

Análisis II

Tomás Agustín Hernández



Dilatación

Sean $a, n \in \mathbb{R}$ decimos que estamos dilatando a un número a si y solo si $a = a * n$ con $n \geq 1$

Contracción

Sean $a, n \in \mathbb{R}$ decimos que estamos contrayendo a un número a si y solo si $a = a * n$ con $0 < n < 1$

Plano Real \mathbb{R}^2

Se define como $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ Aquí, los puntos se definen con dos coordenadas: x e y .

Plano Real \mathbb{R}^3

También conocido como *espacio*.

Se define como $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$

Orientación de los ejes

Se rigen por la regla de la mano derecha. Cuando vamos girando, hacia donde queda apuntando el dedo es el eje z .

Distancia entre dos puntos

Sean dos puntos $P = (a_1, a_2)$ y $Q = (b_1, b_2)$, definimos la distancia entre dos puntos como "la distancia entre P y Q es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias de sus coordenadas."

$$\text{dist}(P, Q) = \sqrt{(b_2 - a_2)^2 + (b_1 - a_1)^2}$$

Esta misma definición es generalizable para n coordenadas.

Nota: $\text{dist}(P, Q) = \text{long}(\overline{PQ})$

Circunferencias y Discos (Solo en \mathbb{R}^2)

Circunferencia

Sea un centro $C_0 = (a_0, b_0)$ y radio $r > 0$ definimos a una circunferencia como:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2} = r\}$$

Si notamos que la circunferencia está definida usando la definición de distancia entre dos puntos, si desarrollamos la ecuación de la circunferencia nos queda algo así:

$$(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 = r^2$$

Importante: La circunferencia $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} = 1\}$ es conocida como Circunferencia Unidad.

Disco Abierto

Cada vez que leamos la palabra *abierto* quiere decir que no incluye los bordes, sino solo el contenido. Definimos el Disco Abierto de centro C_0 y radio $r > 0$ como

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2} < r\}$$

Disco Cerrado

Exactamente igual que el Disco Abierto pero con los bordes incluidos. Definimos el Disco Cerrado de centro C_0 y radio $r > 0$ como

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2} \leq r\}$$

Esferas y Bolas (Solo en \mathbb{R}^3)

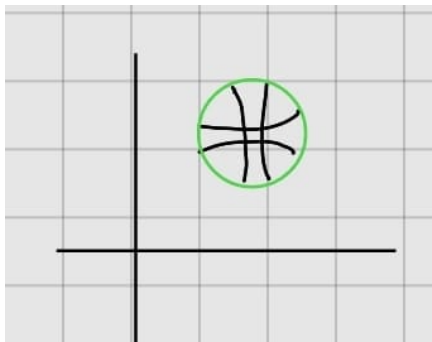
Esfera

Sea un centro $C_0 = (a_0, b_0, c_0)$ y radio $r > 0$ definimos una esfera como:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x_0 - a_0)^2 + (y_0 - b_0)^2 + (z_0 - c_0)^2} = r\}$$

Definición formal de Esfera

$$Br(P) = \{X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|X - P\| = r\}$$



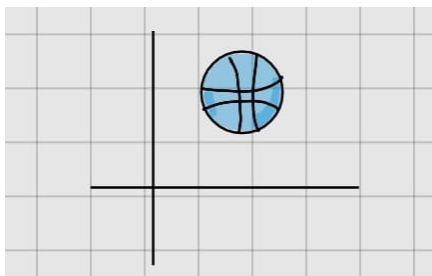
Bola Abierta

Misma idea que Disco Abierto pero en \mathbb{R}^3

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 + (z - c_0)^2} < r\}$$

Definición formal de Bola Abierta

$$Br(P) = \{X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|X - P\| < r\}$$



Bola Cerrada

Misma idea que Disco Cerrado pero en \mathbb{R}^3

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 + (z - c_0)^2} \leq r\}$$

Nota: Véase [*anexo*](#) para ver ejercicios de completar cuadrados y encontrar el centro y radio de una esfera.

Definición formal de Bola Cerrada

$$Br(P) = \{X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|X - P\| \leq r\}$$



Aclaración sobre enunciados

Importante siempre prestar atención a la dimensión donde trabajamos. Es decir $x^2 + y^2 = 4$ puede representar dos cosas diferentes si estamos en \mathbb{R}^2 o en \mathbb{R}^3

Vectores

Los vectores tienen dirección, sentido y longitud. Sean dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^n$, definimos un vector $V \in \mathbb{R}^n$ como $\vec{PQ} = Q - P$.

Vectores Equivalentes

Dos vectores son equivalentes si tienen misma dirección, sentido y longitud.

Vectores Iguales

Dos vectores son iguales si son equivalentes y además parten del mismo punto.

Suma de Vectores

Sean u, v vectores $\in \mathbb{R}^n$. La suma de ambos se realiza coordenada a coordenada. $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$

Producto por Escalar

Sea $t \in \mathbb{R}$ y u un vector. $t * u = (tu_1, tu_2, \dots, tu_n)$

Regla del Paralelogramo

Se utiliza para ver como queda la traslación del vector $u + v$ luego de sumar ambos vectores.

Propiedades de los vectores

- La suma es conmutativa: $u + v = v + u$
- Sea un valor $t \in \mathbb{R}$, definimos la distributiva con vectores como $t(u+v) = tu + tv$

Norma de un Vector

Definimos la norma de un vector como $\|V\| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + \dots + (v_n)^2}$

Relación entre distancia entre dos puntos y la norma

Es fácil notar que $\|B - A\| = \|A - B\|$. Definimos la **equivalencia** de las siguientes fórmulas:

$$\text{dist}(A, B) = \|B - A\| \equiv \|A - B\|$$

Propiedades de la norma

- $\|V\| \geq 0$
- $|V| = \sqrt{V^2}$
- $\|V\| = \text{dist}(V, 0)$
- $\alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha * V\| = \|\alpha\| * \|V\|$: en criollo quiere decir que si multiplico un escalar dentro de la norma, es lo mismo que sacarlo hacia afuera y hacerlo por separado.
- $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\|$: desigualdad Triangular (DT)
- $\|V - W\| \leq \|V\| + \|-W\|$: esto tiene sentido pues $\|-w\|$ es positivo. Entonces queda $\|V - W\| \leq \|V\| + \|W\|$
 - Importante: Esto se utiliza mucho para acotar. $\|V + W\|$ y $\|V - W\|$ se acotan por $\|V\| + \|-W\|$

Importante: Si aplico la NORMA a un número, es como aplicar el módulo.

Producto Interno (Producto Escalar / Producto Punto)

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. Definimos el producto interno, como la multiplicación **coordenada a coordenada** de los vectores. **Siempre devuelve un número.**
Hay dos formas de notarlo

$$\langle u, v \rangle = u * v$$

Vectores Perpendiculares

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. Si el producto escalar entre dos vectores es 0, entonces los vectores son perpendiculares.

Propiedades del Producto Interno

- $u * u = \|u\|^2$
- Conmutatividad: $u * v = v * u$
- Distributividad: Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, entonces $(u + v) * w = uw + vw$
- $t \in \mathbb{R}, (t * u) * v = t * (u * v) = u * (t * v)$

Importante: No se pueden multiplicar 3 vectores con el producto interno, porque el producto interno devuelve un NÚMERO. Si multiplico 3 vectores, sería multiplicar primero dos (devuelve un número) y según si es > 1 o no, estaríamos dilatando/-contrayendo otro vector.

Propiedad importante de la norma y el Producto Interno

Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$v * w = \|v\| * \|w\| * \cos(\theta)$$

con $0 \leq \theta \leq \pi$

Teorema de Cauchy-Schwartz

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ vale $|u * v| \leq \|u\| * \|v\|$

Importante: Si $|u * v| = \|u\| * \|v\|$ entonces $v//u$ (v es paralelo a u)

Proyecciones

Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$. Queremos calcular la proyección de w en la dirección de v.

$$P_v(w) = w * \frac{v}{\|w\|} * \frac{v}{\|v\|} = w * v * \frac{v}{\|v\|^2} = \frac{w * v}{v * v} = \frac{w * v}{v^2} * v$$

Producto Vectorial / Cruz (Solo en \mathbb{R}^3)

Sean $v, w \in \mathbb{R}^3$. Se utiliza para calcular un **vector perpendicular** a los dos que se nos envían.

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Entonces, el cálculo que hay que hacer es: $((b * f) - (c * e), -((a * f) - (c * d)), ((a * e) - (b * d)))$

Importante: Si este cálculo da 0, entonces los vectores son paralelos.

Propiedades del Producto Vectorial

- $(V \times W)$ es perpendicular a V y W .
 - Esto es re útil para cuando encontramos una normal para el plano y queremos ver si efectivamente es perpendicular a ambos vectores.
- $(W \times V) = - (V \times W)$: Es decir, no son iguales si los invertimos, si lo invierto le cambio el signo.

Planos en \mathbb{R}^3

Dado un **vector normal** N y un **punto de paso** P construimos la ecuación del plano π que es perpendicular al **vector normal** y contiene al punto P (es decir, P verifica la ecuación del plano). Véase [anexo](#) para ejercicios de Planos.

Hallar vector normal N de un Plano

El vector normal N de un Plano lo podemos hallar comúnmente de las siguientes maneras

- Si tenemos 3 puntos, ABC podemos hacer la diferencia y generar 2 vectores directores. Es decir, AB y BC o AB y AC . Luego aplicamos el producto cruz y ya tenemos la normal al plano. Por último podemos tomar cualquier punto.
 - Como tenemos la NORMAL tenemos (a, b, c) nos falta d . Para generar d podemos evaluar $ax + by + cz$ con cualquier punto de paso. El número que da como resultado es d .

Ecuación Paramétrica del Plano

$$\pi : \lambda(x_1, x_2, x_3) + \gamma(y_1, y_2, y_3) + (p_1, p_2, p_3)$$

Ecuación Implícita del Plano

$$\pi : ax + by + cz = d$$

Saber si un punto está en un plano

Debe verificar la ecuación implícita.

Rectas Paramétricas

$$\text{En } \mathbb{R}^2 = L : (x, y) = \alpha(v_1, v_2) + (P_1, P_2), \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\text{En } \mathbb{R}^3 = L : (x, y, z) = \alpha(v_1, v_2, v_3) + (P_1, P_2, P_3), \alpha \in \mathbb{R}$$

Véase [anexo](#) para ver ejercicios con rectas y planos.

Rectas Paralelas

Dos rectas son paralelas si sus vectores son uno múltiplo del otro.

Rectas Perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si el producto escalar entre ambos vectores directores da 0.

Rectas Alabeadas

Dos rectas son alabeadas si no existe intersección entre ellas, y además son paralelas.

Intersección entre dos rectas

Sean L_1, L_2 dos rectas. La intersección entre dos rectas se da en un punto específico. Por lo tanto, se espera que la intersección sea un número y además, este número pertenece a L_1 Y L_2

Casos de Rectas y Planos

- Si tengo plano + 2 rectas: Si se cruzan o son paralelas, entonces existe un único plano.
- Si tengo plano + 1 recta: Existen infinitos planos que la contenga.

Curvas

Son un conjunto de puntos por los que pasó una partícula dada a lo largo del tiempo. La trayectoria, el movimiento que hace en cada tiempo t la partícula va dejando una marca y forma una curva.

Las funciones son de la forma

$$f(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Nota: En general, una curva en \mathbb{R}^n es la imagen de una función $\alpha(t)$ continua de \mathbb{R} en \mathbb{R}^n . Es decir, $Im \alpha = C$

Ej.: Una recta en \mathbb{R}^2 es la imagen de una curva paramétrica.

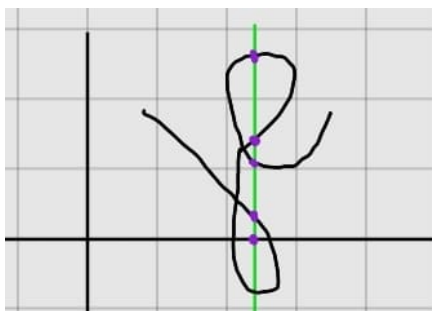
Véase anexo para ver como parametrizar.

Criterio de la Recta Vertical

No todas las curvas representan funciones. Para poder ver esto de una forma fácil, recordemos qué es una función. Una función es una máquina que espera un valor y da otro.

Ahora, es importante que para diferentes valores tienen que dar diferentes resultados.

Si existen valores que dan el mismo resultado, entonces no es una función.



Importante: Todos los gráficos son curvas pero no toda curva es gráfico de función.

Parametrización de la Curva

Existen infinitas parametrizaciones para una misma curva. Esto quiere decir, que una misma partícula puede realizar una trayectoria de mil maneras diferentes.

Denotamos la parametrización de una curva como: $C = \{(x(t), y(t)) / t \in \mathbb{R}\}$ y decimos que es paramétrica porque espera un parámetro.

Las parametrizaciones nos dan descripciones dinámicas mientras que las que no tienen un parámetro t son estáticas.

¿Qué no nos dice la ecuación implícita de una curva?

Las ecuaciones en x y y describe **dónde** ha estado la partícula pero no nos dice **cuándo** ha estado la partícula en un punto en particular.

¿Qué nos dice la ecuación paramétrica de una curva?

La ventaja es que nos dicen **cuándo** (t) estuvo la partícula en un punto (x, y) y la dirección en su trayectoria.

Ejemplo de Curvas

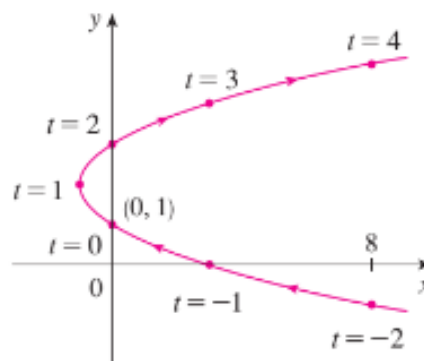
Recordemos que básicamente una curva se arma gracias a la trayectoria de una partícula que hace cierto movimiento a lo largo del tiempo.

Este tiempo se llama t , y podemos ir viendo el movimiento de la partícula gracias a la ecuación paramétrica. A medida que t aumenta, esa es la dirección que toma la partícula.

$$f(t) = \begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t - 1 \end{cases}$$

Si nos ponemos a darle valores a t , vamos a ir obteniendo valores de x e y , que básicamente los podemos graficar en un plano.

t	x	y
-2	8	-1
-1	3	0
0	0	1
1	-1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5



Parece entonces en este ejemplo, que la partícula hizo la trayectoria de una parábola. Busquemos entonces la ecuación implícita para ver qué curva representan las ecuaciones paramétricas.

$$f(t) = \begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t - 1 \equiv y + 1 = t \end{cases}$$

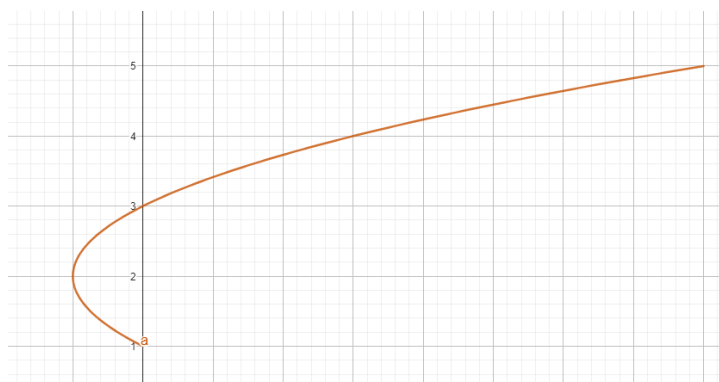
Entonces, $x = (y + 1)^2 - 2(y + 1) \equiv x = y^2 - 4y + 3$

Efectivamente podemos notar que la partícula, gracias a esas ecuaciones paramétricas y dando el tiempo t fuimos formando la curva paramétrica (parábola) $x = y^2 - 4y + 3$.

Entonces ¿cuál es la diferencia entre tener la ecuación paramétrica con un parámetro t o tener la que depende de x e y ? La diferencia es que con la paramétrica podemos saber en qué lugar estaba la partícula en un tiempo t .

Restringiendo los posibles valores t de la Curva

Se utilizan intervalos. Es decir, nosotros podemos decir qué trayectoria recorre la partícula, desde qué t hasta qué t . Esto se define como $x = f(t)$ y $y = g(t)$ $a \leq t \leq b$ donde el **punto inicial** es $(f(a), g(a))$ y el **punto final** es $(f(b), g(b))$. Ejemplo: $x = (t^2 - 2t)$ $y = (t + 1)$ $0 \leq t \leq 4$



Circunferencias Paramétricas

Se suelen representar con coseno y seno.

$$x = \cos(t), y = \sin(t), 0 \leq t < 2\pi$$

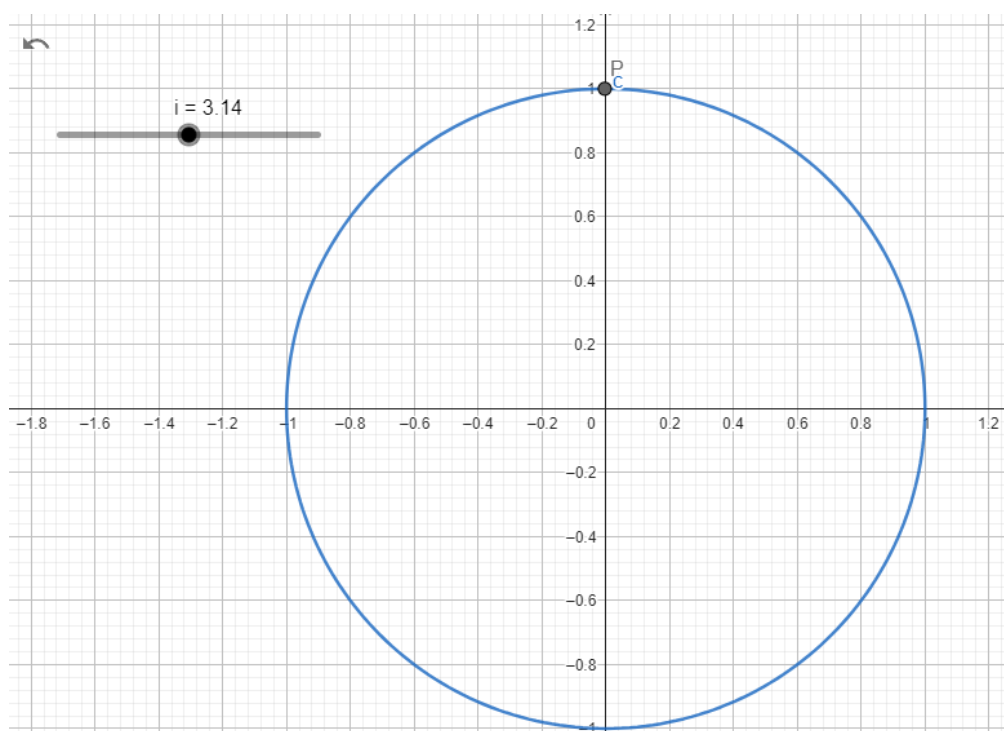
Si damos unos valores t y dibujamos en el plano, veremos que está realizando una circunferencia de radio 1.



Observamos que $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$. En este caso la circunferencia se va completando gracias a la trayectoria del punto que va en sentido antihorario.

$$x = \cos(2t), y = \sin(2t), 0 \leq t < 2\pi$$

Este es parecido al anterior, la diferencia es que ahora vamos al **doblo de velocidad**. Antes con $\cos(t)$ y $\sin(t)$ íbamos de 0 a 2π **una vez**. Acá, al estar multiplicado el t por 2, lo que va a hacer es que vamos a recorrer en 2π **dos veces** la circunferencia (cada π recorrimos la circunferencia entera). Pero ojo, esta es $\sin(2t)$ y $\cos(2t)$ entonces, está invertido el recorrido. Acá se hace en sentido horario.

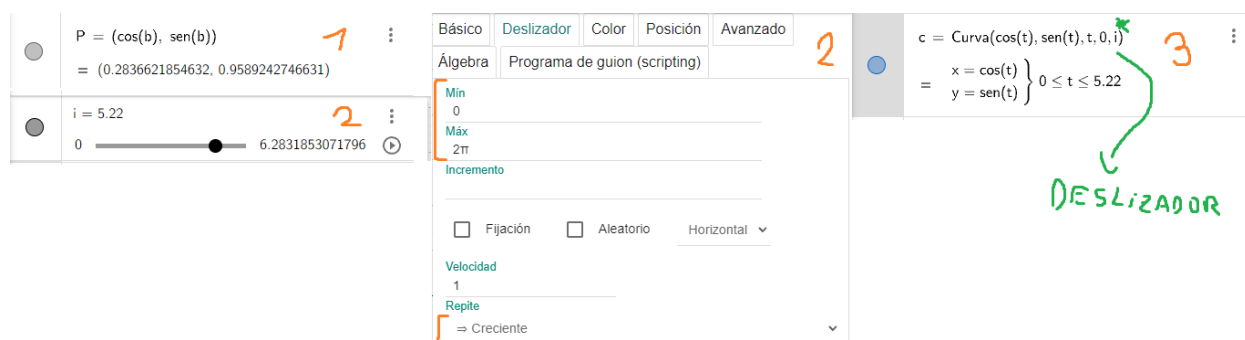


Nótese que llegamos a 3.14 y ya recorrió toda la circunferencia gracias al $2t$ (antes recorría la mitad). Sin embargo, el deslizador indica que le falta todavía una vuelta para dar.

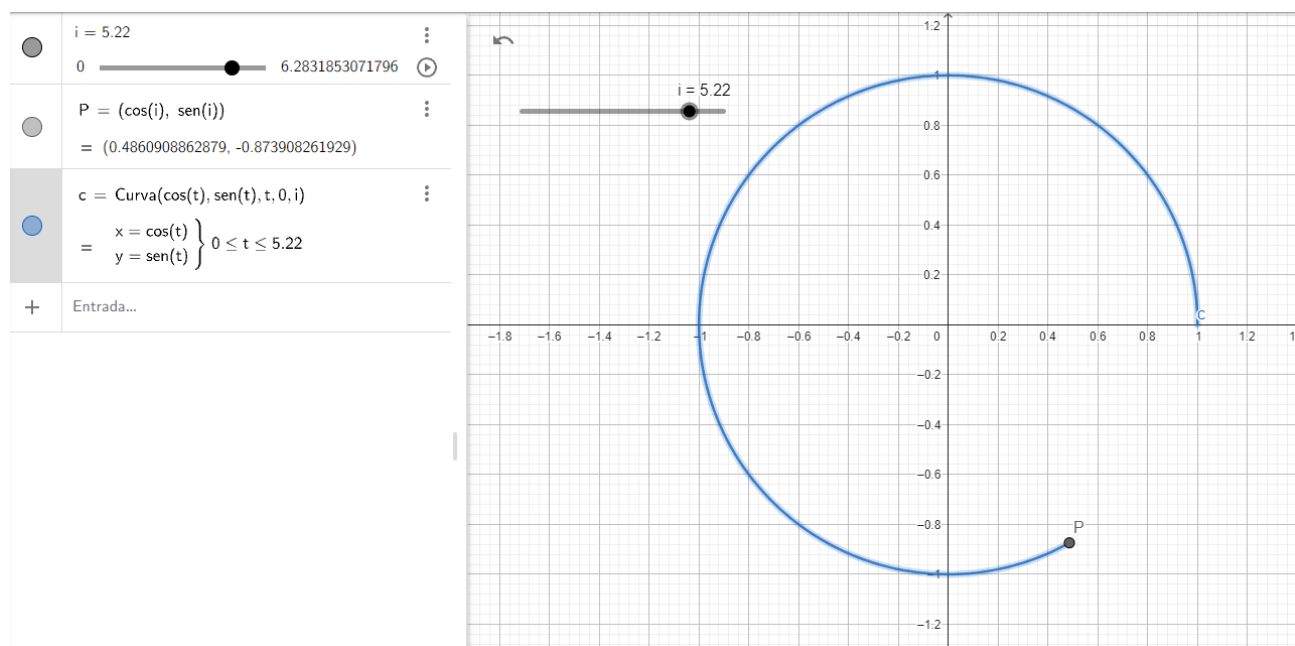
Conclusión: Podemos ver que dos parametrizaciones diferentes, representan la misma curva (circunferencia), pero recorrida a diferente velocidad.

Deslizadores en GeoGebra

Nos permiten simular como una partícula se mueve realizando la curva.



Por si requiere orientación, observe este vídeo.



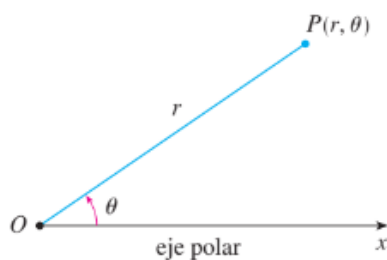
Coordenadas Cartesianas y Polares

Coordenada Cartesiana

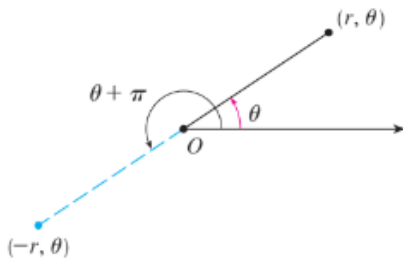
Permite representar un punto en el plano mediante un par ordenado de números llamados coordenadas.
Ej.: $P = (1, 2)$ está dado de forma cartesiana.

Coordenada Polar

Permite representar un punto P mediante el par ordenado (r, θ) y r, θ se llaman coordenadas polares de P .
Recordatorio: r : largo, θ : ángulo desde el $(0, 0)$



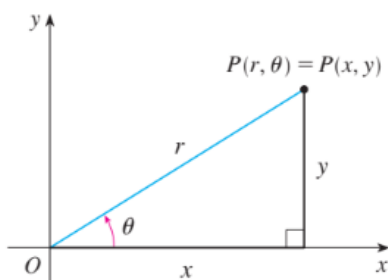
Nota: Si $r > 0$ el punto (r, θ) está en el mismo cuadrante que θ . Si $r < 0$ está en el cuadrante opuesto del polo $(-r, \theta) \equiv (r, \theta + \pi)$



Importante: θ se mide en radianes y normalmente el rango es $0 \leq \theta < 2\pi$ pues el 0 es lo mismo que incluir el 2π

Coordenadas Polares a Cartesianas

La fórmula se deduce a partir de lo siguiente $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$, $\text{sen}(\theta) = \frac{y}{r}$



Masajeando un poco, nos queda

$$x = r * \cos(\theta), \quad y = r * \text{sen}(\theta)$$

Coordenadas Cartesianas a Polares

Podemos calcularlo a partir del pasaje o la figura anterior. Por lo tanto nos quedaría

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

Véase anexo para ejercicios acerca de los pasajes en este tema.

Curvas Polares

La gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ o de manera más general $F(r, \theta) = 0$ consiste de todos los puntos P que tienen al menos una representación polar (r, θ) .

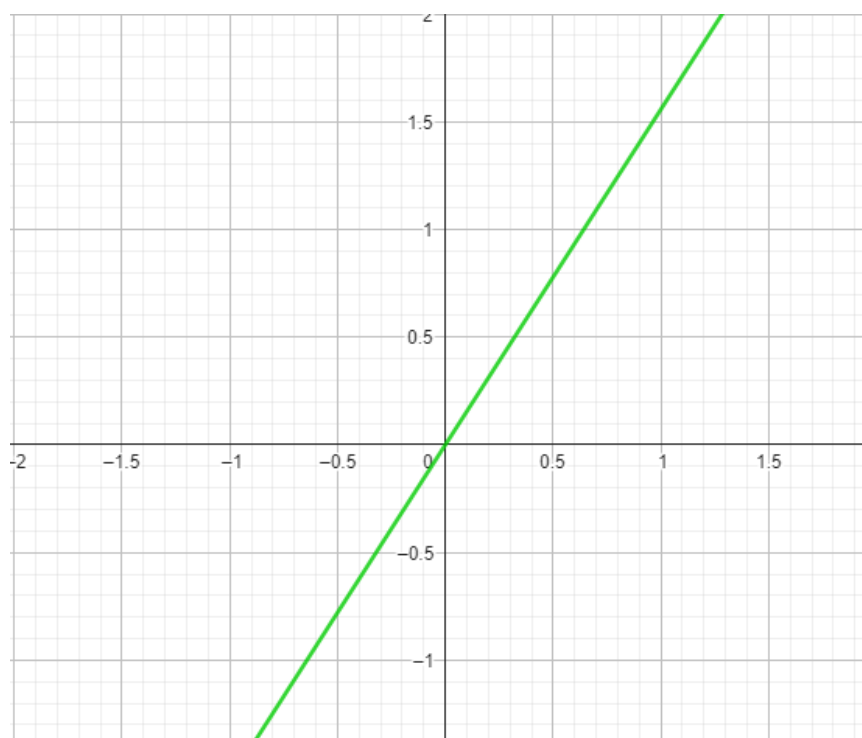
Ej.: $r = 2$ representa a $F(2, \theta)$ y esto sería básicamente una circunferencia con centro 0 y de radio 2. ¿Por qué una

circunferencia? Porque θ es un ángulo, y los ángulos van desde $0 \leq \theta < 2\pi$

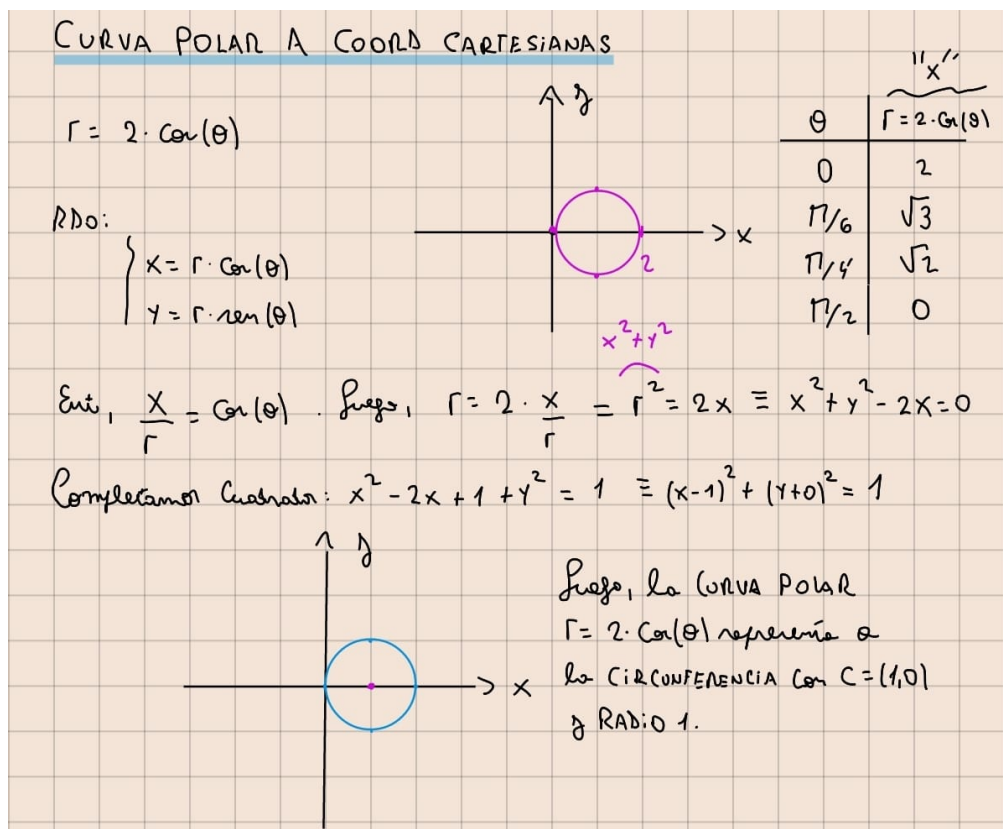


En la imagen anterior podemos ver varias curvas polares que representan circunferencias con centro 0.

Ej.: $\theta = 1$ representa a una curva que posee siempre el ángulo $\theta = 1$ (*medido en radianes*) sin ninguna restricción acerca de p .

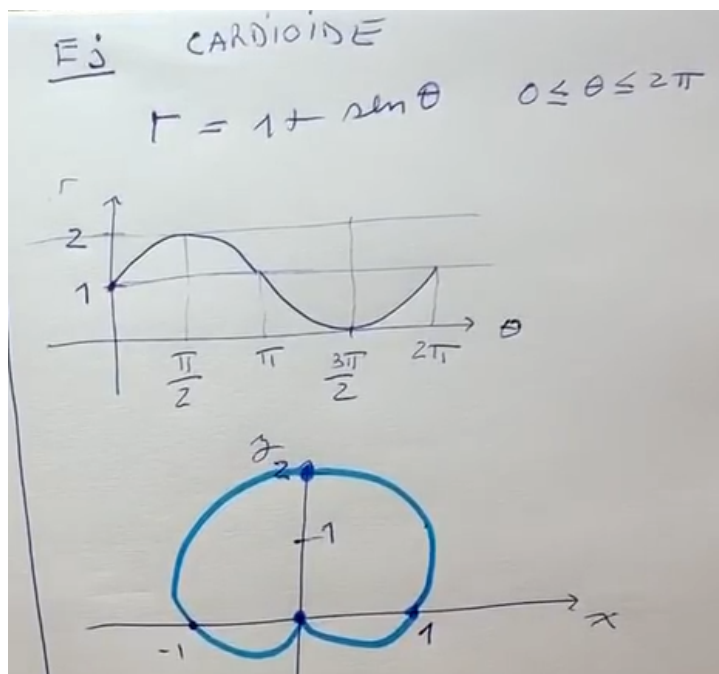


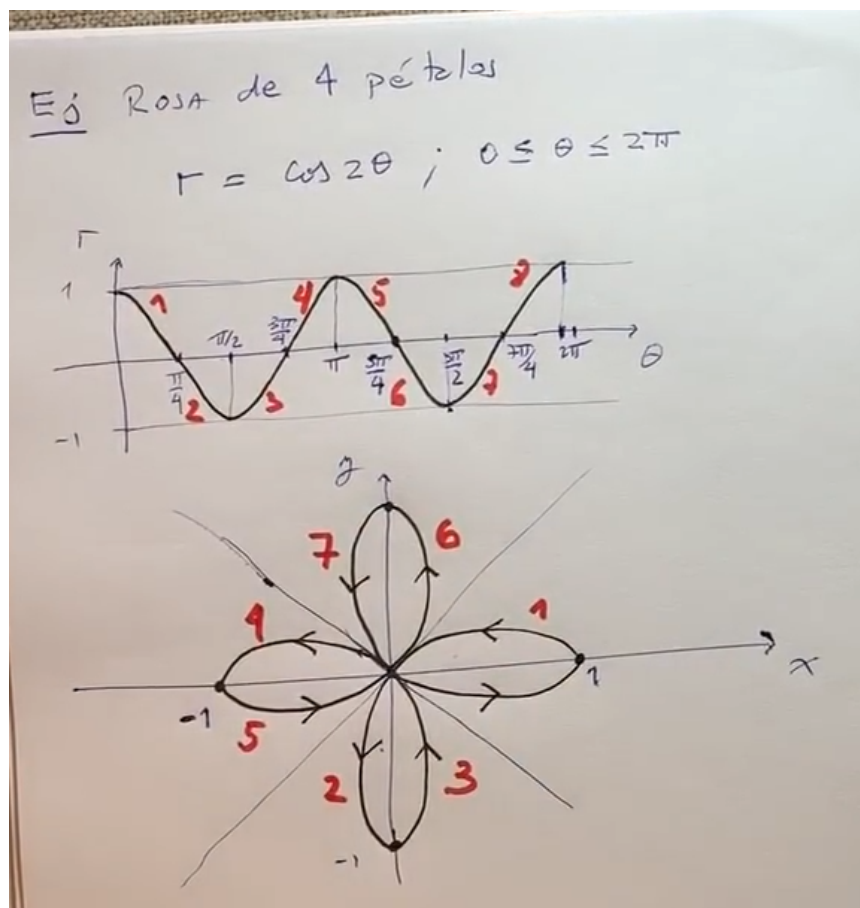
Pasaje de Curva dada en forma Polar a Curva dada en Ecuación Cartesiana



Importante: Véase que despejamos $x = r \cdot \cos(\theta)$ para ver qué vale $\cos(\theta)$ porque nuestro ejercicio tenía un $2 \cdot \cos(\theta)$. Nos queda más fácil para aplicar $r^2 \equiv x^2 + y^2$

Cardioide





Preguntar: ¿Por qué $r = 2\cos(\theta)$ es fácil pasarlo a ecuación cartesiana y no pasa lo mismo con $r = 1 + \sin(\theta)$ o $r = \cos(2\theta)$?

Cónicas

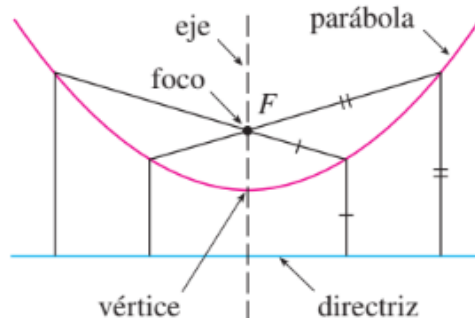
Se llaman cónicas porque resultan de cortar un cono con un plano.

Parábolas

Una parábola es el conjunto de puntos en el plano que están a igual distancia de un punto fijo F (llamado **foco**) y una recta fija (llamada **directriz**).

El punto entre el foco y la directriz se llama **vértice**.

La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco se llama **eje** de la parábola.



Relación entre el Foco y la Directriz

Si el foco está en el punto $(0, p)$ entonces la directriz tiene la ecuación $y = -p$. Esto quiere decir que la **distancia del foco al vértice** es la **misma** que la **distancia de la directriz al vértice**.

Distancia de un punto $P(x, y)$ de la parábola al Foco y Directriz

P a Foco: $|PF| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$

P a Directriz: $|y + p| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$

La ecuación equivalente que se consigue desarrollando $|y + p| = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$ es $x^2 = 4py \equiv \frac{1}{4p}x^2 = y \equiv ax^2 = y$

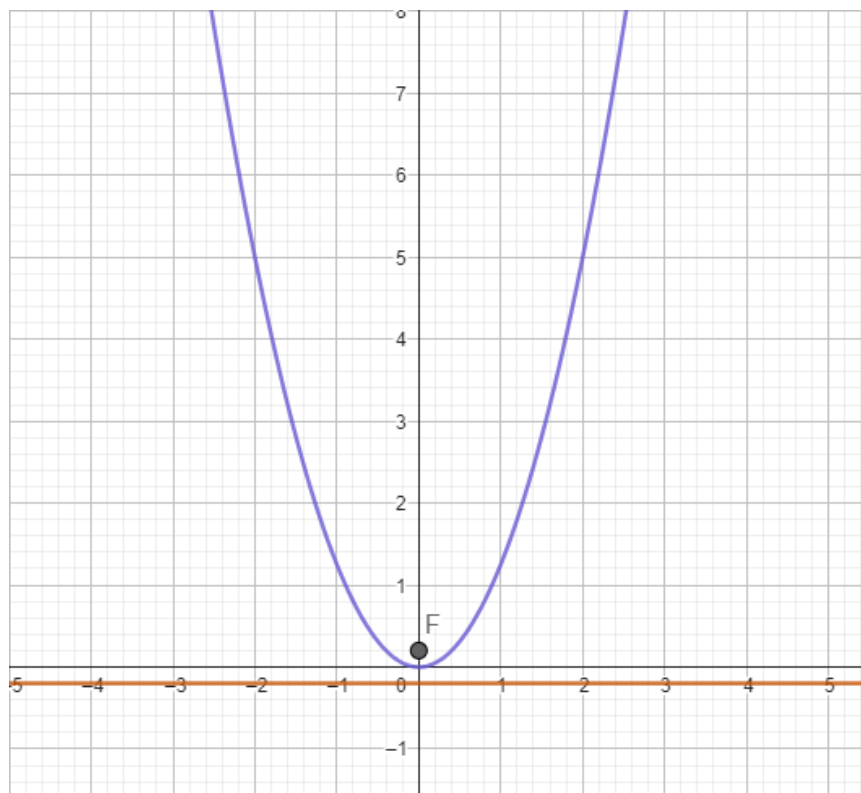
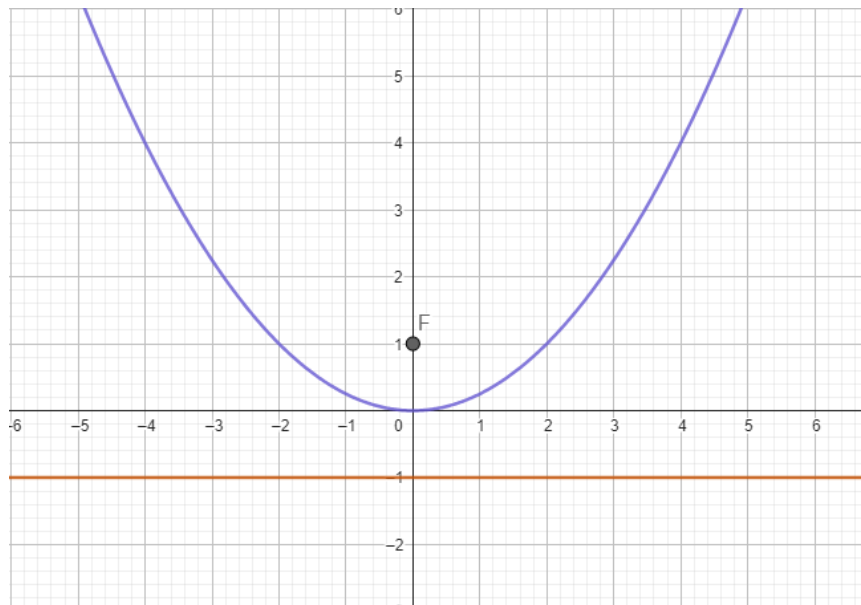
Parametrizando una Función

Consideremos $ax^2 = y$, la manera de parametrizarla es de la siguiente forma

$$f(t) = \begin{cases} x = t \\ y = at^2 \end{cases}$$

Efecto del Foco y la Directriz con la Parábola

Más cerca esté de origen el punto P, entonces más chica será la distancia entre el foco y la directriz y la parábola será menos ancha.



¿Hacia donde abre la parábola?

- $x^2 = 4py$ (directriz en y, foco (0, p))
 - $p > 0$: Hacia arriba
 - $p < 0$: Hacia abajo
- $y^2 = 4px$ (directriz en x, foco (p, 0))
 - $p > 0$: Hacia la derecha
 - $p < 0$: Hacia la izquierda

Recordatorio: La directriz y el foco están en el eje contrario al que tiene el cuadrado.

Elipses

Una elipse es el conjunto de planos en un plano cuya suma de sus distancias a dos puntos F_1 y F_2 es una constante. Estos dos puntos fijos se llaman **focos**.

Cálculo de los focos

La fórmula es: $c^2 = a^2 - b^2$

Formas de armar una Elipse

Existe un concepto que es eje mayor y eje menor. Encontrando el eje mayor ya sabemos donde están posicionados los focos y los vértices.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a \geq b > 0$: tiene focos $(\pm c, 0)$ donde $c^2 = a^2 - b^2$ y vértices $(\pm a, 0)$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ con $a \geq b > 0$: tiene focos $(0, \pm c)$ donde $c^2 = a^2 - b^2$ y vértices $(0, \pm a)$

En criollo: La letra que tiene un denominador más grande, es el que tiene los focos y el vértice (eje mayor). El eje mayor sería hacia donde es más grande. El número más grande siempre es **a**.

Tips: Siempre recordar que si me dan un foco ya puedo determinar el eje mayor; mismo con si me dan un vértice. Recordar también que el vértice depende de **a** esto quiere decir es que si me dan el vértice me dieron el eje mayor.

En la teoría no hay más que eso, véase anexo para ver ejercicios de elipses.

Hipérbolas

Una Hipérbola es el conjunto de todos los puntos en un plano cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 (los focos) es una constante.

Cálculo de los focos

La fórmula es: $c^2 = a^2 + b^2$

Formas de armar una Hipérbola

Existe un concepto que es eje mayor y eje menor. Encontrando el eje mayor ya sabemos donde están posicionados los focos y los vértices.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: tiene focos $(\pm c, 0)$ donde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(\pm a, 0)$ y asíntotas $y = \pm \frac{b}{a}x$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$: tiene focos $(0, \pm c)$ donde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(0, \pm a)$ y asíntotas $y = \pm \frac{a}{b}x$

En la teoría no hay más que eso, véase anexo para ver ejercicios de elipses.

Cónicas Desplazadas

Son exactamente las mismas maneras, solo que acá en vez de x e y es (x-k) y (y-k). Entonces, ej hipérbola con eje mayor x

- $vertices = (centroX \pm a, centroY)$
- $focos = (centroX \pm c, centroY)$
- $hiperbolas = -\frac{b}{a}(x - centroX)$ y $\frac{b}{a}(x - centroX)$

Superficies Cuadráticas (\mathbb{R}^3)

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx + gx + hy + iz + j = 0$$

No es necesario recordar la fórmula, lo que si está bueno saber que mediante rotaciones y traslaciones esta ecuación podemos reescribirlo de diferentes maneras.

- Tipo 1: $ax^2 + by^2 + cz^2 + j = 0$
- Tipo 2: $ax^2 + by^2 + iz = 0$

Estas diferentes maneras de verlo nos genera todas las cuádricas que necesitamos.

Ej.: $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$. Este es un caso particular del primer tipo que escribimos arriba.

Para ver la resolución, véase [anexo](#)

Si quiere observar la tabla de cuádricas, véase [anexo](#)

Trazas

En un conjunto tridimensional es muy difícil de observar.

Las trazas nos ayudan a través de planos paralelos a los ejes coordenados cortar una superficie.

- $z = k$ es un plano paralelo al plano xy
- $y = k$ es un plano paralelo al plano xz
- $x = k$ es un plano paralelo al plano yz

Cuando yo hago un corte a una superficie con una traza, me queda una curva. Si miro como van siendo esas curvas a medida que las corto con distintas trazas esto me da una idea de como va a ser esa superficie.

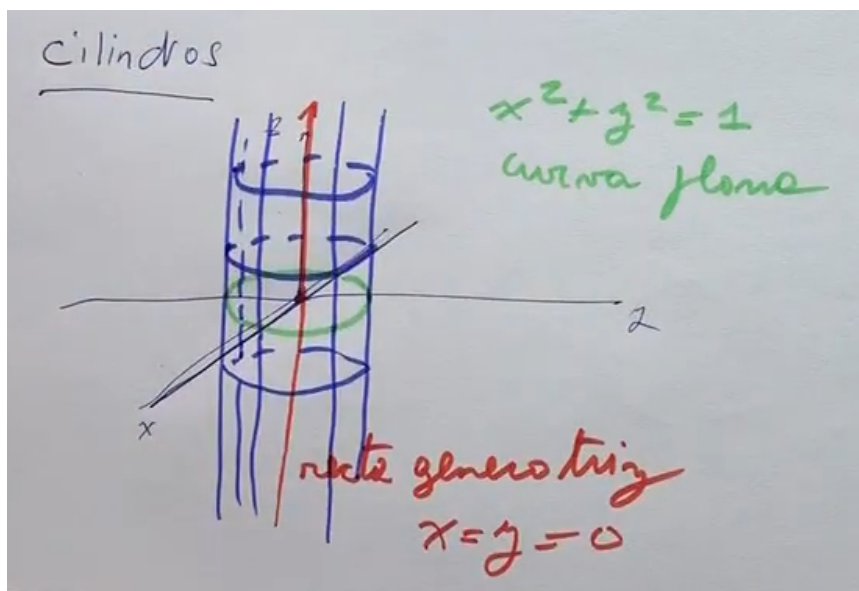
Recta Generatriz

Es una recta que tomo en \mathbb{R}^3 que normalmente es para tomar paralelas y generar cortes.

Cilindro

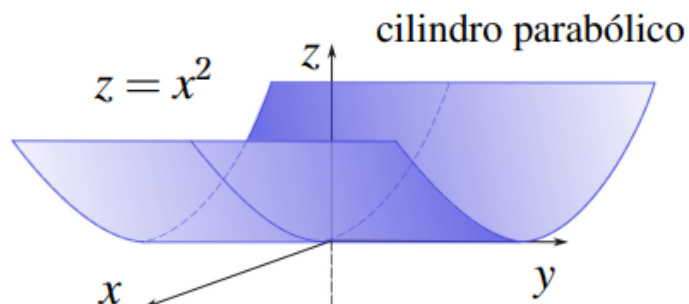
Es el conjunto de puntos que atraviesan la curva plana $x^2 + y^2 = 1$ y que son paralelas a la recta generatriz.

Cuando hago un corte, asignando un valor de z nos genera un cilindro.



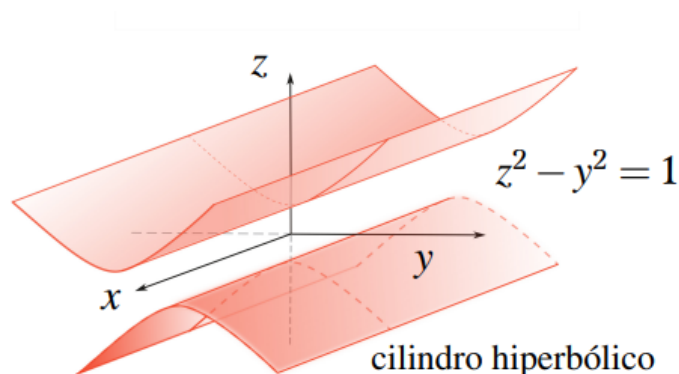
Cilindro Parabólico (generado por una parábola)

Tomo una recta generatriz en el eje y y $x = z = 0$.



Cilindro Hiperbólico (generado por una hipérbola)

Toma una recta generatriz (eje?)



Anexo

Esferas

Complete y lleve a una fórmula conocida: $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 16$

- Reordenen: $x^2 + 8x + y^2 - 6y + z^2 = -16$
- Completo cuadrados, los valores que tienen la variable (sin exponente), hago $(num/2)^2$.
 - $(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) + z^2 - 16 - 9 = -16$
 - Nótese que como nos inventamos términos para completar cuadrados, tenemos que restarlos.
- Reordenen: $(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) + z^2 = -16 + 16 + 9$
- Para agrupar un cuadrado, el número que no tiene variable, tengo que aplicarle la raíz cuadrada. Luego, el símbolo que los separa es el signo del coeficiente que tiene variable grado uno.
 - $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 9$
- Por último, como el radio está elevado al cuadrado lo reducimos $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 3$
- El resultado entonces, es una Esfera en \mathbb{R}^3 con centro $= (-4, 3, 0)$ y radio $= 3$
- Si se quisiera verificar si está bien, podemos desarrollar todos los cuadrados y deberíamos volver a la expresión original.

Adjunto otro ejercicio que es de cónicas, pero acá tuve que completar cuadrados de una manera ligeramente diferente. La forma de encararlo fue dejar el valor que esta solo del lado positivo. Luego, como tuve que sacar factor común de las letras, al tener que completar los cuadrados lo que le tengo que restar es el factor común * el valor que agregué. Eso es lo que termino restando.

Planos

1. Hallar la ecuación implícita del plano π cuya normal sea $N = (-3, 0, 4)$ y que pasa por el punto $P = (2, 1, 1)$

Recordemos como podemos armar un plano. Para poder armar un plano necesitamos un vector normal y un punto de paso. Por lo tanto, este ejercicio es bastante simple, podemos simplemente aplicar la fórmula de $\pi : ax + by + cz = d$

Entonces, nos quedaría algo así: $\pi : -3x + 0y + 4z = d$

Ahora ¿como calculo d ?, podemos calcular d evaluando el punto P en el plano.

Por lo tanto $d = -3(2) + 4(1) \equiv d = -2$

Entonces, el plano $\pi : -3x + 4z = -2$

2. Dados los puntos $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 0, 1)$ y $C = (4, -1, 2)$ encuentre el plano.
 Recordemos como podemos armar un plano. Para poder armar un plano necesitamos un vector normal y un punto de paso.
 ¿Tenemos la normal? No. ¿Como podemos calcularla? La manera de calcular un vector normal sería hacer el producto cruz entre dos vectores directores.
 Por lo tanto, calculemos nuestros dos vectores directores $\vec{AB} = (0, -2, -2)$ luego $\vec{BC} = (3, -1, 1)$
Nota: Sería lo mismo calcular \vec{AB} y \vec{BC} que \vec{AB} y \vec{AC} . Ahora lo que podemos hacer es una vez que tenemos las dos direcciones podemos buscar con el producto cruz, un vector perpendicular que hará de nuestra normal.
 PD: Recordemos que $\vec{A} \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{A})$. Por lo tanto da igual que orden pongamos los vectores.

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nuestro vector normal N termina siendo $N = (-4, 6, 6)$
 ¿Ahora qué nos falta? Un punto. Entonces podemos elegir cualquiera de los puntos A, B, C (xq las rectas estarían contenidas en el plano)
 Si quisiéramos verificar si efectivamente la normal nos dió bien, podemos calcular el producto escalar de $N * AB$ y $N * BC$ y ambos deberían dar 0.
 Entonces, ahora por último hacemos lo mismo que en ejercicio anterior. $\pi : -4x + 6y + 6z = d \implies d = -4(1) + 6(0) + 6(1) \implies d = 2$
 Finalizamos, juntando la ecuación $\pi : -4x + 6y + 6z = 2 \equiv \pi : -2x + 3y + 3z = 1$

Rectas & Rectas y Planos

1. Dadas la recta $L : t(1, 1, 1) + (3, 0, 4)$ y el plano $\pi : 2x - y + 5z = 10$ halle $L \cap \pi$.

Recordemos qué significa que una recta pueda intersectarse con un plano: que una recta pueda intersectarse con un plano o al revés significa que existe al menos un punto que tienen en común.

Con esto quiero decir que el punto que encontremos debe verificar tanto el plano como la recta.

Como tenemos que encontrar UN PUNTO necesitamos encontrar la fórmula generadora de puntos de la recta o el plano.

En este caso, como tenemos la recta en paramétrica y el plano en implícita nos conviene más fácil pasar la paramétrica y ver qué pinta tienen los puntos.

Entonces, si pasamos L a paramétrica nos queda: $(t + 3, t, t + 4)$ entonces $x = (t + 3), y = t, z = t + 4$

Ahora, coloquemos lo que acabamos de encontrar en el plano, esto nos dará la variable t para la recta. Como este t nos lo da después de meterlo el punto de la recta en el plano, cuando reemplacemos en el punto genérico con el t que encontramos, entonces ese punto será el de la intersección del plano y la recta.

$$\pi : 2(t + 3) - (t) + 5(t + 4) = 10 \equiv \pi : 2t + 6 - t + 5t + 20 = 20 \equiv \pi : t = \frac{-8}{3}$$

Ahora, este t lo colocamos en la fórmula genérica de los puntos de la recta: $((\frac{-8}{3} + 3), \frac{-8}{3}, \frac{-8}{3} + 4)$.

Entonces, la intersección es el punto $P = (\frac{1}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{4}{3})$

Por lo tanto, verifiquemos ahora, si este punto verifica el plano.

$$\pi : 2(\frac{1}{3}) - (\frac{-8}{3}) + 5(\frac{4}{3}) = 10 \equiv 10 = 10$$

Luego, como el punto lo arrojó la recta, y verifica el plano, entonces la intersección $L \cap \pi = (\frac{1}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{4}{3})$

2. Dar la ecuación implícita del plano π que contiene a la recta.

$L : \alpha(2, 1, 3) + (2, 1, 0)$ y al punto $P = (0, 1, -1)$ Recordemos que si un plano contiene a una recta, todos los puntos de la recta están en el plano.

(preguntar qué pasaba si el punto estaba en la recta, qué cambiaba el ejercicio, en este caso no está) Lo primero que tenemos que ver es si el punto $P \in L$. Si el punto está en la recta, entonces hay infinitos planos. Si el punto NO está en la recta, entonces hay un único plano.

Como necesito sí o sí dos vectores directores para mi plano, puedo hacer un vector director de la resta de $QP = (0, 1, -1) - (2, 1, 0) = (-2, 0, -1)$

Entonces ahora hago el producto cruz entre $(2, 1, 3)$ y $(-2, 0, 1)$

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nuestro vector normal N termina siendo $N = (1, 4, -2)$

Entonces ahora, finalizamos el ejercicio evaluando en la normal el punto P $\pi : x + 4y - 2z = d$

$$d = (0) + 4(1) - 2(-1) \equiv d = 6$$

Entonces finalizamos con $\pi : x + 4y - 2z = 6$

3. Dadas las rectas $L_1 : \alpha(-1, 0, 1) + (4, 3, 2)$ y $L_2 : \gamma(2, 0, -2) + (0, 0, 1)$. Halle la ecuación implícita del plano π que las contiene.

Lo primero que vemos es que tenemos dos rectas. Necesitamos de alguna manera un vector normal para el plano.

Primero vemos qué relación hay entre las rectas, podemos ver que son paralelas porque si hacemos $(-1, 0, 1) * -2$ nos da $(2, 0, -2)$.

Como son paralelas, necesitamos de alguna manera, llegar desde una recta a la otra, para luego, cuando tenemos un punto que llega y combina las rectas, ahí si podemos calcular con el producto cruz el vector normal.



Entonces, restemos los dos puntos $\vec{PQ} = Q - P = (0, 0, 1) - (4, 3, 2) = (-4, -3, 1)$.

Por lo tanto, ahora sí que tenemos dos vectores directores (no paralelos) podemos hacer el producto cruz para calcular la

normal del plano.

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Nuestro vector normal N termina siendo $N = (3, -5, 3)$

Por lo tanto ahora que tenemos el plano $\pi : 3x - 5y + 3z = d$, buscamos el valor de D evaluando cualquier punto de las rectas $d = 3(0) - 5(0) + 3(1) = 3$

Luego, el plano resultante $\pi : 3x - 5y + 3z = 3$

Pasaje de Coordenadas Cartesianas a Polares y viceversa

Pasaje a COORD CARTESIANAS

$$\begin{cases} x = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ y = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \end{matrix} \Rightarrow P = (1, \sqrt{3})$$

$P = (1, -1) \Rightarrow$ COORD CARTESIANAS
4to Cuad

Pasaje a COORD POLARES

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} r^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2} \\ \tan(\theta) = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{\pi}{4} \text{ pero} \end{matrix}$$

Consigna en 4to Cuad: $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

Luego, $P = \left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$

Parametrización

1. $L : (x, y) = \lambda(2, 1) + (0, 1)$

$$f(t) = \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda + 1 \end{cases}$$

2. ¿Es C gráfico de una función $y = f(x)$?

$$f(t) = \begin{cases} x = t^3 - 4t \\ y = t + 1 \end{cases}$$

Recordemos que para que una función sea $y = f(x)$ tiene que suceder que para todos los y debe existir un único x .
 Vemos unos casos

1		$t = 2, x = 0, y = 3$
2		$t = 1, x = -3, y = 2$
3		$t = 0, x = 0, y = 1$

$$\begin{array}{l|l} 4 & t = -1, x = 3, y = 0 \\ 5 & t = -2, x = 0, y = -1 \end{array}$$

No. No es $y = f(x)$ pues para $x = 0$ existen diferentes valores de y . Si desarrollamos y despejamos nos queda $x = y^3 - 3y^2 - y + 3$ con $y \in \mathbb{R}$

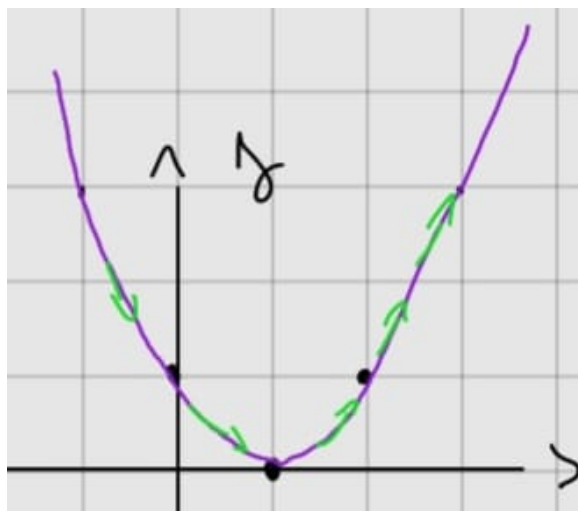
3. Grafique la curva C

$$f(t) = \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 \end{cases}$$

Si primero empezamos a darle valores a t vemos que es el gráfico de una parábola y la dirección es de izquierda a derecha

$$\begin{array}{l|l} 1 & t = -2, x = -1, y = 4 \\ 2 & t = -1, x = 0, y = 1 \\ 3 & t = 0, x = 1, y = 0, \\ 4 & t = 1, x = 2, y = 1 \\ 5 & t = 2, x = 3, y = 4 \end{array}$$

$y = (x - 1)^2$. Es una parábola corrida una unidad hacia la derecha.



4. Hallar una ecuación cartesiana y bosqueje la curva indicando la dirección en que se traza la curva cuando crece el parámetro t .

4. 1: $x = \sqrt{t} \quad y = 1 - t$

4. 2: $x = e^t - 1 \quad y = e^{2t}$

Comenzamos resolviendo 4.1. Lo que podemos ver es que $t \geq 0$ pues de lo contrario x se indefiniría.

Si le damos ciertos valores a t nos queda que la curva va hacia la derecha.

$$\begin{array}{l|l} 1 & t = 0, x = 0, y = 1 \\ 2 & t = 1, x = 1, y = 0 \end{array}$$

Ahora hagamos 4.2. Lo que podemos ver es que $y = e^{2t}$ es lo mismo que $y = (e^t)^2$.

Por lo tanto, como $x + 1 = e^t$ entonces $y = (x + 1)^2$

En este caso es súper importante entender la función e . La función e posee una asíntota en el eje x . En este caso la asíntota está en $y = -1$ pues la función $e^t - 1$ tiene la asíntota y corrida una unidad. Si fuese $e^t + 4$ la asíntota estaría en $y = 4$

Por lo tanto, el valor mínimo que puede tener x es -1 .

Coordenadas Polares

Dada la curva $x^2 + y^2 = 16$ halle una parametrización. Como es una circunferencia, entonces sabemos que el radio es 4. Además, las circunferencias se arman con \cos / \sin .

$$f(t) = \begin{cases} x = 4 \cos(\theta) \\ y = 4 \sin(\theta) \text{ con } 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

Entonces $\alpha(\theta) = \{4 \cos(\theta), 4 \sin(\theta)\}$

Elipses

ELIPSE: RDO: $\overbrace{\text{EJE MAYOR Y (a delos de y)}}^{\text{EJE MAYOR Y (a delos de y)}} \text{ FOCOS: } (0, \pm c) \text{ VERTICES: } (0, \pm a) \mid \overbrace{\text{EJE MAYOR X (a delos de x)}}^{\text{EJE MAYOR X (a delos de x)}} \text{ FOCOS: } (\pm c, 0) \text{ VERTICES: } (\pm a, 0)$

$$9x^2 + 16y^2 = 144 \equiv \frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = 1 \equiv \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a \geq b \text{ ent, } a^2 = 16 \text{ y } b^2 = 9$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \equiv c^2 = 16 - 9 = 7 \equiv c = \sqrt{7}$$

INTERSECCIONES EJE X (y=0):

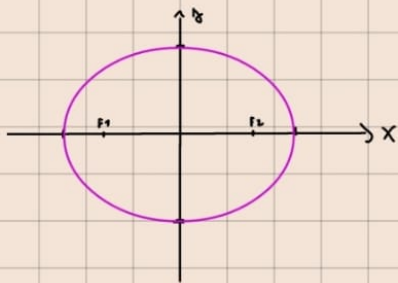
$$\frac{x^2}{16} = 1 \equiv x^2 = 16 \equiv x = \pm 4$$

INTERSECCIONES EJE Y (x=0):

$$\frac{y^2}{9} = 1 \equiv y^2 = 9 \equiv y = \pm 3$$

FOCOS: Por eje mayor en x por $a \geq b$ y a los delos de x.

$$F_1 = (-\sqrt{7}, 0) \quad F_2 = (\sqrt{7}, 0)$$



FOCOS: $(0, \pm \underbrace{2}_c)$ VERTICES: $(0, \pm \underbrace{3}_a)$
 Semi eje mayor y

$$c = 2$$

$$\frac{x^2}{b} + \frac{y^2}{a} = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \equiv 2^2 = 3^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 9 - 4 \equiv b = \sqrt{5}$$

$$\text{Ent, } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Nota: Si tengo que pasar una elipse, hipérbola o cualquier otra cosa a una parametrización lo que normalmente se hace es hacer un reemplazo sintáctico. Plantear la parametrización y al final poner el valor real de la variable.

PARAMETRIZACIÓN:

$$\left(\frac{x-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 1$$

$\underbrace{\quad}_{\tilde{x}} \quad \underbrace{\quad}_{\tilde{y}}$

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 1$$

$$\frac{x-2}{3} = \cos(\tilde{x}) \Rightarrow \underline{x = 3\cos(\tilde{x}) + 2}$$

$$\begin{cases} \tilde{x} = \cos(\tilde{x}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{y} = \sin(\tilde{x}) \rightarrow \frac{y-1}{2} = \sin(\tilde{x}) \Rightarrow \underline{y = 2\sin(\tilde{x}) + 1} \end{cases} \quad \cos \tilde{x} \in \mathbb{R}$$

Hipérbolas

HIPÉRBOLA:

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \stackrel{/144}{=} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

↳ a = eje mayor x

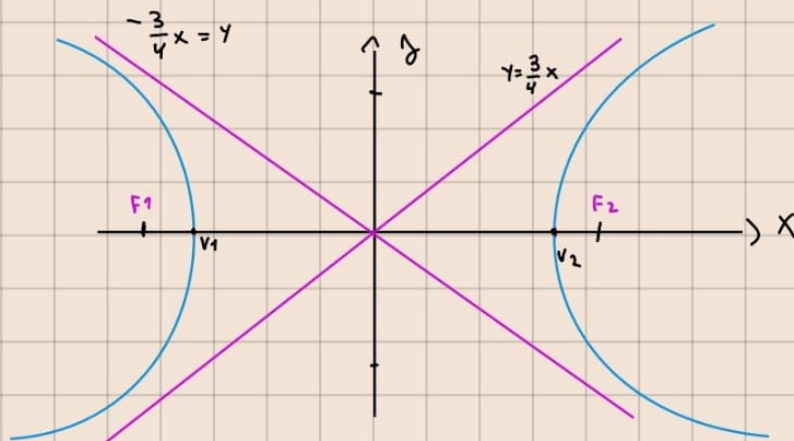
$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 16 + 9 \Rightarrow c = 5$$

$$F_1 = (-5, 0) \quad F_2 = (5, 0) \quad \text{VÉRTICES} = (\pm 4, 0)$$

ASÍNTOTAS: Como a es el doble de x , en b/a .

$$A_1 = -\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x \quad y \quad y = \frac{3}{4}x$$

INTERSECCIÓN EJE y ($x=0$): ± 3



Gnd: Halla la Cónica
 $9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$
 $\xrightarrow{+176}$
 $176 = -9x^2 + 72x + 4y^2 - 8y$
 $176 = -9(x^2 + 8x) + 4(y^2 - 2y)$
 $176 = -9(x^2 + 8x + 16) + 4(y^2 - 2y + 1) - (-144) - 4$ *apaga -9.16*
 $176 - 144 - 4 = -9(x+4)^2 + 4(y-1)^2$ *apaga 4.1*
 $36 = -9(x+4)^2 + 4(y-1)^2$
 $1 = -\frac{(x+4)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = \frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+4)^2}{4} = 1$ *hipérbola*
 El mayor y, CENTRO: $(-4, 1)$ ✓
 $c^2 = 9 + 4 \Rightarrow c = \sqrt{13}$ ✓
 Focos: $(-4, 1 \pm c) \Rightarrow F_1 = (-4, \sqrt{13} - 1)$ ✓ y $F_2 = (-4, \sqrt{13} + 1)$ ✓
 HIPÉRBOLA: $\pm \left(\frac{a}{b}\right)(x - \text{CENTRO})$
 $y = \left(\frac{3}{2}\right)(x - 4)$ ✓ y $y = -\left(\frac{3}{2}\right)(x - 4)$ ✓

Aplicando Trazas en Superficies

Para resolver este ejercicio podemos tomar $z = 0$ para empezar y vemos que nos queda la ecuación de una elipse. La dibujamos en el plano de \mathbb{R}^3 . Luego, tomamos $z = k$ y notamos que la constante a lo sumo debe ser 1 porque sino la definición sería errónea, como todos son positivos si $z = 2$ falla. Entonces, los k pueden ir desde $-1 \leq k \leq 1$. Notamos que cortando con un $z = k$ en rango nos da una elipse que cada vez es mas chiquita.

Luego, probamos con $y = 0$ y esto nos da una circunferencia.

Por último, probamos $x = 0$ y nos da una elipse.

Luego de hacer todas las trazas aproximadas, nos quedaría la figura.

Este ejemplo es llamado **elipsoide**.

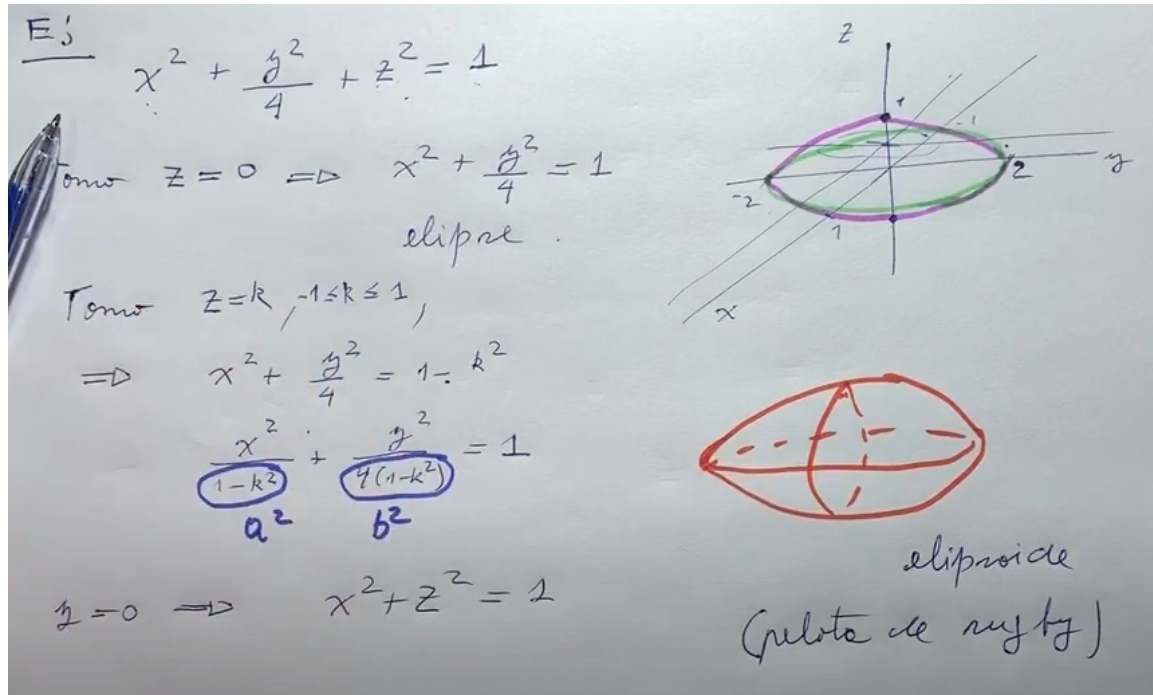


Tabla de Cuadráticas

