$$\binom{\;}{41}$$

y A tiene 1 q no está en B

$$\binom{577}{1}$$

$$\longrightarrow \binom{42}{41} \cdot \binom{577}{1}$$

3. B tiene 2 más que A. Si B fijo, entonces

$$A = \binom{42}{40}$$

RTA: Hay $\overset{\#(A\Delta B)=0}{1} + \overbrace{\binom{42}{41} + \left(1 \cdot \binom{577}{1}\right)}^{\#(A\Delta B)=1} + \overbrace{\left(\left(1 \cdot \binom{577}{2}\right) + \left(\binom{42}{41} \cdot \binom{577}{1}\right) + \binom{42}{40}\right)}^{\#(A\Delta B)=2}$ posibilidades

TIP Thoni: siempre que hablamos de conjuntos hablamos de nro combinatorio pues ej:

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{\underbrace{2!\,2!}} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{2! \cdot \cancel{2}} = \frac{4 \cdot 3}{2!}$$

$\rightarrow$ Elimina las permutaciones pues $\{1,2\} = \{2,1\}$

$(1,2) = (2,1)$

Y si son funciones habremos de factoriales.

BIYECTIVA: $m!$

INY: $\frac{k!}{(m-k)!}$

4. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $(a : b) = 7$. Calcular los posibles valores de $(15a^2 - 9b + 27 : 189)$ y dar un ejemplo de a y b para cada caso.

$$d = (15a^2 - 9b + 27 : \overset{3.3.7.3}{189})$$

$a = 7a'$ $\quad b = 7b'$ con $a' \perp b'$

$$d = (15(7a')^2 - 9(7b') + 27 : 3.3.7.3)$$

$$= (15.7^2.a'^2 - 9.7b' + 27 : 3.3.7.3)$$

$$= (3(5.7^2 a'^2 - 3.7b' + 9 : 3.3.7.3))$$

$$= (3(5.7^2.a'^2 - 3.7b' + 9) : 3(3.7.3))$$

$$d' = 3\underbrace{(245.a'^2 - 21b' + 9 : 3.7.3)}_{d'}$$

$\lfloor 3.$

Pruebo con los divisores de 63

Div: $\{1, 3, 7, 9, 21, 63\}$ RDO $a' \perp b'$

P

Caso 3:

$$245a'^2 - 21b' + 9 \underset{(3)}{\equiv} 2a'^2 \ (3)$$

Luego Tabla de restos a' MOD 3

a'	0	1	2
$2(a')^2$	0	2	2

MOD 3

Solo vale si: $a \equiv 0(3)$

Caso 7:

$$245a'^2 - 21b' + 9 \underset{(7)}{\equiv} 2 \ (7)$$

7 no vale nunca

Caso 9:

$$245a'^2 - 21b' + 9 \underset{(9)}{\equiv} 2a'^2 + 6b' \ (9)$$

RDO: $a' \equiv 0(3) \iff a' = 3k$

$$2\underbrace{(3k)^2}_{9k^2 \underset{(9)}{\equiv} 0} + 6b' \underset{(9)}{\equiv} 6b' \ (9)$$

Tabla de restos

b'	0	1	2	3	4	5	6	7	8
b'	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$6b'$	0	6	$\neq 0$	0	$\neq 0$	$\neq 0$	0	$\neq 0$	$\neq 0$

MOD 9

9 divide si $b' \equiv 0(9)$

$b' \equiv 3(9)$

$b' \equiv 6(9)$

Caso 21: no pues 7 no divide

Caso 63: tampoco pues 7 no divide $(63 = 7\cdot 9)$

Conc: 9 divide si $b' = 9k$, $b' = 9k+3$

y $b' = 9k+6$ y $a' = 3k$

En cualquier otro, el mcd es 3.

Ej: $a = 3$, $b = 18$ el mcd es 9

$(15\cdot 9 - 9\cdot 18 + 27 : 189)$

McL

23. i) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{b+4}{a} + \dfrac{5}{b} \in \mathbb{Z}$.

ii) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{9a}{b} + \dfrac{7a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$.

iii) Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $\dfrac{2a+3}{a+1} + \dfrac{a+2}{4} \in \mathbb{Z}$.

i) $a \perp b$

$$\frac{b+4}{a} + \frac{5}{b} = \frac{b(b+4)+5a}{ab}$$

$$= \frac{b^2+4b+5a}{ab}$$

$a \perp b \wedge a \mid 5a \Rightarrow a \mid b^2+4b$

$$ab \mid b^2+4b+5a \overset{1}{\Rightarrow} a \mid b^2+4b \quad \text{ABS}$$

$$\overset{2}{\Rightarrow} b \mid \underset{c}{5a} \Rightarrow b \mid a \vee b \mid 5$$

Los posibles b son los divisores de 5: $\{1;5\}$

Caso $b=1$ (Cualquier a será coprimo pero luego $\in \mathbb{Z}$)

$$\frac{1+4}{a} + 5 = \frac{5}{a} + 5 = 0$$

$$5 = -5a$$

$$\boxed{a=-1} \quad 1 \perp -1.$$

VERIF: $\frac{1+4}{-1} + \frac{5}{1} = 0 \checkmark \in \mathbb{Z}$

¿$b=-1$ vale?

$$\frac{(-1)+4}{a} + \frac{5}{-1} = 0$$

$$3 = 5a$$

$$\frac{3}{5} \notin \mathbb{Z}$$

Caso $b=5$

$$\frac{5+9}{a} + \frac{}{5} = 0$$

$$9 = -a$$

$$a = -9 \checkmark$$

Vale para $5 \perp 9$ pues $(5:-9) = (5:9) = 1$

Caso $b = -5$ $\quad \frac{(-5)+4}{a} + \frac{5}{-5} = 0$

$$\frac{-1}{a} = 1$$

$$-1 = a$$

Vale para $-5 \perp -1$.

Luego los pares son:

$(1,-1)$, $(5,-9)$ y $(5,-1)$

Ejercicio 4. Determinar todos los $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$(n^{385} + 17n + 68 : 2023) = 119.$$

Expresar las soluciones mediante una única ecuación.

$2023 = 7 \cdot 17^2$ luego $119 = 7 \cdot 17$ entonces

$7 \cdot 17$ debe dividir a $n^{385} + 17n + 68$ pero no $\overbrace{7 \cdot 17^2}^{17^2 \nmid}$.

Ent, $7 \overset{?}{|} n^{385} + 17n + 68$ y $17 \overset{?}{|} n^{385} + 17n + 68$

Caso $7 | n \Rightarrow 0^{385} + 0 + 68 \equiv 5 \ (7)$ Luego, $7 \nmid n$. ABS.

Caso $7 \nmid m \Rightarrow m^6 \equiv 1(7)$

$$385 = 6 . 64 + 1$$

$$\Rightarrow m^1 + 17m + 68 \underset{(7)}{\equiv} 18m + 68 \, (7)$$

Ent, $18m + 68 \underset{(7)}{\overset{?}{\equiv}} 4m + 5 \underset{(7)}{\overset{?}{\equiv}} m + 3 \, (7) \Leftrightarrow \boxed{m \equiv 4(7)}$

Luego 7 divide sii $m \equiv 4(7)$.

VERIF: $4 + 17(4) + 68 \underset{(7)}{\equiv} 140 \underset{(7)}{\equiv} 0(7)$ ✓

Caso $17 \mid m \Rightarrow 0 + 0 + 68 \underset{(17)}{\equiv} \boxed{0(17)}$. Luego $17 \mid M$

Caso $17 \nmid m \Rightarrow$ Como 17 es PRIMO, y $17 \nmid m$ por el PTF sé que

$$m^{16} \equiv 1(17)$$

Luego, $385 = 16 . 24 + 1$

Ent, $m^1 + 17m + 68 \underset{(17)}{\equiv} 18m + 68 \underset{(17)}{\equiv} \overset{17 \nmid m}{\overbrace{m}} \, (17)$

Pero esto es ABS pues $17 \nmid M$.

Caso $17^2 \mid m$ (espero ABS) $\Rightarrow 0 + 0 + 68 \underset{(17^2)}{\equiv} 68$, luego $17^2 \nmid m^{385} + 17m + 68$

Caso $17^2 \nmid m \Rightarrow$ No puedo usar PTF pues 17^2 no es PRIMO.

Ahora hago un TCR.

$\begin{cases} m \equiv 0(17) \end{cases}$ Como $17 \perp 7$. Por el TCR

/ $M \equiv 4(7)$ $\qquad$ ∃ solución y es única MOD 119

$\boxed{S1}$ $7y_1 \equiv 0(17) \overset{\cdot 5,\ 5 \perp 17}{\iff} y_1 \equiv 0(17) \Rightarrow x_1 = 0$

$\boxed{S2}$ $17y_2 \equiv 4(7) \iff 3y_2 \equiv 4(7) \overset{\cdot 2,\ 2 \perp 7}{\iff} -y_2 \equiv 1(7)$
$\iff y_2 \equiv 6(7) \Rightarrow x_2 = 102$

Luego, $M \equiv 102(119)$

Verif: $\begin{cases} 102 \equiv 0(17) \iff 0 \equiv 0(17) \\ 102 \equiv 4(7) \qquad 4 \equiv 4(7) \end{cases}$ ✓

Los M que cumplen son aquellos que $M \equiv 102(119)$
osea $119k + 102 \ \forall k \in \mathbb{Z}$

PREG. ¿Qué faltaría para que esté bien bien?

No se aceptan preguntas: la interpretación de los enunciados es parte del examen.

Ejercicio 1. Hallar todos los pares $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{Z}^2$ que cumplen simultáneamente
$728\,\mathbf{a} + 952\,\mathbf{b} = 56$ y $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b})^{2022} \equiv 114 \pmod{11}$.

Hago diofántica

$728a + 952b = 56$ $\qquad$ $728 = 2^3 \cdot 7 \cdot 13$

$952 = 2^3 \cdot 7 \cdot 17$

¿$2^3 \cdot 7 \mid 56$? sí.

Coprimos,

$$13a + 17b = 1$$

13 26 39 52 65 78 91 104

17 34 51

Solución particular

$a = 4 \quad b = -3$

Solución homogénea

$$13a + 17b = 0$$

$a = 17, \; b = -13$

Solución gral:

$$(\underbrace{4+17k}_{a};\ \underbrace{-3-13k}_{b})$$

$37^2 \mid (x-y)^{2023}$

$37 \mid x-y$

Ahora, $(a+2b)^{2022} \equiv 114\,(11)$

$$\Updownarrow$$

$$(a+2b)^{2022} \equiv 4\,(11)$$

$$\Updownarrow$$

$$(4+17k+2(-3-13k))^{2022} \equiv 4\,(11)$$

$$\Updownarrow$$

$$(4+17k-6-26k)^{2022} \equiv 4\,(11)$$

$$\Updownarrow$$

$$(-2-9k)^{2022} \equiv 4\,(11)$$

$\neq 0 \Rightarrow$ no divide, PRESTAR ATENCIÓN! NOS AYUDA A USAR PTF.

En este momento vemos que $11 \nmid (-2-9k)$ por el resto en 4.

Como $11 \nmid (-2-9k)^{2022}$ por el PTF sé que

$(-2-9k)^{10} \equiv 1(11)$

$2022 = 10 \cdot 202 + 2$

Ent, $\left((-2-9k)^{10}\right)^{202} \cdot (-2-9k)^{2} \equiv 4(11)$

p4p
$\Leftrightarrow (-2-9k)^{2} \equiv 4(11)$

$\Leftrightarrow (-2)^2 + 2\cdot(-2)\cdot(-9k) + (-9k)^2 \equiv 4(11)$

$\Leftrightarrow 4 + 36k + 81k^2 \equiv 4(11)$

$\Leftrightarrow \underline{4k^2 + 3k + 4 \equiv 4(11)}$

Busco los k para resolver la ecuación

→ Ocultar resultados en distintos

Tabla de restos mod 11

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	mod 11
$4k^2+3k+4$	$\boxed{4}$	0	$\boxed{4}$	5	3	9	1	1	9	3	5	

Luego, $4k^2+3k+4 \equiv 4(11) \Leftrightarrow k \equiv 0(11), k \equiv 2(4)$

- Si $k \equiv 0(11)$, ent $k = 11q$ con $q \in \mathbb{Z}$

La diofántica: $(4 + 17(11q) \, ; \, -3 - 13(11q))$

$\Rightarrow (4 + 187q \, ; \, -3 - 143q)$

VERIF: $q = 1$, $(191 ; -146)$ ✓

$7280a + 9520b = 56$ ✓

• Si $K \equiv 2\ (4) \Rightarrow K = 4q + 2$

La diofántica

$$(4 + 17(4q+2) \,;\, -3 - 13(4q+2))$$

$$\Rightarrow (38 + 68q \,;\, -29 - 52q)$$

VERIF: $q = 1$, $(106 \,;\, -81)$

$728a + 952b = 56$ ✓

Luego, las formas son: $(4 + 187q \,;\, -3 - 143q)$

y

$(38 + 68q \,;\, -29 - 52q)$ con $q \in \mathbb{Z}$

PREGUNTAR SI HICE BIEN

Ejercicio 3) Hallar los posibles restos de dividir a $n \in \mathbb{N}$ por 68 sabiendo que

$$\left(n^{832} + 17n + 390 : 1156\right) = 4$$

Primero busco la forma de n.

Si el MCD es 4 significa que $(n^{832} + 17n + 390)$ tiene en su factorización solo al 2^2.

Uso TCR?

$1156 = 2^2 . 17^2$

Ent, 17 mi 17^2 dividen a m^{0} + 17m + 390

Caso $2 \mid m \iff 0^{832} + 17(0) + 390 \equiv 0(2)$ ✓ $m \equiv 0(2)$

Caso $2 \nmid m$, si 2 es primo y $2 \nmid m$ ent $2 \nmid m$.

Por el PTF, $m \equiv 1(2)$

$832 = 1.832 + 0$

Ent $(m^1)^{832} \cdot m^0 + 17m + 390 \overset{PTF}{\underset{(2)}{\equiv}} 391 + 170$

$\iff m + 1 \underset{(2)}{\iff} m \equiv 1(2)$ Luego, $2 \nmid m$.

Caso $2^2 \mid m \Rightarrow 0^{832} + 17(0) + 390 \underset{(2^2)}{\equiv} 1(2)$. Luego $2^2 \nmid m^{832} + 17m + 390$

Caso $2^2 \nmid m \Rightarrow$ ¿Qué luego? Euler Fermat $a^{p(p-1)} \equiv 1(p^2)$

$m^{4(3)} \equiv 1(4) \iff m^{12} \equiv 1(4)$

$832 = 12.69 + 4$

Luego $2^2 \nmid m \Rightarrow m^4 + 17m + 390 \underset{(4)}{\equiv} m^4 + m + 2$

Tabla de restos MOD 4

m	0	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	3
$m^4 + m + 2$	2	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	2

MOD 4

Luego, $2^2 \nmid m$ si $\overbrace{m \equiv 1(4)}^{1} \vee m \equiv 2(4)$

Veo ahora que $17 \nmid M$:

→ Espero que resto sea distinto de 0.

Como $17 \mid M \Rightarrow 0^{832} + 17(0) + 390 \underset{(17)}{\equiv} 16(17)$ ¡ABS! Cumple que $17 \nmid M$ necesariamente

Luego $17 \nmid M$.

Como $17 \nmid M \Rightarrow$ Como 17 es primo y $17 \nmid M$ por el

PTF sé que $M^{16} \equiv 1(17)$

$832 = 16 \cdot 52 + 0$

No nos importa

Luego, $(M^{16})^{52} \cdot M^{0} + 17M + 390 \underset{(17)}{\overset{PTF}{\equiv}} 17M + 391 \underset{(17)}{\equiv} 0(17)$

Así, $\begin{cases} M \equiv 0(17) \\ M \equiv 1(4) \end{cases}$ Ahora como $17 \perp 4$ dos a dos por el TCR $\exists$ solución y es módulo 68

(S1) $4y_1 \equiv 0(17) \Leftrightarrow y_1 \equiv 0(17) \Rightarrow x_1 = 0$

(S2) $17y_2 \equiv 1(4) \Leftrightarrow y_2 \equiv 1(4) \Rightarrow x_2 = 17$

Luego $M \equiv 17(68) \Rightarrow M = 68k + 17$

¿Qué resto tengo MOD 68?

$68k + 17 \underset{(68)}{\equiv} 17(68)$

Por otro lado, $\begin{cases} n \equiv 0\,(17) \\ n \equiv 2\,(4) \end{cases}$ Como $17 \perp 2$ dos a dos, ∃ solución y es MOD 68

(S1) $4y_1 \equiv 0\,(17) \Rightarrow x_1 = 0$

(S2) $17y_2 \equiv 2\,(4) \iff y_2 \equiv 2\,(4)$

$\Rightarrow x_2 = 34$

Luego, $n \equiv 34\,(68)$

Entonces, $68k + 34 \underset{(68)}{\equiv} 34\,(68)$

Luego los restos son 17 y 34.

1. Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(24a^{25} - 2a^{19} - 2a : 70) = 14$.

$70 = \underline{2} . 5 . \underline{7}$

Y como el MCD es 14, entonces 2 y 7 dividen pero 5 no.

→ Si voy a usar el PTF debo chequear $5|a$ $5 \nmid a$ siempre.

Caso $5 | a$

$\Rightarrow 24(0)^{25} - 2(0)^{19} - 2.0 \underset{(5)}{\equiv} 0(5)$ ABS.

Caso $5 \nmid a$

Como 5 es primo, y $5 \nmid a$ vale que por el PTF

$$a^4 \equiv 1(5)$$

Así, $25 = 4.6 + 1$

$19 = 4.4 + 3$

$$24(a^4)^6 . a^1 - 2.(a^4)^4 . a^3 - 2a \underset{(5)}{\overset{PTF}{\equiv}} 24a + 3a^3 + 3a$$

$\Leftrightarrow 2a + 3a^3 \ (5) \Leftrightarrow a(2 + 3a^2) \equiv 0(5)$

$\Leftrightarrow \underbrace{a \equiv 0(5)}_{\text{ABS. } 5 \nmid a} \vee 3a^3 \equiv 3(5)$ *

* $\overset{/3}{\Leftrightarrow} a^3 \equiv 1(5)$ Luego, vale si $a \equiv 1(5) \vee a \equiv 4(5)$

Los que cumplen esto $5 | a$ (no me sirven)

a	0	1	2	3	4
a^2	0	1	4	4	1

MOD 5

Valen pues buscamos que $5 \nmid a$ ✓

No vale, pues buscamos que $5 \nmid a$.

Caso $2 | a$:

$2 | 24(0)^{25} - 2(0)^{19} - 2(0) \Leftrightarrow 0 \equiv 0(2)$ 2 DIVIDE

Caso $2 \nmid a$:

Como 2 es primo y $2 \nmid a$ por el PTF

sé que $a \equiv 1 (2)$

$25 = 1.25 + 0 \qquad 19 = 1.19 + 0$

Entonces, $\underbrace{24.(a^1)^{25}.a^0}_{24} - 2(a^1)^{19}.\underbrace{a^0}_{1} - 2a \underset{(2)}{\equiv} 22 - 2a \equiv 0 (2)$

Luego 2 divide $\forall a \in \mathbb{Z}$

Caso $7 \mid a$:

$7 \mid 24(0)^{25} - 2(0)^{19} - 2(0) \iff 0 \equiv 0 (7)$. 7 DIVIDE

Caso $7 \nmid a$:

Como 7 es primo y $7 \nmid a$ por el PTF

$a^6 \equiv 1 (7)$

$25 = 6.4 + 1 \qquad 19 = 6.3 + 1$

Entonces, $24.(a^6)^4.a^1 - 2(a^6)^3.a^1 - 2a \underset{(7)}{\equiv} -a \; (7)$

Pero como $7 \nmid a$ esto es ABS.

$7 \mid 24a^{25} - 2a^{19} - 2a$ sii $a \equiv 0 (7)$

$2 \mid 24a^{25} - 2a^{19} - 2a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$

$5 \mid 24a^{25} - 2a^{19} - 10a$ sii $a \equiv 1(5) \vee a \equiv 4(5)$

$$\begin{cases} a \equiv 0(7) \\ a \equiv 0(2) \\ a \equiv 2(5) \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} a \equiv 0(7) \\ a \equiv 0(2) \\ a \equiv 3(5) \end{cases}$$

×7 [illegible] no lo pone?

×7 Como divide siempre la solución es PAR o impar tío sí.

El caso $2 \mid a$ y $2 \nmid a$ nos dice que vale para par e impar

Ent
$$\begin{cases} a \equiv 0(7) \\ a \equiv 2(5) \end{cases} \qquad \begin{cases} a \equiv 0(7) \\ a \equiv 3(5) \end{cases}$$