2+6k^2+9k+4k+6}{6}$$

$$= \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \underset{Hi}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{(k^2+k)\cdot(2k+1)}{6} + (k^2+2k+1)$$

$$= \frac{2k^3+k^2+2k^2+k}{6} + k^2+2k+1$$

$$= \frac{2k^3+3k^2+k+6(k^2+2k+1)}{6}$$

$$= \frac{2k^3+3k^2+k+6k^2+12k+6}{6}$$

$$= \frac{2k^3 + 9k^2 + 13k + 6}{6}$$

Como queríamos probar $P(k)\ V \Rightarrow P(k+1)$.

Por lo tanto $P(n)$ es V, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

· Caso base: $n=1$, $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 \overset{?}{=} \frac{1(2)^2}{4} = 1$ ✓

· Paso inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo.

· Hi: $$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

· QPQ: $$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2\left((k+1)+1\right)^2}{4}$$

$$= \frac{(k^2+2k+1)(k+2)^2}{4}$$

$$= \frac{(k^2+2k+1)(k^2+4k+4)}{4}$$

$$= (k^4 + 4k^3 + 4k^2) + (2k^3 + 8k^2 + 8k) +$$

$$(k^2 + 4k + 4)$$

$$= k^4 + 6k^3 + 13k^2 + 12k + 4$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 \overset{Hi}{=} \frac{k^2 (k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2 \cdot (k^2 + 2k + 1)}{4} + (k^2 + 2k + 1) \cdot (k+1)$$

$$= \frac{k^4 + 2k^3 + k^2 + 4(k^3 + k^2 + 2k^2 + 2k + k + 1)}{4}$$

$$= \frac{k^4 + 2k^3 + k^2 + 4(k^3 + 3k^2 + 3k + 1)}{4}$$

$$= \frac{k^4 + 2k^3 + k^2 + 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4}{4}$$

$$= \frac{k^4 + 6k^3 + 13k^2 + 12k + 4}{4}$$

Como queríamos probar. Vale que $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ V

Por lo tanto, $P(n)$ V, $\forall n \in \mathbb{N}$

PREG POTENCIA.

7. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} i^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$ me trabé

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i+1)\, 3^{i-1} = n\, 3^n$ ✓

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i\, 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$ ✓

iv) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \left(1 + a^{2^{i-1}}\right) = \frac{1 - a^{2^n}}{1-a}, \quad a \in \mathbb{R} - \{1\}$ ✓

v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n (1 - 2n)$ me trabé

RDO: $\sum_{i=1}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{m} 1 = m$, $\sum_{i=1}^{m+1} 2m+1 = \left(\sum_{i=1}^{m} 2m+1\right) + (2(m+1)+1)$

$$\sum_{i=1}^{m} \underbrace{q}_{\text{fijo.}}{}^{i} = \begin{cases} \dfrac{q^{m+1}-1}{q-1} & \text{cuando } q \neq 1 \\ m+1 & \text{cuando } q = 1 \end{cases}$$

Ej: $\sum_{i=1}^{m} 2^{i}$, como $2 \neq 1 \Rightarrow \dfrac{2^{n+1}-1}{2-1}$

7) i) Caso base: $m=1$, $\sum_{i=1}^{1} (-1)^{i+1} \cdot i^{2} = (-1)^{1+1} \cdot 1^{2} = 1 \overset{?}{=} \dfrac{(-1)^{2} \cdot 1(2)}{2}$

$= 1 \overset{?}{=} 1$ ✓

Paso inductivo: sea $k \in \mathbb{N}$ fijo.

· Hi: $\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \cdot i^{2} = \dfrac{(-1)^{k+1} \cdot k(k+1)}{2}$

· QPQ: $\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \cdot i^{2} = \dfrac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1)(k+2)}{2}$

$= (-1)^{k+2} \ (k^{2} + \ldots (k+2))$

$$= (-1) \cdot (k + 2k + k + 2)$$

$$= (-1)^{k+2} \cdot (k^2 + 3k + 2)$$

$$= (-k^2)^{k+2} + (-3k)^{k+2} + (-2)^{k+2}$$

$$= \frac{-k^{2k+4} + (-3k)^{k+2} + (-2)^{k+2}}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} \cdot i^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \cdot i^2\right) + (-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2$$

$$\overset{IV}{=} \frac{\left((-1)^{k+1}\right) \cdot k(k+1)}{2} + \left((-1)^{k+2}\right) \cdot (k+1)^2$$

$$= \frac{\left((-1)^{k+1} \cdot k(k+1)\right) + 2\left((-1)^{k+2} \cdot (k+1)^2\right)}{2}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1} \cdot k(k+1) + 2\left((-1)^{k+1} \cdot (-1) \cdot (k+1)^2\right)}{2}$$

ii) Caso base $n=1$, $\sum_{i=1}^{1} 3 \cdot 3^{0} = 3 \overset{?}{=} 3$

Paso inductivo : Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo.

$\cdot$ Hi: $\sum_{i=1}^{k} (2i+1) \cdot 3^{i-1} = k \cdot 3^{k}$

$\cdot$ QPQ: $\sum_{i=1}^{k+1} (2i+1) \cdot 3^{i-1} = (k+1) \cdot 3^{k+1}$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i+1)\cdot 3^{i-1} = \left(\sum_{i=1}^{k}(2i+1)\cdot 3^{i-1}\right) + \left((2(k+1)+1)\cdot 3^{k}\right)$$

$$\underset{Hi}{=} k\cdot 3^k + \left((2k+3)\cdot 3^k\right) = 3^k\left(k+2k+3\right)$$

$$= 3^k(3k+3) = 3^k\left(3\cdot(k+1)\right) = 3^{k+1}\cdot(k+1)$$

Como queríamos probar. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ✓

Por lo tanto $P(n)$ es V, $\forall n \in \mathbb{N}$

iii)

Caso base: $n=1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \underbrace{\frac{2}{6}}_{1/3} \overset{?}{=} \underbrace{\frac{4}{3}-1}_{1/3}$ ✓

Paso inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo

- Hi: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{i\cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1$

- QPQ: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1}\frac{i\cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{k+2}}{k+3} - 1$

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{i\cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} = \sum_{i=1}^{k}\frac{i\cdot 2^i}{(i+1)(i+2)} + \frac{(k+1)\cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)}$$

$$\overset{Hi}{=} \frac{2^{k+1}}{k+2} - 1 + \frac{(k+1)\cdot 2^{k+1}}{(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{2^{k+1}(k+3) + 2^{k+1}(k+1)}{\quad} - 1$$

$$(k+2)(k+3)$$

$$= \frac{2^{k+1}(k+3+k+1)}{(k+2)(k+3)} - 1$$

$$= \frac{2^{k+1}(2k+4)}{(k+2)(k+3)} - 1$$

$$= \frac{2^{k+1}(2\cancel{(k+2)})}{\cancel{(k+2)}(k+3)} - 1$$

$$= \frac{2^{k+1} \cdot 2}{(k+3)} - 1$$

$$= \frac{2^{k+2}}{(k+3)} - 1$$

Como queríamos probar. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ V

Por lo tanto $P(n)$ V, $\forall n \in \mathbb{N}$.

RDO: $$\boxed{\sum^{n} 2^i = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & \text{si } q = 1 \\ n-1 & \text{si } q \neq 1 \end{cases}}$$

RDO: $\prod_{i=1}^{n} i = n!$, $\prod_{i=1}^{n} c = c^n$, $\prod_{i=1}^{n} c \cdot a_k = \left(\prod_{i=1}^{n} c\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} a_k\right)$

iv) Tengo 3 incógnitas. i, n y a. a, n fijos.

Caso base: $n=1$, $\prod\limits_{i=1} (1+a) = 1+a = \dfrac{1-a}{1-a}$?

Paso Inductivo: sea $k \in \mathbb{N}$ fijo

· Hi: $\prod\limits_{i=1}^{k} \left(1+a^{2^{i-1}}\right) = \dfrac{1-a^{2^k}}{1-a}$

· QPQ: $\prod\limits_{i=1}^{k+1} \left(1+a^{2^{i-1}}\right) = \dfrac{1-a^{2^{(k+1)}}}{1-a}$

$$\prod_{i=1}^{k+1} \left(1+a^{2^{i-1}}\right) = \left(\prod_{i=1}^{k} \left(1+a^{2^{i-1}}\right)\right) \cdot \left(\left(1+a^{2^k}\right)\right)$$

$$\overset{Hi}{=} \frac{1-a^{2^k}}{1-a} \cdot \left(1+a^{2^k}\right) = \frac{1 \cancel{-a^{2^k}} \cancel{+a^{2^k}} + \left(-a^{2^k}\right)^2}{(1-a)}$$

$(a^b)^c = a^{b.c}$

$(a^{2^k})^2 = a^{2^k.2}$

$= a^{2^{k+1}}$

OBS: $\left(a^{2^k \cdot 2}\right)^2 = a^{2^{k+1}}$

PREGUNTAR

$$= \frac{1+a^{2^{k+1}}}{1-a}$$

Como queríamos probar. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ V

Por lo tanto $P(n)$ es V, $\forall n \in \mathbb{N}$

v) Caso base: $n=1$, $\prod\limits_{i=1}^{1} \dfrac{2}{-1} = -2 \overset{?}{=} 2(-1) = -2$ ✓

Paso inductivo: sea $k \in \mathbb{N}$ fijo.

· Hi: $\prod\limits_{i=1}^{k} \dfrac{k+i}{2i-3} = 2^k(1-2k)$

$\cdot$ QPQ: $\displaystyle\prod_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{2i-3} = 2^{k+1}\left(1-2(k+1)\right) = 2^{k+1}(-1-2k)$

me estorba

$$\prod_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{2i-3} = \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{k+1+i}{2i-3}\right) \cdot \frac{2k+2}{2(k+1)-3}$$

Hago Cambio de índice.

$i+1=j$, $i=j-1$

Como $1 \leq i \leq k$

$2 \leq \underbrace{i+1}_{j} \leq k+1$

$2 \leq j \leq k+1$

$$\prod_{j=2}^{k+1} \frac{k+j}{2(j)-3} \cdot \left(\frac{2k+2}{2k-1}\right) = 2(k+1) \prod_{j=1} \frac{(k+j)}{2i-3} \cdot \left(\frac{2k+2}{2k-1}\right)$$

$\to j-1$

$$= 2 \prod_{j=1}^{k} \frac{(k+j)}{2i-3} \cdot \left(\frac{2k+2}{2k-1}\right) \overset{Hi}{=} 2.\left(2^k.(1-2k)\right).\left(\frac{2k+2}{2k-1}\right)$$

$$= 2\left(2^k - 4k\right) \cdot \left(\frac{2k+2}{2k-1}\right)$$

$$= 2^{k+1} - 8k$$

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{k+j}{2j-3} \qquad \prod_{j=2}^{k+1} \bigcirc = \prod_{j=1}^{k+1} \bigcirc$$

8) No entendí enunciado

9. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Probar que $\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i)=a_{n+1}-a_1$. ✓

ii) Calcular $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}$ (Sugerencia: $\frac{1}{i(i+1)}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$). ✓

iii) Calcular $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$ (Sugerencia: calcular $\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}$). ✓

i) Caso base $n=1$, $a_2-a_1 \overset{?}{=} a_2-a_1$ ✓

Paso inductivo: Sea $k\in\mathbb{N}$ fijo.

· Hi: $\sum_{i=1}^{k}(a_{i+1}-a_i)=a_{k+1}-a_1$

· QPQ: $\sum_{i=1}^{k+1}(a_{i+1}-a_i)=a_{k+2}-a_1$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(a_{i+1}-a_i)=\left(\sum_{i=1}^{k}(a_{i+1}-a_i)\right)+(a_{k+2}-a_{k+1})$$

$$\overset{Hi}{=} \cancel{a_{k+1}}-a_1+a_{k+2}-\cancel{a_{k+1}}$$

$= a_{k+2} - a_1$

Como queríamos probar. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ V

Por lo tanto $P(n)$ es V, $\forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$, como $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}_{1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}}_{2}$

$\cdot 1: \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n} \quad \cdot 2. -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$

se cancelan todos menos el $\frac{1}{1}$ y el $\frac{1}{n+1}$

RTA: $1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}$

pues $\cdot 1$. llega hasta $\frac{1}{n}$ y $\cdot 2$ hasta $\frac{1}{n+1}$. nunca se cancelan. $\frac{1}{n+1}$ tiene a $\frac{1}{n}$ pero no al revés. $\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \dots$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i+1} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1}}_{1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i+1}}_{2}$

1. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$ 2. $-\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2n+1}\right)$

RTA: $\underbrace{1 - \frac{1}{2n+1}}$

pues el $\frac{1}{2m-1}$ lo tiene el $\frac{1}{2m+1}$ pero no al revés.

Osea: $\underbrace{\frac{1}{2m+1} \,,\, \frac{1}{2m}}_{\text{"SOBREVIVEN"}} \,,\, \underbrace{\frac{1}{2m-1}}_{\text{"SE CANCELA"}}$

$\frac{1}{2m}$ no aparece xq son todos impares y $2m$ es par.

OBS: Al dividir, cada término es una resta.

$$\frac{5}{i(i+2)} = \frac{5}{i} - \frac{5}{(i+2)}$$

$$\frac{k}{(2i)(4i)} = \frac{k}{2i} - \frac{k}{4i}$$

10. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

ii) $3^n \geq n^3$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$

iv) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$

v) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$

vi) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

vii) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{4i-1}{n+i} \geq 1$

i) Caso base: $n=1$, $3^1 + 5^1 \geq 2^{1+2} = 8 \overset{?}{\geq} 8$ ✓

Paso inductivo: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo.

- HI: $3^k + 5^k \geq 2^{k+2}$

- QPQ: $3^{k+1} + 5^{k+1} \geq 2^{k+3}$

$$3^{k+1}+5^{k+1} \geq 2^{k+3}$$

$$3^k\cdot 3+5^k\cdot 5 \geq 2^{k+3}$$

$$3^k\cdot 3+5^k\cdot \underbrace{5}_{3+2} = \overbrace{3^k\cdot 3+5^k\cdot 3}+5^k\, 2 = 3\overbrace{(3^k+5^k)}^{\geq 2^{k+2}}+5^k\cdot 2$$

$$\geq 3\cdot 2^{k+2}+5^k\cdot 2$$

$$\leq$$

$$-3\cdot(3^k+5^k)\ \cancel{\geq}\ -3\cdot 2^{k+2}$$

$$\underbrace{3}_{\geq 2}\cdot 2^{k+2}+\underbrace{5^k}_{\geq 2}\cdot 2 \geq 2\cdot 2^{k+2}+2^k\cdot 2 = \underbrace{2^{k+3}}+\underbrace{2^{k+1}}_{\geq 0} \geq 2^{k+3}$$

Con lo que necesito es un 2, como 3 y 5 son mayores, dejo el 2 q necesito
En vez agrego lo q me pinte.

Y como $2^{k+3}+\underbrace{2^{k+1}}_{\geq 0}$ entonces quedo 2^{k+3}

porque lo sumo se mayores a 0 y donde ya tengo

a lo quería llegar.

15. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = 2\,n\,a_n + 2^{n+1}n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = 2^n\,n!$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = a_n + n(3n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

i) Inducción completa: necesito que se cumplan los anteriores

$n=0 \quad n=1$

$a_1 = 2,\ a_2 = 4 + 2^2 \cdot 1 = 8,\ a_3 = 4 \cdot 8 + 2^3 \cdot 2 = 48$

$a_n = 2^n \cdot n!$

$P(n) = a_n = 2^n \cdot n!$ ¿No sería $n=0$? ¿x? $n=1$ para a_2: Respuesta: sí, pero $n=0$ no contemplo. Solo $n \geq 1$ siempre.

Caso base: $n=1,\ a_1 = 2^1 \cdot 1! \overset{?}{=} 2$ ✓

P.I: Sea $K \in \mathbb{N}$ fijo $\qquad n=0$ a 1

- HI: $a_k = 2^k . k!$

- QPQ: $a_{k+1} = 2^{k+1} . (k+1)!$

Pero por def de la sucesión:

$$a_{k+1} = 2k . a_k + 2^{k+1} . k!$$

$$\overset{HI}{=} 2k . (2^k . k!) + (2^{k+1} . k!)$$

$$= 2k (2^k . k!) + (2 . 2^k . k!)$$

$$\underbrace{= 2^k . k! (2k+2)}$$ $= 2^k . 2 . k! (k+1) = 2^{k+1} \underbrace{. k! (k+1)}_{(k+1)!}$

$$= 2^k . k! . 2 (k+1)$$

$$= 2^{k+1} (\cancel{k+1}) . \cancel{k} \overbrace{k! (k+1)}^{(k+1)!}$$ $\qquad (k+1)! = (k+1) . k!$

$$= 2^{k+1} (\cancel{k+1}) . \cancel{k} (k+1)!$$

$$= 2^k . 2 . k! (k+1)$$

$$= 2^{k+1} . (k+1)!$$

Como queríamos probar. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ✓

Por lo tanto $P(n)$ V, $\forall n \in \mathbb{N}$

15. i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 2 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = 2\,n\,a_n + 2^{n+1} n!, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = 2^n\, n!$.

ii) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida recursivamente por

$$a_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad a_{n+1} = a_n + n(3n+1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^2(n-1)$.

ii) $P(n): a_n = n^2(n-1)$

Caso base $n=1$

P.I: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo.

· Hi: $a_k = k^2(k-1)$

· QPQ: $a_{k+1} = (k+1)^2 \cdot k$

Pero por def de la sucesión

$$a_{k+1} = a_k + k(3k+1)$$

$$\overset{Hi}{=} k^2(k-1) + k(3k+1)$$

$$= k(k(k-1) + (3k+1))$$

$$= k(k^2 - k + 3k + 1)$$

$$= k(k^2 + 2k + 1)$$

$$= k(k+1)^2$$

Como queríamos probar. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ✓

Por lo tanto $P(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$

16. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = (1+\sqrt{a_n})^2, \ \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = 2a_n + 3^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

iii) $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = n\,a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

iv) $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

i) $\underbrace{a_1 = 1}_{n=0}$, $\underbrace{a_2 = \left(1+\sqrt{1}\right)^2}_{n=1} = 4$, $\underbrace{a_3 = \left(1+\sqrt{4}\right)^2 = 9}_{n=2}$

$\underbrace{a_4 = \left(1+\sqrt{9}\right)^2 = 16}_{n=3}$ $a_5 = \left(1+\sqrt{16}\right)^2 = 25$

$1, \left(1+\sqrt{1}\right)^2, \left(1+\sqrt{\left(1+\sqrt{1}\right)^2}\right)^2$

Hipótesis $P(n) = a_n = n^2$

Caso base: $n=1$, $a_1 = 1^2 \stackrel{?}{=} 1$ ✓

P.I: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo.

- Hi: $a_k = k^2$
- QPQ: $a_{k+1} = (k+1)^2$

Pero por def. de la sucesión sé que:

$$a_{k+1} = \left(1+\sqrt{a_k}\right)^2$$

$$\stackrel{Hi}{=} \left(1+\cancel{\sqrt{}}\, k^2\right)^{\cancel{2}} \text{ NO}$$

$= \left(1+\cancel{\sqrt{k^2}}\right)^2 = (1+k)^2$ y por conmutatividad de la suma $(k+1)^2$.

Como queríamos probar. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Por lo tanto $P(n)$ V, $\forall n \in \mathbb{N}$

ii) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$

$a_1 = 3$, $a_2 = 9$, $a_3 = 27$

Hipótesis de $a_n = 3^n$.

$P(n)$: $a_n = 3^n$

· Caso base: $n = 1$, $a_1 = 3^1 = 3$ ✓

· P.I: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo.

· Hi: $a_k = 3^k$

· QPQ: $a_{k+1} = 3^{k+1}$

Pero por def de la sucesión

$$a_{k+1} = 2a_k + 3^k$$
$$\overset{Hi}{=} 2 \cdot 3^k + 3^k$$
$$= 3^k(2+1)$$
$$= 3^k(3)$$
$$= 3^{k+1}$$

Como queríamos probar. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ V

Por lo tanto $P(n)$ V, $\forall n \in \mathbb{N}$

16. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = (1+\sqrt{a_n})^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$

ii) $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = 2a_n + 3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

iii) $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = n\, a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

iv) $a_1 = 2$ y $a_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{a_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

iii) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = n \cdot a_n$

$\underbrace{a_1 = 1}_{n=0}$, $\underbrace{a_2 = 1}_{n=1}$, $\underbrace{a_3 = 2}_{n=2}$, $\underbrace{a_4 = 6}_{n=3}$, $\underbrace{a_5 = 24}_{n=4}$

$a_1 = 1$

$a_2 = 1 \cdot 1$

$a_3 = 2 \cdot 1$

$a_4 = 3 \cdot 2$

$a_5 = \cancel{3}\ 4 \cdot 3 \cdot 2$

Hipótesis: $a_n = n!$

Caso base: $n = 1$, $a_1 = 1! = 1$ ✓

P.I: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo.

- Hi: $a_k = k!$

- QPQ: $a_{k+1} = (k+1)!$

Pero, por def de la sucesión

$a_{k+1} = k \cdot a_k$

$\overset{Hi}{=} k \cdot k!$

$= (k+1)!$ Como queríamos probar.

7. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} i^2 = \frac{(-1)^{n+1} n(n+1)}{2}$

ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (2i+1)\, 3^{i-1} = n\, 3^n$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i\, 2^i}{(i+1)(i+2)} = \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$

iv) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \left(1 + a^{2^{i-1}}\right) = \frac{1 - a^{2^n}}{1-a}, \quad a \in \mathbb{R} - \{1\}$

v) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2i-3} = 2^n (1 - 2n)$

v) $$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{2i-3} \underset{qvq}{=} 2^{n+1}(1 - 2(n+1))$$

$$\prod_{i=1}^{n+1} \frac{n+1+i}{2i-3} = \frac{\left[\prod_{i=1}^{n+1} n+1+i\right]}{\left[\prod_{i=1}^{n+1} 2i-3\right]} = \frac{\prod_{j=2}^{n} n+j}{\prod_{j=-1}^{n+1} 2j-3} = (*)$$

$$\prod_{i=1}^{n+1} n+\overbrace{1+i}^{j} = \prod_{j=2}^{n} n+j = \left(\prod_{j=1} n+j\right) \cdot \left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\prod_{i=1}^{n+1} 2i-3 = \prod^{n+1} 2j-3 = \prod^{n} 2j-3 \cdot (2(n+1)-3$$

$i=1 \qquad j=1 \qquad j=1$

puedo usar HI

$$\circledast = \frac{\left(\prod_{j=1}^{n} n+j\right)\frac{1}{n+1}}{\left(\prod_{j=1}^{n} 2j-3\right)\left(2(n+1)-3\right)} = \prod_{j=1}^{n} \frac{n+j}{2j-3} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{2(n+1)-3}$$

V) $\displaystyle\prod_{i=1}^{m} \frac{m+i}{2i-3} = 2^{m}(1-2m)$

· Caso base: $m=1$, $\dfrac{1+1}{2.1-3} = -2 \overset{?}{=} \overbrace{2^{1}(1-2m)}^{-2}$ ✓

· P.I: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo.

· HI: $\displaystyle\prod_{i=1}^{k} \frac{k+i}{2i-3} = 2^{k}(1-2k)$

· QPQ: $\displaystyle\prod_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{2i-3} = 2^{k+1}\cdot(-1-2k)$

no me deja aplicar HI..

$$\prod_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{2i-3} = \prod_{i=1}^{k} \frac{k+1+i}{2i-3} \cdot \frac{k+1+k+1}{2(k+1)-3}$$

$$j = i+1 \qquad 1 \le i \le k$$
$$2 \le i+1 \le k+1$$
$$2 \le j \le k+1$$

$$= \left(\prod_{j=2}^{k+1} \frac{k+j}{2(j-1)-3} \right) \cdot \frac{2k+2}{2k-1} = \frac{\prod_{j=2}^{k+1} k+j}{\underbrace{\prod_{j=2}^{k+1} 2(j-1)-3}} = \frac{\overbrace{\prod_{j=2}^{k} k+j \cdot k+(k+1)}^{*}}{\underbrace{\prod_{j=2}^{k+1} 2(j-1)-3}_{*\ = \prod_{i=1}^{k} 2i-3}}$$

* Vuelvo a i? $\prod_{i=1}^{k} 2i-3$. (Ya me mutó al cambiar índice pero ahora que productorias son independientes las manejo a mi manera.)

* Me faltó $j=1$. $\prod_{j=1}^{k} k+j \cdot \frac{1}{k+1} \cdot 2k+1$

= MAL. Cambié índice con las dos juntas. Mutó a la de abajo (me cagó la vida)

Rehago $$\prod_{i=1}^{k} \frac{k+1+i}{2i-3} \cdot \frac{k+1+k+1}{2(k+1)-3}$$

No me deja aplicar H.i.

$$= \frac{\prod_{i=1}^{k} k+\overbrace{1+i}^{j}}{\prod_{i=1}^{k} 2i-3} \cdot \frac{2k+2}{2k-1}$$

$$= \quad j = i+1 \qquad 1 \le i+1 \le k$$
$$2 \le j \le k+1$$

$$= \frac{\prod_{j=2}^{k+1} k+j}{\prod_{i=1}^{k} 2i-3} \cdot \frac{2k+2}{2k-1} = \frac{\prod_{j=2}^{k} k+j}{\prod_{i=1}^{k} 2i-3} 2k+1 \cdot \frac{2k+2}{2k-1}$$

$$= \frac{\left(\prod_{j=1}^{k} k+j\right)}{\prod_{i=1}^{k} 2i-3} \cdot \frac{1}{k+1} \cdot 2k+1 \cdot \frac{2k+2}{2k-1}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{k+i}{2i-3}\right) \cdot \frac{1}{k+1} \cdot 2k+1 \cdot \frac{2k+2}{2k-1}$$

$$\overset{HI}{=} 2^k(1-2k) \cdot \frac{1}{\cancel{k+1}} \cdot 2k+1 \cdot \frac{\overset{2(\cancel{k+1})}{2k+2}}{2k-1}$$

$$= 2^k(1-2k) \cdot 2k+1 \cdot \frac{2}{2k-1}$$

$$= 2^k \cdot -2k \cdot 2k+1 \cdot \frac{2}{2k-1}$$

$$= 2^k$$

· QPQ: $\prod_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{2i-3} = 2^{k+1} \cdot (1-2k)$

10. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$ ✓

ii) $3^n \geq n^3$ ✓

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$ ✗

iv) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$

v) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$

vi) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

vii) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{4i-1}{n+i} \geq 1$

10) ii) $3^n \geq n^3$

Caso base: $n=1$, $3^1 \geq 1^3$ ✓

P.I: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo.

· Hi: $3^k \geq k^3$

· QPQ: $3^{k+1} \geq (k+1)^3$

$$3^k \cdot 3 \geq (k+1)^3$$

$$3k^3 \underset{Hi}{\overset{?}{\geq}} (k+1)^3$$

iii) Caso base: $n=1$, $\frac{2}{2} = 1 \leq 1$ ✓

P.I: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo.

· Hi: $\sum_{i=1}^{k} \frac{k+i}{i+1} \leq 1 + k(k-1)$

· QPQ: $\sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{i+1} \leq 1 + (k+1)(k-1)$

$$* \sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{i+1} \leq 1 + k^2 - 1$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{k+1+i}{i+1} \cdot \left(\frac{k+1+(k+1)}{k+2} \right) \leq k^2$$

Cambio indice

$$j = i+1 \qquad 1 \leq i+1 \leq k$$
$$2 \leq j \leq k+1$$

$$\sum_{j=2}^{k+1} \frac{k+j}{i+1} \cdot \left(\frac{2k+2}{k+2} \right) \leq k^2$$

$$\sum_{j=2}^{k} \frac{k+j}{j} \cdot \frac{(k+(k+1))}{(k+1)} \cdot \left(\frac{2k+2}{k+2} \right) \leq k^2$$

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \frac{k+j}{j} \right) \cdot (\cancel{k+1}) \cdot \frac{2k+1}{\cancel{k+1}} \cdot \frac{2k+2}{k+2} \leq k^2$$

$$1 + k(k-1) \cdot 2k+1 \cdot 2k+2 \overset{HI}{\leq} k^2$$

$$1 + k(k-1) \cdot (2k+2)!$$

MAI.

Refuso *

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+i}{i+1} +$$

12. Probar que

i) $n! \geq 3^{n-1}, \ \forall n \geq 5$ – ✓

ii) $3^n - 2^n > n^3, \ \forall n \geq 4$ – PREG

iii) $\sum_{i=1}^{n} \frac{3^i}{i!} < 6n - 5, \ \forall n \geq 3$. PREG

INDUCCIÓN SIMPLE CORRIDA

i) Caso base: $n = 5$, $5! \geq 3^4 = 120 \geq 81$ ✓

P.I: Sea $k \in \mathbb{N}_{\geq 5}$ fijo

· Hi: $k! \geq 3^{k-1}$

· QPQ: $(k+1)! \geq 3^k$

$(k+1)! \geq 3^k$

$k!\,(k+1) \geq 3^k$

$\underbrace{3^{k-1}}\cdot(k+1) \geq_{Hi} 3^k$ ✓

Como $k \geq 5$, $3^{k-1}\cdot(k+1)$ siempre vale pues:

Con $k = 5$ $\quad 3^4\,(k+1) \geq 3^4$.

Por lo tanto, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ para $k \geq 5$.

$a > b$

$a > c$

Así, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \geq 5$.

ii) Caso base: $n=4$, $3^4 - 2^4 > 4^3 = 65 > 64$ ✓

P.I: Sea $k \in \mathbb{N}_{\geq 4}$.

$\cdot$ Hi: $3^k - 2^k > k^3$

$\cdot$ QPQ: $3^{k+1} - 2^{k+1} > (k+1)^3$

$$3^{k+1} - 2^{k+1} > (k+1)^3$$

$$3^k \cdot 3 - 2^k \cdot 2 > (k+1)^3$$

$$3 \cdot 3^k + 2 \cdot (-2^k) > (k+1)^3$$

$$(1+2) \cdot 3^k + 2 \cdot -2^k > (k+1)^3$$

$$3^k + 3^k \cdot 2 - 2^k \cdot 2 > (k+1)^3$$

$$2(3^k - 2^k) + 3^k > (k+1)^3$$

$$2k^3 \cdot 3^k \overset{Hi}{>} (k+1)^3$$

$3^{k+1} - 2^{k+1} = 2(3^k - 2^k) + 3^k \underset{HI}{>} 2 \cdot k^3 + 3^k \overset{?}{\underset{(*)}{\geq}} (k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$

$(*)$ $\Leftrightarrow$

$k^3 + 3^k \geq 3k^2 + 3k + 1$

$k^3 + \underbrace{3^k}_{>0} > k^3$

Como queríamos probar.

PREGUNTAR como demostrarlo mejor.

iii) INDUCCIÓN SIMPLE CORRIDA

INDUCCIÓN

N71. Repasar.

P.I: Sea $k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

$\cdot$ Hi: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{3^i}{i!} < 6k-5$

Tengo a desarrollar la de la izq. Primero

$\cdot$ QPQ: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} \frac{3^i}{i!} < 6(k+1)-5$ en cálculo AUX

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{3^i}{i!} + \frac{3^{(k+1)}}{(k+1)!} < \cancel{6(k+1)-5}$$

$$< 6k-5 + \frac{3^{k+1}}{(k+1)!} \overset{Hi}{\leq} \cancel{6(k+1)-5}$$

$$6k + \frac{3^{k+1}}{(k+1)!} \overset{+5}{<} 6(k+1)$$

$$6k \cdot \left(\frac{3^k \cdot 3}{(k+1)!}\right) \overset{/6k}{<} 6k+6$$

$$\frac{3^{k+1}}{(k+1)!} < 6$$

Como $(k+1)!$ es mayor que 3^{k+1} para $k \geq 3$, se acerca al 0 y es menor que 6.

¿PUEDO hacer esto? $\dfrac{3^{k+1}}{\cancel{(k+1)!}} \cdot \cancel{(k+1)}! < 6(k+1)!$

$$\underbrace{3^{k+1}}_{\geq 81} < 6\underbrace{(k+1)!}_{\geq 144}$$

se cumple el P.I. $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ ✓ $\forall k \in \mathbb{N}_{\geq 3}$

Por lo tanto, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$.

17. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + n \cdot n!, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n!$, y, aplicando el Ej. 9i), calcular $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i!$.

ii) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = a_n + 3n^2 + 3n + 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Probar que $a_n = n^3$ y, aplicando el Ej. 9i), calcular de otra forma $\sum_{i=1}^{n} i^2$ (comparar con Ej 6).

i) Inducción Completa. Un solo caso base.

· Caso base: $n=1$, $a_1 = 1! \overset{?}{=} 1$ ✓

· P.I: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo

· HI: $a_k = k!$

· QPQ: $a_{k+1} = (k+1)!$

Pero por def de la sucesión

$a_{k+1} = a_k + k \cdot k!$

$$\overset{HI}{=} K! + K.K!$$

$$= K!(1+K)$$

$$= K!(K+1)$$

$$= (K+1)!$$

Como queríamos probar. $P(K) \Rightarrow P(K+1)$ ✓

Por lo tanto $P(n) \Rightarrow P(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} i.i! = (n+1)! - 1$$

ii) INDUCCIÓN COMPLETA. 1 CASO BASE.

Caso base: $n=1$, $a_1 = 1^3 \overset{?}{=} 1 = ✓$

P.I: sea $k \in \mathbb{N}$

- Hi: $a_k = k^3$
- QPQ: $a_{k+1} = (k+1)^3 \Rightarrow (k^2+2k+1)(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$

$k^3 + k^2 + 2k^2 + 2k + k + 1$

Pero por def de la sucesión

$a_{k+1} = a_k + 3k^2 + 3k + 1$

$\overset{Hi}{=} k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3$

Como queríamos probar. Por lo tanto $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ V

Por lo tanto $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ V $\forall n \in \mathbb{N}$

18. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1, \quad a_2 = 2 \quad$ y $\quad a_{n+2} = n\, a_{n+1} + 2(n+1)a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $a_1 = 1, \quad a_2 = 4 \quad$ y $\quad a_{n+2} = 4\sqrt{a_{n+1}} + a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$

iii) $a_1 = 1, \quad a_2 = 3 \quad$ y $\quad 2a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 3n + 5, \ \forall n \in \mathbb{N}$

iv) $a_1 = -3, \quad a_2 = 6 \quad$ y $\quad a_{n+2} = \begin{cases} -a_{n+1} - 3 & \text{si } n \text{ es impar} \\ a_{n+1} + 2a_n + 9 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

i) INDUCCIÓN GLOBAL. 2 CASO BASE, 2 Hi.

$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 6,\ a_4 = 2.6 + 2(3).2 = 24$

$a_5 = 3.24 + 2(3+1).6 = 120$

Conjetura: $a_n = n!$

Caso base:

$n = 1,\ a_1 = 1! \overset{?}{=} 1$ ✓

$n = 2,\ a_2 = 2! \overset{?}{=} 2$ ✓

· P.I: Sea $P(1), P(2) \ldots P(h), P(h+1) \Rightarrow P(h+2)$

· Hi: $a_k = k!$ $\quad a_{k+1} = (k+1)!$ $\quad 1 \le k \le h+1$

· QPQ: $a_{h+2} = (h+2)! = (h+1).(h+2)$

Pero por def de la recursión

$$a_{h+2} = h \cdot a_{h+1} + 2(h+1) \cdot a_h$$

$$\overset{HI}{=} h \cdot (h+1)! + 2(h+1) \cdot h!$$

$$= h\,(h+1)! + 2 \cdot (h+1)!$$

$$= (h+1)!\,(h+2)$$

$$= (h+2)! \checkmark$$

$h!\,(h+1) = (h+1)!$

$h\,(h+1)! \neq (h+1)!$

ii) INDUCCIÓN GLOBAL, 2 CASOS BASE

$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 4\sqrt{4} + 1 = 9$

$a_4 = 4\sqrt{9} + 4 = 16$

$a_n = n^2$

Casos base:

$n = 1,\ a_1 = 1^2 \overset{?}{=} 1 \checkmark$

$n = 2,\ a_2 = 2^2 \overset{?}{=} 4 \checkmark$

P.I: Sea $h \in \mathbb{N}$ fijo, queremos ver que $P(1), P(2) \ldots P(h), P(h+1) \Rightarrow P(h+2)$

$1 \leq k \leq h$

· Hi: $a_k = k^2 \wedge a_{k+1} = (k+1)^2$

· QPQ: $a_{h+2} = (h+2)^2$

Pero por def de la sucesión

$a_{h+2} = 4\sqrt{a_{h+1}} + a_h$

$\overset{Hi}{=} 4\sqrt{(h+1)^2} + h^2$

$= 4(h+1) + h^2$

$= 4h + 4 + h^2$

$= (h+2)^2$

Como queríamos probar. $P(1), P(2) \dots P(h), P(h+1) \Rightarrow P(h+2)$

Por lo tanto $P(n), P(n+1) \Rightarrow P(n+2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ✓

iii) INDUCCIÓN GLOBAL, 2 CASOS BASE

$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad 2a_3 \overset{n=1}{=} 3 + 1 + 3.1 + 5$

$2a_3 = 12$

$a_3 = 6$

$2a_4 = 6 + 3 + 3.2 + 5 = 20$

$a_4 = 10$

$2a_5 = 10 + 6 + 3.3 + 5 = 30$ $\qquad$ $2a_6 = 15 + 10 + 3.4 + 5 = 42$

$a_5 = 15$ $\qquad$ $a_6 = 21$

$$\begin{array}{cccccc} & & n=1 & n=2 & n=3 & n=4 \\ 1 & \underbrace{3} & \underbrace{6} & \underbrace{10} & \underbrace{15} & \underbrace{21} \\ & 3.1 & 3.2 & 2.5 & 3.5 & 3.7 \\ & 2+1 & 2.2+1 & 2.5 & 2.7+1 & 2.10+1 \end{array}$$

no cojo este.
xq los demás son 3n

iv)

$a_1 = -3,\quad a_2 = 6 \quad \overset{n=1}{a_3} = -6 - 3 = -9$

$\overset{n=2}{a_4} = \cancel{-9} + 2.6 + \cancel{9} = 12 \qquad \overset{n=3}{a_5} = -12 - 3 = -15$

son múltiplos de 3.

si n impar => negativos

si n par => negativos

$a_n = \underbrace{(-1)}^{n} . 3n$

no mete al 3, solo signo

Caso base:

$n = 1,\ a_1 = (-1)^1 . 3n = -3 \stackrel{?}{=} -3$ ✓

$n = 2,\ a_2 = (-1)^2 . 3.2 = 6 \stackrel{?}{=} 6$ ✓

P.I: Sea $h \in \mathbb{N}$. Quiero ver si $P(1), P(2) \ldots P(h), P(h+1) \Rightarrow P(h+2)$

Tengo dos Casos. $1 \leq k \leq h+1$

· Hi: $a_k = (-1)^k \cdot 3k \wedge a_{k+1} = (-1)^{k+1} \cdot 3(k+1)$

· QPQ: $a_{h+2} = (-1)^{h+2} \cdot 3(h+2)$

Veo Caso por Caso.

CASO h impar:

$a_{h+2} = -a_{h+1} + 3$ h impar, h+1 par.

$\overset{Hi}{=} -1\left((-1)^{h+1} \cdot 3(h+1)\right) + 3$

$= (-1)^{+2} \cdot 3(h+1) + 3$ OBS: $a(a^{k+1} \cdot b) = a^{k+2} \cdot b$

$= (-1)^{h+2} \cdot 3h + 3 + 3$

$= (-1)^{h+2} \cdot 3h + 6$

$= (-1)^{h+2} \cdot 3(h+2)$ ✓

CASO h PAR:

→ h PAR, h+1 IMPAR ⇒ (-1)

PAR ⇒ 1

$a_{h+2} = (-1)^{h+1} \cdot 3(k+1) + 2(-1)^{h} \cdot 3k + 9 =$

Un pos $(-1)^h = 1$ $\quad -(3h+3) + 6h + 9$

$(-1)^{h+1} = -1$ $\quad = 3h + 6 = 3(h+2) \cdot (-1)^{h+2}$

Lo ofrezco xq quiero que $(-1)^{k+2}=(-1)^k$ $=1$

Ya que $(-1)^k=1$ y $(-1)^{k+2}=1$ TMB

12. Probar que

i) $n! \geq 3^{n-1}, \ \forall n \geq 5$

ii) $3^n - 2^n > n^3, \ \forall n \geq 4$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{3^i}{i!} < 6n-5, \ \forall n \geq 3$

HI $\quad 3^k - 2^k > k^3 \qquad k \geq 4$

QPQ: $\quad 3^{k+1} - 2^{k+1} > (k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$

$$3\cdot 3^k - 2\cdot 2^k \underset{-2>-3}{>} 3\cdot 3^k - 3\, 2^k = 3\,(3^k - 2^k) \underset{HI}{>}$$

$3k^3$. Si veo $\quad 3k^3 \geq (k+1)^3 \quad$ listo.

(*) *

Forma 1

(*) $\iff 3k^3 \geq k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \iff$

$$2k^3 \geq 3k^2 + 3k + 1$$

$$2k^3 = k^3 + k^3 = \underbrace{k}_{\geq 4}.k^2 + k^3 \geq 4k^2 + k^3 =$$

$$3k^2 + k^2 + k^3 = 3k^2 + \underbrace{k}_{\geq 4}\cdot k + k^3 \geq$$

$$3k^2 + \underbrace{4}_{>3}k + \underbrace{k^3}_{\geq 1} > 3k^2 + 3k + 1$$

Forma 2

(*) $\quad k^3 = k\, k^2 \geq 4k^2 = 3k^2 + k^2 = 3k^2 + k.k \geq$

$$3k^2 + 4k = 3k^2 + 3k + \underbrace{k}_{\geq 4} \geq 3k^2 + 3k + 1$$

Lo que hizo fue agarrar el $3k^3$ y trabajar solo el k^3

xq tengo q ver que sea mayor o igual a $(k+1)^3$ que es:

k^3+3k^2+3k+1

por lo tanto comparo $3k^3$ con k^3.

Como sé que el mínimo k es 4, digo que

Como $k^3 = k.k^2 \geq 4k^2$ que ya de por sí es

mayor a $3k^2$.

BASICAMENTE, ACOTA POR K y trata de llegar a ver si es >.

19. i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 5a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(a) Probar que $a_n < 1 + 3^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Hallar una fórmula para el término general de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y probar su validez.

ii) Hallar una fórmula para el término general de la sucesión definida por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 4 \quad \text{y} \quad a_{n+2} = 4\,a_{n+1} - 4\,a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}_0$$

y probar su validez.

$n=1$ $\qquad$ $n=2$

$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_3 = 3+5 = 8,\ a_4 = 8+5.3 = 23$

$a_5 = 23+5.8 = 63$

Caso base:

$$n=1,\ a_1 < 1+3^{1-1} = \overset{1}{\widetilde{a_1}} < 2$$

$$n=2,\ a_2 < 1+3^{1} = \overset{3}{\widetilde{a_2}} < 4$$

P.I: Sea $h \in \mathbb{N}$, queremos v $P(1), P(2) \dots P(h), P(h+1) \Rightarrow P(h+2)$

$\cdot$ Hi: $a_k < 1+3^{k-1} \quad a_{k+1} < 1+3^{k} \quad 1 \leq k \leq h+1$

$\cdot$ QPQ: $a_{h+2} < 1+3^{h+1}$

Pero por def de la recursión

$$a_{h+2} = a_{h+1} + 5a_h \overset{Hi}{<} 1+3^h + 5(1+3^{h-1})$$

$$1+3^h+5+5.3^{h-1} = \underline{6}+\underline{3}^h+\underline{5}.3^{h-1}$$

= Como tengo algo más grande puedo acotar el 5 por 3^2.

$$6+3^h+3^2.3^{h-1} = \underbrace{6+3^h+3^{h+1}}_{\text{no me sirve me pasé de } 1+3^{h+1}}$$

$$1+3^h+5+5.3^{h-1} = 1+3^{h+1}\Big(\underbrace{\tfrac{1}{3}+\tfrac{5}{3^{h+1}}+5\cdot\tfrac{1}{9}}_{\leq 1}\Big)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{3^{k+1}} + \frac{5}{9} \le 1 \iff \frac{5}{3^{k+1}} \le 1 - \frac{8}{9} \iff \frac{5}{3^{k+1}} \le \frac{1}{9}$$

$$\iff 5 \le \frac{1}{9} \cdot 3^k \cdot 3 \iff 5 \le 3^k \cdot \frac{1}{3} \iff 15 \le 3^k$$

Esto es cierto cuando $k \ge 3$

Como dato tenía a_1 y a_2 para el Pi. Veo si a_3 vale. Debo "tirar" el 3ro para los demás

a_1 y a_2 no fueron tan fuertes como para tirar a_3 con suficiente fuerza para tirar a_4.

$n=1$

$$a_3 = a_2 + 5a_1 \iff a_3 = 3+5 = 8$$

$$8 < 1 + 3^2 \iff 8 < 9$$

21. Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez.

i) $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} i\, a_i,\ \forall n \in \mathbb{N}$

ii) $a_1 = \frac{1}{2}$ y $a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\Big),\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$a_1 = 1,\quad a_2 = 1 + \sum_{i=1}^{1} i \cdot a_i = 1 + (1.1) = 2$$

$$a_3 = 1 + \sum_{i=1}^{2} i \cdot a_i = 1 + (1.1 + 2.2) = 6$$

$a_4 = 1 + \sum_{i=1}^{3} i \cdot a_i = 1 + (1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 6) = 24$

$a_5 = 1 + \sum_{i=1}^{4} i \cdot a_i = 1 + (1 + 4 + 18 + 4\cdot 24) = 120$

1 2 6 24 120

$a_n = n!$

INDUCCIÓN COMPLETA CON 1 CASO BASE ∵ XQ PARA a_{n+1} solo requiero a_n.

Caso base: $n=1$, $a_n = 1! \stackrel{?}{=} 1$ ✓

P.I: uso PrEIn, quiero ver $P(1), P(2) \ldots P(h) \Rightarrow P(h+1)$

HI: $a_k = k!$ $\qquad 1 \le k \le h$

QPQ: $a_{h+1} = (h+1)!$

Pero por def de la sucesión

$a_{h+1} = 1 + \sum_{k=1}^{h} k \cdot a_k$

$\stackrel{HI}{=} 1 + \sum_{k=1}^{h} k \cdot k!$

Cuanto da?

Por Ej 17: $\sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$

$= 1 + (h+1)! - 1$

$= \ldots (n+1)! \ldots$

$= (h+1)!$

ii) $a_1 = \frac{1}{2}$ $\quad a_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{1} a_i\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$

$a_3 = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{i=1}^{2} a_i\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{8}$

$a_n = \frac{1}{2^n}$

Caso base: $n = 1$, $a_1 = \frac{1}{2^1} \overset{?}{=} \frac{1}{2}$

P.I: Sea $h \in \mathbb{N}$, quisieramos ver $P(1), P(2) \ldots P(h) \Rightarrow P(h+1)$

Hi: $a_k = \frac{1}{2^k}$ $\quad 1 \leq k \leq h$

QpQ: $a_{h+1} = \frac{1}{2^{h+1}}$

Pero por def de suc.

$a_{h+1} = \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{k=1}^{h} a_k\right)$

Hi ... h ...

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \sum_{k=1} \frac{1}{2^k}\right)$$

$$\underbrace{}_{k=1} \quad \frac{1}{2^n} \Rightarrow \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$$

lo muevo a $k=0$, le resto el 1 en 7.

OJO serie geom. infinita

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{} - 1\right)\right)$$

serie geométrica $\dfrac{r^{n+1} - 1}{r - 1}$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 1\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1} - \left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{2}}\right) \qquad \frac{1}{2} = a$$

$$= a\left(\frac{-a(a) - (a)^{n+1} - 1}{-a}\right)$$

$$= a\left(\frac{-a^2 - a^{n+1} - 1}{-a}\right)$$

$$= -\left(-a^2 - a^{n+1} - 1\right)$$

$$= a^2 + a^{n+1} - 1$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1$$

$$= X$$

10)

iii) Caso base:

$n=1, \quad 1 \le 1$ ✓

$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \quad \sum^{2^n} \quad \sum_{j=1}^{n} 2^{2^n}$

P.I: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo

H.I: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{k+i}{i+1} \le 1 + k(k-1)$

QPQ: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{i+1} \le \overbrace{1+(k+1)(k-1)}^{k^2+2}$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{k+1+i}{i+1} + \frac{k+1+(k+1)}{(k+1)+1}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{k+\overbrace{1+i}^{j}}{i+1} \right) + \frac{2k+2}{k+2}$$

$j = i+1$

$1 \le i+1 \le k$

$2 \le j \le k+1$

$$= \left(\sum_{j=2}^{k+1} \frac{k+j}{j} \right) + \frac{2k+2}{k+2}$$

$\sum_{i=1}^{n} a_k + a_n - a_n$

$$= \left(\sum_{j=2}^{k} \frac{k+j}{j} + \frac{2k+1}{k+1} \right) + \frac{2k+2}{k+2}$$

Al moverla hacia atrás es como hacer $\sum_{j=2}^{k} \frac{(k+j)}{j} + (k+1)$

$$= \left(\sum_{j=1}^{k} \frac{k+j}{j} \right) - (k+1) + \frac{2k+2}{k+1} + \frac{2k+2}{k+2}$$

$\leq k^2+2$

HI

$$\leq k^2+2 + \frac{(k+1)(k+2)(k+1) + (k+2)(2k+1) + (k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+2)} \leq QPO$$

n+1. Separar la sumatoria

$$\text{Ojo } \frac{\sum}{\sum} \neq \sum \tilde{=}$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+1+i}{i+1} = \left(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{k+i}{i+1} \right) + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{1}{i+1}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{K} \frac{k+i}{i+1} \right) + \frac{2k+1}{k+2} + \left(\sum_{i=1}^{K} \frac{1}{i+1} \right) + \frac{1}{k+2}$$

HI

$$\leq k^2+2+\frac{2k+1}{k+2}+\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i+1}\right)}_{\sum_{i=1}^{k}\ \leq \frac{1}{2}}+\frac{1}{k+2}$$

$$\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

10. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

ii) $3^n \geq n^3$

iii) $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{i+1}} \leq 1 + n(n-1)$

iv) $\sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$

v) $\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$

vi) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

vii) $\prod_{i=1}^{n} \frac{4i-1}{n+i} \geq 1$

iv) $\sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$

Caso base $n=1$, $\sum_{i=1}^{2} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2}+\frac{2}{4} \leq 1$

$= 1 \leq 1$ ✓

· Pi: Sea $k \in \mathbb{N}$ fijo.

· Hi: $\sum_{i=k}^{2k} \frac{i}{2^i} \leq k$

$\sum^{2k+2}$ ...

· QPQ: $\sum_{i=k+1} \frac{\omega}{2^i} \le k+1$

$$\sum_{i=k+1}^{2k+2} \frac{i}{2^i} = \sum_{i=k+1}^{2k} \frac{i}{2^i} + \frac{(2k+1)}{2^{2k+1}} + \frac{(2k+2)}{2^{2k+2}}$$

$$= \sum_{i=k}^{2k} \frac{i}{2^i} + \frac{(2k+1)}{2^{2k+1}} + \frac{(2k+2)}{2^{2k+2}} - \frac{k}{2^k}$$

hi

$$\le k + \frac{2k+1}{2^{2k+1}} + \frac{2k+2}{2^{2k+1}\cdot 2} - \frac{k}{2^k}$$

$$\Leftrightarrow k + \frac{2(2k+1)+2k+2}{2\cdot 2^{2k+1}} - \frac{k}{2^k}$$

$$\Leftrightarrow k + \frac{4k+2+2k+2}{2\cdot 2^{k+1}} - \frac{k}{2^k}$$

$$\Leftrightarrow k + \frac{4k+2+2k+2+4(-k)}{2\cdot 2^k\cdot 2}$$

$$\Leftrightarrow k + \frac{6k+4-4k}{2\cdot 2^k\cdot 2}$$

$$\Leftrightarrow k + \frac{2k+2}{2^k \cdot 2 \cdot 2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2^{k+2}) \cdot k + 2k + 2}{2^{k+2}}$$

10. Probar que las siguientes desigualdades son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $3^n + 5^n \geq 2^{n+2}$

ii) $3^n \geq n^3$

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{i+1} \leq 1 + n(n-1)$

iv) $\displaystyle\sum_{i=n}^{2n} \frac{i}{2^i} \leq n$

v) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$

vi) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \leq 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

vii) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{4i-1}{n+i} \geq 1$

v) $\displaystyle\sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2i-1} > \frac{n+3}{4}$

HI: $\displaystyle\sum^{2^k} \frac{1}{2i-1} > \frac{k+3}{4}$

$$\sum_{i=1} \frac{}{2i-1} \quad 4$$

$$QPQ: \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2i-1} > \frac{k+4}{4}$$

$$\sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2k+1} = \sum_{i=1}^{2^k \cdot 2^k} \frac{1}{2i-1} = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2i-1} + \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2i-1}$$

H.i.

$$> \frac{K+3}{4} + \underbrace{\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2i-1}}$$

· Como lo acerco a 0 acoto por el último término

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2(2^{k+1})-1}$$