Álgebra I
Práctica 1 - Conjuntos, Relaciones y Funciones

Conjuntos

1. Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas

i) $1 \in A$ ii) $\{1\} \subseteq A$ iii) $\{2, 1\} \subseteq A$ iv) $\{1, 3\} \in A$ v) $\{2\} \in A$

1) i) $1 \in A$, sí pues $\{1\} \subseteq A$
(el subconjunto formado por 1
está incluido en A)

ii) $\{1\} \subseteq A$, sí pues todos los elementos $\in A$.

iii) $\{2,1\} \subseteq A$, sí pues todos los elementos del
conjunto $\{2,1\}$ están en A.

iV) $\{2\} \in A$, no pues $\{2\}$ no es un elemento
de A

2. Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

i) $3 \in A$	iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$	vii) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$	x) $\emptyset \subseteq A$
ii) $\{3\} \subseteq A$	v) $\{1, 2\} \in A$	viii) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$	xi) $A \in A$
iii) $\{3\} \in A$	vi) $\{1, 2\} \subseteq A$	ix) $\emptyset \in A$	xii) $A \subseteq A$

2) i) $3 \in A$. no

ii) $\{3\} \subseteq A$. no pues $3 \notin A$.

iii) $\{3\} \in A$. sí

iv) $\{\{3\}\} \subseteq A$. Sí pues $\{3\} \in A$.

v) $\{1,2\} \in A$. Sí pues $\{1,2\}$ está como elemento en A.

vi) $\{1,2\} \subseteq A$. Sí pues, del conjunto $\{1,2\}$, $1 \in A$ y $2 \in A$

vii) $\{\{1,2\}\} \subseteq A$ $(\{1,2\} \in A)$. Sí

viii) $\{\{1,2\},3\} \subseteq A$ $(\{1,2\} \in A, 3 \in A)$. no

ix) $\emptyset \in A$. No, solo en los conjuntos donde $\emptyset$ está presente.

x) $\emptyset \subseteq A$. Sí

xi) $A \in A$ $\{1,2,\{3\},\{1,2\}\} \in A$. NO

$A = \{1\}$ $\qquad$ $A = \{\{1\}\}$

$\{\{\{1\}\}\}$

xii) $A \subseteq A$. Sí. siempre

¿Cómo entender rápido?

$\{\{1,2,3\}\} \subseteq A \Leftrightarrow \{1,2,3\} \in A$.

O al revés, $1 \in A \wedge 2 \in A \Rightarrow \{1,2\} \subseteq A$.

3. Determinar si $A \subseteq B$ en cada uno de los siguientes casos

i) $A = \{1,2,3\},\ B = \{5,4,3,2,1\}$

ii) $A = \{1,2,3\},\ B = \{1,2,\{3\},-3\}$

iii) $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 < |x| < 3\},\ B = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 < 3\}$

iv) $A = \{\emptyset\},\ B = \emptyset$

3) i) $A = \{1,2,3\}$ $B = \{1,2,3,4,5\}$

¿$A \subseteq B$? ¿Todo elemento de $A \in B$?

Sí $1 \in B$, $2 \in B$ y $3 \in B \Rightarrow A \subseteq B$.

Sí, $A \subseteq B$

ii) $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, \{3\}, -3\}$

¿Todo elemento de A pertenece a B?

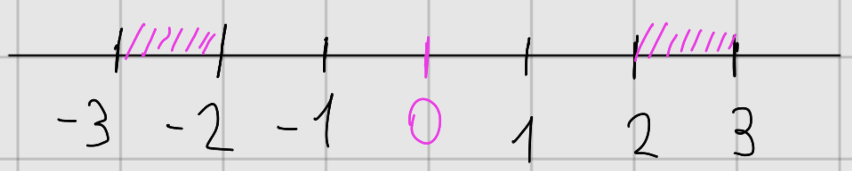
Veo, $1 \in B$, $2 \in B$ y $3 \in B \Rightarrow A \subseteq B$

No, $A \not\subseteq B$

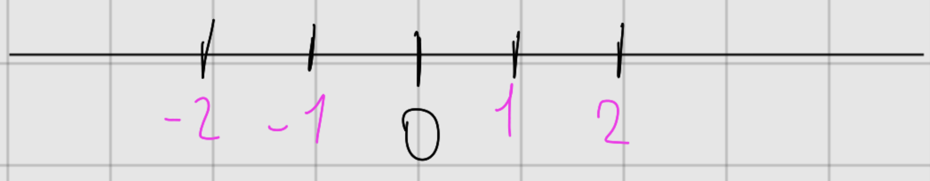
iii) $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 < |x| < 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 3\}$

A =



B =



¿$(-2)^2 < 3$? no. ¿$2^2 < 3$? no

¿$(-1)^2 < 3$? sí. ¿$(1)^2 < 3$? sí

no, Contraejemplo: $2.5 \in A$ pero $\{2.5\} \notin B$

iv) $A = \{\emptyset\}$, $B = \emptyset$

¿$\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$? no.

4. Dados los subconjuntos $A = \{1, -2, 7, 3\}$, $B = \{1, \{3\}, 10\}$ y $C = \{-2, \{1, 2, 3\}, 3\}$ del conjunto referencial $V = \{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$, hallar

i) $A \cap (B \triangle C)$ ii) $(A \cap B) \triangle (A \cap C)$ iii) $A^c \cap B^c \cap C^c$

i) $A \cap (B \triangle C)$

$B \triangle C = (B \cup C) - (B \cap C)$

$= \{1, 10, -2, 3, \{3\}, \{1, 2, 3\}\} - \emptyset$

$= \{1, 10, -2, 3, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$

$A \cap (B \triangle C) = \{1, -2, 7, 3\} \cap \{1, 10, -2, 3, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$

$A \cap (B \Delta C) = \{1, -2, 7, 3\} \cap \{1, 10, -2, 3, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$

$= \{1, -2, 3\}$ ✓

ii) $\underbrace{(A \cap B)}_{1} \Delta \underbrace{(A \cap C)}_{2}$

1. $\{1\}$ 2. $\{-2, 3\}$

$\{1\} \Delta \{-2, 3\} = \{1, -2, 3\}$ ✓

Es igual al i por leyes de morgan (DISTRIBUTIVA)

$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ ✓

iii) $A^c \cap B^c \cap C^c$

Conjunto universal: $\{1, \{3\}, -2, 7, 10, \{1, 2, 3\}, 3\}$

A^c: Lo que está en conjunto referencial pero NO en A.

A^c: $\{\{3\}, 10, \{1, 2, 3\}\}$

$B^c : \{-2, 7, \{1,2,3\}, 3\}$

$C^c : \{1, \{3\}, 7, 10\}$

$A^c \cap B^c \cap C^c = \emptyset$ ✓

5. Dados subconjuntos A, B, C de un conjunto referencial V, describir $(A \cup B \cup C)^c$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^c$ en términos de uniones y complementos.

Aplico De Morgan:

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

i) $(A \cup B \cup C)^c = A^c \cap B^c \cap C^c$

ii) $(A \cap B \cap C)^c = A^c \cup B^c \cup C^c$

Jhola Lullaby

Cara de tiburón

$A - B = A \cap B^c$

$A^c = V - A$

$A \cup A^c = V$

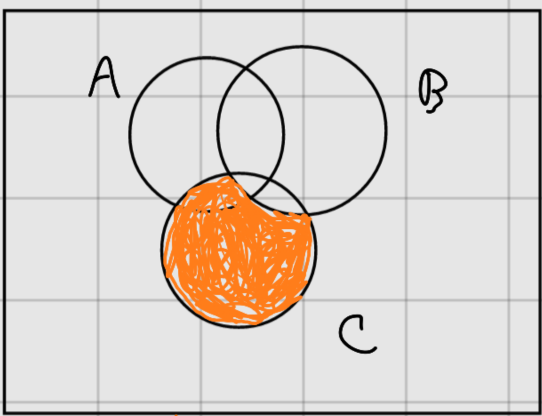
$A \Delta C = (C - A) \cup (A - C)$

$= (C \cap A^c) \cup (A \cap C^c)$

6. Sean A, B y C conjuntos. Representar en un diagrama de Venn

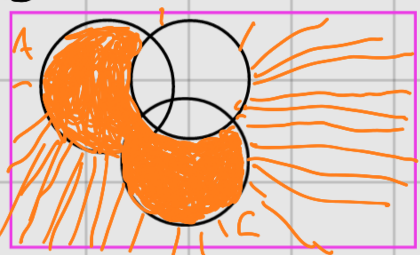
i) $(A \cup B^c) \cap C$ ii) $A \triangle (B \cup C)$ iii) $A \cup (B \triangle C)$

i) $(A \cup B^c) \cap C$



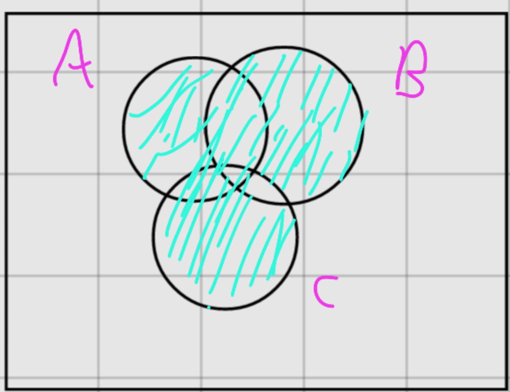
ACLARACIÓN

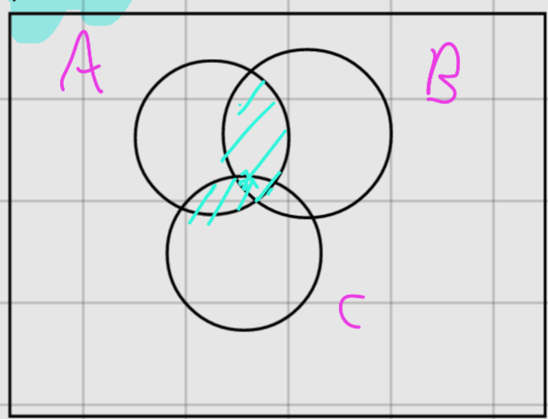
B^c en TODO.

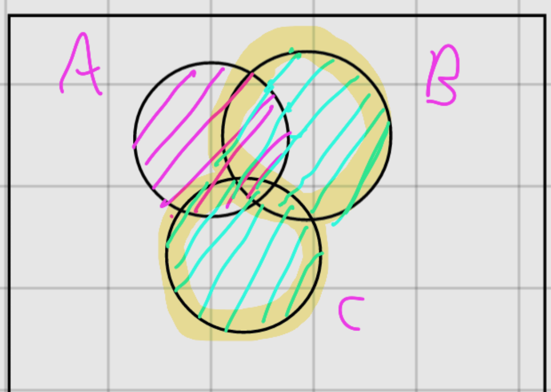


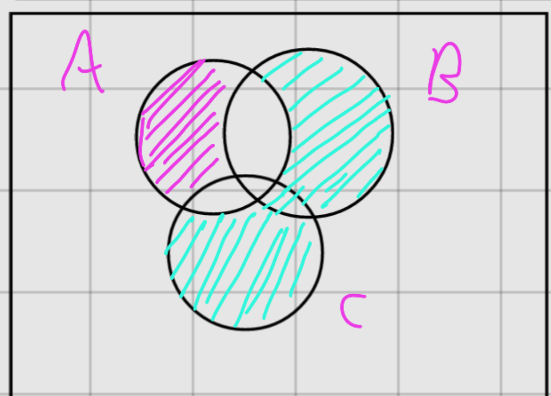
Luego agrego A.

ii) $A \Delta (B \cup C) = (A \cup (B \cup C)) - (A \cap (B \cup C))$



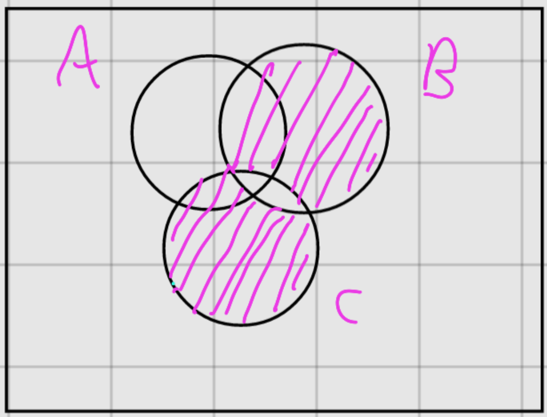


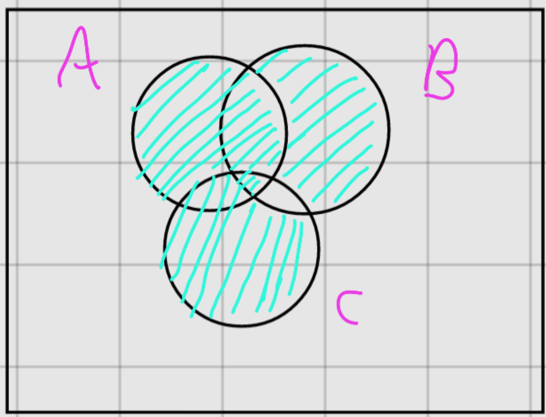




PROCESO: HAGO $A \cap (B \cup C)$, HAGO $A \cup (B \cup C)$, PINTO SOLO $A \cup (B \cup C)$

iii) $A \cup (B \Delta C)$ $\quad B \Delta C = (B \cup C) - (B \cap C)$





PROCESO: HAGO $B \Delta C$, LUEGO PINTO TODO A, AGREGO $B \Delta C$

8. Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los casos

i) $A = \{1\}$ ii) $A = \{a, b\}$ iii) $A = \{1, \{1, 2\}, 3\}$

Los conjuntos de partes tienen a un elemento, subconjuntos armados por ellos y el vacío.

i) $A = \{1\}$ $\quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$

ii) $A=\{a,b\}$ $\mathcal{P}(A)=\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$ ✓

iii) $A=\{1,\{1,2\},3\}$ $\mathcal{P}(A)=\{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{\{1,2\}\}, \{1,3\}, \{1,\{1,2\}\}, \{3,\{1,2\}\}, \{1,\{1,2\},3\}\}$ ✓

Vimos formula de $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$

$2^{\#A} \iff 2^3 = 8$ ✓

En el conjunto de partes todos son conjuntos formados por elementos.

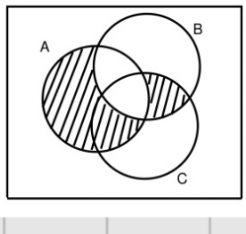
Ej: $A=\{1,2,3\}$, $2^3=8$

$\mathcal{P}(A)=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,2,3\},\{1,3\},\emptyset\}$

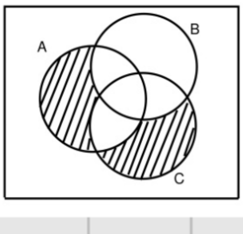
Corregido x profe :)

7. Encontrar fórmulas que describan las partes rayadas de los siguientes diagramas de Venn, utilizando únicamente intersecciones, uniones y complementos.

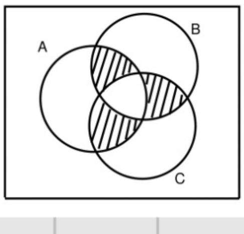
i)



ii)



iii)



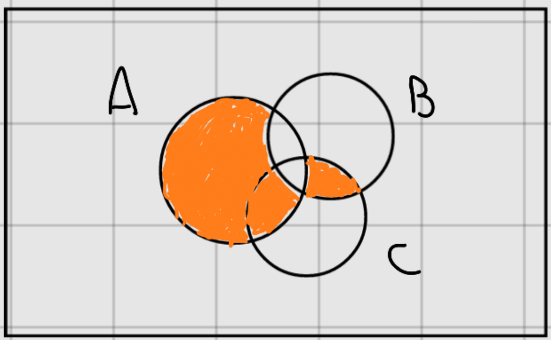
i) A, $A \cap C$, NO ESTÁ $A \cap B \cap C$, $C \cap B$, NO ESTÁ $A \cap B$

$$A \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) - ((A \cap B \cap C) \cup (A \cap B))$$

$$\Updownarrow$$

RTA: $A \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \cap ((A \cap B \cap C) \cup (A \cap B))^c$

VERIF:



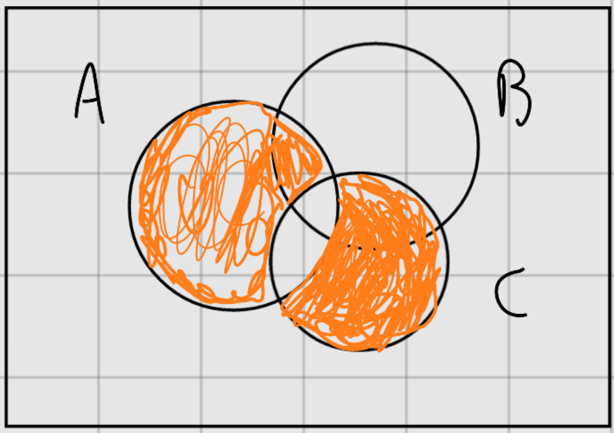
ii) $\underbrace{A \Delta C}$, NO ESTÁ $A \cap B$, NO ESTÁ $B \cap C$

$$(A - C) - (C - A) = (A \cap C^c) \cup (C \cap A^c)$$

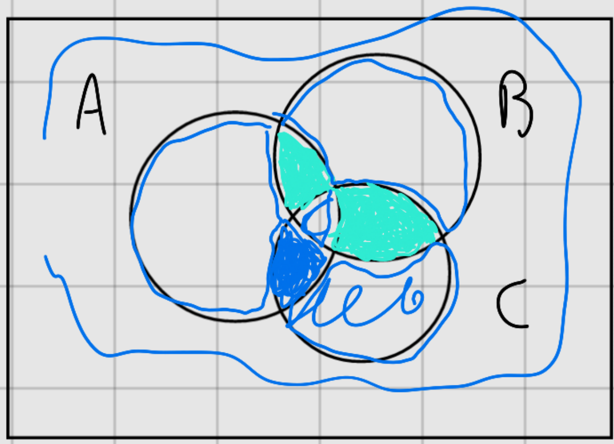
$$((A \cap C^c) \cup (C \cap A^c)) - ((A \cap B) \cup (B \cap C))$$

RTA: $\underbrace{\underbrace{((A \cap C^c) \cup (C \cap A^c))} \cap (\underbrace{(A \cap B) \cup (B \cap C)})^c}$

1. $((A \cap C^c) \cup (C \cap A^c))$



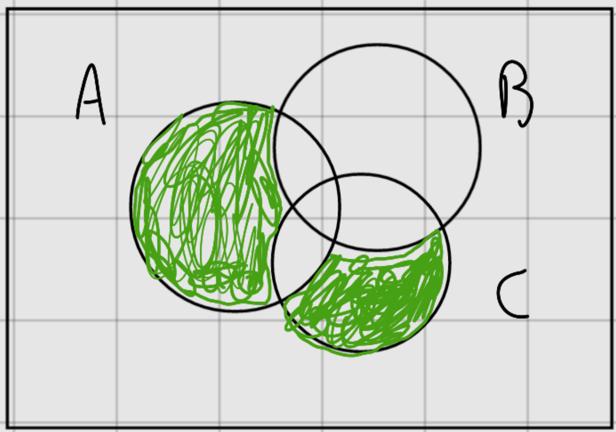
2. $[(A \cap B) \cup (B \cap C)]^c$



Aclaración: · En celeste $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

· En azul: Con el complemento

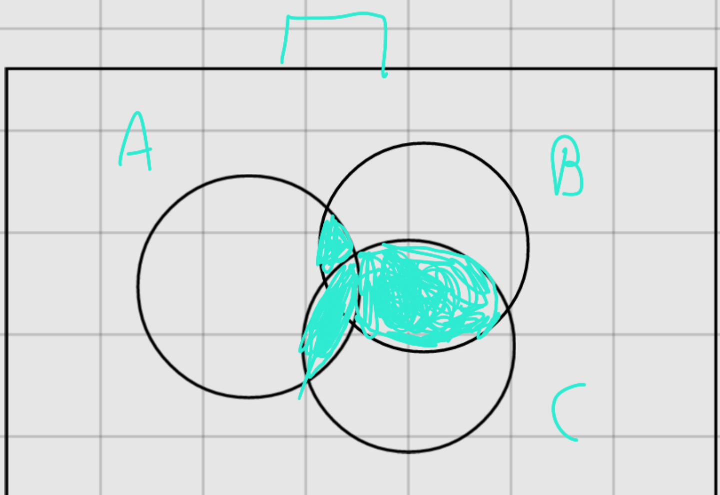
3. Todo:

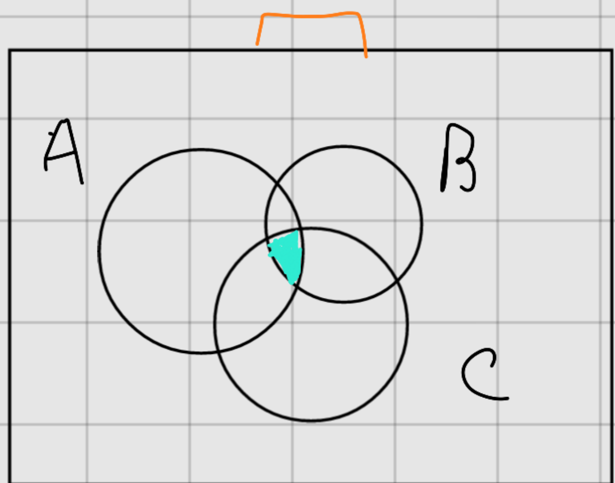


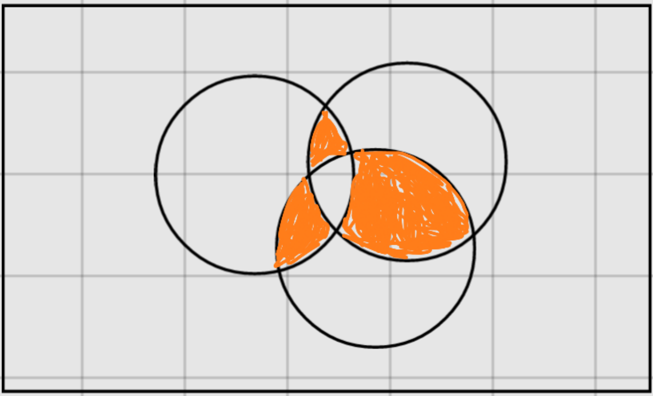
iii)

$$\underbrace{(A \cap C) \cup (A \cap B) \cup (B \cap C)} - \underbrace{(A \cap B \cap C)}$$

RTA: $(A \cap C) \cup (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)^c$







9. Sean A y B conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$.

$$\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$$

$$\Rightarrow)\ \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Rightarrow A \subseteq B$$

Ejercicio 47: DEMOSTRAR: $A \cup B = B \cup A$

Las igualdades se separan en dos inclusiones. Debemos llevar lo de izq a derecha.

- $A \cup B \subseteq B \cup A$
- $B \cup A \subseteq A \cup B$

Pues si son iguales

$A = \{1,2\}$ $B = \{1,2\}$

$A \subseteq B$ y $B \subseteq A$

Esto es el método de doble inclusión

Esto es el método de doble inclusión

· $A \cup B \subseteq B \cup A$ (Busco llevar lo izq, a der)

↓

Se comienza colocando que un X pertenece

PASO AL MUNDO LÓGICA

$X \in A \cup B$ $\quad X \in A \vee X \in B$

Convierto unión

$$\boxed{P \vee Q = Q \vee P}$$

$X \in B \vee X \in A$

$X \in (B \cup A)$

Probamos que si pongo elemento en A, también está en B.

· $B \cup A \subseteq A \cup B$ (Busco llevar lo izq, a der)

$X \in B \cup A$, $\quad X \in B \vee X \in A$

$$\boxed{P \vee Q = Q \vee P}$$

$X \in A \vee X \in B$

$X \in (A \cup B)$

Probamos que si coloco elementos de B, también estarán en A

Conclusión $A \cup B = B \cup A$

DEMOSTRAR: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Demostración x doble inclusión

- $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$
- $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

$(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$

$x \in (A \cup B) \cup C$, $x \in (A \cup B) \vee x \in C$

$x \in A \vee x \in B \vee x \in C$

$$p \vee q \vee r = p \vee (q \vee r)$$

$$x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$$

$$x \in A \cup (x \in B \cup x \in C)$$

$$x \in A \cup (B \cup C)$$

• $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$

$x \in A \cup (B \cup C)$, $\quad x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$

$$x \in A \vee x \in B \vee x \in C$$

$$p \vee q \vee r = p \vee (q \vee r)$$

$$(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C$$

$$x \in (A \cup B) \cup C$$

DEMOSTRAR:

$B \subseteq A \cup B$

Coloco elementos en B y demuestro que están en la unión. Utilizo implica

$x \in B \,,\ x \in (A \cup B)$

$x \in B \Rightarrow x \in (A \cup B)$

$\underbrace{x \in B}_{p} \Rightarrow \underbrace{x \in A}_{q} \vee \underbrace{x \in B}_{p}$

$p \Rightarrow (q \vee p)$ $\boxed{p \Rightarrow q = \sim p \vee q}$

$\sim p \vee (q \vee p)$ $\boxed{p \vee q = q \vee p}$

$\sim p \vee q \vee p$ $\boxed{\sim p \vee p = P}$

$q \vee \sim p \vee p$ $\boxed{p \vee V = V}$

$q \vee V$

$= V$

Demostramos que $B \subseteq A \cup B$

DEMOSTRAR: $A \cup A = A$

Prueba x doble inclusión

- $A \cup A \subseteq A$
- $A \subseteq A \cup A$

$A \cup A \subseteq A$

$x \in A \cup A \quad x \in A \cup x \in A$

$x \in A \vee x \in A \quad \boxed{P \vee P = P}$

$x \in A$

A

Por lo tanto $A \cup A \subseteq A$

$\underbrace{A}\subseteq \underbrace{A\cup A}$

$x \in A \qquad x \in A \lor x \in A$

$x \in (A \cup A)$

Por lo tanto $A \subseteq A \cup A$

se cumple $A = A \cup A$

DEMOSTRAR: $A \cap A = A$

$\Rightarrow)\ A \cap A \subseteq A$

$\Leftarrow)\ A \subseteq A \cap A$

$\Rightarrow)\ x \in A \cap A \qquad x \in A \land x \in A$

$\boxed{p \land p \equiv p}$

$x \in A$

$\Leftarrow)\ x \in A,\ x \in A \cap x \in A$

$\boxed{p \Leftrightarrow p \land p \equiv V}$

$x \in A \wedge x \in A$

$x \in (A \cap A)$

Por lo tanto, $A \cap A \subseteq A$

DEMOSTRAR: $A \cap \emptyset = \emptyset$

DOBLE INCLUSIÓN:

$\Rightarrow)$ $A \cap \emptyset \subseteq \emptyset$

$\Leftarrow)$ $\emptyset \subseteq A \cap \emptyset$

$\Rightarrow)$ $x \in (A \cap \emptyset)$, $x \in A \cap \underbrace{x \in \emptyset}_{\text{no puede pasar}}$

¡ABS!

Por lo tanto no puede suceder que $A \cap \emptyset \neq \emptyset$.
Así, $A \cap \emptyset = \emptyset$

DEMOSTRAR: $A \cap B = B \cap A$

- $\overbrace{A \cap B}^{1} \subseteq \underbrace{B \cap A}_{1}$
- $\underbrace{B \cap A}_{2} \subseteq \underbrace{A \cap B}_{2}$

$\Rightarrow)$ $x \in \underbrace{A \cap B}_{1}$, $x \in A \wedge x \in B$ $\boxed{p \wedge q = q \wedge p}$

$x \in B \wedge x \in A$

$x \in (B \wedge A)$

$x \in (\underbrace{B \cap A}_{1})$

$\Leftarrow)$ $x \in \underbrace{B \cap A}_{2}$, $x \in B \wedge x \in A$ $\boxed{p \wedge q = q \wedge p}$

$x \in A \wedge x \in B$

$x \in (A \wedge B)$

$x \in (\underbrace{A \cap B}_{2})$

Por lo tanto vale que:

$A \cap B = B \cap A$

9. Sean A y B conjuntos. Probar que $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$.

$X \in P(A) \iff X \subseteq A$

$A \in B$, $\{A\} \subseteq B$

$P(A) \subseteq P(B)$, $\forall x \in A$, $\{x\} \in P(B)$, $x \in B$

$\Rightarrow)\ P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B$

$x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \Rightarrow \{x\} \in P(A)$

$\Rightarrow \{x\} \in P(B) \Rightarrow \{x\} \subseteq B \Rightarrow x \in B$

$P(A) \subseteq P(B)$

opt 2:
Tomo A
como
subconjunto
$\{\dots\}$
$A \in P(A)$

$\Leftarrow)\ A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

$Y \in P(A)$

$Y \subseteq A$

$\Downarrow$

$Y \subseteq B$

$\Downarrow$

$Y \in P(B)$

$X \in A$

$Y \in P(B)$

No uso mismo
variable para
distintos cosas

1) Colocar elementos en orden.

2) uso lado izq para llegar a der.

Rehago $P(A) \subseteq P(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$

- $\Rightarrow)$ $P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B$
- $\Leftarrow)$ $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \subseteq P(B)$

1) $P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow \underbrace{A}_{\text{Agarro el.}} \subseteq B$

$x \in A$, por def sé que si

$x \in A \Rightarrow \{x\} \subseteq A \wedge \{x\} \in P(A)$

Por datos del problema sé que

$P(A) \subseteq P(B)$, entonces

$\{x\} \in P(B)$ y así $x \in B$.

2) $A \subseteq B \Rightarrow \underbrace{P(A)}_{\text{Agarro el.}} \subseteq P(B)$

Ej: $\{1\}$

$X \in P(A)$, por def sé que si

$X \in P(A) \Rightarrow X \subseteq A$.

Por dato sé que $A \subseteq B$, por lo tanto si $X \subseteq A \Rightarrow X \subseteq B$. Así, $X \in P(B)$

11. Hallar contraejemplos para mostrar que las siguientes proposiciones son falsas:

i) $\forall a \in \mathbb{N}$, $\frac{a-1}{a}$ no es un número entero.

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ con x, y positivos, $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

iii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$.

i) Busco que sea entero para $a \in \mathbb{N}$.

Contraejemplo: $a = 1$

$$\frac{1-1}{1} = 0 \in \mathbb{Z}$$

ii) $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

Contraejemplo: $x, y = 1$

$$\sqrt{2} \stackrel{?}{=} \sqrt{1} + \sqrt{1}$$

$$1.41 \neq 2$$

Hallamos un Contraejemplo: $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x}+\sqrt{y}$

iii) $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2$

Contraejemplo: $X = -3$

$(-3)^2 > 4 \overset{?}{\Rightarrow} x > 2$

$9 > 4 \Rightarrow -3 > 2$

$V \Rightarrow F$

F.

Hallamos un Contraejemplo: x^2 es mayor a 4 sin ser X mayor a 2.

12. i) Decidir si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, justificando debidamente:

(a) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 5 \ \vee\ n \leq 8.$
(b) $\exists n \in \mathbb{N} /\ n \geq 5 \ \wedge\ n \leq 8.$
(c) $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N} \ /\ m > n.$
(d) $\exists n \in \mathbb{N} /\ \forall m \in \mathbb{N},\ m > n.$
(e) $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 3 \Rightarrow x^2 > 4.$
(f) Si z es un número real, entonces z es un número complejo.

ii) Negar las proposiciones anteriores, y en cada caso verificar que la proposición negada tiene el valor de verdad opuesto al de la original.

iii) Reescribir las proposiciones ***e)*** y ***f)*** del ítem **i)** utilizando las equivalencias del ejercicio ***10i)***.

i) a) Es verdadera. $n=6,\ n=9$

i) b) Es verdadera. $n=6 \in \mathbb{N}$ y está en rango.

$5 \leq 6 \leq 8$

i) c) Es verdadera. Para todo natural $\exists$ algún otro natural mayor a él.

$n = 4$, $m = 5$.

i) d) $\forall m \in \mathbb{N} / \exists n \in \mathbb{N},\ m > n$

Es verdadera.

$m = 6$, $n = 5$

i) e) $\forall x \in \mathbb{R} / x > 3 \Rightarrow x^2 > 4$

Es verdadera.

$x = 4$, $4 > 3 \Rightarrow 4^2 > 4$

$V \Rightarrow V$

V

i) f) Falsa

P: Z es número real.

q: Z es número Complejo

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Además los Complejos $\notin \mathbb{R}$.

6) ¿Como los niego? PREGUNTAR.

i) $\exists \sim m \geq 5 \wedge \sim m \leq 8$

13. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial V y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$

ii) $(A \cap B) \triangle C = (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$

iii) $C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$

iv) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

i) $(A \triangle B) - C = \overbrace{(A - C)}^{p} \triangle \overbrace{(B - C)}^{q}$

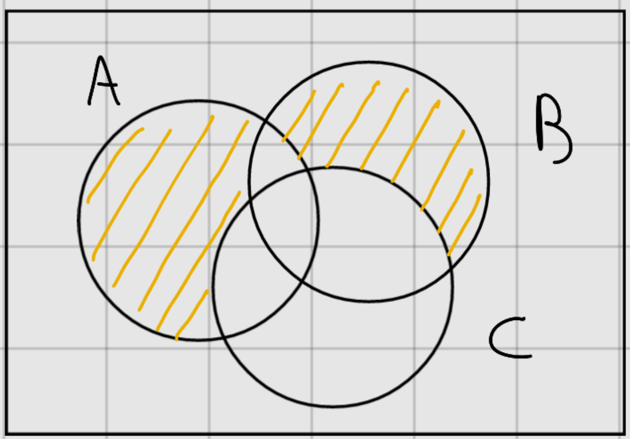
$((A \cup B) - (A \cap B)) - C = (p \cup q) - (p \cap q)$

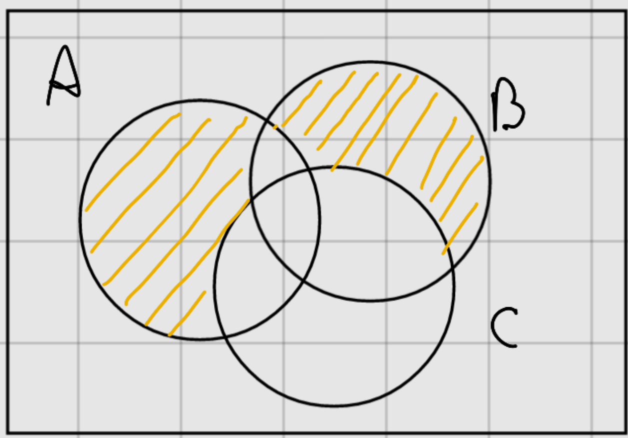
$(A \cup B) - C \overset{?}{=} ((A - C) \cup (B - C)) - ((A - C) \cap (B - C))$

$$A \cup B = A \cup B$$

VERDADERA

$$(A \Delta B) - C \qquad (A - C) \Delta (B - C)$$





$$ii) \ \overbrace{(A \cap B)}^{P} \Delta \overset{♀}{\widetilde{C}} = (A \Delta C) \cap (B \Delta C)$$

$$(P \cup ♀) - (P \cap ♀) = ((A \cup C) - (A \cap C)) \cap ((B \cup C) - (B \cap C))$$

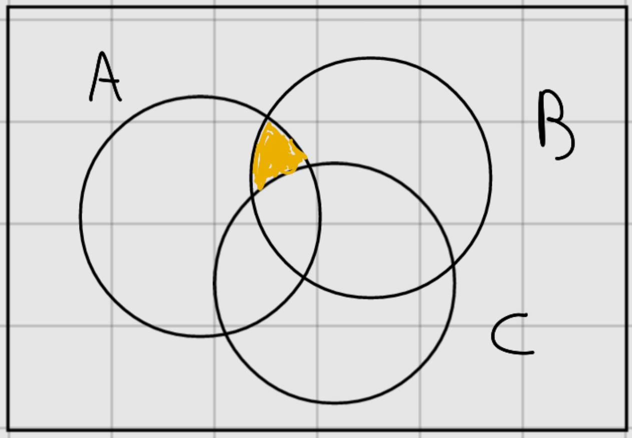
$$((A \cap B) \cup (C)) - ((A \cap B) \cap (C)) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

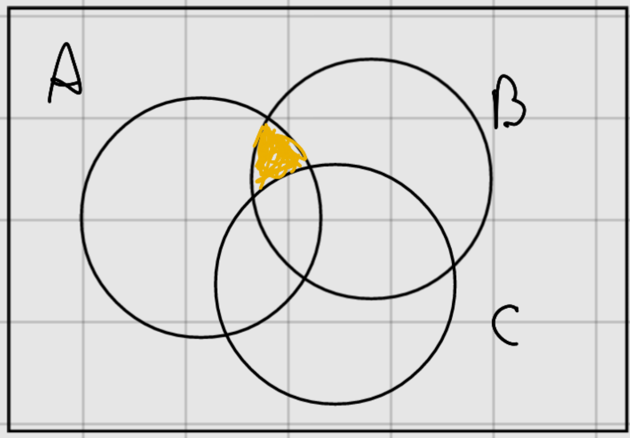
$$((A \cap B) \cup C) = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$C \cup (A \cap B) = C \cup (A \cap B)$$

VERDADERA

$(A \cap B) \triangle C$ $\qquad\qquad$ $(A \triangle C) \cap (B \triangle C)$





iii) $C \subseteq A \Rightarrow \left(B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c\right)$

$C \subseteq A \Rightarrow \left(B \cap C \subseteq (A \cup B)^c\right)$

$C \subseteq A \Rightarrow B \cap C \subseteq A^c \cap B^c$

PREGUNTAR

iv) $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$

$\Rightarrow)$ $A \triangle B = \emptyset \Rightarrow A = B$

$\Leftarrow)$ $A = B \Rightarrow A \triangle B = \emptyset$ $\quad$ USAR INCLUSIONES.

$\Rightarrow)$ $A \triangle B = \emptyset \Rightarrow \cancel{A = B}$ $\quad$ $\underbrace{A \subseteq B}_{(1)}$ y $B \subseteq A$

① Sea $x \in A$, supongo que $x \notin B$ (POR ABS)

$(A \cup B) - (A \cap B)$

$(\Leftarrow)$ $A = B \Rightarrow A \Delta B = \emptyset$.

Sea $x \in A$, sé como dato que $A = B$, por lo tanto ambos tienen los mismos elementos, osea $A = B \Rightarrow x \in B$. Así $A \Delta B = \emptyset$ pues son iguales

VERDADERA

14. Sean A, B y C subconjuntos de un conjunto referencial V. Probar que

i) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

iii) $A \triangle B \subseteq (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$

iv) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$

v) $A \subseteq B \Rightarrow A \triangle B = B \cap A^c$

vi) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

vii) $A \cap C = \emptyset \Rightarrow A \cap (B \triangle C) = A \cap B$

Como dice "Probar" son verdaderas

i) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

$$A \cap ((B \cup C) - (B \cap C)) = ((A \cap B) \cup (A \cap C)) - ((A \cap B) \cap (A \cap C))$$

$$A \cap (B \cup C) = A \cap (B \cup C)$$

VERDADERA

ii) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$

$$A \cap (B \cap C^c)^c = (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B^c \cup C) = A \cap (B^c \cup C)$$

VERDADERA

iii) $A \Delta B \subseteq (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$

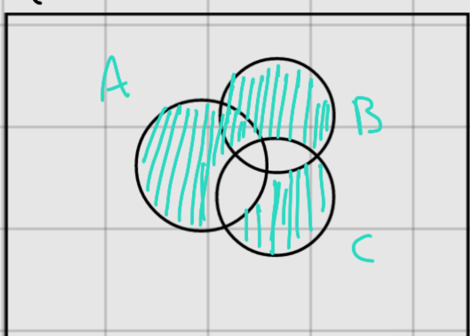
$$(A-B) \cup (B-A) \subseteq [(A-C) \cup (C-A)] \cup [(B-C) \cup (C-B)]$$

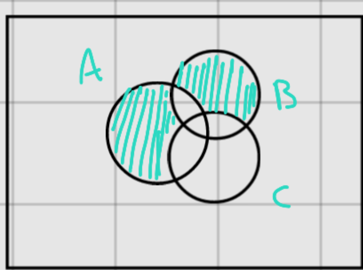
$$A \cup B \subseteq (A \cup C) \cup (B \cup C)$$

$$(A \cup B) \subseteq C \cup (A \cup B)$$

VERDADERA

$(A \Delta C) \cup (B \Delta C) \supseteq A \Delta B$





iv) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$

$$A \cap C \cap B^c = A \cap B^c \cap C$$
$$A \cap B^c \cap C = A \cap B^c \cap C$$

VERDADERA. Repetirlo algo con inclusiones Buena" 14 iv)

v) $A \subseteq B \Rightarrow A \Delta B = B \cap A^c$

$$\Rightarrow (A \cup B) - (A \cap B) = B \cap A^c$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = A^c \cap B$$

$$\Rightarrow (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c) = A^c \cap B$$

$$\Rightarrow \emptyset = A^c \cap B$$

$$\left[(A\cup B)\cap A^c\right]\cup\left[(A\cup B)\cap B^c\right]$$

$$=\underbrace{(A\cap A^c)}_{\emptyset}\cup(B\cap A^c)\cup(A\cap B^c)\cup\underbrace{(B\cap B^c)}_{\emptyset}$$

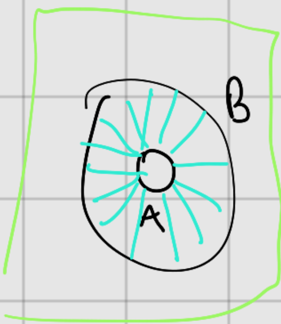
Como dato tengo que $A\subseteq B$, por lo tanto $A^c\cap B\neq\emptyset$ (B)

$A\subseteq B$: Los elementos de A están en B.

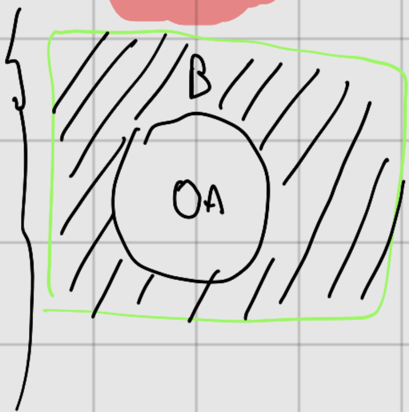
Pero $(A\cap B^c)=\emptyset$ (A)

$A^c\cap B=\emptyset$

$A\cap B^c=\emptyset$



$=A^c\cap B$



Concluimos, $A^c\cap B=A^c\cap B$.

Si es $\emptyset$, supongo que no es vacío y llego a absurdo.

VERDADERA

13. Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas cualesquiera sean los subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial V y cuáles no. Para las que sean verdaderas, dar una demostración, para las otras dar un contraejemplo.

i) $(A \triangle B) - C = (A - C) \triangle (B - C)$

ii) $(A \cap B) \triangle C = (A \triangle C) \cap (B \triangle C)$

iii) $C \subseteq A \;\Rightarrow\; B \cap C \subseteq (A \triangle B)^c$

iv) $A \triangle B = \emptyset \;\Leftrightarrow\; A = B$

Repaso 13)i) más ordenado.

REPASO MENTAL 23:15 hs;

·Para este tipo de ejercicio:

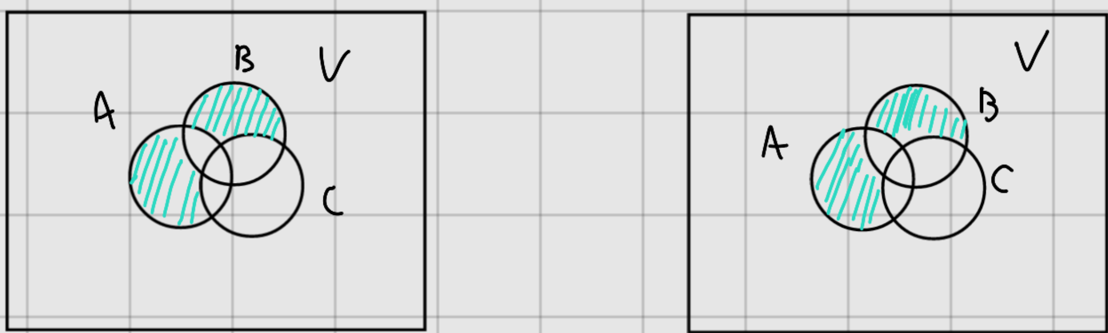
1. Diagrama de Venn
2. Si es V, demuestro, si es F, contraejemplo

·Si tengo $A = B$, PRUEBO $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$.

·Si tengo una implicación. Tomo valor, supongo lo del otro y lo uso como dato.

$$\underbrace{(A \triangle B) - C}_{1} = \underbrace{(A - C) \triangle (B - C)}_{2}$$

1.



Son iguales

[illegible] iguales. Demuestre

1: $(A \Delta B) - C = [(A \cup B) \cap (A \cap B)^c] \cap C^c$

$= [(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)] \cap C^c$

$= [(A \cup B) \cap A^c] \cup [(A \cup B) \cap B^c] \cap C^c$

$= [B \cup A] \cap C^c$

$= A \cup B$

2. $(A - C) \Delta (B - C) = (A \cap C^c) \Delta (B \cap C^c)$

$= A \Delta B$

$= (A \cup B) - (A \cap B)$ o $(A - B) \cup (B - A)$

$= (A - B) \cup (B - A)$

$= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

$= (A \cup B)$

Como 1 = 2 demostramos que es verdadera.

14) iv)

Repaso 14) iv)

i) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap C$

$A \cap C \cap B^c = A \cap B^c \cap C$ VERDADERA

OTRA FORMA: PRUEBO $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$\subseteq)$ $(A \cap C) - B \Rightarrow (A - B) \cap C$

$\subseteq)$ OBJETIVO: VER $x \in (A - B) \cap C$

Sea $x \in (A \cap C) - B$

$$x \in (A \cap C) - B \underset{\text{DEF } -}{\Rightarrow} x \in (A \cap C) \cap B^c \underset{\text{DEF } \cap}{\Rightarrow}$$

$$(x \in A \wedge x \in C) \wedge x \in B^c \underset{\text{DEF}}{\Rightarrow} x \in A \wedge x \in B^c \wedge x \in C \Rightarrow$$

$\cap B = -B$

$(A-B)\cap C$

$\supseteq)$ $(A-B)\cap C \Rightarrow (A\cap C) - B$

$\supseteq)$ OBJETIVO: VER $x \in (A\cap C) - B$.

$x \in (A-B)\cap C \underset{\text{DEF DIF}}{\Rightarrow} x \in (A\cap B^{c}) \wedge x \in C \underset{\text{DEF} \cap}{\Rightarrow}$

$(x \in A \wedge x \in B^{c}) \wedge x \in C \Rightarrow x \in A \wedge x \in C \wedge x \in B^{c}$

$\underset{\text{DEF } \cap B^{c} = -B}{\Rightarrow} (x \in A \wedge x \in C) - B \Rightarrow (A\cap C) - B$

Acá me trabo xq yo sé que;

$A \cap B^{c} \cap C$ reescrito de otra forma es $(A\cap C) - B$ por def de la diferencia pero.. ¿está bien?

PREGUNTAR

15. Sean $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Hallar $A \times A$, $A \times B$, $(A \cap B) \times (A \cup B)$.

$A \times A$:

A: 3 elementos $\qquad \#A \times A = \#A \cdot \#A$

$$\#\mathcal{P}(A \times A) = 2^{\#A \times A}$$

- $A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$

$$\#\mathcal{P}(A \times A) = 2^9 \qquad \#A \times A = 9$$

- $A \times B$:

$$\left.\#A \times B = 12\ \right\}\ \#\mathcal{P}(A \times B) = 2^{12}$$

$A \times B = \{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (2,1), (2,3), (2,5), (2,7), (3,1), (3,3), (3,5), (3,7)\}$

- $(A \cap B) \times (A \cup B)$:

$A \cap B : \{1, 3\} \qquad A \cup B : \{1, 2, 3, 5, 7\}$

$\#(A\cap B)\times(A\cup B): 10$

$$(A\cap B)\times(A\cup B)=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,5),(1,7),(3,1),(3,2),(3,3),(3,5),(3,7)\}$$

16. Sean A, B y C conjuntos. Probar que

i) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

ii) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

iii) $(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$

iv) $(A\triangle B)\times C=(A\times C)\triangle(B\times C)$

$A\subseteq A\cup B$

$\forall A, B$ conj

i)

$\subseteq$) OBJETIVO: $(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)$

IMP: $*$

$$(x,y)\in(A\cup B)\times C \underset{\text{DEF }\cup}{\Longrightarrow} (x\in A\cup B)\wedge y\in C$$

$$\underset{\text{DEF }\times}{\Longrightarrow} (x\in A \underbrace{\vee}_{\text{separo en 2 casos}} x\in B)\ \wedge\ y\in C$$

$A\wedge C$

$B\wedge C$

CASO 1: $x\in A\wedge y\in C \Longrightarrow (x,y)\in A\times C \Rightarrow (x,y)\in(A\times C)\underbrace{\cup(B\times C)}_{*}$

CASO 2: $x\in B\wedge y\in C \Rightarrow (x,y)\in B\times C \Rightarrow (x,y)\in(B\times C)\underbrace{\cup(A\times C)}_{*}$

PERFECTO

$\supseteq$) OBJ: $(x,y) \in (A\cup B)\times C$

$$(x,y) \in (A\times C)\cup(B\times C) \underset{\substack{DEF\\ \cup}}{\Longrightarrow} (x,y)\in(A\times C) \vee (x,y)\in(B\times C)$$

$$\underset{\substack{DEF\\ \times}}{\Longrightarrow} (x\in A \wedge y\in C) \vee (x\in B \wedge y\in C) \underset{\substack{DEF\\ DIST.}}{\Longrightarrow}$$

$$y\in C \wedge (x\in A \vee x\in B) \underset{\substack{DEF\\ \cup,\\ \times}}{\Longrightarrow} (x,y)\in(A\cup B)\times C$$

Como se cumple la doble inclusión, es verdadera.

Por lo tanto $(A\cup B)\times C = (A\times C)\times(B\times C)$

PERFECTO

ii) $(A\cap B)\times C = (A\times C)\cap(B\times C)$

$\subseteq$) OBJETIVO: $(x,y) \in (A\times C)\cap(B\times C)$

$\supseteq$) OBJETIVO $(x,y) \in (A \cap B) \times C$

$\subseteq$) $(x,y) \in (A \cap B) \times C$

$\underset{\substack{DEF \\ \times}}{\Longrightarrow} x \in (A \cap B) \wedge y \in C$

$\underset{\substack{DEF \\ \cap}}{\Longrightarrow} (x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C$

$\Rightarrow (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C)$

$\Rightarrow (x,y) \in A \times C \wedge (x,y) \in B \times C$

$\Rightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$ PERFECTO

$\supseteq$) $(x,y) \in [(A \times C) \cap (B \times C)]$

$\underset{\substack{DEF \\ \cap}}{\Longrightarrow} (x,y) \in (A \times C) \wedge (x,y) \in (B \times C)$

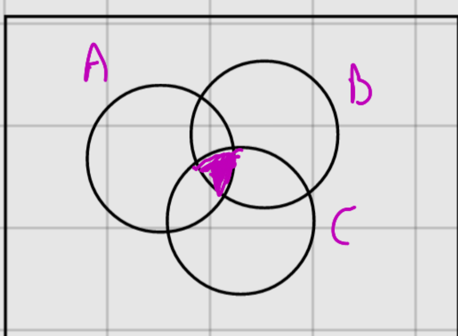
$\underset{\substack{DEF \\ \times}}{\Longrightarrow} (x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C)$

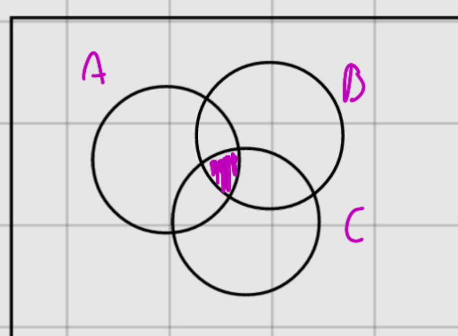
$\underset{\text{PROP}}{\Rightarrow} (x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \wedge y \in C$

$\Rightarrow (x,y) \in \underline{(A \cap B) \times C}$

$(A \cap C) \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ PERFECTO





iii), iv)

Relaciones

17. Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,3,5,7\}$. Verificar si las siguientes son relaciones de A en B y en caso afirmativo graficarlas por medio de un diagrama con flechas de A en B, y por medio de puntos en el producto cartesiano $A \times B$.

i) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(1,7),(3,1),(3,5)\}$

ii) $\mathcal{R} = \{(1,1),(1,3),(2,7),(3,2),(3,5)\}$

iii) $\mathcal{R} = \{(1,1),(2,7),(3,7)\}$

iv) $\mathcal{R} = \{(1,3),(2,1),(3,7)\}$

$\# A \times B = \# A \cdot \# B = 12$

$\# \mathcal{P}(A \times B) = 2^{12}$

$A \times B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(1,7),(2,1),(2,3),$
$(2,5),(2,7),(3,1),(3,3),(3,5),(3,7)\}$

i) Sí. Pues los elementos de la relación $\in A \times B$.

ii) No. Pues $(3,2)$ porque $\overset{a=3}{b=2}$ y $2 \notin B$.

iii) Sí. Pues...

iv) Sí. Pues...

18. Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,3,5,7\}$. Describir por extensión cada una de las relaciones siguientes de A en B:

i) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a \leq b$

ii) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a > b$

iii) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a \cdot b$ es par

iv) $(a,b) \in \mathcal{R} \iff a + b > 6$

$A = \{1,2,3\} \quad B = \{1,3,5,7\}$

La relación está dada por pares donde la primera coordenada es menor o igual a b.

$\#A\times B = \#A \cdot \#B \Rightarrow 3 \cdot 4 = 12$

$$A\times B = \{(1,1),(1,3),(1,5),(1,7),(2,1),(2,3),(2,5),(2,7),(3,1),(3,3),(3,5),(3,7)\}$$

Ahora la relación es:

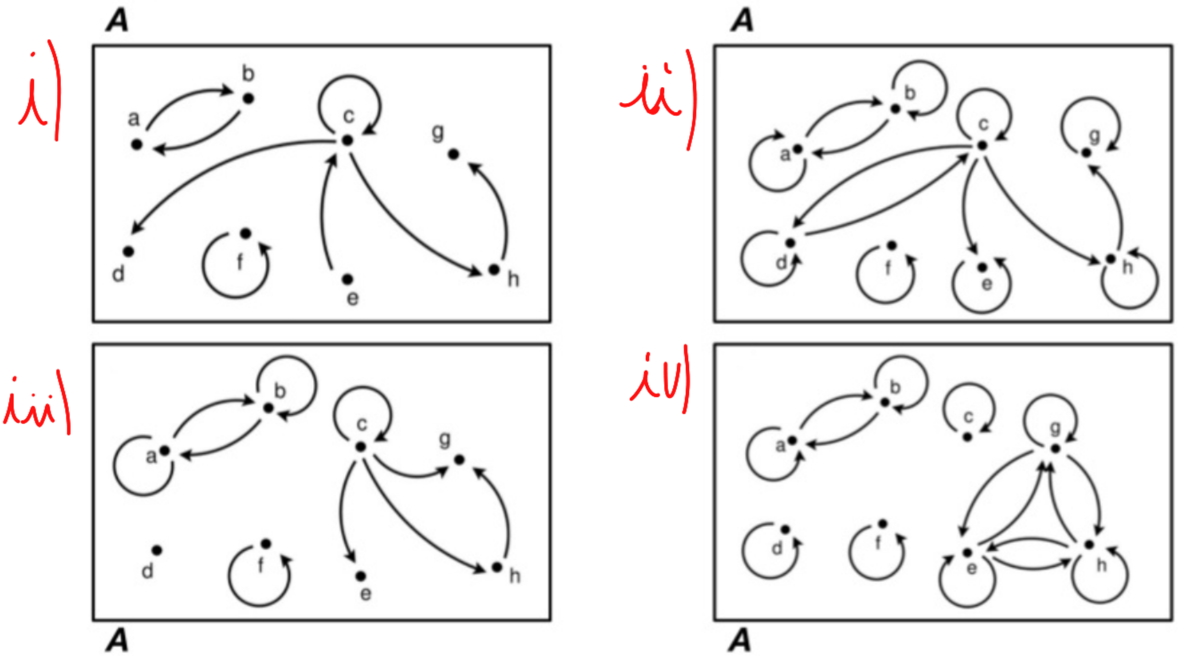
i) $a \leq b$ $R = \{(1,1),(1,3),(1,5),(1,7),(2,3),(2,5),(2,7),(3,3),(3,5),(3,7)\}$

ii) $a > b$ $R = \{(2,1),(3,1)\}$

iii) $a \cdot b$ es par $R = \{(2,1),(2,3),(2,5),(2,7)\}$

iv) $a+b>6$ $R=\{(1,7),(2,5),(2,7),(3,5),(3,7)\}$

19. Sea $A=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$. Para cada uno de los siguientes gráficos describir por extensión la relación en A que representa y determinar si es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.



i) $R=\{(a,b),(b,a),(c,c),(c,d),(c,h),(f,f),(e,c),$
$(h,g)\}$

(R) no, pues $\forall a \in R$, $a \not R a$.
Contraejemplo: $d \not R d$

(S) Para que sea simétrica:
Sean $a,b \in A$, si $\forall a,b$ $aRb \Rightarrow bRa$ entonces es sim.

Contraejemplo: $cRh \Rightarrow hRc$ pero $h \not R c$. Por lo tanto no es simétrica.

$V \Rightarrow F = F$

(AS) Para que sea antisimétrica:

$\forall a,b \in A$, si $aRb, bRa \Rightarrow x=y$

Contraejemplo: $aRb \wedge bRa$ pero $a \neq b$. Por lo tanto No es Antisimétrica

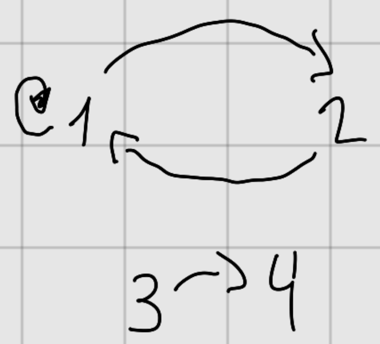
(T) Para que sea transitiva.

$\forall a,b,c \in A$ si $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc, \forall a,b.$

Contraejemplo: cRh, hRg pero cRg por lo tanto no es transitiva

PREGUNTAR: Con encontrar UN CASO q no cumpla (S), (AS) y (T) deja de ser S,AS,T? Es decir, para que sea (S), (AS) y (T) debe cumplir la condición PARA TODOS los elementos de la relación?

Ej:



¿Es transitiva?

$1R2 \wedge 2R1 \Rightarrow 1R1$ ✓

*1 $\underbrace{3R4 \wedge 4\cancel{R}3 \Rightarrow 3R3}_{F.}$

¿Entonces no sería transitiva

por el caso *1 ?

Rompo la simétrica pues
*2 $3R4 \Rightarrow 4 \not R 3$
$V \Rightarrow F = F$

Pero $1R2 \Rightarrow 2R1$
$V \Rightarrow V = V$

Para este caso *2 ¿dejaría de ser simétrica ?

ii)

(R) sí, pues $\forall a \in R$, sucede q aRa.

(S) no, pues sean $c, e \in A$, cRe pero $e \not R c$.
$cRe \Rightarrow eRc$
$V \Rightarrow F = F$.
Por lo tanto, no es simétrica

(AS) no, pues sean $c, d \in A$, $cRd \wedge dRc$ pero $c \neq d$.

$cRd \wedge dRc \Rightarrow c = d$

$V \wedge V \Rightarrow F = F$

Por lo tanto, no es antisimétrica.

(T) Buscamos que se cumpla $\forall a,b,c \in A$

si $aRb, bRc \Rightarrow aRc$

Contraejemplo: cRh, hRg pero cRg.

$cRh \wedge hRg \Rightarrow cRg$

$V \quad V \Rightarrow F = F$

Por lo tanto, no es transitiva.

iii)

(R) Para que sea reflexiva debe cumplir que $\forall a \in A, aRa$.

Contraejemplo: sea $d \in A$, $d \not R d$.

Por lo tanto, No es reflexiva.

(S) Para que sea simétrica, siendo $a,b \in A$, debe cumplir que si $aRb \Rightarrow bRa$.

Contraejemplo: sea $c, g \in A$, cRg pero $g \not R c$.

$$cRg \Rightarrow gRc$$
$$V \quad F \quad = F$$

Por lo tanto, no es simétrica.

AS Para que sea antisimétrica debe suceder que $\forall a,b \in A$, $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$

Contraejemplo: $aRb \wedge bRa$ pero $a \neq b$

Por lo tanto, no es antisimétrica.

T Para que sea transitiva, $\forall a,b,c \in A$
$aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

Es transitiva. ¿Como lo pruebo?

$aRb \wedge bRa \Rightarrow aRa$ ✓

$cRh \wedge hRg \Rightarrow cRg$ ✓

iv)

R Para que sea reflexiva debe

(R) Para que sea reflexiva debe

suceder que $\forall a \in A, aRa$.

Es reflexiva.

(S) Para que sea simétrica debe suceder

que $\forall a,b \in A$ si $aRb \Rightarrow bRa$.

Es simétrica ¿Como lo pruebo?

Ej: $gRe \Rightarrow eRg$ ✓

$hRg \Rightarrow gRh$ ✓

(AS) Para que sea antisimétrica debe

suceder que $\forall a,b \in A$, si $aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b$

Contraejemplo: $gRe \wedge eRg$ pero $e \neq g$

$$\underset{V}{gRe} \wedge \underset{V}{eRg} \Rightarrow \underset{F}{e=g} \; = F$$

Por lo tanto no es antisimétrica.

(T) Para que sea transitiva debe suceder