Análisis II

Tomás Agustín Hernández

Dilatación

Sean $a, n \in \mathbb{R}$ decimos que estamos dilatando al número a sí y solo sí $a = a * n$ con $n >= 1$

Contracción

Sean $a, n \in \mathbb{R}$ decimos que estamos contrayendo al número a sí y solo sí $a = a * n$ con $0 > n < 1$

Plano Real $\mathbb{R}^2$

Se define como $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}x\mathbb{R} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ Aquí, los puntos se definen con dos coordenadas: x e y.

Plano Real $\mathbb{R}^3$

También conocido como *espacio*.
Se define como $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}x\mathbb{R} = \{(a,b,c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$

Orientación de los ejes

Se rigen por la regla de la mano derecha. Cuando vamos girando, hacia donde queda apuntando el dedo es el eje z.

Distancia entre dos puntos

Sean dos puntos $P = (a_1, a_2)$ y $Q = (b_1, b_2)$, definimos la distancia entre dos puntos como "la distancia entre P y Q es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias de sus coordenadas."

$$dist(P,Q) = \sqrt{(b_2 - a_2)^2 + (b_1 - a_1)^2}$$

Esta misma definición es generalizable para n coordenadas.
Nota: $dist(P,Q) = long(\bar{PQ})$

Circunferencias y Discos (Solo en $\mathbb{R}^2$)

Circunferencia

Sea un centro $C_0 = (a_0, b_0)$ y radio $r > 0$ definimos a una

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x -$$

Si notamos que la circunferencia está definida usando la ecuación de la circunferencia nos queda algo así:

$$(x - x_1)^2 + ($$

Importante: La circunferencia \$'$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y$

Disco Abierto

Cada vez que leamos la palabra *abierto* quiere decir que n
Abierto de centro C_0 y radio $r > 0$ como

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x -$$

Disco Cerrado

Exactamente igual que el Disco Abierto pero con los bordes incluidos.
Definimos el Disco Abierto de centro C_0 y radio $r > 0$ como

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 \leq r}\}$$

Esferas y Bolas (Solo en $\mathbb{R}^3$)

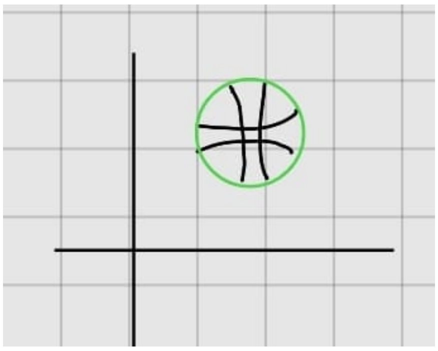
Esfera

Sea un centro $C_0 = (a_0, b_0, c_0)$ y radio $r > 0$ definimos una esfera como:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x_0 - a_0)^2 + (y_0 - b_0)^2 + (z_0 - c_0)^2 = r}\}$$

Definición formal de Esfera

$$Br(P) = \{X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : ||X - P|| = r\}$$



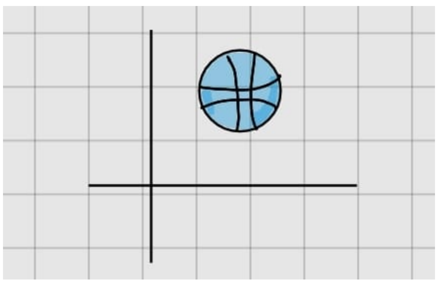
Bola Abierta

Misma idea que Disco Abierto pero en $\mathbb{R}^3$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 + (z_0 - c_0)^2 < r}\}$$

Definición formal de Bola Abierta

$$Br(P) = \{X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : ||X - P|| < r\}$$



Bola Cerrada

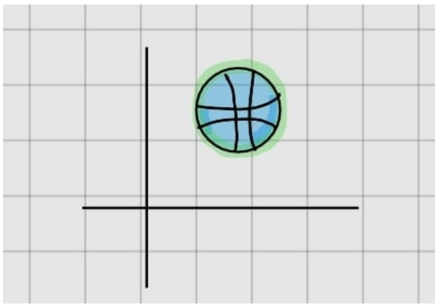
Misma idea que Disco Cerrado pero en $\mathbb{R}^3$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 + (z_0 - c_0)^2 \leq r}\}$$

Nota: Véase *anexo* para ver ejercicios de completar cuadrados y encontrar el centro y radio de una esfera.

Definición formal de Bola Cerrada

$$Br(P) = \{X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : ||X - P|| \leq r\}$$



Aclaración sobre enunciados

Importante siempre prestar atención a la dimensión donde trabajamos.
Es decir $x^2 + y^2 = 4$ puede representar dos cosas diferentes si estamos en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$

Vectores

Los vectores tienen dirección, sentido y longitud.
Sean dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^n$, definimos un vector $V \in \mathbb{R}^n$ como $\bar{P}Q = Q - P$.

Vectores Equivalentes

Dos vectores son equivalentes si tienen misma dirección, sentido y longitud.

Vectores Iguales

Dos vectores son iguales si son equivalentes y además parten del mismo punto.

Suma de Vectores

Sean u, v vectores $\in \mathbb{R}^n$. La suma de ambos se realiza coordenada a coordenada. $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)$

Producto por Escalar

Sea $t \in \mathbb{R}$ y u un vector. $t * u = (tu_1, tu_2, ..., tu_3)$

Regla del Paralelo

Se utiliza para ver como queda la traslación del vector $u + v$ luego de sumar ambos vectores.

Propiedades de los vectores

- La suma es conmutativa: u + v = v + u
- Sea un valor $t \in \mathbb{R}$, definimos la distributiva con vectores como t(u+v) = tu + tv

Norma de un Vector

Definimos la norma de un vector como $||V|| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + ... + (v_n)^2}$

Relación entre distancia entre dos puntos y la norma

Es fácil notar que $||B - A|| = ||A - B||$. Definimos la **equivalencia** de las siguientes fórmulas:

$$dist(A, B) = ||B - A|| \equiv ||A - B||$$

Propiedades de la norma

- $||V|| \geq 0$
- $|V| = \sqrt{V^2}$
- $||V|| = dist(V, 0)$
- $\alpha \in \mathbb{R}, ||\alpha * V|| = ||\alpha|| * ||V||$: en criollo quiere decir que si multiplico un escalar dentro de la norma, es lo mismo que sacarlo hacia afuera y hacerlo por separado.
- $||V + W|| \leq ||V|| + ||W||$: desigualdad Triangular (DT)
- $||V - W|| \leq ||V|| + || - W||$: esto tiene sentido pues $|| - w||$ es positivo. Entonces queda $||V - W|| \leq ||V|| + ||W||$
  - Importante: Esto se utiliza mucho para acotar. $||V + W||$ y $||V - W||$ se acotan por $||V|| + || - W|$

Importante: Si aplico la NORMA a un número, es como aplicar el módulo.

Producto Interno (Producto Escalar / Producto Punto)

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. Definimos el producto interno, como la multiplicación **coordenada a coordenada** de los vectores. **Siempre devuelve un número.**
Hay dos formas de notarlo

$$< u, v >= u * v$$

Vectores Perpendiculares

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. Si el producto escalar entre dos vectores es 0, entonces los vectores son perpendiculares.

Propiedades del Producto Interno

- $u * u = ||u||^2$
- Conmutatividad: $u * v = v * u$
- Distributividad: Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, entonces $(u + v) * w = uw + vw$
- $t \in \mathbb{R}, (t * u) * v = t * (u * v) = u * (t * v)$

Importante: No se pueden multiplicar 3 vectores con el producto interno, porque el producto interno devuelve un NÚMERO. Si multiplico 3 vectores, sería multiplicar primero dos (devuelve un número) y según si es > 1 o no, estaríamos dilatando/-contrayendo otro vector.

Propiedad importante de la norma y el Producto Interno

Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$v * w = ||v|| * ||w| * cos(\theta)$$

con $0 \leq \theta \leq \pi$

Teorema de Cauchy-Schwartz

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ vale $|u * v| \leq ||u|| * ||v||$ **Importante**: Si $|u * v| = ||u|| * ||v||$ entonces $v//u$ (v es paralelo a u)

Proyecciones

Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$. Queremos calcular la proyección de w en la dirección de v.

$$P_v(w) = w * \frac{v}{||w||} * \frac{v}{||v||} = w * v * \frac{v}{||v||^2} = \frac{w * v}{v * v} = \frac{w * v}{v^2} * v$$

Producto Vectorial / Cruz (Solo en $\mathbb{R}^3$)

Sean $v, w \in \mathbb{R}^3$. Se utiliza para calcular un **vector perpendicular** a los dos que se nos envían.

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Entonces, el cálculo que hay que hacer es: ((b * f) - (c * e), - ((a * f) - (c * d)), ((a * e) - (b * d))) **Importante**: Si este cálculo da 0, entonces los vectores son paralelos.

Propiedades del Producto Vectorial

- (V x W) es perpendicular a V y W.
  - Esto es re útil para cuando encontramos una normal para el plano y queremos ver si efectivamente es perpendicular a ambos vectores.
- (W x V) = - (V x W): Es decir, no son iguales si los invertimos, si lo invierto le cambio el signo.

Planos en $\mathbb{R}^3$

Dado un **vector normal N** y un **punto de paso P** construimos la ecuación del plano π que es perpendicular al **vector normal** y contiene al punto P (es decir, P verifica la ecuación del plano). Véase **anexo** para ejercicios de Planos.

Hallar vector normal N de un Plano

El vector normal N de un Plano lo podemos hallar comúmnente de las siguientres maneras

- Si tenemos 3 puntos, ABC podemos hacer la diferencia y generar 2 vectores directores. Es decir, AB y BC o AB y AC. Luego aplicamos el producto cruz y ya tenemos la normal al plano. Por último podemos tomar cualquier punto.
  - Como tenemos la NORMAL tenemos (a, b, c) nos falta d. Para generar d podemos evaluar ax + by + cz con cualquier punto de paso. El número que da como resultado es d.

Ecuación Paramétrica del Plano

$\pi : \lambda(x_1, x_2, x_3) + \gamma(y_1, y_2, y_3) + (p_1, p_2, p_3)$

Ecuación Implícita del Plano

$\pi : ax + by + cz = d$

Saber si un punto está en un plano

Debe verificar la ecuación implícita.

Rectas Paramétricas

En $\mathbb{R}^2 = L : (x, y) = \alpha(v_1, v_2) + (P_1, P_2), \alpha \in \mathbb{R}$
En $\mathbb{R}^3 = L : (x, y, z) = \alpha(v_1, v_2, v_3) + (P_1, P_2, P_3), \alpha \in \mathbb{R}$ Véase anexo para ver ejercicios con rectas y planos.

Rectas Paralelas

Dos rectas son paralelas sí sus vectores son uno múltiplo del otro.

Rectas Perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si el producto escalar entre ambos vectores directores da 0.

Rectas Alabeadas

Dos rectas son alabeadas si no existe intersección entre ellas, y además son paralelas.

Intersección entre dos rectas

Sean L_1, L_2 dos rectas. La intersección entre dos rectas se da en un punto específico. Por lo tanto, se espera que la intersección sea un número y además, este número pertenece a L_1 Y L_2

Casos de Rectas y Planos

- Si tengo plano + 2 rectas: Si se cruzan o son paralelas, entonces existe un único plano.
- Si tengo plano + 1 recta: Existen infinitos planos que la contenga.

Anexo

Esferas

Complete y lleve a una fórmula conocida: $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 16$

- Reordeno: $x^2 + 8x + y^2 - 6y + z^2 = -16$
- Completo cuadrados, los valores que tienen la variable (sin exponente), hago $(num/2)^2$.
  - $(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) + z^2 - 16 - 9 = -16$
  - Nótese que como nos inventamos términos para completar cuadrados, tenemos que restarlos.
- Reordeno: $(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) + z^2 = -16 + 16 + 9$
- Para agrupar un cuadrado, el numero que no tiene variable, tengo que aplicarle la raíz cuadrada. Luego, el símbolo que los separa es el signo del coeficiente que tiene variable grado uno.
  - $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 9$
- Por último, como el radio está elevado al cuadrado lo reducimos $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 3$
- El resultado entonces, es una Esfera en $\mathbb{R}^3$ con centro = (-4, 3, 0) y radio = 3
- Si se quisiera verificar si está bien, podemos desarrollar todos los cuadrados y deberíamos volver a la expresión original.

Planos

1. Hallar la ecuación implícita del plano π cuya normal sea $N = (-3, 0, 4)$ y que pasa por el punto $P = (2, 1, 1)$
Recordemos como podemos armar un plano. Para poder armar un plano necesitamos un vector normal y un punto de paso.
Por lo tanto, este ejercicio es bastante simple, podemos simplemente aplicar la fórmula de $\pi : ax + by + cz = d$
Entonces, nos quedaría algo así: $\pi : -3x + 0y + 4z = d$
Ahora ¿como calculo d?, podemos calcular d evalúando el punto P en el plano.
Por lo tanto $d = -3(2) + 4(1) \equiv d = -2$
Entonces, el plano $\pi : -3x + 4z = -2$

2. Dados los puntos $A = (1, 2, 3), B = (1, 0, 1)\ y\ C = (4, -1, 2)$ encuentre el plano.
Recordemos como podemos armar un plano. Para poder armar un plano necesitamos un vector normal y un punto de paso.
¿Tenemos la normal? No. ¿Como podemos calcularla? La manera de calcular un vector normal sería hacer el producto cruz entre dos vectores directores.
Por lo tanto, calculemos nuestros dos vectores directores $\bar{AB} = (0, -2, -2)$ luego $\bar{BC} = (3, -1, 1)$
Nota: Sería lo mismo calcular AB y BC que AB Y AC. Ahora lo que podemos hacer es una vez que tenemos las dos direcciones podemos buscar con el producto cruz, un vector perpendicular que hará de nuestra normal.
PD: Recordemos que $AxB = -(BxA)$. Por lo tanto da igual que orden pongamos los vectores.

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nuestro vector normal N termina siendo N $= (-4, 6, 6)$
¿Ahora qué nos falta? Un punto. Entonces podemos elegir cualquiera de los puntos A, B, C (xq las rectas estarían contenidas en el plano)
Si quisieramos verificar si efectivamente la normal nos dió bien, podemos calcular el producto escalar de $N * AB$ y $N * BC$ y ambos deberían dar 0.
Entonces, ahora por último hacemos lo mismo que en ejercicio anterior. $\pi : -4x+6y+6z = d \implies d = -4(1)+6(0)+6(1) \implies d = 2$
Finalizamos, juntando la ecuación $\pi : -4x + 6y + 6z = 2 \equiv \pi : -2x + 3y + 3z = 1$

Rectas & Rectas y Planos

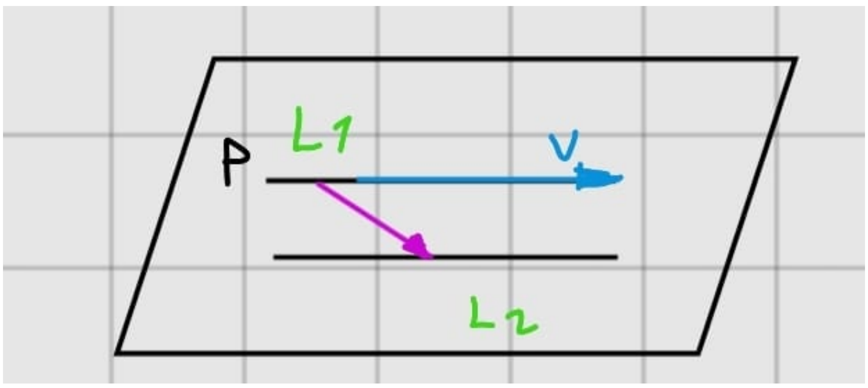
1. Dadas la recta $L: t(1,1,1)+(3,0,4)$ y el plano $\pi: 2x-y+5z=10$ halle $L \cap \pi$.
Recordemos qué significa que una recta pueda intersecarse con un plano: que una recta pueda intersecarse con un plano o al revés significa que existe al menos un punto que tienen en común.
Con esto quiero decir que el punto que encontremos debe verificar tanto el plano como la recta.
Como tenemos que encontrar UN PUNTO necesitamos encontrar la fórmula generadora de puntos de la recta o el plano.
En este caso, como tenemos la recta en paramétrica y el plano en implícita nos conviene más fácil pasar la paramétrica y ver qué pinta tienen los puntos.
Entonces, si pasamos L a paramétrica nos queda: $(t+3, t, t+4)$ entonces $x=(t+3), y=t, z=t+4$
Ahora, coloquemos lo que acabamos de encontrar en el plano, esto nos dará la variable t para la recta. Como este t nos lo da después de meterlo el punto de la recta en el plano, cuando reemplacemos en el punto genérico con el t que encontramos, entonces ese punto será el de la intersección del plano y la recta.
$\pi: 2(t+3)-(t)+5(t+4)=10 \equiv \pi: 2t+6-t+5t+20=20 \equiv \pi: t=\frac{-8}{3}$
Ahora, este t lo colocamos en la fórmula genérica de los puntos de la recta: $((\frac{-8}{3}+3), \frac{-8}{3}, \frac{-8}{3}+4)$.
Entonces, la intersección es el punto $P=(\frac{1}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{4}{3})$
Por lo tanto, verifiquemos ahora, si este punto verifica el plano.
$\pi: 2(\frac{1}{3})-(\frac{-8}{3})+5(\frac{4}{3})=10 \equiv 10=10$
Luego, como el punto lo arrojó la recta, y verifica el plano, entonces la intersección $L \cap \pi=(\frac{1}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{4}{3})$

2. Dar la ecuación implícita del plano π que contiene a la recta.
$L: \alpha(2,1,3)+(2,1,0)$ y al punto $P=(0,1,-1)$ Recordemos que si un plano contiene a una recta, todos los puntos de la recta están en el plano.
(preguntar qué pasaba si el punto estaba en la recta, qué cambiaba el ejercicio, en este caso no está) Lo primero que tenemos que ver es si el punto $P \in L$. Si el punto está en la recta, entonces hay infinitos planos. Si el punto NO está en la recta, entonces hay un único plano.
Como necesito sí o sí dos vectores directores para mi plano, puedo hacer un vector director de la resta de $QP=(0,1,-1)-(2,1,0)=(-2,0,-1)$
Entonces ahora hago el producto cruz entre $(2,1,3)$ y $(-2,0,1)$

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nuestro vector normal N termina siendo N $=(1,4,-2)$
Entonces ahora, finalizamos el ejercicio evaluando en la normal el punto P $\pi: x+4y-2z=d$
$d=(0)+4(1)-2(-1) \equiv d=6$
Entonces finalizamos con $\pi: x+4y-2z=6$

3. Dadas las rectas $L_1: \alpha(-1,0,1)+(4,3,2)$ y $L_2: \gamma(2,0,-2)+(0,0,1)$. Halle la ecuación implícita del plano π que las contiene.
Lo primero que vemos es que tenemos dos rectas. Necesitamos de alguna manera un vector normal para el plano.
Primero vemos qué relación hay entre las rectas, podemos ver que son paralelas porque si hacemos $(-1,0,1) * -2$ nos da $(2,0,-2)$.
Como son paralelas, necesitamos de alguna manera, llegar desde una recta a la otra, para luego, cuando tenemos un punto que llega y combina las rectas, ahí si podemos calcular con el producto cruz el vector normal.



Entonces, restemos los dos puntos $\bar{PQ}=Q-P=(0,0,1)-(4,3,2)=(-4,-3,1)$.
Por lo tanto, ahora sí que tenemos dos vectores directores (no paralelos) podemos hacer el producto cruz para calcular la

normal del plano.

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Nuestro vector normal N termina siendo N $= (3, -5, 3)$
Por lo tanto ahora que tenemos el plano $\pi : 3x - 5y + 3z = d$, buscamos el valor de D evaluando cualquier punto de las rectas
$d = 3(0) - 5(0) + 3(1) = 3$
Luego, el plano resultante $\pi : 3x - 5y + 3z = 3$