Análisis II

Tomás Agustín Hernández

Dilatación

Sean $a, n \in \mathbb{R}$ decimos que estamos dilatando a un número a sí y solo sí $a \ = \ a \ * \ n$ con $n >= 1$

Contracción

Sean $a, n \in \mathbb{R}$ decimos que estamos contrayendo a un número a sí y solo sí $a \ = \ a \ * \ n$ con $0 > n < 1$

Plano Real $\mathbb{R}^2$

Se define como $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}x\mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ Aquí, los puntos se definen con dos coordenadas: x e y.

Plano Real $\mathbb{R}^3$

También conocido como *espacio.*
Se define como $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}x\mathbb{R}x\mathbb{R} = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$

Orientación de los ejes

Se rigen por la regla de la mano derecha. Cuando vamos girando, hacia donde queda apuntando el dedo es el eje z.

Distancia entre dos puntos

Sean dos puntos $P = (a_1, a_2)\ y\ Q = (b_1, b_2)$, definimos la distancia entre dos puntos como "la distancia entre P y Q es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias de sus coordenadas."

$$dist(P, Q) = \sqrt{(b_2 - a_2)^2 + (b_1 - a_1)^2}$$

Esta misma definición es generalizable para n coordenadas.
Nota: $dist(P, Q) = long(\bar{PQ})$

Circunferencias y Discos (Solo en $\mathbb{R}^2$)

Circunferencia

Sea un centro $C_0 = (a_0, b_0)$ y radio $r > 0$ definimos a una circunferencia como:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 = r}\}$$

Si notamos que la circunferencia está definida usando la definición de distancia entre dos puntos, si desarrollamos la ecuación de la circunferencia nos queda algo así:

$$(x - x_1)^2 + (y - x_2)^2 = r^2$$

Importante: La circunferencia \$'= $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2 = 1}\}$ es conocida como Circunferencia Unidad.

Disco Abierto

Cada vez que leamos la palabra *abierto* quiere decir que no incluye los bordes, sino solo el contenido. Definimos el Disco Abierto de centro C_0 y radio $r > 0$ como

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 < r}\}$$

Disco Cerrado

Exactamente igual que el Disco Abierto pero con los bordes incluidos.
Definimos el Disco Abierto de centro C_0 y radio $r > 0$ como

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 \leq r}\}$$

Esferas y Bolas (Solo en $\mathbb{R}^3$)

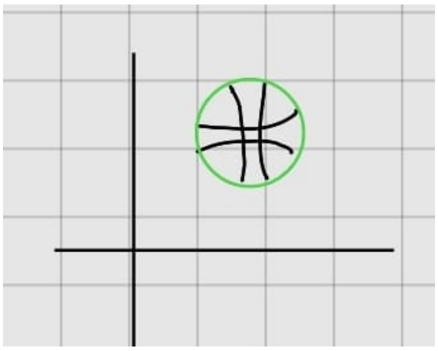
Esfera

Sea un centro $C_0 = (a_0, b_0, c_0)$ y radio $r > 0$ definimos una esfera como:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x_0 - a_0)^2 + (y_0 - b_0)^2 + (z_0 - c_0)^2 = r}\}$$

Definición formal de Esfera

$$Br(P) = \{X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : ||X - P|| = r\}$$



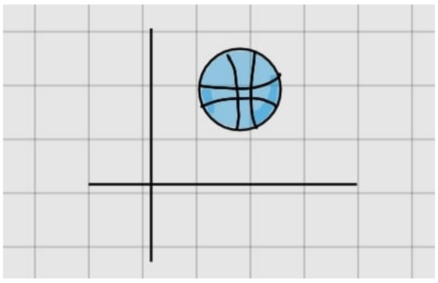
Bola Abierta

Misma idea que Disco Abierto pero en $\mathbb{R}^3$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 + (z_0 - c_0)^2 < r}\}$$

Definición formal de Bola Abierta

$$Br(P) = \{X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : ||X - P|| < r\}$$



Bola Cerrada

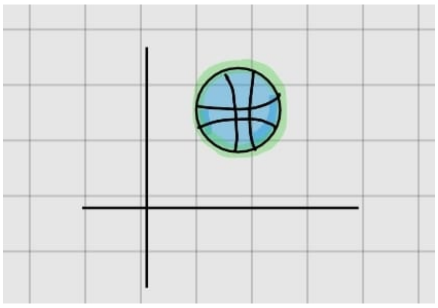
Misma idea que Disco Cerrado pero en $\mathbb{R}^3$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 + (z_0 - c_0)^2 \leq r}\}$$

Nota: Véase *anexo* para ver ejercicios de completar cuadrados y encontrar el centro y radio de una esfera.

Definición formal de Bola Cerrada

$$Br(P) = \{X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : ||X - P|| \leq r\}$$



Aclaración sobre enunciados

Importante siempre prestar atención a la dimensión donde trabajamos.
Es decir $x^2 + y^2 = 4$ puede representar dos cosas diferentes si estamos en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$

Vectores

Los vectores tienen dirección, sentido y longitud.
Sean dos puntos $P, Q \in \mathbb{R}^n$, definimos un vector $V \in \mathbb{R}^n$ como $\bar{P}Q = Q - P$.

Vectores Equivalentes

Dos vectores son equivalentes si tienen misma dirección, sentido y longitud.

Vectores Iguales

Dos vectores son iguales si son equivalentes y además parten del mismo punto.

Suma de Vectores

Sean u, v vectores $\in \mathbb{R}^n$. La suma de ambos se realiza coordenada a coordenada. $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, ..., u_n + v_n)$

Producto por Escalar

Sea $t \in \mathbb{R}$ y u un vector. $t * u = (tu_1, tu_2, ..., tu_3)$

Regla del Paralelogramo

Se utiliza para ver como queda la traslación del vector $u + v$ luego de sumar ambos vectores.

Propiedades de los vectores

- La suma es conmutativa: u + v = v + u
- Sea un valor $t \in \mathbb{R}$, definimos la distributiva con vectores como t(u+v) = tu + tv

Norma de un Vector

Definimos la norma de un vector como $||V|| = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + ... + (v_n)^2}$

Relación entre distancia entre dos puntos y la norma

Es fácil notar que $||B - A|| = ||A - B||$. Definimos la **equivalencia** de las siguientes fórmulas:

$$dist(A, B) = ||B - A|| \equiv ||A - B||$$

Propiedades de la norma

- $||V|| \geq 0$
- $|V| = \sqrt{V^2}$
- $||V|| = dist(V, 0)$
- $\alpha \in \mathbb{R}, ||\alpha * V|| = ||\alpha|| * ||V||$: en criollo quiere decir que si multiplico un escalar dentro de la norma, es lo mismo que sacarlo hacia afuera y hacerlo por separado.
- $||V + W|| \leq ||V|| + ||W||$: desigualdad Triangular (DT)
- $||V - W|| \leq ||V|| + || - W||$: esto tiene sentido pues $|| - w||$ es positivo. Entonces queda $||V - W|| \leq ||V|| + ||W||$
  - Importante: Esto se utiliza mucho para acotar. $||V + W||$ y $||V - W||$ se acotan por $||V|| + || - W|$

Importante: Si aplico la NORMA a un número, es como aplicar el módulo.

Producto Interno (Producto Escalar / Producto Punto)

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. Definimos el producto interno, como la multiplicación **coordenada a coordenada** de los vectores. **Siempre devuelve un número.**
Hay dos formas de notarlo

$$< u, v >= u * v$$

Vectores Perpendiculares

Sean $u, v \in \mathbb{R}^n$. Si el producto escalar entre dos vectores es 0, entonces los vectores son perpendiculares.

Propiedades del Producto Interno

- $u * u = ||u||^2$
- Conmutatividad: $u * v = v * u$
- Distributividad: Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, entonces $(u + v) * w = uw + vw$
- $t \in \mathbb{R}, (t * u) * v = t * (u * v) = u * (t * v)$

Importante: No se pueden multiplicar 3 vectores con el producto interno, porque el producto interno devuelve un NÚMERO. Si multiplico 3 vectores, sería multiplicar primero dos (devuelve un número) y según si es > 1 o no, estaríamos dilatando/contrayendo otro vector.

Propiedad importante de la norma y el Producto Interno

Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$v * w = ||v|| * ||w| * cos(\theta)$$

con $0 \leq \theta \leq \pi$

Teorema de Cauchy-Schwartz

$\forall u, v \in \mathbb{R}^n$ vale $|u * v| \leq ||u|| * ||v||$
Importante: Si $|u * v| = ||u|| * ||v||$ entonces $v//u$ (v es paralelo a u)

Proyecciones

Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$. Queremos calcular la proyección de w en la dirección de v.

$$P_v(w) = w * \frac{v}{||w||} * \frac{v}{||v||} = w * v * \frac{v}{||v||^2} = \frac{w * v}{v * v} = \frac{w * v}{v^2} * v$$

Producto Vectorial / Cruz (Solo en $\mathbb{R}^3$)

Sean $v, w \in \mathbb{R}^3$. Se utiliza para calcular un **vector perpendicular** a los dos que se nos envían.

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Entonces, el cálculo que hay que hacer es: ((b * f) - (c * e), - ((a * f) - (c * d)), ((a * e) - (b * d)))
Importante: Si este cálculo da 0, entonces los vectores son paralelos.

Propiedades del Producto Vectorial

- (V x W) es perpendicular a V y W.
  - Esto es re útil para cuando encontramos una normal para el plano y queremos ver si efectivamente es perpendicular a ambos vectores.
- (W x V) = - (V x W): Es decir, no son iguales si los invertimos, si lo invierto le cambio el signo.

Planos en $\mathbb{R}^3$

Dado un **vector normal N** y un **punto de paso P** construimos la ecuación del plano π que es perpendicular al **vector normal** y contiene al punto P (es decir, P verifica la ecuación del plano). Véase **anexo** para ejercicios de Planos.

Hallar vector normal N de un Plano

El vector normal N de un Plano lo podemos hallar comúmnente de las siguientres maneras

- Si tenemos 3 puntos, ABC podemos hacer la diferencia y generar 2 vectores directores. Es decir, AB y BC o AB y AC. Luego aplicamos el producto cruz y ya tenemos la normal al plano. Por último podemos tomar cualquier punto.
  - Como tenemos la NORMAL tenemos (a, b, c) nos falta d. Para generar d podemos evaluar ax + by + cz con cualquier punto de paso. El número que da como resultado es d.

Ecuación Paramétrica del Plano

$\pi : \lambda(x_1, x_2, x_3) + \gamma(y_1, y_2, y_3) + (p_1, p_2, p_3)$

Ecuación Implícita del Plano

$\pi : ax + by + cz = d$

Saber si un punto está en un plano

Debe verificar la ecuación implícita.

Rectas Paramétricas

En $\mathbb{R}^2 = L : (x, y) = \alpha(v_1, v_2) + (P_1, P_2), \alpha \in \mathbb{R}$
En $\mathbb{R}^3 = L : (x, y, z) = \alpha(v_1, v_2, v_3) + (P_1, P_2, P_3), \alpha \in \mathbb{R}$
Véase anexo para ver ejercicios con rectas y planos.

Rectas Paralelas

Dos rectas son paralelas sí sus vectores son uno múltiplo del otro.

Rectas Perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si el producto escalar entre ambos vectores directores da 0.

Rectas Alabeadas

Dos rectas son alabeadas si no existe intersección entre ellas, y además son paralelas.

Intersección entre dos rectas

Sean L_1, L_2 dos rectas. La intersección entre dos rectas se da en un punto específico. Por lo tanto, se espera que la intersección sea un número y además, este número pertenece a L_1 Y L_2

Casos de Rectas y Planos

- Si tengo plano + 2 rectas: Si se cruzan o son paralelas, entonces existe un único plano.
- Si tengo plano + 1 recta: Existen infinitos planos que la contenga.

Curvas

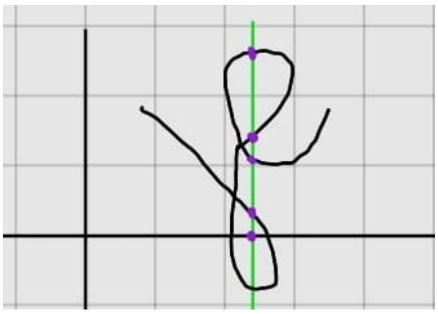
Son un conjunto de puntos por los que pasó una partícula dada a lo largo del tiempo. La trayectoria, el movimiento que hace en cada tiempo t la partícula va dejando una marca y forma una curva.
Las funciones son de la forma

$$f(t) = \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Nota: En general, una curva en $\mathbb{R}^n$ es la imagen de una función $\alpha(t)$ continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$. Es decir, $Im\ \alpha = C$
Ej.: Una recta en $\mathbb{R}^2$ es la imagen de una curva paramétrica.
Véase anexo para ver como parametrizar.

Criterio de la Recta Vertical

No todas las curvas representan funciones. Para poder ver esto de una forma fácil, recordemos qué es una función. Una función es una máquina que espera un valor y da otro.
Ahora, es importante que para diferentes valores tienen que dar diferentes resultados.
Si existen valores que dan el mismo resultado, entonces no es una función.



Importante: Todos los gráficos son curvas pero no toda curva es gráfico de función.

Paramétrización de la Curva

Existen infinitas parametrizaciones para una misma curva. Esto quiere decir, que una misma partícula puede realizar una trayectoria de mil maneras diferentes.
Denotamos la parametrización de una curva como: $C = \{(x(t), y(t))\ /\ t \in \mathbb{R}\}$ y decimos que es paramétrica porque espera un **solo** parámetro.
Las parametrizaciones nos dan descripciones dinámicas mientras que las que no tienen un parámetro t son estáticas.

¿Qué no nos dice la ecuación implícita de una curva?

Las ecuaciones en x y y describe **donde** ha estado la partícula pero no nos dice **cuándo** ha estado la partícula en un punto en particular.

¿Qué nos dice la ecuación paramétrica de una curva?

La ventaja es que nos dicen **cuándo (t)** estuvo la partícula en un punto (x, y) y la dirección en su trayectoria.

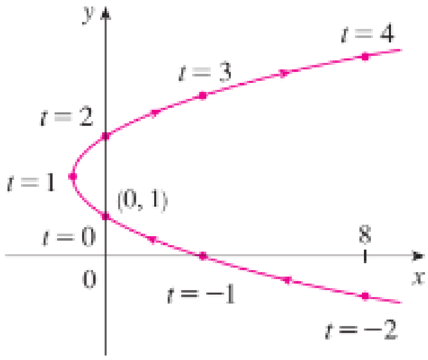
Ejemplo de Curvas

Recordemos que básicamente una curva se arma gracias a la trayectoria de una partícula que hace cierto movimiento a lo largo del tiempo.
Este tiempo se llama t, y podemos ir viendo el movimiento de la partícula gracias a la ecuación paramétrica. A medida que t aumenta, esa es la dirección que toma la partícula.

$$f(t) = \begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t - 1 \end{cases}$$

Si nos ponemos a darle valores a t, vamos a ir obteniendo valores de x e y, que básicamente los podemos graficar en un plano.

t	x	y
−2	8	−1
−1	3	0
0	0	1
1	−1	2
2	0	3
3	3	4
4	8	5



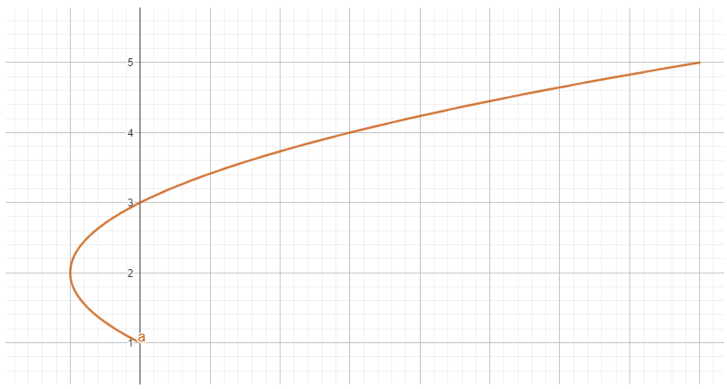
Parece entonces en este ejemplo, que la partícula hizo la trayectoria de una parábola. Busquemos entonces la ecuación implícita para ver qué curva representan las ecuaciones paramétricas.

$$f(t) = \begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t - 1 \equiv y + 1 = t \end{cases}$$

Entonces, $x = (y+1)^2 - 2(y+1) \equiv x = y^2 - 4y + 3$
Efectivamente podemos notar que la partícula, gracias a esas ecuaciones parámetricas y dando el tiempo t fuimos formando la curva paramétrica (parábola) $x = y^2 - 4y + 3$.
Entonces ¿cuál es la diferencia entre tener la ecuación paramétrica con un parámetro t o tener la que depende de x e y? La diferencia es que con la parámetrica podemos saber en qué lugar estaba la partícula en un tiempo t.

Restringiendo los posibles valores t de la Curva

Se utilizan intervalos. Es decir, nosotros podemos decir qué trayectoria recorre la partícula, desde qué t hasta qué t.
Esto se define como $x = f(t)$ y $y = g(t)$ $a \leq t \leq b$ donde el **punto inicial** es (f(a), g(a)) y el **punto final** es (f(b), g(b)).
Ejemplo: $x = (t^2 - 2t)$ $y = (t+1)$ $0 \leq t \leq 4$

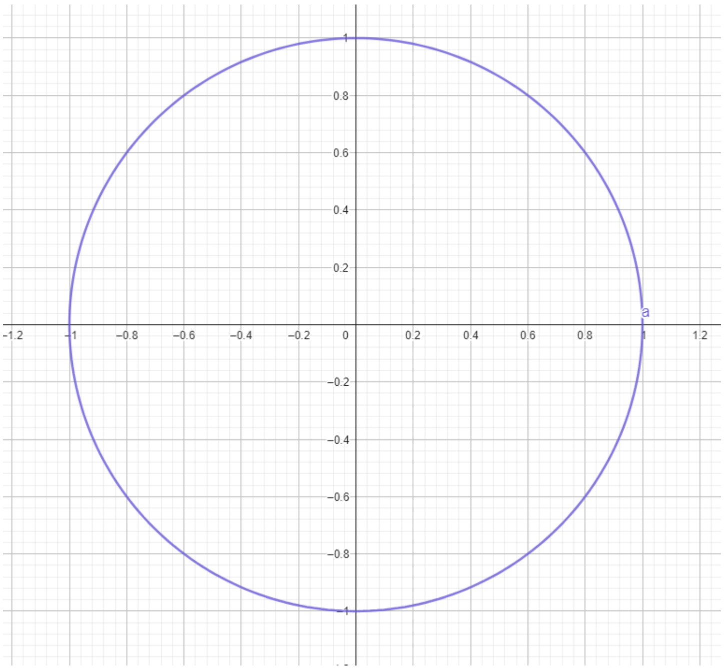


Circunferencias Paramétricas

Se suelen representar con coseno y seno.

$$x = cos(t), y = sen(t), 0 \leq t < 2\pi$$

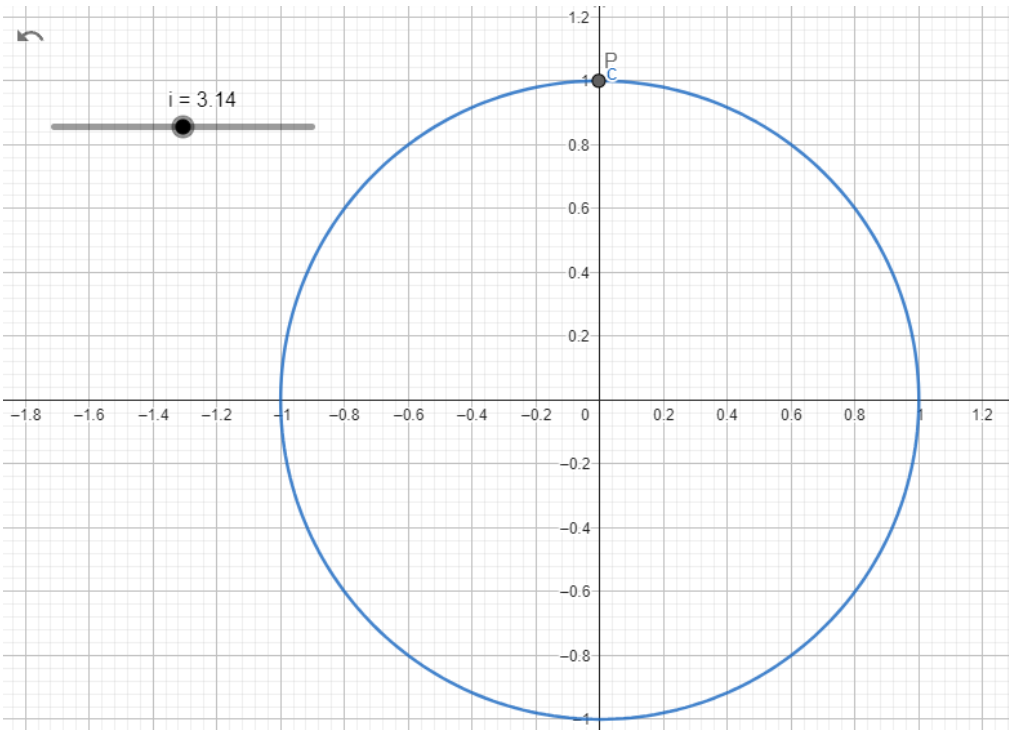
Si damos unos valores t y dibujamos en el plano, veremos que está realizando una circunferencia de radio 1.



Observamos que $x^2 + y^2 = cos^2\ t + sen^2\ t = 1$. En este caso la circunferencia se va completando gracias a la trayectoria del punto que va en sentido antihorario.

$$x = sen(2t), y = cos(2t), 0 \leq t < 2\pi$$

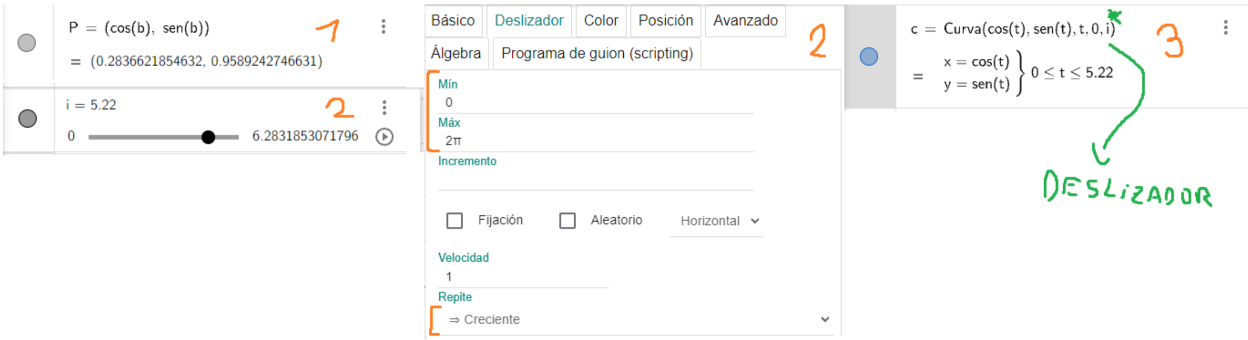
Este es parecido al anterior, la diferencia es que ahora vamos al **doble de velocidad**. Antes con cos(t) y sen(t) ibamos de 0 a 2pi **una vez**. Acá, al estar multiplicado el t por 2, lo que va a hacer es que vamos a recorrer en 2pi **dos veces** la circunferencia (cada π recorrimos la circunferencia entera). Pero ojo, esta es sen(2t) y cos(2t) entonces, está invertido el recorrido. Acá se hace en sentido horario.



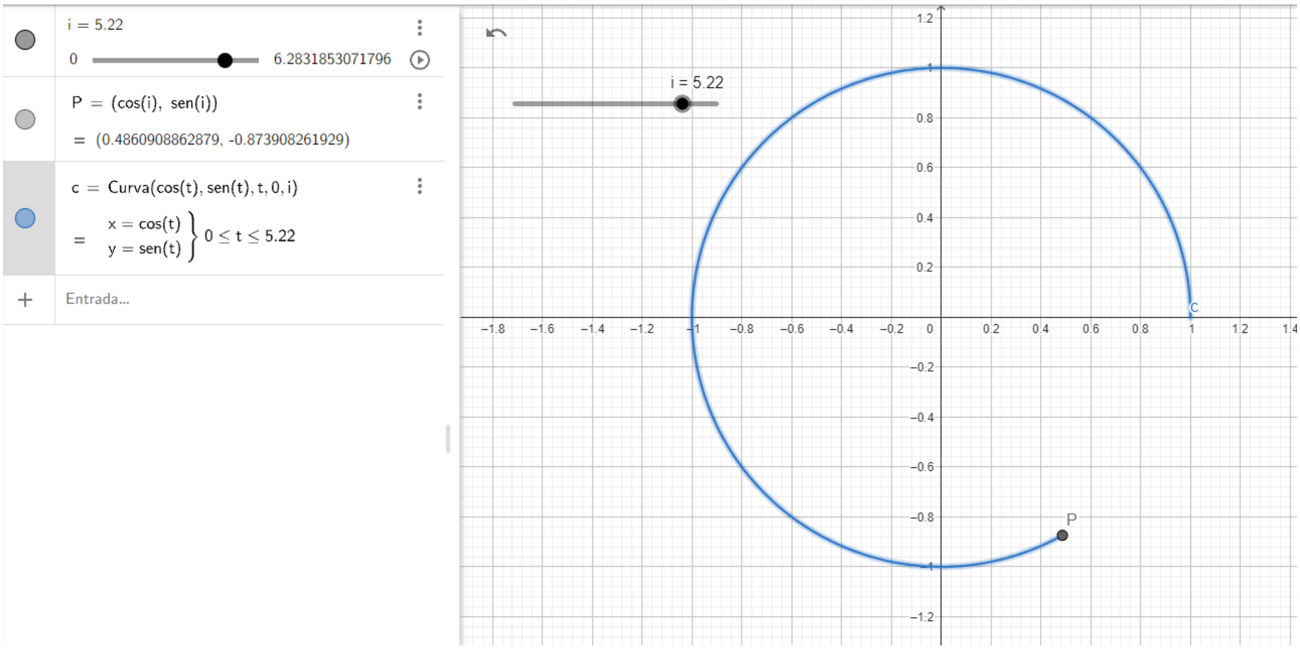
Nótese que llegamos a 3.14 y ya recorrió toda la circunferencia gracias al 2t (antes recorría la mitad). Sin embargo, el deslizador indica que le falta todavía una vuelta para dar.
Conclusión: Podemos ver que dos parametrizaciones diferentes, representan la misma curva (circunferencia), pero recorrida a diferente velocidad.

Deslizadores en GeoGebra

Nos permiten simular como una partícula se mueve realizando la curva.



Por si requiere orientación, observe este vídeo.



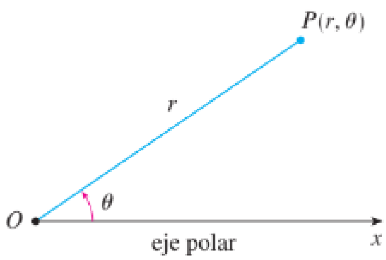
Coordenadas Cartesianas y Polares

Coordenada Cartesiana

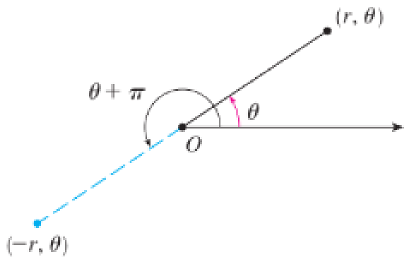
Permite representar un punto en el plano mediante un par ordenado de números llamados coordenadas.
Ej.: $P = (1, 2)$ está dado de forma cartesiana.

Coordenada Polar

Permite representar un punto P mediante el par ordenado (r, θ) y r, θ se llaman coordenadas polares de P.
Recordatorio: r: largo, θ: ángulo desde el (0, 0)



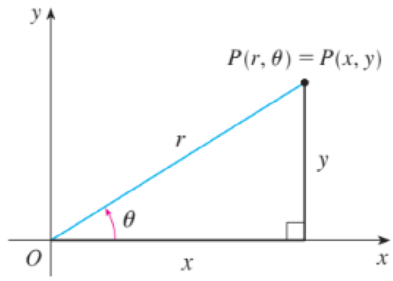
Nota: Si $r > 0$ el punto (r, θ) está en el mismo cuadrante que θ. Si $r < 0$ está en el cuadrante opuesto del polo $(-r, \theta) \equiv (r, \theta + \pi)$



Importante: θ se mide en radianes y normalmente el rango es $0 \leq \theta < 2\pi$ pues el 0 es lo mismo que incluir el 2π

Coordenadas Polares a Cartesianas

La fórmula se deduce a partir de lo siguiente $cos\ (\theta)\ =\ \frac{x}{r}\ ,\ sen(\theta) = \frac{y}{r}$



Masajeando un poco, nos queda

$$x = r * cos(\theta),\ y = r * sen(\theta)$$

Coordenadas Cartesianas a Polares

Podemos calcularlo a partir del pasaje o la figura anterior. Por lo tanto nos quedaría

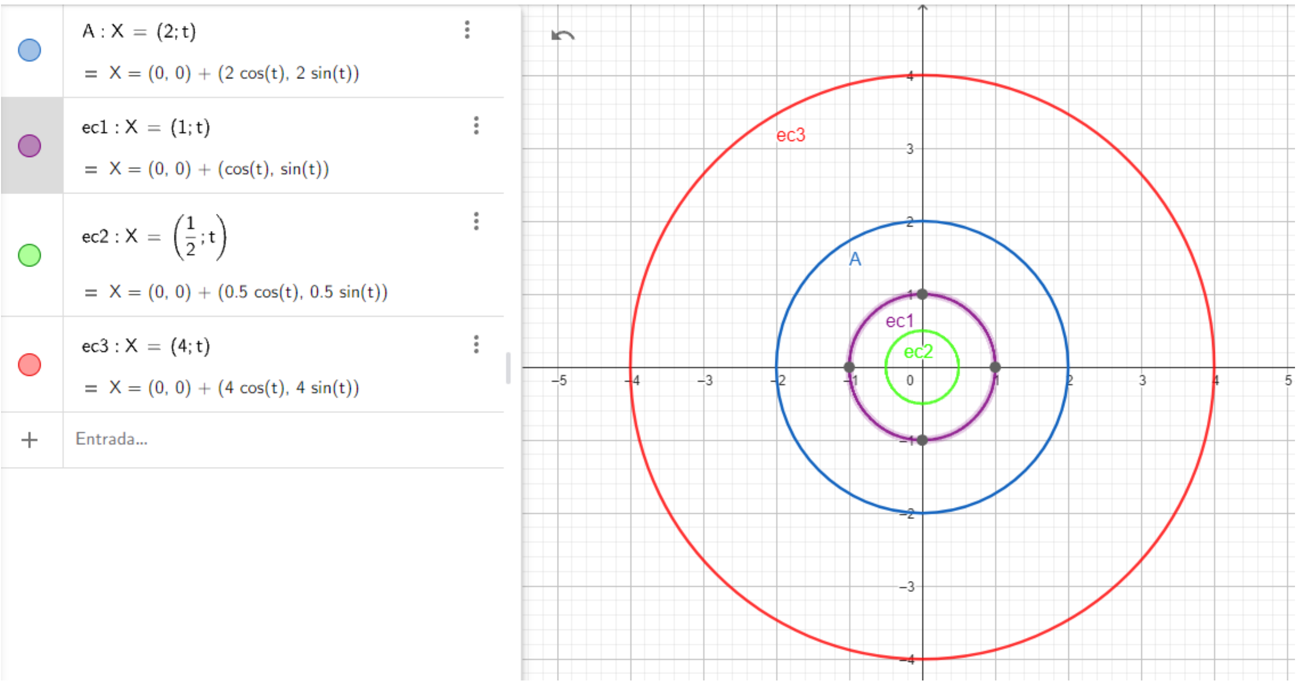
$$r^2 = x^2 + y^2,\ tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

Véase anexo para ejercicios acerca de los pasajes en este tema.

Curvas Polares

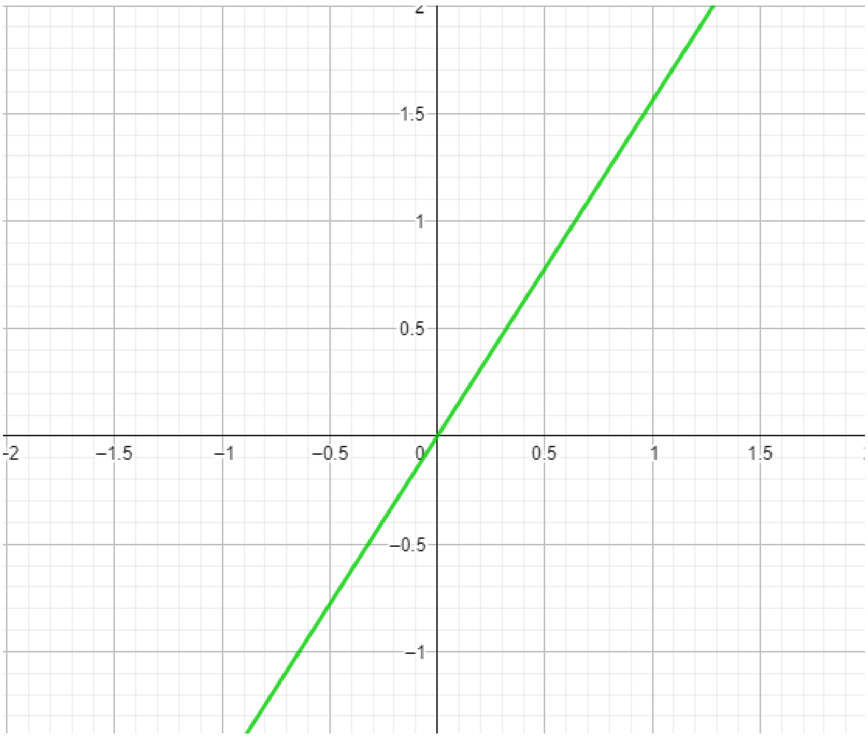
La gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ o de manera más general $F(r, \theta) = 0$ consiste de todos los puntos P que tienen al menos una representación polar (r, θ).
Ej.: $r = 2$ representa a $F(2, \theta)$ y esto sería básicamente una circunferencia con centro 0 y de radio 2. ¿Por qué una

circunferencia? Porque θ es un ángulo, y los ángulos van desde $0 \leq \theta < 2\pi$

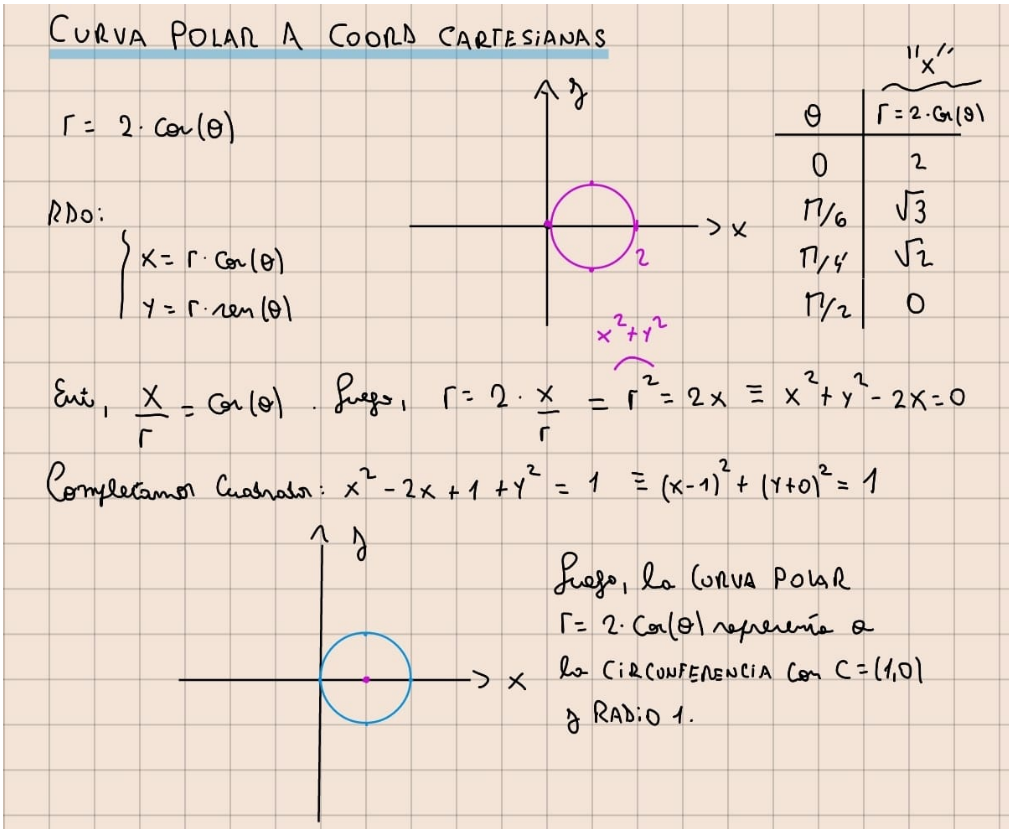


En la imagen anterior podemos ver varias curvas polares que representan circunferencias con centro 0.

Ej.: $\theta = 1$ representa a una curva que posee siempre el ángulo $\theta = 1$ (*medido en radianes*) sin ninguna restricción acerca de p.

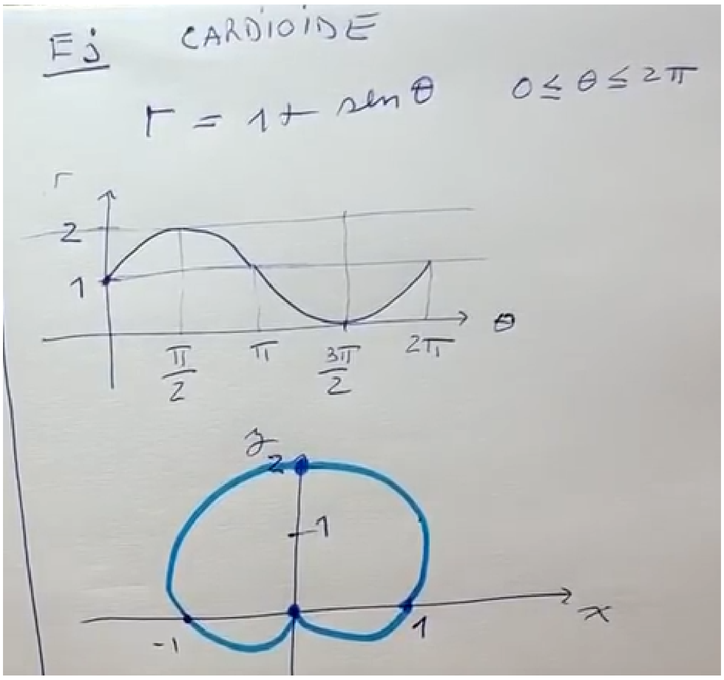


Pasaje de Curva dada en forma Polar a Curva dada en Ecuación Cartesiana

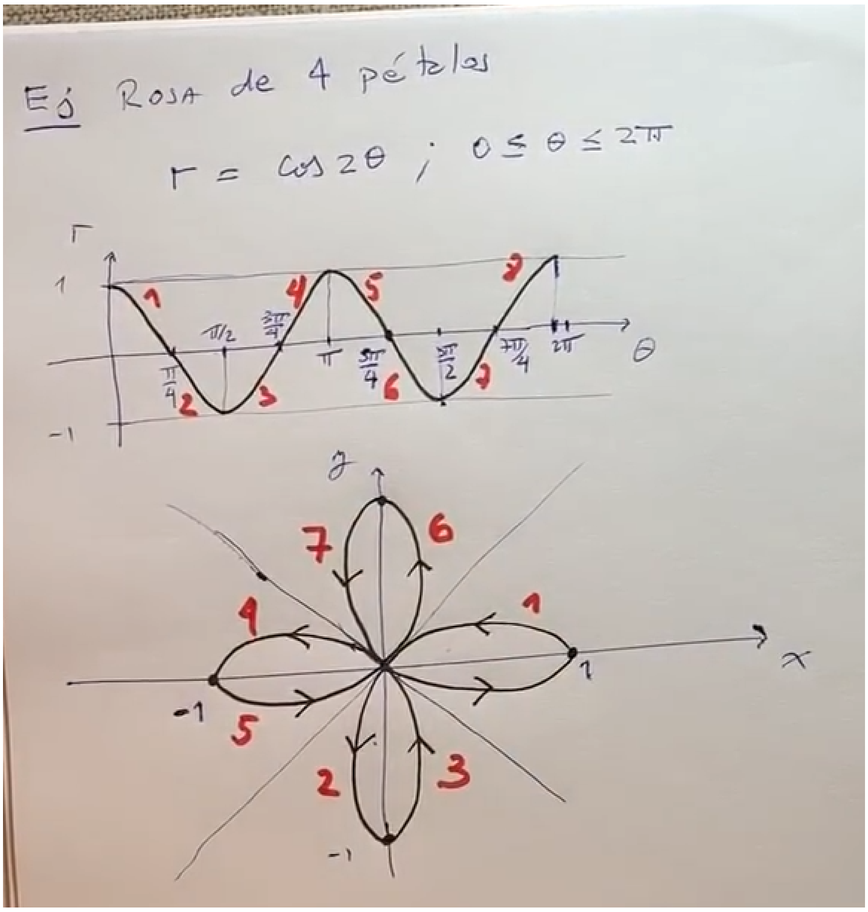


Importante: Véase que despejamos $x = r * cos(\theta)$ para ver qué vale $cos(\theta)$ porque nuestro ejercicio tenia un $2 * cos(\theta)$. Nos queda más fácil para aplicar $r^2 \equiv x^2 + y^2$

Cardioide



Rosa de 4 Pétalos



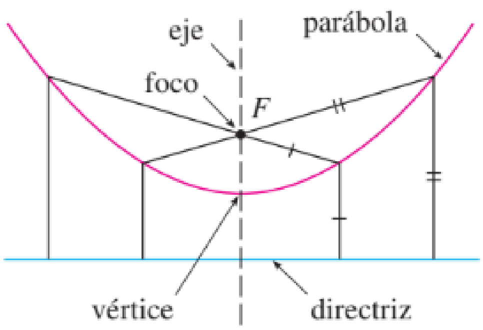
Preguntar: ¿Por qué $r = 2 * cos(\theta)$ es fácil pasarlo a ecuación cartesiana y no pasa lo mismo con $r = 1 + sen(\theta)$ o $r = cos(2\theta)$?

Cónicas

Se llaman cónicas porque resultan de cortar un cono con un plano.

Parábolas

Una parábola es el conjunto de puntos en el plano que estan a igual distancia de un punto fijo F (llamado **foco**) y una recta fija (llamada **directriz**).
El punto entre el foco y la directriz se llama **vértice**.
La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco se llama **eje** de la parábola.



Relación entre el Foco y la Directriz

Si el foco está en el punto $(0, p)$ entonces la directriz tiene la ecuación $y = -p$. Esto quiere decir que la **distancia del foco al vértice** es la **misma** que la **distancia de la directriz al vértice.**

Distancia de un punto $P(x, y)$ de la parábola al Foco y Directriz

P a Foco: $|PF| = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$
P a Directriz: $|y+p| = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$
La ecuación equivalente que se consigue desarrollando $|y+p| = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$ es $x^2 = 4py \equiv \frac{1}{4p}x^2 = y \equiv ax^2 = y$

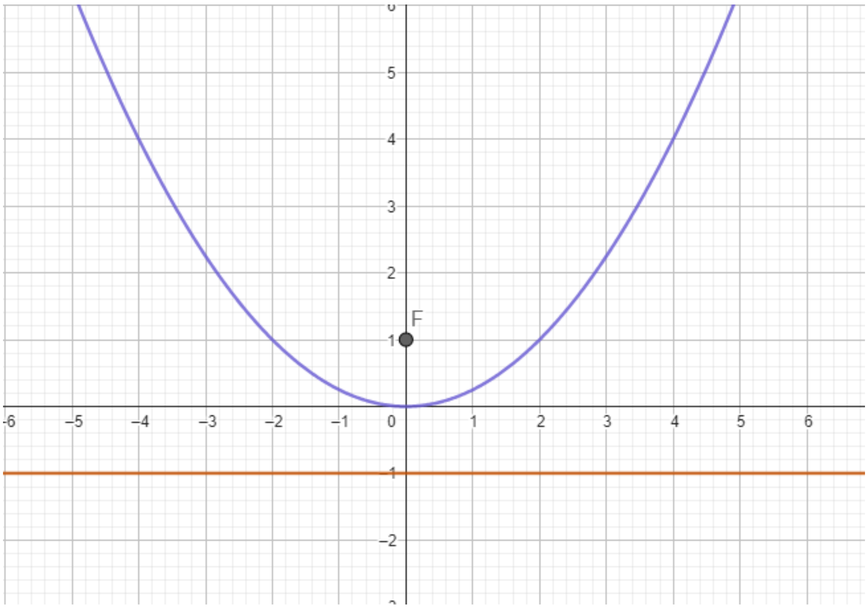
Parametrizando una Función

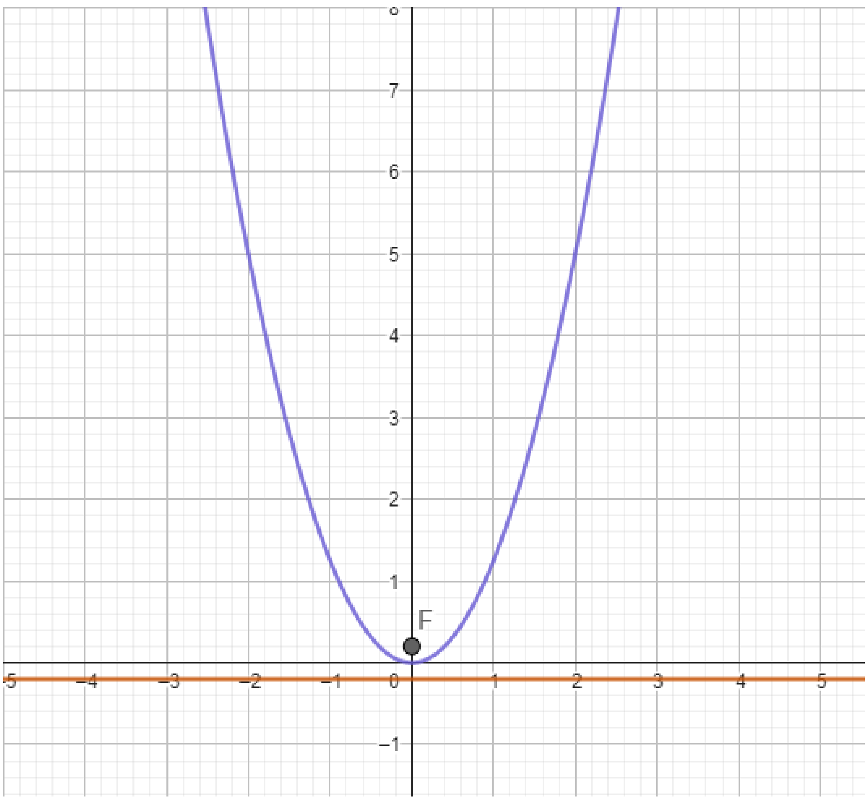
Consideremos $ax^2 = y$, la manera de parametrizarla es de la siguiente forma

$$f(t) = \begin{cases} x = t \\ y = at^2 \end{cases}$$

Efecto del Foco y la Directriz con la Parábola

Más cerca esté de origen el punto P, entonces más chica será la distancia entre el foco y la directriz y la parábola será menos ancha.





¿Hacia donde abre la parábola?

- $x^2 = 4py$ (directriz en y, foco (0, p))
  - $p > 0$: Hacia arriba
  - $p < 0$: Hacia abajo
- $y^2 = 4px$ (directriz en x, foco (p, 0))
  - $p > 0$: Hacia la derecha
  - $p < 0$: Hacia la izquierda

Recordatorio: La directriz y el foco están en el eje contrario al que tiene el cuadrado.

Elipses

Una elipse es el conjunto de planos en un plano cuya suma de sus distancias a dos puntos F_1 y F_2 es una constante. Estos dos puntos fijos se llaman **focos**.

Cálculo de los focos

La fórmula es: $c^2 = a^2 - b^2$

Formas de armar una Elipse

Existe un concepto que es eje mayor y eje menor. Encontrando el eje mayor ya sabemos donde están posicionados los focos y los vértices.
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; con \; a \geq b > 0$: tiene focos $(\pm c, 0)$ donde $c^2 = a^2 - b^2$ y vértices $(\pm a, 0)$
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \; con \; a \geq b > 0$: tiene focos $(0, \pm c)$ donde $c^2 = a^2 - b^2$ y vértices $(0, \pm a)$
En criollo: La letra que tiene un denominador más grande, es el que tiene los focos y el vértice (eje mayor). El eje mayor sería hacia donde es más grande. El número más grande siempre es **a**.
Tips: Siempre recordar que si me dan un foco ya puedo determinar el eje mayor; mismo con si me dan un vértice. Recordar también que el vértice depende de **a** esto quiere decir es que si me dan el vértice me dieron el eje mayor.
En la teoría no hay más que eso, véase anexo para ver ejercicios de elipses.

Hipérbolas

Una Hipérbola es el conjunto de todos los puntos en un plano cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2 (los focos) es una constante.

Cálculo de los focos

La fórmula es: $c^2 = a^2 + b^2$

Formas de armar una Hipérbola

Existe un concepto que es eje mayor y eje menor. Encontrando el eje mayor ya sabemos donde están posicionados los focos y los vértices.
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: tiene focos $(\pm c, 0)$ donde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(\pm a, 0)$ y asíntotas $y = \pm \frac{b}{a} x$
$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$: tiene focos $(0, \pm c)$ donde $c^2 = a^2 + b^2$, vértices $(0, \pm a)$ y asíntotas $y = \pm \frac{a}{b} x$
En la teoría no hay más que eso, véase anexo para ver ejercicios de elipses.

Cónicas Desplazadas

Son exactamente las mismas maneras, solo que acá en vez de x e y es (x-k) y (y-k). Entonces, ej hipérbola con eje mayor x

- $vertices = (centroX \pm a, centroY)$
- $focos = (centroX \pm c, centroY)$
- $hiperbolas = -\frac{b}{a}(x - centroX) \; y \; \frac{b}{a}(x - centroX)$

Parametrización de Cónicas

Un problema muy común es que nos den ciertas cónicas para parametrizar. Normalmente se nos pide una circunferencia pero está bueno tener en cuenta las demás.
Nota: Cuando hablemos de partidas con cos y sen, a cual aplicar cos y a cual sen es según la regla de la mano derecha.

Parábola

Una de las mas sencillas, la idea es poner todo el cálculo en y.
Ej.: $x = y^2 + 4$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + 4 \end{cases}$$

Circunferencia

$$\begin{cases} x = r * cos(t) + cx \\ y = r * sin(t) + cy \end{cases}$$

donde:

- r: Radio
- c: Centro, y por lo tanto, cx es la coordenada x del centro, análogamente con y.
- t: Parámetro, normalmente va a ser entre $[0, 2\pi)$

Ojo: Recordar que el radio debe sacarse la raíz cuadrada, porque normalmente cuando tenemos la fórmula corresponde a r^2
Ej.: $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ corresponde a

$$\begin{cases} x = 3 * cos(t) + 0 \\ y = 3 * sin(t) + 3 \end{cases}$$

Elipse

$$\begin{cases} x = a * cos(t) + cx \\ y = b * sin(t) + cy \end{cases}$$

donde:

- a: Semieje Mayor
- b: Semieje Menor
- c: Centro, y por lo tanto, cx es la coordenada x del centro, análogamente con y.
- t: Parámetro, normalmente va a ser entre $[0, 2\pi)$

Ojo: Recordar que en las elipses, el denominador está elevado al cuadrado. Por lo tanto, considerarlo con la raíz cuadrado.

0.0.1. Truco

Muchas veces se nos dan las elipses/hipérbolas de esta forma $9z^2 + x^2 = 1$
¿Cual es el problema acá? que una elipse tiene denominador.
¿Cómo pasamos el 9 al denominador? Fácil: $\frac{z^2}{\frac{1}{9}}$
Entonces ¿quién es a? en este caso, $\frac{1}{3}$.

Hipérbolas

Análogo a Elipse, pero la diferencia es que la variable que depende del cos está negada.

$$\begin{cases} x = -a * cos(t) + cx \\ y = b * sin(t) + cy \end{cases}$$

Superficies Cuadráticas ($\mathbb{R}^3$)

En cualquier lado tenemos 2 direcciones para movernos libres. Podemos movernos dentro de la curva, o por las rectas.
$ax^b + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fxz + gx + hy + iz + j = 0$
No es necesario recordar la fórmula, lo que si está bueno saber que mediante rotaciones y traslaciones esta ecuación podemos reescribirlo de diferentes maneras.

- Tipo 1: $ax^2 + by^2 + cz^2 + j = 0$
- Tipo 2: $ax^2 + by^2 + iz = 0$

Estas diferentes maneras de verlo nos genera todas las cuadricas que necesitamos.
Ej.: $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$. Este es un caso particular del primer tipo que escribimos arriba.
Para ver la resolución, véase anexo
Importante: Lo más importante de todas estas cosas es saber reconocer las cuádricas a ojo y saber cortarlas con distintos planos. No es necesario saber graficarlas pero sí tener una idea de como son.
Si quiere observar la tabla de cúadricas, véase anexo

Variables Dependientes & Variables Independientes

En contextos de $\mathbb{R}^3$ decimos que una variable es independiente si tiene un grado mayor que la otra.
Ej. $y = z^2$ nos indica que z^2 es la variable independiente mientras que **y** es la variable dependiente. Esta relación claramente nos indica que $y \geq 0$ siempre.

Curvas de Nivel

Una curva de nivel $f(x, y) = k$ es el conjunto de todos los puntos en el dominio de f en el cual f toma un valor dado k. En palabras más simples, señala donde tiene una altura k la gráfica de f.

- Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$
  - La curva de nivel z = 2 es la circunferencia $2 = x^2 + y^2$
  - La curva de nivel z = 3 es la circunferencia $2 = x^2 + y^2$
- Sea $f(x, y) = x + y$
  - Sea curva de nivel z = 0 es la recta $0 = x + y$

Importante: La curva de nivel vive en $\mathbb{R}^2$

Cuando trabajas con la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, que es una función que asigna a cada punto (x, y) un valor $f(x, y)$ (es decir, un valor de z), puedes fijar $f(x, y) = c$, donde c es una constante.

- Si fijas $f(x, y) = 1$, obtienes la ecuación:

$$x^2 + y^2 = 1$$

  Esto describe una **curva de nivel** en el plano (x, y), que es un círculo de radio 1. **No te interesa z** aquí, porque estás trabajando en $\mathbb{R}^2$, mirando solo el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen la ecuación.

- En resumen, una **curva de nivel** es una colección de puntos en $\mathbb{R}^2$ donde el valor de la función $f(x, y)$ es constante, pero no se involucra la dimensión z. Solo te importa el plano (x, y).

Trazas

En un conjunto tridimensional es muy dificil de observar.
Las trazas nos ayudan a través de planos paralelos a los ejes coordenados cortar una superficie.

- z = k es un plano paralelo al plano xy
- y = k es un plano paralelo al plano xz
- x = k es un plano paralelo al plano yz

Cuando yo hago un corte a una superficie con una traza, me queda una curva. Si miro como van siendo esas curvas a medida que las corto con distintas trazas esto me da una idea de como va a ser esa superficie.
Importante: Muchas veces algunas superficies pueden ser parecidas si hacemos pocas trazas. Por lo tanto la idea **siempre** es hacer trazas que marquen la diferencia.
Para ver ejemplos sobre lo que acabo de marcar como importante, véase **anexo ejemplos 1 y 3** **Importante**: La traza vive en $\mathbb{R}^3$

2. Traza en $\mathbb{R}^3$:

Ahora, si extiendes la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ a $z = f(x, y)$, tienes una superficie en $\mathbb{R}^3$:

$$z = x^2 + y^2$$

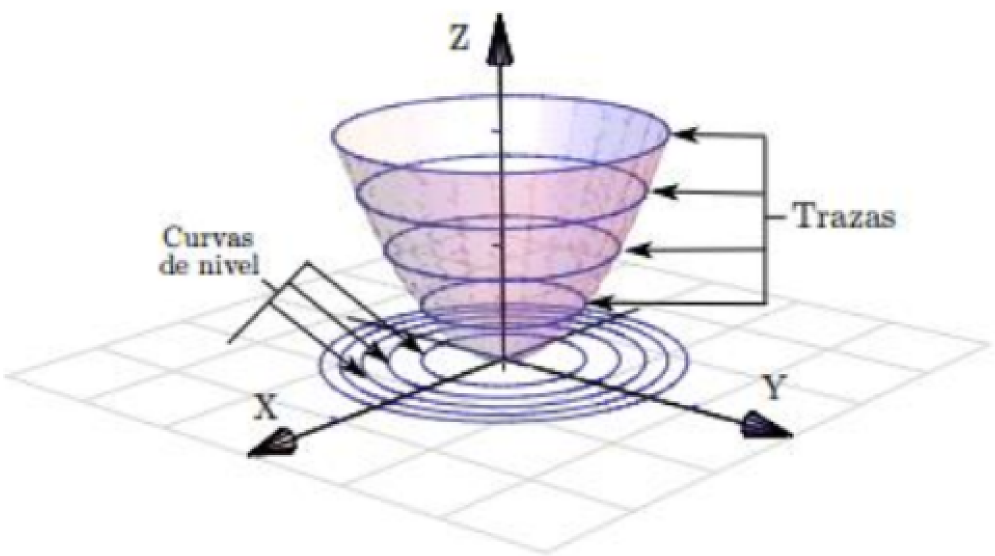
Esta es una **superficie paraboloide**. Cuando cortas esta superficie con el plano $z = 1$, estás **intersectando** una superficie tridimensional con un plano en $\mathbb{R}^3$.

- Al cortar con el plano $z = 1$, igualas $z = 1$, lo que nos da la ecuación:

  $$1 = x^2 + y^2$$

  Esta es la ecuación del círculo, pero **esta vez representa la intersección de la superficie** con el plano $z = 1$ en el espacio tridimensional, y por lo tanto es una **traza**.

- En resumen, la **traza** es el "rastro" que deja la superficie cuando la cortas con un plano específico, y ocurre en $\mathbb{R}^3$.



Dibujando Cuádricas con Trazas

1. $z^2 = x^2 + y^2$

Nota: Recuerde observar siempre bien los enunciados. En este caso podemos darnos cuenta que siempre z será positivo.

- Interseco / Corto con traza z = cte.
  - $z = 0 \implies x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0$
  - $z = 1 \implies x^2 + y^2 = 1$
  - $z = -1 \implies x^2 + y^2 = 1$
  - $z = 2 \implies x^2 + y^2 = 4$
  - $z = -2 \implies x^2 + y^2 = 4$
- Interseco / Corto con traza x = cte
  - $x = 0,\ z^2 = y^2 \iff |z| = |y| \implies z = |y|\ y\ z = -|y|$

Esta cuádrica es el cono.
2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
Lo primero que notamos es que z es una variable dependiente y está ligada a lo que valga $x^2 + y^2$. Por lo tanto, como ambos términos son positivos, entonces $z \geq 0$.
De esta observación descartamos trazas con $z = -k$
3. $z = x^2 + y^2$
Mismo que el ejemplo anterior, notamos que $z \geq 0$ y está ligada.

- Interseco / Corto con traza z = cte.
  - $z = 0 \implies x^2 + y^2 = 0$
  - $z = 1 \implies x^2 + y^2 = 1$

En este ejemplo particular podemos ver que las **trazas** nos dieron exactamente igual que en el ejemplo 1. Esto indica que claramente tienen un parecido, pero como son diferentes ecuaciones, algo nos falta. Tomemos más trazas.

- Interseco / Corto con traza x = cte.
  - $x = 0,\ z = y^2$. Es una parábola.

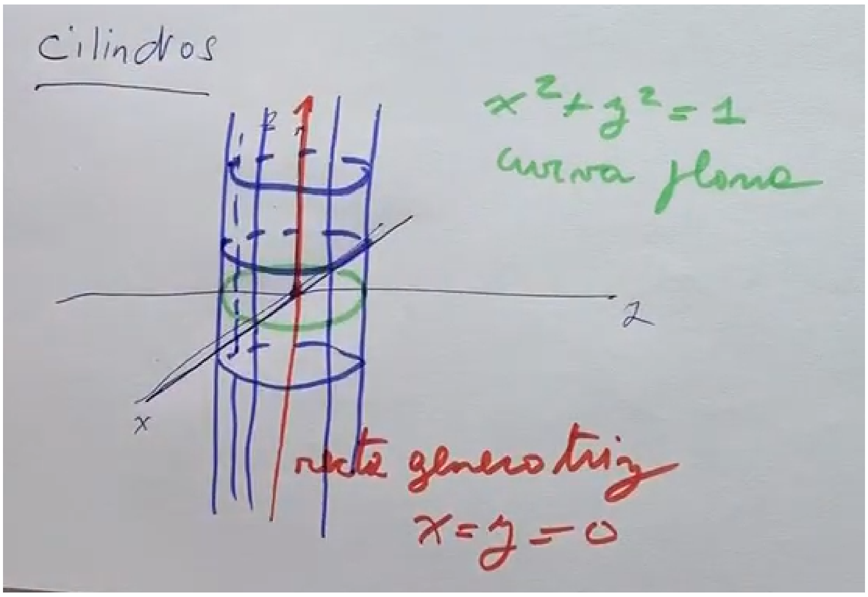
Esto es un Paraboloide.

Recta Generatriz

Es una recta que tomo en $\mathbb{R}^3$ que normalmente es para tomar paralelas y generar cortes.

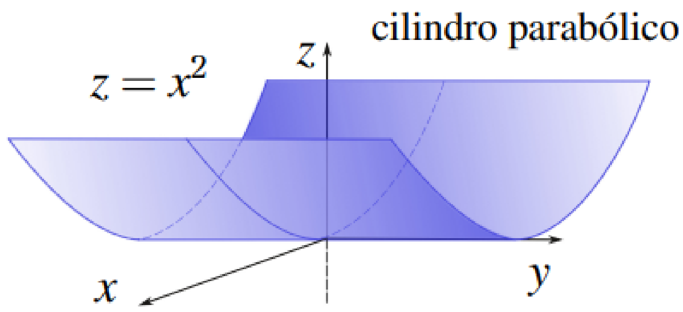
Cilindro

Es el conjunto de puntos que atraviesan la curva plana $x^2 + y^2 = 1$ y que son paralelas a la recta generatriz.
Cuando hago un corte, asignando un valor de z nos genera un cilindro.



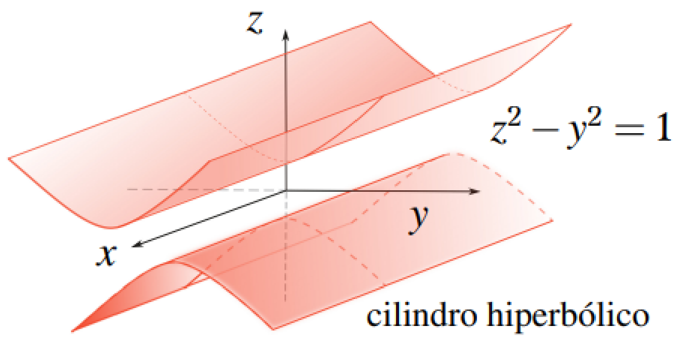
Cilindro Parabólico (generado por una parábola)

Tomo una recta generatriz en el eje y $x = z = 0$.



Cilindro Hiperbólico (generado por una hipérbola)

Toma una recta generatriz (eje?)



Parametrización para Curva dada por intersección de dos superficies

1. $z = 3x^2$ $x^2 + 4y = 1$

- 1. Recordar es que cuando hablamos de superficies estamos en $\mathbb{R}^3$.
- 2. Recordar que como estamos hablando de una curva que se forma en base a una intersección, entonces la curva estará en $\mathbb{R}^3$ y requerirá solo de un parámetro.
- 3. Hay dos formas de encarar este tipo de ejercicios
  - 1. Si tienen una variable en común, con mismo grado y todo, despejamos todo en base a una variable.
  - 2. Si no tienen una variable en común, lo que podemos hacer es básicamente hacer reemplazos.

En este ejercicio particular, como $z = 3x^2$ y $x^2 + 4y = 1$ tienen en común al x^2 podemos hacer $z = 3x^2$ $y = \frac{x^2+1}{4}$ Entonces, para armar la parametrización basta con decir que $\alpha(x) = (x^2, \frac{x^2+1}{4}, 3x^2)$ con $x \in \mathbb{R}$
2. $x^2 + y^2 = 4$ $z = 3$

- 1. Recordar que como hablamos de superficies estamos en $\mathbb{R}^3$.
- 2. Recordar que como estamos hablando de una curva que se forma en base a una intersección, entonces la curva estará en $\mathbb{R}^3$ y requerirá solo de un parámetro.
- 3. Si observamos detenidamente ambas ecuaciones vemos que no tienen los mismos términos en común.
  - Lo que podemos hacer primero es notar que $x^2 + y^2 = 4$ es una esfera centrada en el origen con radio 2.
  - Como sabemos parametrizar las circunferencias, entonces sabemos que por ahora nuestra parametrización consta de $\alpha(t) = (2\ cos(t), 2\ sen(t))$ pero nos falta el último término.
  - Como z es constante, entonces lo que nos quiere decir es que la circunferencia estará en $z = 3$.

Por lo tanto, la respuesta es $\alpha(t) = (2\ cos(t), 2\ sen(t), 3)$ con $t \in [0, 2\pi]$.
Esta parametrización indica que es básicamente una esfera que vive en $z = 3$
Nota: Da exactamente igual si colocamos π incluido o no. Si lo incluimos entonces no será inyectiva, pero en nuestras aplicaciones prácticas no afecta en nada.
Importante: ¿Qué hubiese pasado si intentabamos despejar la ecuación de $x^2+y^2 = 4$? Nos queda lo siguiente $y = \pm\sqrt{4-x^2}$. Al separarse en dos caminos, no podría ser parte de una parametrización válida.
3. $x^2 + y^2 = 1$ $x + y + z = 1$

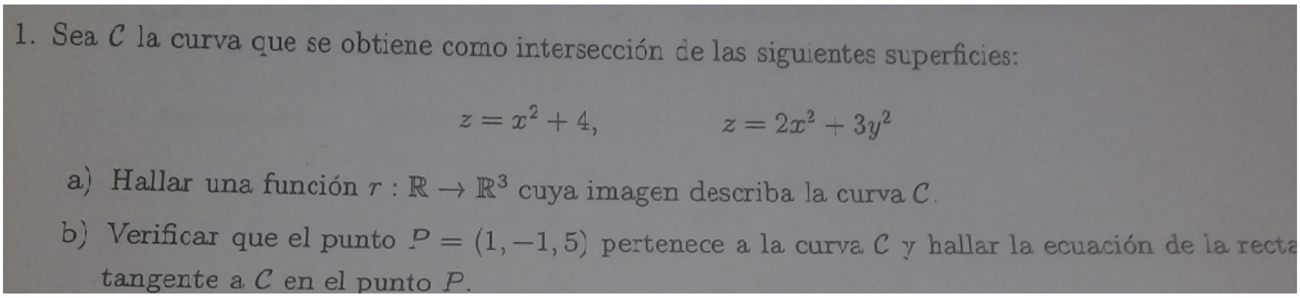
- 1. Recordar que como hablamos de superficies estamos en $\mathbb{R}^3$.
- 2. Recordar que como estamos hablando de una curva que se forma en base a una intersección, entonces la curva estará en $\mathbb{R}^3$ y requerirá solo de un parámetro.
- 3. Si observamos detenidamente no tienen términos en común. Pero, la primera ecuación no habla de z por lo tanto está libre.
- 4. Lo que podemos hacer en este caso es, como en el ejemplo anterior, como conocemos qué es $x^2 + y^2 = 1$. Podemos decir que $\alpha(t) = (cos(t), sen(t), ???)$.
- 5. Nos falta calcular z porque estamos en $\mathbb{R}^3$ pero sabemos que $z = 1 - x - y$.
- 6. Por lo tanto $\alpha(t) = (cos(t), sen(t), 1 - x - y) \equiv \alpha(t) = (cos(t), sen(t), 1 - cos(t) - sen(t))$.

Por lo tanto, la respuesta es $\alpha(t) = (cos(t), sen(t), 1 - cos(t) - sen(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$.
Importante: Si se quisiera verificar si las parametrizaciones que encontramos son correctas, debería validar ambas ecuaciones.
4. $(x-y)^2 + z^2 = 4$ $z = x + y$

- 1. Recordar que como hablamos de superficies estamos en $\mathbb{R}^3$.
- 2. Recordar que como estamos hablando de una curva que se forma en base a una intersección, entonces la curva estará en $\mathbb{R}^3$ y requerirá solo de un parámetro.
- 3. En este caso podemos observar que los términos de ambas ecuaciones se parecen, podemos comenzar reemplazando a z^2 por $z = x + y$.
- 4. Haciendo esto nos queda $x^2 + y^2 = 2$. Entonces nos queda algo que ya súper conocemos.

Por lo tanto, $\alpha(t) = (\sqrt{2}\ cos(t), \sqrt{2}\ sen(t), \sqrt{2}\ cos(t)\ + \sqrt{2}\ sen(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$

Intersección y Parametrización de Parcial


1. Sea $\mathcal{C}$ la curva que se obtiene como intersección de las siguientes superficies:

$$z = x^2 + 4, \qquad z = 2x^2 + 3y^2$$

a) Hallar una función $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ cuya imagen describa la curva $\mathcal{C}$.
b) Verificar que el punto $P = (1, -1, 5)$ pertenece a la curva $\mathcal{C}$ y hallar la ecuación de la recta tangente a $\mathcal{C}$ en el punto P.

Respiremos por un momento, y notemos que en dos lados al mismo tiempo tenemos z.
La primera parece una parábola, mientras que la segunda no tenemos certeza porque no sabemos cuanto vale z.
La idea, sería meter una ecuación dentro de la otra para empezar a laburar.
Por lo tanto $x^2 + 4 = 2x^2 + 3y^2$, hasta ahora no sabemos que cónica se armó.
Luego $4 = x^2 + 3y^2$ y esto es algo que claramente conocemos pero con una forma media rara.
Si rearmamos un poco los términos nos queda $4 = x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{3}}$, y luego si dividimos por 4 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{\frac{1}{3}}{4}} = 1$ y finalmente: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$
Por lo tanto, si recordamos la parametrización de la elipse nos quedaría algo así:

$$\begin{cases} x = 2 * cos(t) \\ y = \sqrt{\frac{4}{3}} * sen(t)\ con\ t\ \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

Ahora por último vemos cuanto vale z en base a los valores anteriormente conocidos $z = 4cos(t^2) + 4$
Por lo tanto, nuestra parametrización nos quedó de la siguiente forma: $r(t) = (2 * cos(t), \sqrt{\frac{4}{3}} * sen(t), 4cos^2(t) + 4)$ con

$t \in [0, 2\pi)$
Si tenemos duda acerca de nuestra parametrización podemos meter coordenada a coordenada en las definiciones y ver si verifica efectivamente ambas ecuaciones.
El inciso b nos pide verificar que un punto P = (1, -1, 5) está en la curva C. Como nosotros estamos con una parametrización en base a t, necesitamos encontrar un t que nos dé efectivamente este punto. Por lo tanto, planteamos un sistema

$$\begin{cases} 1 = 2 * cos(t) \\ -1 = \sqrt{\frac{4}{3}} * sen(t) \\ 5 = 4 * cos^2(t) + 4 \end{cases}$$

Importante: Cuando tenemos el coseno al cuadrado primero hacer el cos sin el cuadrado, y el resultado elevarlo al cuadrado.
Lo primero que podemos hacer básicamente despejar una ecuación sencilla. Podemos empezar sabiendo que $\frac{1}{2} = cos(t)$ ahora lo que podemos hacer básicamente es hacer $t = cos'(\frac{1}{2})$ y esto nos arroja $\frac{\pi}{3}$
Entonces ahora, con este t evaluemos en todos los casos y veamos si efectivamente vale. Probando vemos que la segunda no se verifica.
Despejando de la segunda, nos queda $\frac{5\pi}{3}$.
Ahora sí, si evaluamos en cada una de las coordenadas de r nos queda (1, -1, 5).
Por último nos piden hallar la ecuación de la recta tangente a C en el punto P.
Lo que vamos a considerar ahora, es como importante el t0 que encontramos, es decir $\frac{5\pi}{3}$ porque hay que evaluar en ese lugar a la derivada.
Si derivamos a r nos queda $r'(t) = (-sen(t), \sqrt{\frac{4}{3}} * cos(t), 4 * (2cos(t) * -sen(x))) \equiv r'(t) = (-sen(t), \sqrt{\frac{4}{3}} * cos(t), -4sin(2t))$
Ahora evaluemos $r'(\frac{5\pi}{3}) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{48})$ me quedo medio raro, pero bueno.
Entonces ahora, la recta tangente es: $L : \lambda(\frac{3}{4}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{48}) + (1, -1, 5)$

Funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y Gráficos

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tomando $y = f(x)$ tenemos una representación gráfica.

$$graf(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, f(x)),\ x \in Dom(f)\} \subset \mathbb{R}^2$$

Importante: El gráfico de una función siempre está en la dimensión suma de las dimensiones. Ej. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el gráfico está en $\mathbb{R}^3$
Importante2: El gráfico es literalmente darle valores y graficar.

Dominio de una Función

Recordemos que el Dominio de una función son todos los valores que podemos inyectar a una función dada para esperar un valor.
Los casos más particulares de cálculo del dominio son

- División entre Cero.
- Logaritmo Natural.
- Raíz Cuadrada, o raíces en general.

Veamos un ejemplo sencillo: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x, y) = 1 + \sqrt{4 - y^2}$
Primero lo primero, esto sería algo de esta pinta: $z = 1 + \sqrt{4 - y^2}$
¿Qué podemos deducir de z? Que por lo menos, mínimamente va a ser $z \geq 1$ pues el valor mínimo que puede dar la raíz es 0 y $z = 1 + 0 = 1$.
¿Qué es lo que sucede o qué restricción nos da $\sqrt{4 - y^2}$? Que no puede ser menor a 0. Entonces, veamos qué valores hacen 0 a esto.
$\sqrt{4 - y^2} <= 0 \iff 4 - y^2 <= 0 \iff 4 \leq y^2 \iff \sqrt{4} = y \equiv y = \pm|2|$.
Del cálculo anterior podemos darnos cuenta que para que la raíz sea válida y debe estar en el siguiente rango $-2 \leq y \leq 2$
Entonces, $Dom(f) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2\ :\ -2 \leq y \leq 2\}, x \in \mathbb{R}$
Véase **anexo** para más ejemplos con cálculo del dominio.

Límites

Límites en $\mathbb{R}^2$

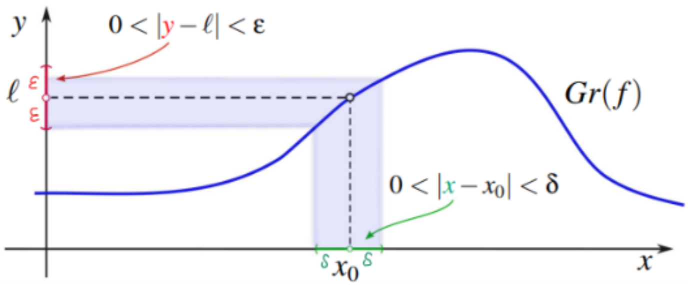
El límite de una función en el punto x_0 es el valor al que se acercan las imágenes (las y) cuando los valores (las x) se acercan al valor x_0.

Notamos como **p** $\in \mathbb{R}$ al punto al cual nos acercamos en el eje x y l $\in \mathbb{R}$ la altura de la función cuando nos acercamos a p. Entonces decimos que **l** $\in \mathbb{R}$ es el límite de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cuando x tiende al punto $p \in \mathbb{R}$.

Notación: $\lim_{x \to p} f(x) = l$

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - L| < \epsilon \implies 0 < |x - p| < \delta$$

Epsilon ϵ: Representa la cercanía deseada entre f(x) y el valor límite l.
Delta δ: Representa cuán aproximados deben estar los valores de x a p para asegurar que la función esté dentro de la distancia ϵ del valor límite.



Si el límite creemos que existe, se prueba por definición.
Si el límite creemos que no existe, se da un contraejemplo, por ejemplo buscando iterados.
Intuición importante: Si el grado del numerador es menor al grado del denominador, rara vez exista el límite. Por lo tanto, si el grado del numerador es más grande que el del denominador seguramente exista porque tiende más rápido a 0.

Álgebra de Límites

Sea $f,\ g\ :\ (a,\ b) \to \mathbb{R}$ $x_0 \in (a,\ b)$ y $\exists \lim_{x \to x_0} f(x),\ \lim_{x \to x_0} g(x),\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$

- Linealidad: $\lim_{x \to x_0} \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha \lim_{x \to x_0} f(x) + \beta \lim_{x \to x_0} g(x)$
  - En criollo: Una suma en un límite donde ambas evaluan hacia el mismo punto es lo mismo que evaluar el límite por separado.
- Multiplicación: $\lim_{x \to x_0} f(x) * g(x) = [\lim_{x \to x_0} f(x)] * [\lim_{x \to x_0} g(x)]$
- División: $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0 \implies \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$
- Cero por acotado: Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ ent $\lim_{x \to x_0} f(x) * g(x) = 0$

L'Hopital

Sean $f,\ g\ :\ (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables. (esto quiere decir que L'Hopital vale en funciones de $\mathbb{R}$).
Solo podemos aplicarlo si estamos en un caso de $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.
Si ambas condiciones se cumplen entonces podemos aplicar $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Límites Laterales

Llamamos límite lateral cuando nos aproximamos a x_0 por un solo lado.
Acercarnos por izquierda: $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$ *si* $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$
Acercarnos por derecha: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$ *si* $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$
En $\mathbb{R}^2$ existen ambos límites laterales si existen $x's \in A = Dom(f)$ en ambos lados de x_0. Si ambos límites laterales son iguales, entonces decimos que existe el límite en x_0. **Importante**: Va a ser tu mejor amigo cuando tengas que calcular diferenciabilidad o tengas que lidiar con módulos que no puedas acotar (porque no estás demostrando que existe y da un valor particular).

Límites en Varias Variables

Dada $f(a,\ b) \to \mathbb{R}$ $x_0 \in (a,\ b)$ decimos que l es el límite de f cuando x tiende a x_0 si para cualquier $\epsilon\ >\ 0$ $\exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que si $0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - l| < \epsilon$
Cuando trabajamos en $\mathbb{R}^n$ el límite en P existe si todos los caminos con el cual nos acercamos a P siempre dan el mismo límite. Esto quiere decir que si encontramos **dos maneras distintas** de acercarnos que den límites distintos es porque el límite en P no existe.
Nota: En $\mathbb{R}$ solo nos podíamos acercar desde una sola dirección, en $\mathbb{R}^n$ hay infinitas formas de acercarnos a un punto $p \in \mathbb{R}^n$.
Good To Know: Para acercarnos a P en $\mathbb{R}^n$ una buena forma es con rectas al principio y luego las curvas de grado 2, 3, 4, etc.

Formas de calcular Límites

En $\mathbb{R}^2$ es sencillo pues analizamos los límites laterales. En $\mathbb{R}^n$ existen varios caminos por los cuales nos podemos acercar a P.

- Límite Iterado: Consiste en acercarse por una recta paralela a un eje y luego por otra. El resultado que nos da es un posible candidato l al límite.
  - $\lim_{x \to x_0} (\lim_{y \to y_0} f(x, y)) = L$
  - $\lim_{y \to y_0} (\lim_{x \to x_0} f(x, y)) = L$
  - Este método es súper útil para hallar una forma sencilla de quien es un posible candidato a ser límite o para refutar que exista un límite.
- Límite por rectas: Consiste en calcular el límite de otros tipos de rectas.
  - $\lim_{x \to x_0} f(x, m(x - x_0) + y_0)$

Propiedades para acotar Límites

Importante: Estas y más están en el **manual del acotador frecuente** presentado en el anexo. Por lo tanto, es imprescindible leerlo.

1. Desigualdad Triangular: Básicamente que si tengo algo de la forma $|(x - x_0)|$ es menor que la norma con las coordenadas de x, y
   - $|x - x_0| \leq ||(x,\ y) - (x_0, y_0)||$
   - $|y - y_0| \leq ||(x,\ y) - (x_0, y_0)||$
2. $|a + b| \leq |a| + |b|$
3. $|a - b| \leq |a| + |b|$
4. $|c * a| = |c| * |a|$
5. $sen(\alpha) \leq \alpha$
6. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$
7. $a^2 \leq a^2 + b^2$ con $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces $\frac{a^2}{a^2+b^2} \leq 1$ y esto quiere decir que
   - $0 \leq \frac{|x - x_0|}{||(x,\ y) - (x_0, y_0)||} \leq 1$
   - $0 \leq \frac{|y - y_0|}{||(x,\ y) - (x_0, y_0)||} \leq 1$
8. $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$

Véase **anexo** para ver ejemplos de límites por definición acotando y el **manual del acotador frecuente**.

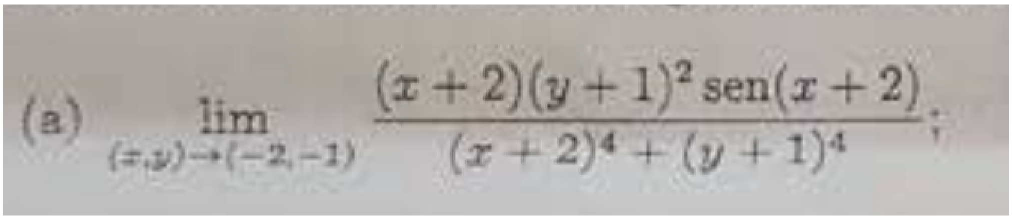
Recomendaciones: Cómo analizar Límites

- Mirar iterados
- Mirar las rectas que pasen por el punto límite $y = mx + b$
  - $\lim_{x \to (0,3)}$ sería ver con las rectas del estilo $y = mx + 3$
- Miro las parábolas que pasan por el punto límite $y = ax^2 + b$
  - Importante: Hay veces que conviene ver otros caminos como $x = y^2$ pero eso depende del ejercicio y si estamos seguros de que este camino tiene otro candidato a límite.

Si mediante todos los caminos realizados el límite es el mismo, probablemente ese límite sea verdad. Para probar esto usamos la definición: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : ||(x, y) - (x_0, y_0)|| < \delta \implies |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$
Importante: Cuando analizamos los caminos por polares debemos modificar la ecuación tal que $x = rcos\theta$ e $y = rsin\theta$ y el límite debe ser $r \to 0$

Uso de L'Hopital

Es extremadamente importante acordarse que esta herramienta existe, veamos un ejemplo de un parcial donde es **prácticamente obligatorio** aplicarlo.


(a) $\lim_{(x,y)\to(-2,-1)} \frac{(x+2)(y+1)^2 \operatorname{sen}(x+2)}{(x+2)^4+(y+1)^4}$;

Este límite, por iterados da cero.
Por algunas curvas, aparentemente da 0.
Pero si probamos por $x+2 = y+1 \equiv y = x+1$ pasa algo interesante.
$\left(\lim_{x\to-2} \frac{(x+2)(x+2)^2 sen(x+2)}{(x+2)^4+(x+2)^4}\right) = \left(\lim_{x\to-2} \frac{(x+2)(x+2)^2 sen(x+2)}{(x+2)^4(1+1)}\right) = \left(\lim_{x\to-2} \frac{(x+2)^3 sen(x+2)}{(x+2)^4(1+1)}\right) = \left(\lim_{x\to-2} \frac{sen(x+2)}{2(x+2)}\right)$
Ahora la pregunta es ¿qué hacemos? porque se nos sigue indefiniendo. Como estamos en una variable, podemos usar L'hopital y nos salva pues derivamos el numerador y el denominador.
$\left(\lim_{x\to-2} \frac{cos(x+2)}{2}\right)$ y ahora si evaluamos esto con x tendiendo a -2 nos queda $\left(\lim_{x\to-2} \frac{cos(0)}{2}\right) = \frac{1}{2}$
Luego, como en iterados vimos que daba 0, pero acá llegamos a $\frac{1}{2}$ el límite no existe.

Ver iterados y rectas no siempre es suficiente

Veamos un breve ejemplo de que **no es suficiente** ver iterados y rectas: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ y^2}{x^2+y^4}$
Si hacemos iterados:

- $\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} \frac{x\ y^2}{x^2+y^4}\right) = \lim_{x\to0}(\frac{0}{x^2}) = 0$
- $\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} \frac{x\ y^2}{x^2+y^4}\right) = \lim_{y\to0}(\frac{0}{y^4}) = 0$

Si hacemos por rectas: $y = mx$ nos queda 0 también.
Ahora, hay algo interesante: el grado del denominador es mucho más grande que el del numerador. Probemos por curvas
Probamos con una curva $x = y^2$: $\lim_{x\to0}\left(\frac{x\ y^2}{x^2+y^4}\right) = \frac{y^2\ y^2}{(y^2)^2+y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}$
Acabamos de demostrar que el límite no existe.

Cómo lidiar con módulos en Límites

Normalmente lo que aplicamos cuando tenemos límites de este estilo es básicamente ver límites laterales para evaluar el límite cuando esa variable es positiva o cuando es negativa.
Nota Importante: Cuando estamos analizando límites laterales positivos podemos utilizar propiedades como, ej.: $\sqrt{3x^2} = \sqrt{3}\sqrt{x^2} = \sqrt{3}|x^2| = \sqrt{3}x^2$

Continuidad

Sea $f(a,\ b) \to \mathbb{R}\ y\ x_0 \in (a,\ b)$ decimos que f es continua en x_0 sí y solo sí

- $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)$
- $f(x_0) = \exists \lim_{x\to x_0} f(x)$

En funciones partidas, del tipo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Tenemos que evaluar qué sucede en el punto conflictivo. En este caso, el punto conflictivo es el $(0,0)$ para $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ entonces lo que tenemos que verificar es que el $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 1$
Si el límite llegase a existir pero es **diferente** a 1 decimos que es una discontinuidad evitable mientras que si el límite **no existe** entonces es una discontinuidad inevitable/esencial.

Algunas funciones continuas

Hay una lista larga de funciones continuas, pero algunas son estas

- Polinomios (suma de monomios)
  - $f(x,y) = 2xy - 5x^3 + 4x^2y^5$
- Funciones Racionales (cociente de polinomios): Que no se anule el denominador.
  - $f(x,y) = \frac{x^4y}{(x-1)^2}$ es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$
- Composiciones de una función continua en una variable con un polinomio
  - $ln(x^2 + y^2 + 1)$: Como el ln debe ser mayor que 0 pero el argumento de dentro **siempre** es mayor que 0 entonces es continua en **todo** $\mathbb{R}^2$

Discontinuidad

Existen dos tipos de discontinuidades

- Discontinuidad Evitable: Eso quiere decir que el límite existe cuando tendemos al punto pero no da el valor que queremos.
- Discontinuidad Inevitable: El límite cuando tendemos al punto no existe.

Continuidad en Curvas

Decimos que una curva es continua si todas sus parametrizaciones lo son.
Una curva $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ dada por $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ es continua si todas las funciones $x_i : I \to \mathbb{R}$ son continuas.

Recta Normal

Es una recta perpendicular a la recta tangente que pasa por un punto dado.

Recta Secante

La recta secante es la recta que une dos puntos, es decir, **que corta en dos puntos a una curva.**
Esta ecuación me da la pendiente de la recta secante $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Derivada

La derivada es una nueva función que indica la pendiente de la recta tangente para todos los puntos de una función. Además, es una medida de rapidez con la que cambia un valor.
Notamos a la derivada de $f(x)$ como $f'(x)$
La Derivada por Definición se puede representar como $f'(x) = \lim_{(h)\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Recta Tangente

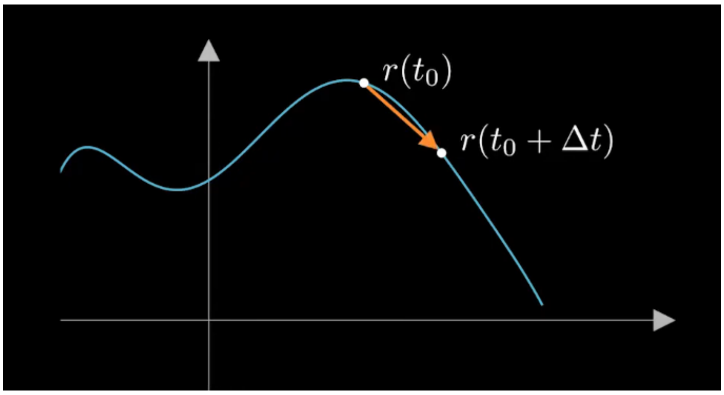
La Recta Tangente de una función es aquella que mejor aproxima a la función cerca de x_0.
La ecuación es la siguiente: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
Si tenés una **curva dada en forma paramétrica**, tenés que calcular la recta tangente de otra forma, para eso, mirá **Recta Tangente en Curva Diferenciable en Punto**

Diferenciabilidad (Derivabilidad en Curvas)

Considere la curva $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Recordemos que esta parametrización de la curva nos pide un tiempo t y nos dice la posición.
Ahora lo que queremos saber es **con qué velocidad** se mueve la partícula.
Esta velocidad, al igual que en la física es una magnitud vectorial. No solo me importa que tan rápido va yendo sino también en que dirección y sentido.

Velocidad Promedio

Tomo fotografía en dos instantes de tiempo: como estaba la partícula en un momento dado, luego dejo pasar un tiempo y saco otra foto.
Esto lo podemos denotar como t_0 y $\triangle t$ entonces ahora veo $r(t_0)$ y $r(t_0 + \triangle t)$



En naranja, tenemos el **vector desplazamiento**.
Luego $V_{prom} = \frac{r(t_0+\triangle t)-r(t_0)}{\triangle t}$
Por lo tanto, podemos calcular la velocidad instantánea como $V(t_0) = \lim_{(\triangle t)\to 0} \frac{r(t_0+\triangle t)-r(t_0)}{\triangle t}$ si el límite existe.

Curvas Diferenciables

Sea $r : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ y $t_0 \in I$
Decimos que r es diferenciable en t_0 si el límite $r'(t_0) = \lim_{(\triangle t)\to 0} \frac{r(t_0+\triangle t)-r(t_0)}{\triangle t}$

Recta Tangente en Curva Diferenciable en Punto

Si $r : I \subset \mathbb{R} \implies \mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ es diferenciable en t_0, entonces posee una recta tangente en $r(t_0)$ y la misma viene dada por $\lambda r'(t_0) + r(t_0)$

Dado $x = 1 + 2\sqrt{t}$ $y = -t$ $0 \leq t \leq 9, (3, -1)$
Lo primero que podemos notar es que el punto (3, -1) en este caso que nos va a servir para evaluar pero el punto tiene dos coordenadas (solo aceptamos uno en la parametrización), por lo tanto, de alguna manera debemos encontrar el valor de t, y este t servirá como nuestro t_0.
Lo segundo que debemos notar es el dominio que toma esta curva, esto es importante porque cuando nosotros realicemos la derivada de la curva, deberían de seguir valiendo exactamente **los mismos puntos**. Es decir, no deberían ser puntos conflictivos (indefiniciones). **En este ejercicio SOLO nos piden en base al (x,y) = (3, -1) que nos da un solo t, pero si fuese ver si es derivable para todo posible punto, entonces hay que chequear que el dominio de r(t) sea el mismo que r'(t)**
Si vemos a ojo, podemos notar que si $y = -t$ pero $y = -1$ entonces $t = 1$, y este t es válido porque está en el rango de $0 \leq t \leq 9$.
Entonces ahora lo que podemos hacer para empezar es calcular la derivada de la curva $r(t) = (1 + 2\sqrt{t}, -t)$.
Recordemos que para que una curva sea derivable, la curva debe poder ser derivada **en cada coordenada** dado un punto t_0.
Por lo tanto $r'(t) = (\frac{1}{\sqrt{t}}, -1)$.
Finalizando, ahora calculamos $r(1)$ y $r'(1)$ que nos da $(3, -1)$ y $(1, -1)$ respectivamente
Luego, $L(x, y) = \lambda(1, -1) + (3, -1)$

Diferenciabilidad en Curva / Funciones Vectoriales

Dada una curva $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es diferenciable en $t_0 \iff r'(t_0) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

Importante: Los versores indican qué posición de parámetro toman en la ecuación vectorial.

Es decir, $r(t) = (1 + t^3)\ \hat{\imath} + te^{-t}\ \hat{\jmath} + sen(2t)\ \hat{k} \equiv r(t) = (1 + t^3, te^{-t}, sen(2t))$
Veamos un ejemplo: Dada $r(t) = (1 + t^3, te^{-t}, sen(2t))$ encuentre el vector derivado de r y halle la ecuación de la recta tangente a la curva en $\hat{\imath} = (1, 0, 0)$.

Importante: Si $\hat{\imath} = (1, 0, 0)$ entonces esto nos quiere decir que existe algún momento t_0 tal que $\hat{\imath} = (1, 0, 0) = r(t_0)$

- Comenzamos derivando coordenada a coordenada, por lo tanto nos queda $r'(t) = (3t^2, e^{-t} + t(-e^{-t}), cos(2t) * 2)$.

- Ahora tenemos que hallar el t_0 para que $\hat{i} = (1, 0, 0)$, por la primera coordenada vemos que para que de 1, entonces $t = 0$. También vemos que este mismo t = 0 verifica la segunda y la tercera coordenada.
- Entonces como verificamos que efectivamente la curva pasa por el punto $\hat{i} = (1, 0, 0)$ en el momento $t_0 = 0$ tomamos este valor y calculamos la recta tangente (y = f'(x_0) + f(x_0)).
- $\lambda * r'(0) + r(0) = \lambda(0, 1, 2) + (1, 0, 0)$

Tabla de Derivadas

Función	Derivada	Ejemplo
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$f(x) = 5 \rightarrow f'(x) = 0$
$f(x) = ax$	$f'(x) = a$	$f(x) = 7x \rightarrow f'(x) = 7$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^3 \rightarrow f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$f(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$	$f(x) = 4^x \rightarrow f'(x) = 4^x \cdot \ln(4)$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$f(x) = \log_5(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(5)}$
$f(x) = \operatorname{sen}(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$f(x) = \operatorname{sen}(x) \rightarrow f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$	$f(x) = \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$f(x) = \tan(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$e^{g(x)}$	$e^{g(x)}g'(x)$
$\ln(g(x))$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$
$\operatorname{arc\,sen}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\cosh(x)$	$\operatorname{senh}(x)$
$\operatorname{senh}(x)$	$\cosh(x)$

$$y = |u| \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{u}{|u|} \cdot u'$$

Tips para derivar raíces

- Reescribir la raíz como potencia.
- Aplicar la regla de la potencia e ir restando uno al exponente.

Ej.: Calcule la derivada de orden 3 $\sqrt{1+x}$

- Reescribo: $(1+x)^{\frac{1}{2}}$
- Derivamos: $\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$
- Derivamos: $\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}}$
- Derivamos: $-\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}}$
- Luego, la derivada de orden 3 es: $\frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$

Reglas de Derivación

Sean u(t) y v(t) dos curvas entonces

- Suma / Resta: $(u(t) \pm v(t))' = u'(t) \pm v'(t)$
- Producto por escalar: Si $\lambda \in \mathbb{R} \implies (\lambda * u)'(t) = \lambda * u'(t)$
- Producto: $[u(t) * v(t)]' = u'(t) * v(t) + u(t) * v'(t)$
- Producto Escalar: $(u * v)'(t) = (u' * v)(t) + (u * v')(t)$
- Producto Cruz: $(uxv)'(t) = (u' \ x \ v)(t) + (u \ x \ v')(t)$
- Cociente: $\frac{f}{g}' = \frac{f' * g - g' * f}{g^2}$
- Regla de la Cadena: $(fog)'(x) = f'(g(x)).g'$

Vector Posición

El Vector Posición es literalmente el Vector que te arroja evaluar una curva (no derivada) dado un t.

Vector Tangente

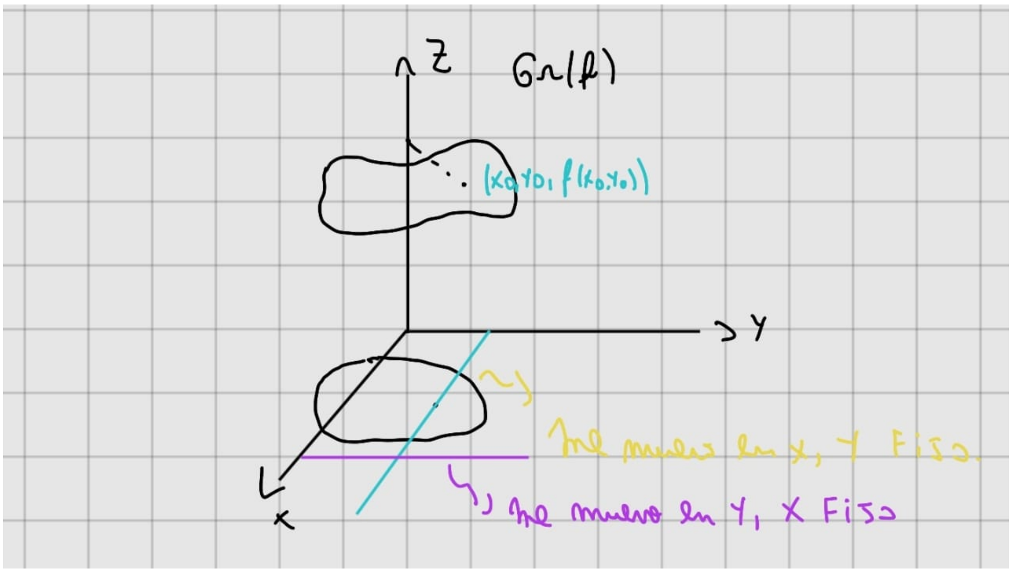
El Vector Tangente es literalmente el Vector que te arroja evaluar una curva (derivada) dado un t.

Vector Tangente Unitario

El Vector Tangente unitario es aquel Vector Tangente que está normalizado, es decir, tiene longitud 1. Por lo tanto, se define como $T(t) = \frac{r'(t)}{||r'(t)||}$ **Importante**: El Vector Posición, el Vector Tangenten y el Vector Tangente unitario varían según el parámetro.

Derivadas Parciales

No es otra cosa que fijar una de las dos coordenadas y pensar la función como si fuese de una variable.



Importante: El h **siempre** tiende a 0.

Derivada parcial de f respecto a x

Sea f $f(x, y)$, la derivada parcial de f respecto a x es:

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$$

Ambas notaciones denotan lo mismo.

Derivada parcial de f respecto a y

Sea f $f(x, y)$, la derivada parcial de f respecto de y es:

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0)$$

En ambos casos, la derivada parcial existe si el límite existe.
Lo único que cambia de ambas es que cuando queremos ver la derivada parcial de f respecto a una variable, a esa variable le sumamos h. Lo demás es igual, cambia la notación porque ahora vamos a evaluar todo en base a esa variable pero nada más que eso.
Véase **anexo** para ver ejemplos de ejercicios de derivadas parciales.

Vector Gradiente

Es un vector que posee las dos derivadas parciales y se denota de la siguiente manera

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$$

Considerando el primer ejemplo que resolvimos en la sección anterior que se encuentra en el anexo podemos ver que el vector gradiente para todo x, y es el siguiente: $\nabla f(x,y) = (\frac{1}{x}, \frac{-1}{1+y})$

Importancia del Vector Gradiente

- ∇f: Máximo Crecimiento.
- $-\nabla f$: Mínimo Crecimiento.

Quizá inicialmente no tenga mucho sentido, pero en problemas de la vida real es realmente útil, véase **dirección máximo crecimien**

Derivadas Direccionales

Sea $v \in \mathbb{R}^2, |v| = 1, v \neq 0$ definimos la derivada direccional f en (x_0, y_0)
$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = D_v(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{f((x_0,y_0)+t(a,b)) - f(x_0,y_0)}{t} \right)$ siempre que este límite exista.
Esto siempre se hace por definición, pero si tenemos la información de que es **diferenciable** podemos usar el Teorema de la Diferenciabilidad.

Aclaración acerca de analizar derivadas direccionales en todos los puntos

Cuando nos piden analizar todas las derivadas direccionales, y aplicamos la definición y nos quedó algun caso fuera, como por ejemplo, si $b = 0$ se rompe ese caso hay que verlo aparte.
Curiosamente, como los vectores son de norma 1, si el caso que nos quedó fuera es $b = 0$ el único caso de norma 1 que es sería $\frac{\partial f}{\partial x}$ pues, esta derivada tiene como dirección (1,0).
La idea de estos ejercicios es tratar de **todas las maneras** posibles ver que el límite no se rompa. Normalmente en el denominador queda algún tipo de suma que evita que algo se rompa del todo, pero si solamente tenemos una variable en el denominador, a toda costa hay que evitar que sea 0, y si lo es, hay que analizarlo aparte.

0.0.2. Calcular todas las derivadas direccionales y analizar diferenciabilidad

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2(x^2+y^2)|x|y}{x^6+|y|^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Probar que existen todas las derivadas direccionales de f en $(0,0)$.
(b) Analizar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Inciso a:
Cuando venis haciendo las guías la mayoría salen muy fácil, pero este particularmente asusta porque tenés varias cosas:

- No podés aplicar el mejor caso, tener algo de la forma $\frac{a^2}{a^2+b^2}$
- Tenés módulos.

Lo primero que hay que recordar es ¿qué son las derivadas direccionales?
Recordemos que las derivadas direccionales son vectores de la forma $v = (a,b)$ y que tienen norma 1, es decir $||v|| = 1$.
Recordar que cuando hablamos en vectores, hablamos de norma, en números hablamos de módulo.
Sabiendo estas cosas ¿qué es lo que podríamos esperar de este límite?, que como nos piden **probar que existen todas**, si llega un caso donde decimos que se indefine, entonces tenemos que analizarlo aparte.
Si comenzamos aplicando el límite de Derivadas Direccionales nos queda algo que nos puede dar un poco de terror, pero acordarse que la idea para sacarnos los módulos de encima es hacer límites laterales **a una** de las variables, usar alguna que otra curva y ver que no se rompa.
El objetivo entonces, es que nunca se indefina. Si se indefine, lo vemos aparte.

$\text{lím}_{t\to 0}\left(\frac{f((x_0,y_0)+t(a,b))-f(x_0,y_0)}{t}\right)=\text{lím}_{t\to 0}\left(\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}\right)=\text{lím}_{t\to 0}\left(\frac{\frac{2((ta)^2+(tb)^2)|ta|tb}{(ta)^6+|tb|^3}}{t}\right)$

A partir de este límite, nos queremos sacar de encima los módulos así que veamos los límites laterales y debemos esperar que claramente den lo mismo. Si dan diferente, no existe ninguna derivada direccional.

$\text{lím}_{t\to 0^+}\left(\frac{\frac{2((ta)^2+(ta)^2)tatb}{(ta)^6+(tb)^3}}{t}\right)=\text{lím}_{t\to 0^+}\left(\frac{2((ta)^2+(ta)^2)tatb}{t((ta)^6+(tb)^3)}\right)=\text{lím}_{t\to 0^+}\left(\frac{(2t^2a^2+2t^2b^2)t^2ab}{t((ta)^6+(tb)^3)}\right)=\text{lím}_{t\to 0^+}\left(\frac{(2t^2a^2+2t^2b^2)tab}{(ta)^6+(tb)^3}\right)$

$=\text{lím}_{t\to 0^+}\left(\frac{(2t^2a^2+2t^2b^2)tab}{t^3(t^3a^6+b^3)}\right)=\text{lím}_{t\to 0^+}\left(\frac{(2t^2a^2+2t^2b^2)ab}{t^2(t^3a^6+b^3)}\right)=\text{lím}_{t\to 0^+}\left(\frac{t^2(2a^2+2b^2)ab}{t^2(t^2a^6+b^3)}\right)=\text{lím}_{t\to 0^+}\left(\frac{2(a^2+b^2)ab}{t^2a^6+b^3}\right)$

Ahora paremos la pelota y veamos el límite. Evaluemos el límite con $t\to 0^+$, nos queda $\text{lím}_{t\to 0^+}\left(\frac{2(a^2+b^2)ab}{b^3}\right)$

¿Qué es lo que tiene que pasar para que el límite se indefina? b debe ser = 0.

Ahora, cualquier otro caso vale. Entonces, valen todas las derivadas direccionales por ahora **excepto** el vector norma 1 cuando $b=0$ que sería curiosamente, la derivada parcial $(1,0)$ osea $\frac{\partial f}{\partial x}$. Si hacemos de ambos lados, llegamos prácticamente a lo mismo. Si se llegase a otra condición **el límite no existe**.

Entonces hasta ahora, probamos que valen todas las derivadas direccionales en el (0,0) excepto el vector $(1,0)$ pero como nos lo piden aparte, veamos si esa derivada existe.

$\text{lím}_{h\to 0}\left(\frac{f(h+x_0,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}\right)=\text{lím}_{h\to 0}\left(\frac{f(h,0)}{h}\right)=\text{lím}_{h\to 0}\left(\frac{\frac{2(h^2+0^2)|h|y}{h^6+|0|^3}}{h}\right)=\text{lím}_{h\to 0}\left(\frac{0}{h^7}\right)=0$

Luego, como el límite dió 0 sin ningun tipo de problema, la derivada parcial existe y es 0.

Por lo tanto, existen todas las derivadas direccionales en el punto (0,0).

Inciso b: Analicemos la diferenciabilidad de f en (0,0). Recordemos que el concepto de diferenciabilidad es lo mismo que calcular derivabilidad en una variable.

Entonces, que una función sea diferenciable implica que tenga un plano tangente, sus derivadas parciales y además de eso, también que es continua en ese punto. Una función **no puede ser diferenciable** en un punto si no es continua en ese punto. Sin embargo, es raro que tengamos que evaluar continuidad porque seria un poco más largo, así que si te dicen que analices la diferenciabilidad, considerá que es continua (preguntalo igual).

Calculemos primero la derivada parcial que nos falta, es decir $\frac{\partial f}{\partial y}$ y tenemos suerte de que la de x ya la hayamos calculado. Por suerte, ambas dan 0, entonces, ya podemos armar el hipotético plano tangente. Sí, hipotético, porque no es el plano tangente hasta que probemos que es diferenciable.

El plano tangente se arma con $f(0,0)+f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)$. En nuestro caso es $z=0$.

Entonces, el límite para probar diferenciabilidad es de la siguiente forma: $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{f(x,y)-[f(0,0)+f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)]}{||(x,y)-(x_0,y_0)||}\right)$ y debería dar 0.

Luego, $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{\frac{2(x^2+y^2)|x|y}{x^6+|y|^3}}{||(x,y)||}\right)=\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{2(x^2+y^2)|x|y}{||(x,y)||*x^6+|y|^3}\right)$

Misma estrategia que antes. Saquémosnos de encima los módulos, veamos los laterales con la recta y = x porque intuyo que no existe porque el grado del denominador es mucho más grande que el del numerador.

$\text{lím}_{x\to 0^+}\left(\frac{2(x^2+x^2)xx}{||(x,y)||*x^6+|x|^3}\right)=\text{lím}_{x\to 0^+}\left(\frac{2(x^2+x^2)x^2}{\sqrt{2x^2}*(x^6+|x|^3)}\right)=\text{lím}_{x\to 0^+}\left(\frac{4x^2*x^2}{\sqrt{2}|x^2|*(x^6+x^3)}\right)=\text{lím}_{x\to 0^+}\left(\frac{4x^4}{\sqrt{2}x*(x^6+x^3)}\right)$

$\text{lím}_{x\to 0^+}\left(\frac{4x^3}{\sqrt{2}*(x^6+x^3)}\right)=\text{lím}_{x\to 0^+}\left(\frac{4x^3}{\sqrt{2}*(x^3(x^3+1))}\right)=\text{lím}_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{\sqrt{2}*(x^3+1)}\right)$

Si ahora evaluamos el límite nos queda $\text{lím}_{x\to 0^+}\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$ y esto claramente no es 0. Por lo tanto, no es diferenciable en (0,0)

Conclusión: Es realmente útil utilizar límites laterales por un lado, y además probar por curvas/rectas.

Derivadas Direccionales con Ángulos

En este tipo de casos hay que pensar que cuando dibujamos un ángulo, indirectamente podría haber un vector que salga con esa inclinación.

Por lo tanto, podemos recordar las definiciones de

$$\begin{cases} x = r * cos(\Theta) \\ y = r * sen(\Theta) \end{cases}$$

Pero acá el rol de x lo toma **a** y el rol de y lo toma **b** donde $v=(a,b)$.

¿Qué es r? Recordemos que r era el radio/largo. En este caso va a ser **siempre 1** si hablamos del vector normalizado.

Lo demás es exactamente igual, una vez que encontramos el vector queda hacer las derivadas parciales, generar el gradiente, evaluar en el punto dado y hacer el producto escalar entre el gradiente evaluado en el punto y el vector.

Relación entre las Derivadas Direccionales y Derivadas Parciales

Las Derivadas Parciales son literalmente Derivadas Direccionales pues cuando estamos derivando en base a x estamos usando el vector director de norma 1 (1,0) y cuando lo hacemos en base a y estamos usando el vector director de norma 1 (0, 1):

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=D_{(1,0)}f(x_0,y_0)$

- $\frac{\partial f}{\partial(1,0)}(x_0, y_0)$

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = D_{(0,1)}f(x_0, y_0)$
  - $\frac{\partial f}{\partial(0,1)}(x_0, y_0)$

Véase **anexo** para ver ejemplos.

Derivadas de Orden Superior

Ejemplo: Sea $f(x, y) = x^3y^2 + 2x - y^4$ calculemos sus derivadas parciales.

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^2 + 2$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^22y - 4y^3$

Entonces ahora ¿cuántas derivadas parciales podemos calcular de ambas funciones nuevas?, esto lo conocemos como derivadas de orden superior.

- $(f_x)_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})(x, y) = 6xy^2$
- $(f_x)_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(x, y) = 6x^2y$
- $(f_y)_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(x, y) = 6x^2y$
- $(f_y)_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})(x, y) = 2x^3 - 12y^2$

Teorema (Dirección de Máximo Crecimiento)

Sea **f diferencial** en P_0 entonces $\nabla f(P_0)$ apunta en la dirección en que f crece más rápido. Es decir, $\nabla f(P_0)$ es la dirección de máximo crecimiento.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = \nabla f(P_0) * v, ||v|| = 1$$

Esta definición, se puede probar que equivale a esta

$$||\nabla f(P_0)|| * ||v|| * cos(\alpha) \leq ||\nabla f(P_0)|| * ||v|| = ||\nabla f(P_0)||$$

¿Por qué es importante saber que existe un $\mathbf{cos(\alpha)}$ con $\alpha \in [0, 2\pi)$? Porque esto nos indica lo siguiente

- Si me piden calcular la dirección de máximo crecimiento, se da cuando $\alpha = 0$.
- Si me piden calcular la dirección de mínimo crecimiento, se da cuando $\alpha = \pi$

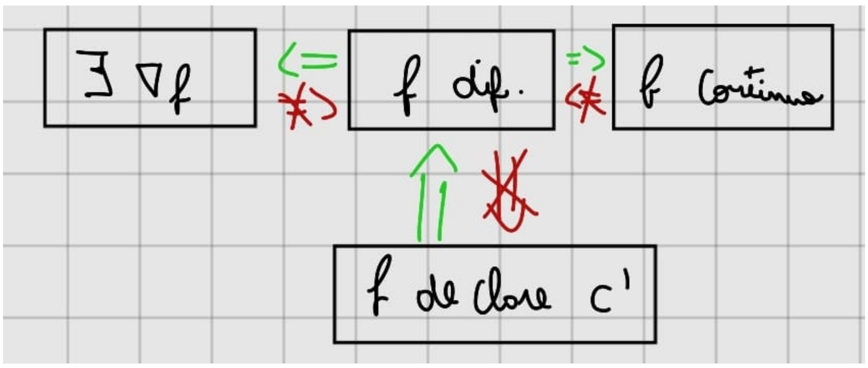
De igual forma, no vamos a hablar de $cos(\alpha)$ sino que nosotros aplicamos directamente la definición, pero es útil saber por qué hay una dirección escondida.
Podemos concluir entonces, que si la dirección de crecimiento es $\nabla(f)(x_0)$, la dirección de decrecimiento es $-\nabla(f)(x_0)$
Véase **anexo** para ayudar a salvar a un insecto de una toxicidad desconocida.

Funciones de clase C^k

Son un conjunto especial de funciones que se caracterizan por ser **continuas y tener derivadas continuas hasta el k-ésimo orden**.

Teorema

Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \implies \mathbb{R}$ es de clase $C'(D) \implies f$ es diferenciable en D.



Teorema de Clairaut

Si $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y existen $f_{xy},\ f_{yx}$ y son continuas en D. Entonces $f_{xy} = (x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)\ \forall (x_0, y_0) \in D$
En el ejemplo que vimos en Derivadas de Orden Superior esto sucede porque $(f_x)_y = (f_y)_x$, es decir, las derivadas cruzadas dan igual.

Función Lineal en $\mathbb{R}^3$

$L(x, y) = a(x - x_0) + b(y - y_0) + f(x_0, y_0)$
$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ f : D \subseteq \mathbb{R}^2 (x_0, y_0) \in D$
Importante: a y b son las dos pendientes de la función lineal.

Diferenciabilidad

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ (x_0, y_0) \in D$ es diferenciable en (x_0, y_0) si $\exists a,\ b \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)}{||(x, y) - (x_0, y_0)||} \right) = 0$$

Consideraciones importantes

- Como el límite es 0, esto quiere decir que el numerador tiende más rápido al cero.
- f(x,y) se acerca al plano tangente.
- $||(x, y) - (x_0, y_0)||$ tiende a cero.

Nota: En una variable lo conocemos como derivada, y existe una recta tangente. Acá se lo conoce como Diferenciabilidad y existe un plano tangente.
Nota: Como en todo límite, acá podemos usar todo lo que conocemos de límites laterales, l'hopital (cuando sea posible) para chequear y efectivamente romper la diferenciabilidad. Es decir, podemos empezar a acotar por sandwich si efectivamente creemos que existe y da 0.

Teorema de la Diferenciabilidad

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $(x_0, y_0) \in D$ entonces vale que

- $a = f_x(x_0, y_0), b = f_y(x_0, y_0)$
- $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) * \frac{v}{||v||} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) * a + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) * b$

Nota: $(x_0, y_0) + t(a, b)$ donde v=(a, b)

Teorema de Diferenciabilidad & Continuidad

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $P_0 = (x_0, y_0) \in D$ si sucede que f es diferenciable en p_0 entonces, f es continua en p_0.

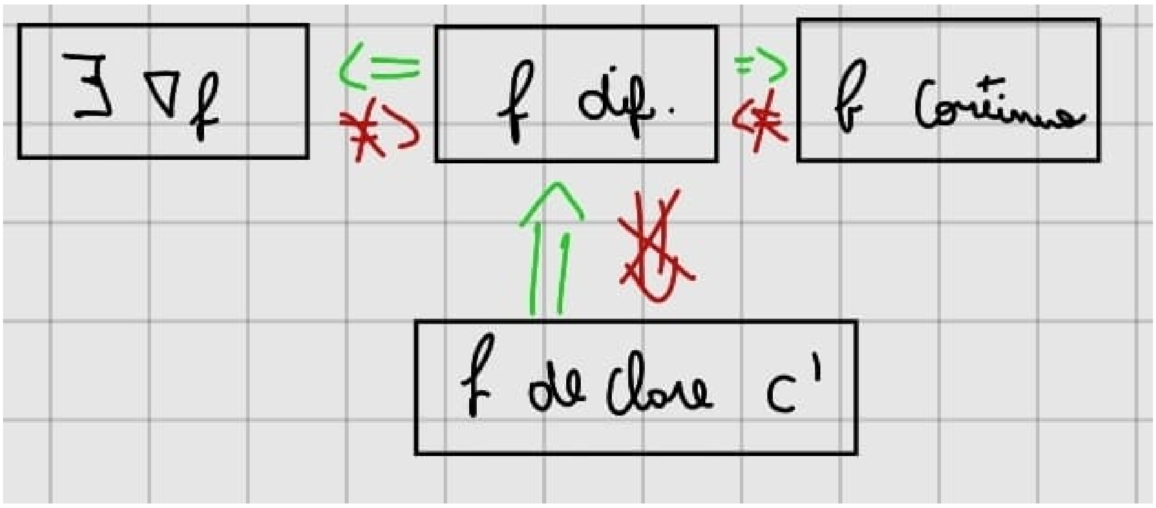
Álgebra de Diferenciabilidad

Valen exactamente las mismas que las de las derivadas.
Sea $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \implies \mathbb{R}$, $p_0 \in D \setminus \exists\ \nabla f(p_0), \nabla g(p_0)$

- Linealidad: $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \exists\ \nabla(\alpha f + \beta g)(p_0)$ y $\nabla(\alpha f + \beta g) = \alpha \nabla f + \beta \nabla g$
- Producto: $\nabla(f, g)(p_0) = \nabla f(p_0) * g(p_0) + f(p_0) * \nabla g(p_0)$
- Cociente: $g(p_0) \neq 0 \implies \nabla(f/g)(p_0) = \frac{\nabla f(p_0)*g(p_0) - f(p_0)*\nabla g(p_0)}{g(p_0)^2}$

Véase **<u>anexo</u>** para ver ejercicios donde vemos continuidad, dominio, diferenciabilidad y más.

Relación entre Gradiente, Diferenciabilidad, Continuidad y Clases



- Si existe el gradiente (o la derivada), la función es diferenciable.
- Si la función es diferenciable, entonces es continua.
- Una función continua no necesariamente es diferenciable.
- Una función diferenciable no necesariamente es de clase C1 (su derivada puede no ser continua).
- Si una función es de clase C1 entonces es diferenciable y su derivada es continua.
- Si una función no es continua en un punto, entonces no es diferenciable en ese punto, es decir, no existen las derivadas parciales ni plano tangente, ni la diferenciabilidad.

Plano Tangente

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **diferenciable** en $P_0 \in D$

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0)$$

El plano tangente existe solo si es Diferenciable. Esto quiere decir que si bien podemos plantear la ecuación de un hipotético plano, la forma de validar que efectivamente exista es que el límite de Diferenciabilidad de 0.
Si es Diferenciable, y encontramos un plano, entonces ese plano es único.

Regla de la Cadena

Regla de la Cadena en 1 Variable

Cuando teníamos una sola variable, la regla de la cadena en derivadas tenía esta pinta $f'(x(t_0)) * x'(t_0)$ y en forma de derivadas parciales se ve de esta manera $y = f(x)$ y $x = x(t)$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} * \frac{dx}{dt}$$

donde $dx = f'(x)$ y $dt = x'(t)$

Regla de la Cadena en 2 Variables

Tiene esta pinta $z = f(x, y)$ $x = x(t)$ $y = y(t)$
¿Cómo calculamos $\frac{dz}{dt}$?

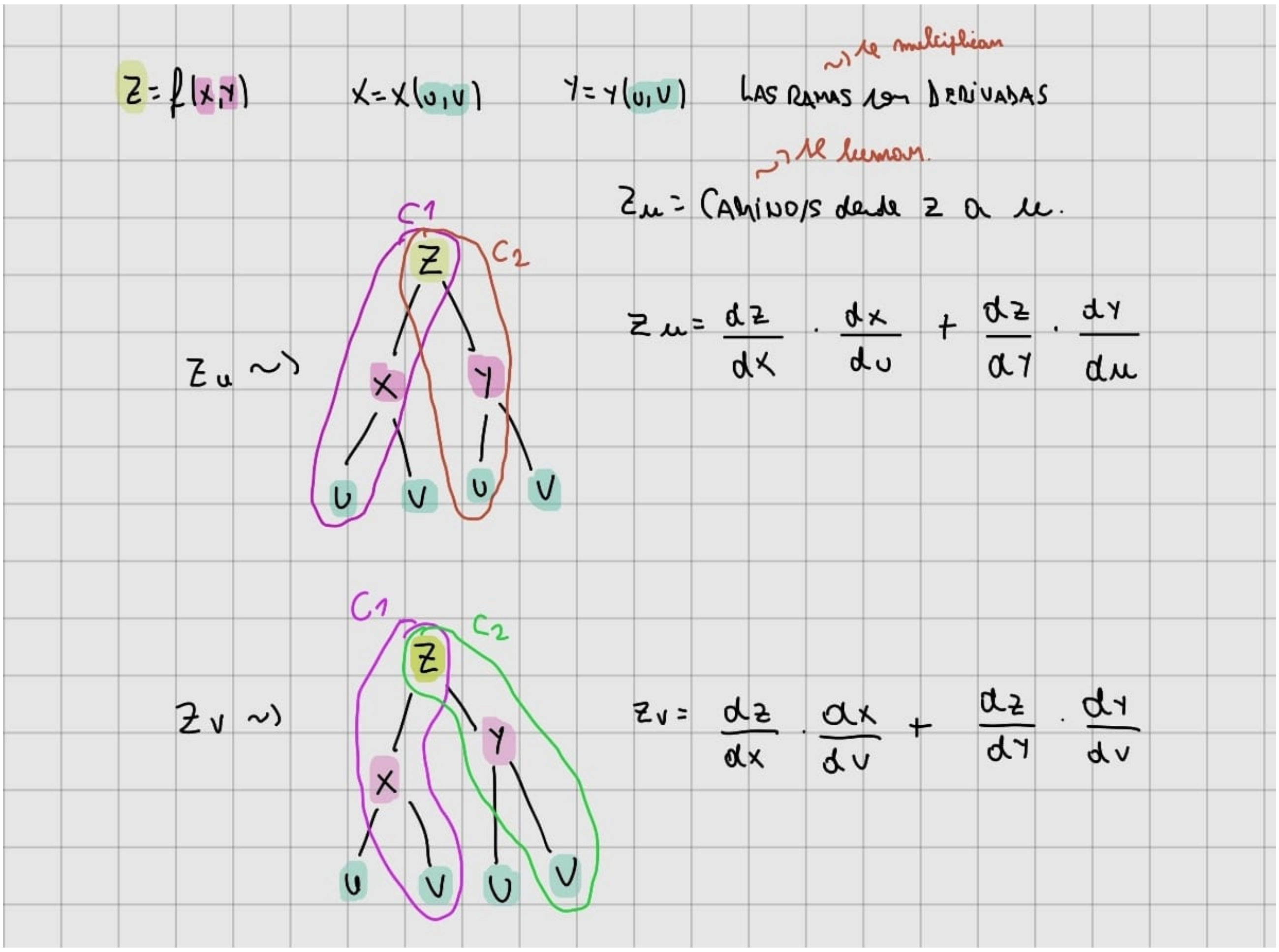
$$\frac{d}{dt}[f(x(t), y(t))] = f_x(x, y) * x' + f_y(x, y) * y' = \nabla f(x, y) * (x', y')$$

Importante: Si $r(t) = (x(t), y(t))$ entonces $\nabla f(x, y) * (x', y') = \nabla f(r) * r'$ donde $r'(t)$ es (x', y') y r es (x, y)

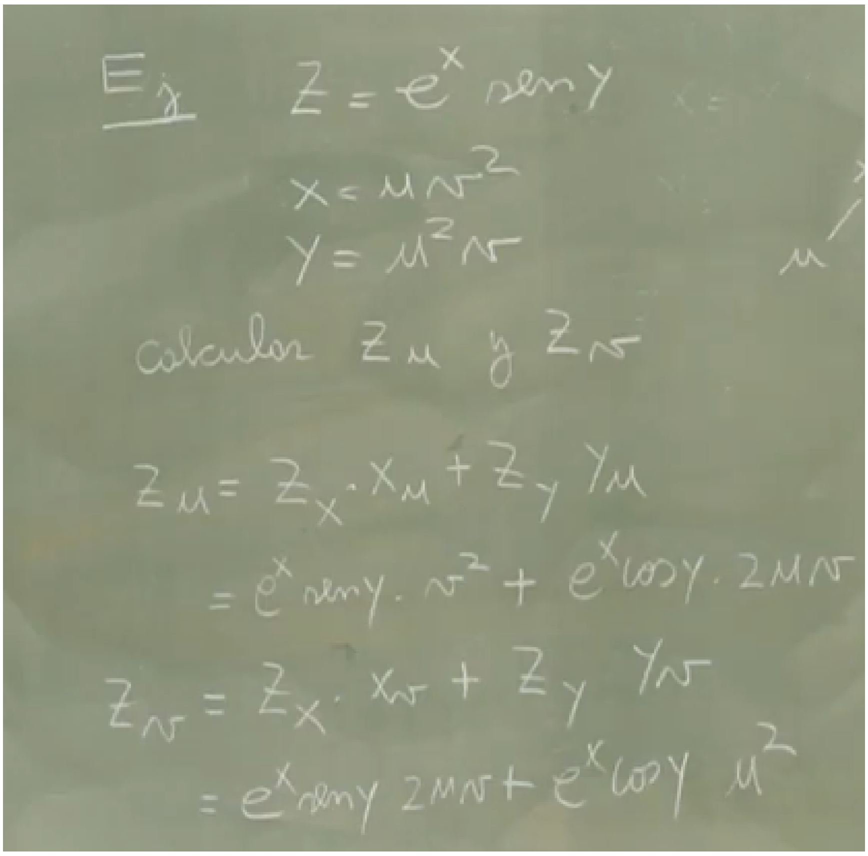
Diagrama del Árbol

Cuando queremos calcular la derivada de una función que depende de 2 variables o más y que a su vez esas variables dependan de más de una, solemos usar el diagrama del árbol.
Ej.: Si tengo $z = f(x,y)$ con $x = x(u,v), y = y(u,v)$ ¿cómo calculamos Z_u y Z_v?

- La raíz del árbol va a ser lo que queremos calcular, en este caso z.
- Las ramas de la raíz serán las variables que necesito enviar para calcular z. En este caso, x e y.
- Luego, las ramas de x e y son justamente las variables de las que dependen. En este caso, x depende de u y v y lo mismo sucede con y.



Otro ejemplo



Plano Tangente de Superficies

El plano tangente a representa **lo mejor que aproxima un punto en una superficie**, y lo denotamos de la siguiente forma

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = a\}$$

en $P_0 \in S$, $f(p_0) = a$
Importante: f es diferenciable en P_0 y $\nabla f(P_0) \neq 0$
Ej.: Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $S : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} + z^2 = 1$ en el punto $P(x_0, y_0, z_0) \in S$ donde $P = (2, -2, \frac{\sqrt{3}}{2})$
Lo primero que notamos es que es una elipsoide porque estamos en $\mathbb{R}^3$, donde $a = 2, b = 3, c = 1$ y el centro es $(1, -2, 0)$.
Necesito calcular ∇f pero no tengo f todavia. Entonces manipulemos esta superficie para llevarlo a una manera de función.
1. Consideramos $F(x, y, z) = \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} + z^2$ y $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = 1\}$
Para que **exista el plano tangente**, $\nabla f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.
Fórmula a la que queremos llegar: $\nabla f(x_0, y_0, z_0)(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$
Primero hay que ver que P esté en la superficie, en este caso está así que todo ok.
2. Calculemos ahora sí: $\nabla f(2, -2, \frac{\sqrt{3}}{2}) = (\frac{1}{2}, 0, \sqrt{3})$
3. Por último, planteamos a lo que queríamos llegar $(\frac{1}{2}, 0, \sqrt{3})(x - 2, y + 2, z - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$
4. Distribuimos y nos queda $\frac{1}{2}x + \sqrt{3}(z - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$
¿Acá no está raro? ¿No le faltó considerar el 1 en la fórmula de F?
¿Cuando considera F, no sería z^2 -1?
Me parece que debería ser $F(x, y, z) = \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} + z^2 - 1$ y al distribuir debería quedar $\frac{1}{2}(x - 2) + \sqrt{3}(z - \frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$ y ahi sí da 0 cuando evalúo el punto P0.

Polinomio de Taylor

El Polinomio de Taylor nos ayuda a encontrar funciones sofisticadas que aproximen a una función.
El mejor ejemplo básico para una aproximación a una curva es la recta tangente pero hay un problema: al ser una recta, no persigue a la curva en todo punto. Es decir, tiene mucho error aproximando la función en todo punto.
Definimos al error como $R_1(x) = f(x) - L(x) \implies \lim_{x \to a} \left(\frac{R(x)}{x-a} \right) = 0$. En la definición el 1 viene de que es el error de aproximar f por la recta tangente.
La idea es justamente, encontrar algo que la aproxime lo mejor posible en todo punto habido y por haber.

Entonces, la idea inicial es buscar siempre una aproximación lineal (recta tangente) y después sumarle una corrección cuadrática.
Importante: El Polinomio de Taylor es el mejor polinomio que nos permite aproximarnos a una función.

Polinomio de Maclaurin

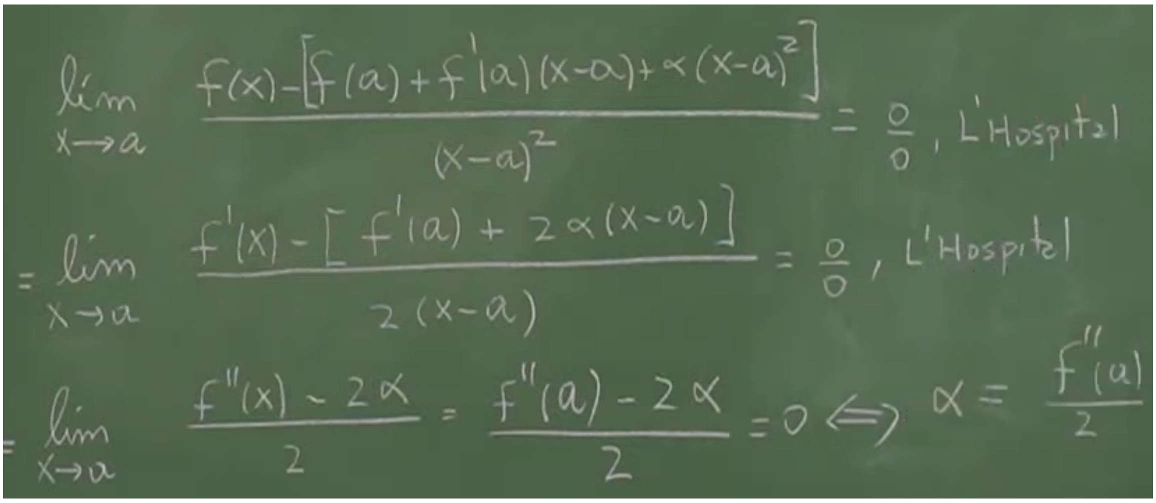
Son Polinomios de Taylor centrados en 0.

Corrección Cuadrática

$P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \alpha(x-a)^2$ donde

- $f(a) + f'(a)(x-a)$: $P_1(x)$ es decir, el polinomio de grado 1 que mejor aproxima a la función.
- $\alpha(x-a)^2$: Corrección cuadrática

¿Cómo encuentro el α que mejora la aproximación?
La idea es encontrar un $R_2(x) = f(x) - P_2(x)$ que me de un error menor al de $R_1(x)$, entonces nuestro límite nos queda de la siguiente forma $\lim_{x \to a} \left(\frac{R_2(x)}{(x-a)^2} \right) = 0$ y este claramente es menor pues acá el denominador está al cuadrado.
Si reemplazamos en el límite por lo que vale $R_2(x)$ nos queda un $\frac{0}{0}$. Por L'Hopital derivamos el numerador y denominador. Luego, calculamos nuevamente el límite y vemos qué valor da. Si no nos da un valor fijo (que exista) entonces L'Hopital no nos dice nada. Recordar que puedo aplicar L'Hopital reiteradas veces, y cuando llegamos a un valor coincide con el límite original.



Para que el Polinomio de Grado 2 aproxime mejor que el Polinomio de Grado 1 debe suceder que $\alpha = \frac{f''(a)}{2}$

Hallando el error para un Polinomio de Taylor (Forma de Lagrange del Resto)

El error para un Polinomio de grado n lo podemos calcular como

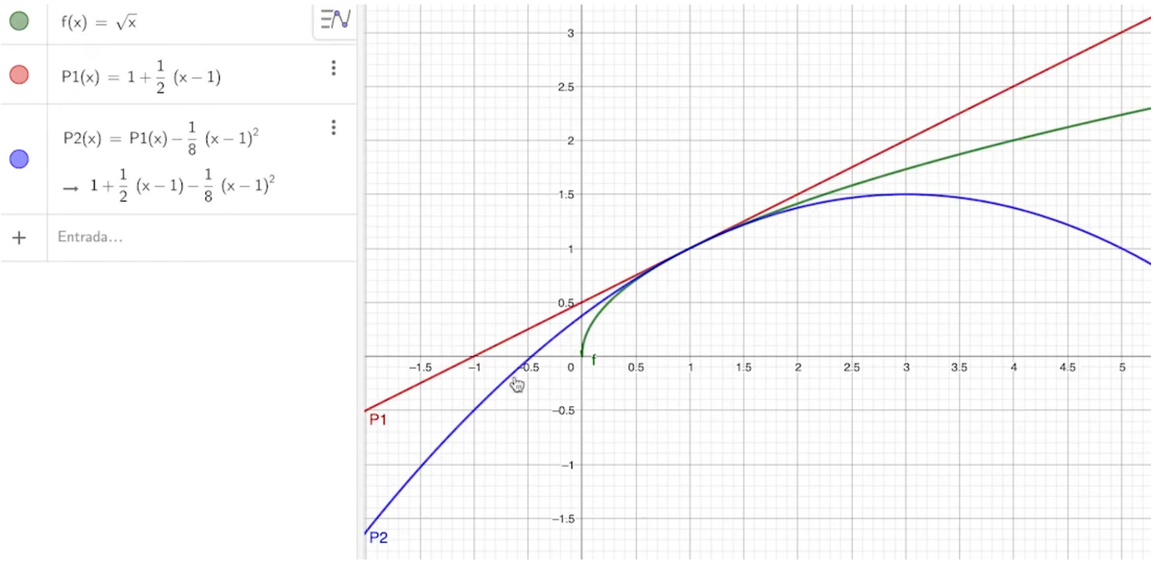
$$E_n(x) = R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Importante: $x \leq c \leq x_0$
Tranquilos, no es para nada trivial. Veremos ejemplos luego en 2 variables.
Importante 2: El Resto es el siguiente término/derivada al orden que nos piden calcular. Por lo tanto, si nos piden el resto pero estamos con un polinomio de taylor orden 2, entonces vamos a tener que calcular como extra el de orden 3.

Polinomio de Taylor de Grado 2

Se define el Polinomio de Taylor de grado 2 de f centrado en a como: $P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$, para que todo esto suceda, la función debe ser de clase C^2.
Recordemos que para que la función sea de clase C^2 debe suceder que la función sea continua, sea derivable con derivada continua y tiene derivada segunda con derivada continua.
Si esto sucede, entonces vale el siguiente Teorema: Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 entonces: $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - P_2(x)}{(x-a)^2} \right) = 0$

Importante: La corrección es tan chica, que solamente se ve si coloco la mayoría de sus decimales.



En la imagen se puede claramente ver como el Polinomio de Taylor de grado 2 aproxima mucho mejor que la recta tangente. Es decir, hay mucho menos error en todos los puntos.

Teorema General de Taylor

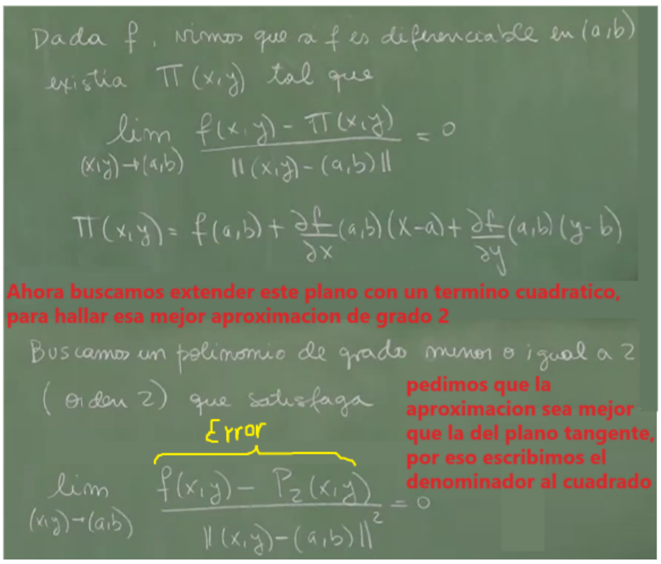
Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in I$ y supongamos que f es de clase C^k

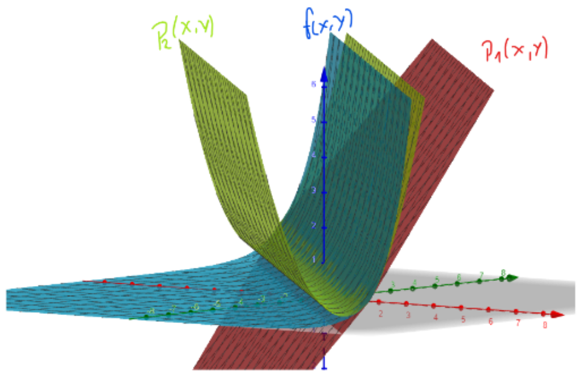
Si llamamos $P_k(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ entonces $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-P_k(x)}{(x-a)^k}\right) = 0$

Polinomio de Taylor en 2 variables

Buscamos una superficie que mejor se aproxime a nuestra función. Hasta ahora nuestra mejor aproximación era el plano tangente, que es la mejor aproximación de orden uno. Ahora debemos buscar una mejor aproximación con grado mayor.

$$P_2(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2}f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}f_{yy}(a,b)(y-b)^2$$





Ej.: Calcular los Polinomios de Taylor de orden 1 (Plano Tangente) y orden 2 de $f(x,y) = e^{x+y}$ centrado (o alrededor de) en $(a,b) = (0,0)$

- Calculamos las derivadas parciales de orden 1 y 2
  - $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x+y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$
- Las evalúo en el punto que me piden y armo. En este caso, evaluadas en el (0,0) todas dan 1.

Orden 1: $P_1(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 1 + x + y$
Orden 2: $P_2(x,y) = 1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2$

Propiedades del Polinomio de Taylor

- $P_2(x,y)$ polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor de (a,b) es el único polinomio de grado menor o igual a 2, Q satisface $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(\frac{f(x,y)-Q(x,y)}{||(x,y)-(a,b)||^2}\right) = 0$
- $P_2(x,y)$ el polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor de (a,b) es el único polinomio Q de grado menor o igual a 2 que satisface: $p=(a,b)$
  - $f(p) = Q(p)$
  - $f_x(p) = Q_x(p)$
  - $f_y(p) = Q_y(p)$
  - $f_{xx}(p) = Q_{xx}(p)$
  - $f_{xy}(p) = Q_{xy}(p)$
  - $f_{yy}(p) = Q_{yy}(p)$

  OJO: Solo en el punto.

Error del Polinomio de Taylor (Forma de Lagrange del Resto en $\mathbb{R}^2$)

La fórmula es exactamente igual a la de 1 variable pero lo que cambia es que ya no tenemos un x_0 sino que ahora tenemos un c_1 y un c_2 donde:

- c_1 está entre x y x_0
- c_2 está entre y y y_0

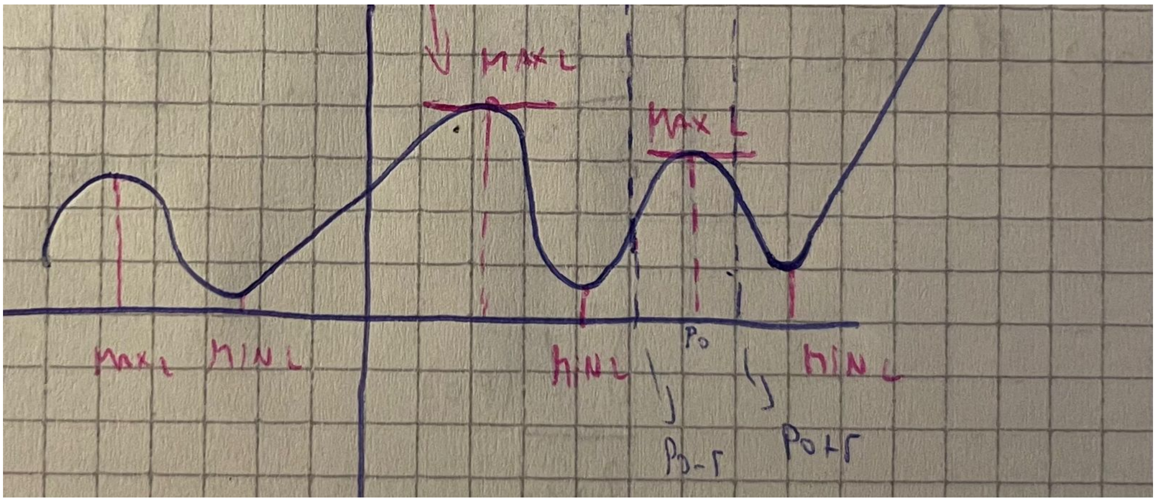
Entonces, definimos:

$$E_n(x,y) = R_n(x,y) = f(x,y) - P_n(x,y) = \frac{f^{n+1}(c_1,c_2)(x-x_0)^{n+1}(y-y_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Véase **anexo** para un ejemplo

Extremos Locales (1 variable)

Decimos que f tiene un extremo local en un punto del intervalo (a,b) si alcanza un máximo o mínimo local en ese punto.



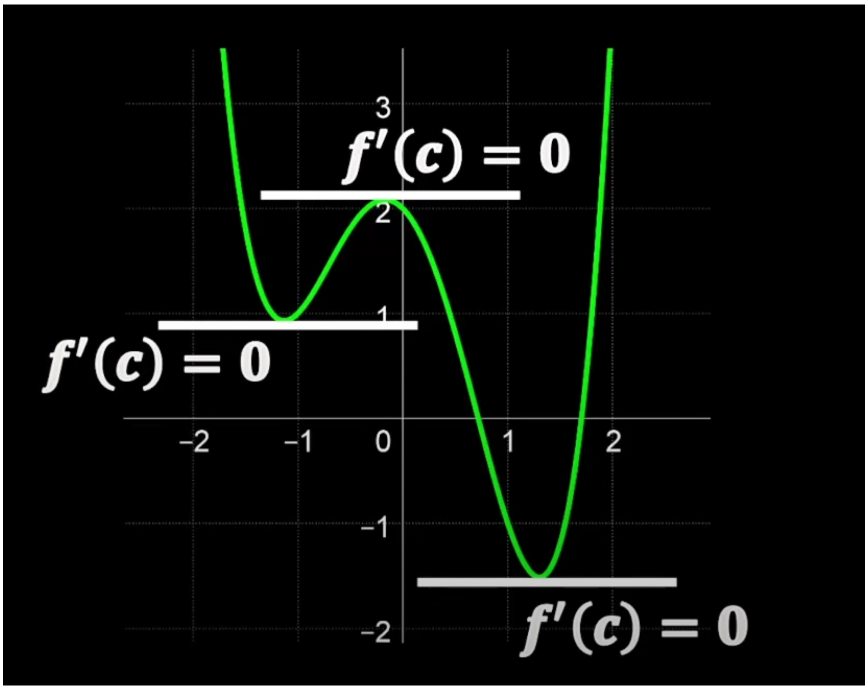
Nótese que los máximos locales los tenemos en lugares donde tenemos derivada (recta) pendiente = 0.
Nótese que las líneas punteadas representan el área cerrada que observamos en un intervalo dado para calcular un máximo local.
Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ decimos que $p_0 \in (a,b)$ es

- Máximo Local de f: Decimos que f alcanza un máximo local en $x_0 \in (a,b)$ si existe $r>0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0-r, x_0+r)$
- Mínimo Local de f: Decimos que f alcanza un mínimo local en $x_0 \in (a,b)$ si existe $r>0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0-r, x_0+r)$
- Máximo Global de f: Si $f(x_0) \leq f(p_0)$ $\forall x_0 \in (a,b)$
- Mínimo Global de f: Si $f(x_0) \geq f(p_0)$ $\forall x_0 \in (a,b)$

Decimos que un punto de (a,b) es extremo global o absoluto si es máximo o mínimo local.

Teorema de Fermat

Dada $f(a,b) \to \mathbb{R}$. Si x_0 es extremo local y f es derivable en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$
En Criollo: Si x_0 es extremo local, entonces si evalúo ese punto en la derivada me da la pendiente de la recta tangente que es 0.



Extremos Locales (en $\mathbb{R}^n$)

Como estamos en $\mathbb{R}^n$ no nos acercamos por un número particular sino que tomamos como referencia un disco de cierto radio.
Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ decimos que $p_0 = (x_0, y_0) \in D$

- Máximo Local de f: Si $\exists r > 0 \ / \ si \ x \in \mathbb{R}_r(p_0) \implies f(x) \leq f(p_0)$
- Mínimo Local de f: Si $\exists r > 0 \ / \ si \ x \in \mathbb{R}_r(p_0) \implies f(x) \geq f(p_0)$
- Máximo Global de f: Si $f(x) \leq f(p_0) \ \forall x \in D$
- Mínimo Global de f: Si $f(x) \geq f(p_0) \ \forall x \in D$

Teorema de Fermat Generalizado

Dada $f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con $(x_0, y_0) \in D$
Si existen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ y (x_0, y_0) es extremo local, entonces $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$
Es decir $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$
En Criollo: Si existen las dos derivadas parciales y (x_0, y_0) es extremo local, entonces las dos derivadas parciales evaluadas en el punto dan 0.

Punto Crítico

Llamamos Punto Crítico a un punto donde la **derivada no existe** o **la derivada es 0**.
Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $p_0 \in D$ es punto crítico de f **si pasa alguna de estas dos condiciones**:

- $\nexists \ \nabla f(p_0)$
- $\nabla f(p_0) = (0, 0, ..., 0)$

OBS: Si p_0 es un extremo local de f $\implies$ p_0 es un punto crítico de f. Los puntos críticos son candidatos a extremos locales.
OBS 2: Que un punto sea crítico NO asegura que sea extremo local.
Véase **anexo** para ejemplos relacionados a este tema.

Punto Silla

Si (x_0, y_0) es un punto crítico que no es **máximo local** ni **mínimo local**, entonces se dice que (x_0, y_0) es un punto de ensilladura o punto silla.

Teorema para Puntos Críticos (1 variable)

Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ / p_0 $f'(p_0) = 0$

- Si $\exists f''(p_0) > 0 \implies p_0$ es un mínimo local.
- Si $\exists f''(p_0) < 0 \implies p_0$ es un máximo local.
- Si $\exists f''(p_0) = 0$ el criterio no decide.

Criterio de la Derivada Segunda

Dada $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ de clase C^2 y un $x_0 \in (a,b)$ punto crítico de f.

- Si $f''(x_0) > 0 \implies x_0$ es un mínimo local de f.
- Si $f''(x_0) < 0 \implies x_0$ es un máximo local de f.
- Si $f''(x_0) = 0 \implies$ no se puede determinar (Ej.: $f(x) = x^4$, $f(x) = x^3$).

Matriz Hessiana de f (Matriz de Derivadas Segundas)

Se denota como $Hf(x_0, y_0)$ y es una matriz simétrica.

$$\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

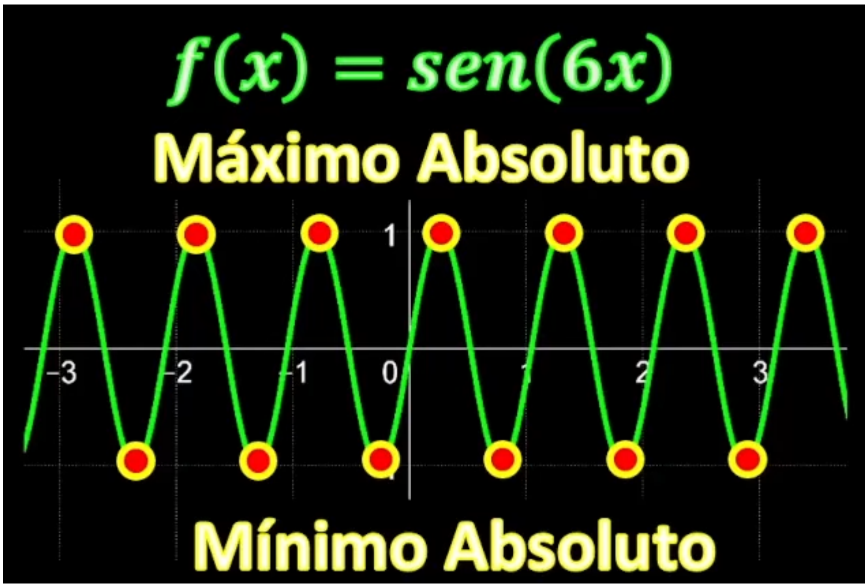
Criterio de las Derivadas Segundas en dos variables (Criterio del Hessiano)

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $C^2, p_0 = (x_0, y_0) \in D$ punto crítico de $f(\nabla f(p_0) = (0,0))$.
Entonces si llamamos $d = det\ H_f(p_0)$

- Si $d > 0$ y $f_{xx}(p_0) > 0 \implies p_0$ es mínimo local de f.
- Si $d > 0$ y $f_{xx}(p_0) < 0 \implies p_0$ es máximo local de f.
- Si $d < 0 \implies p_0$ es punto silla de f.
- Si $d = 0 \implies$ no podemos determinar qué es p_0. Ej.: $f(x,y) = x^4 + y^4, f(x,y) = x^3 - y^3$

Extremos Absolutos

Son aquellos máximos o mínimos que están en un intervalo cerrado.
Importante: Puede haber más de un máximo absoluto pero el valor debe ser el mismo. Lo mismo con los mínimos absolutos.



En este caso son Máximo Absoluto y Mínimo Absoluto porque es continua en el intervalo que están y se alcanza un valor máximo y un mínimo.

Teorema de Weierstrass (Teorema del Valor Extremo)

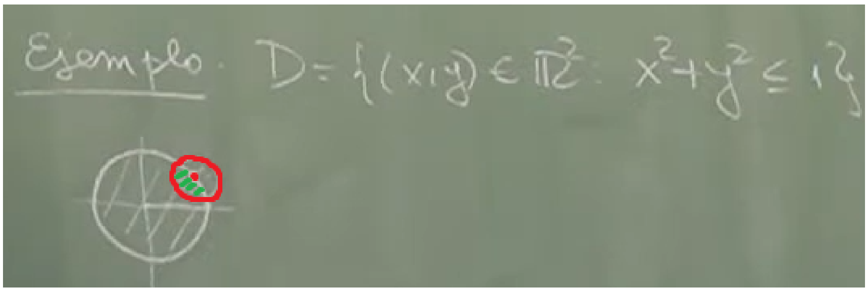
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces un alcanza al menos un máximo y mínimo absoluto en el intervalo $[a, b]$
El teorema no nos indica donde se encuentra el máximo y el minimo sino que solo afirma que existen.
Antes de extender esta definición a $\mathbb{R}^3$ necesitamos definir qué es un Conjunto D Cerrado y un Conjunto D acotado.
Candidatos $= \{a, b\} \cup \{ptos\ criticos\}$

Frontera o Borde de un Conjunto D

Llamamos frontera o borde de un conjunto D a $\partial D = \{x \in \mathbb{R}^n, \forall r > 0, Br(x) \cap D \neq \emptyset, Br(x) \cap D^c \neq \emptyset\}$
En criollo: La frontera de un conjunto es el borde que separa los puntos que están dentro de los que están afuera. Si dibujás un disco alrededor de un punto de la frontera, va a haber puntos tanto adentro como afuera del conjunto. Y esos puntos en el borde tienen que estar incluidos en el conjunto original.

Conjunto D Cerrado

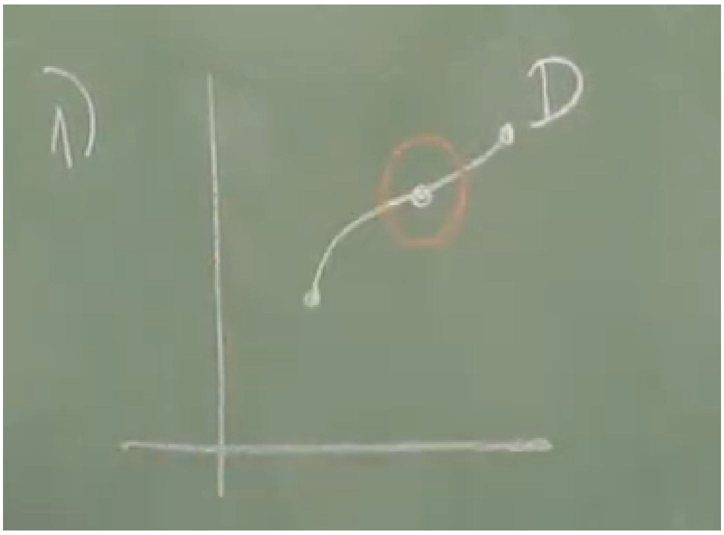
Un conjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ se dice cerrado si todos los puntos de la frontera de D son parte del conjunto D.

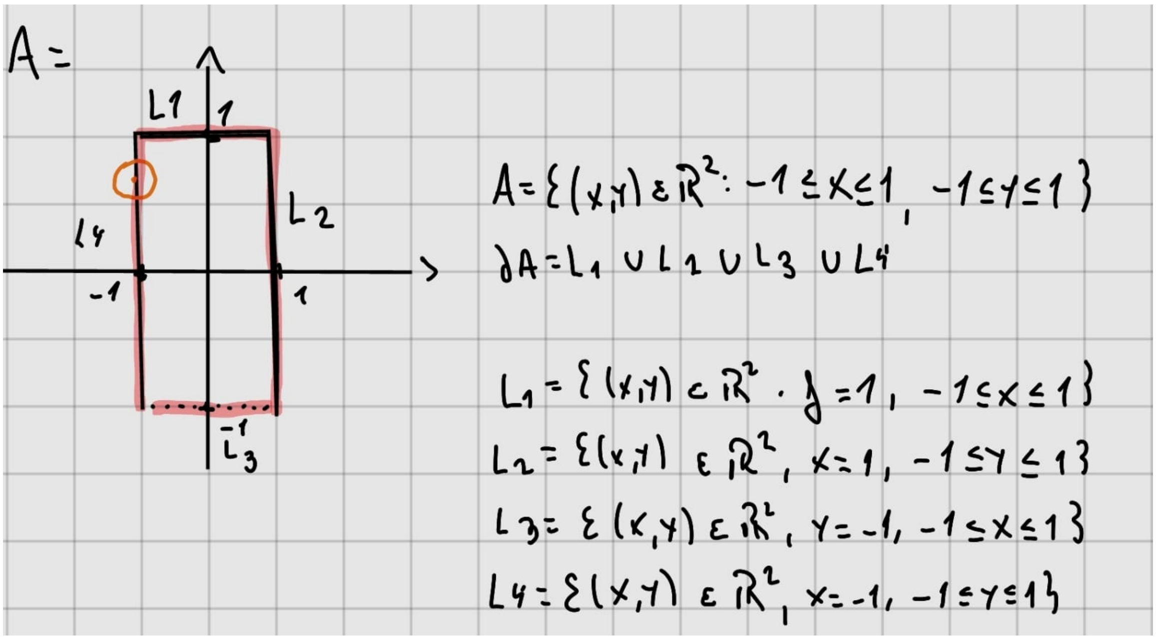


Para $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ la frontera de D es $\partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ porque cuando da exactamente en uno, estoy en el borde y puedo hacer un disco de cualquier radio y tengo puntos que están dentro y fuera.
¿Es D cerrado? Sí, porque $\partial D \subseteq D$ tal como dice la definición.

Ejemplos de Conjuntos D Cerrados

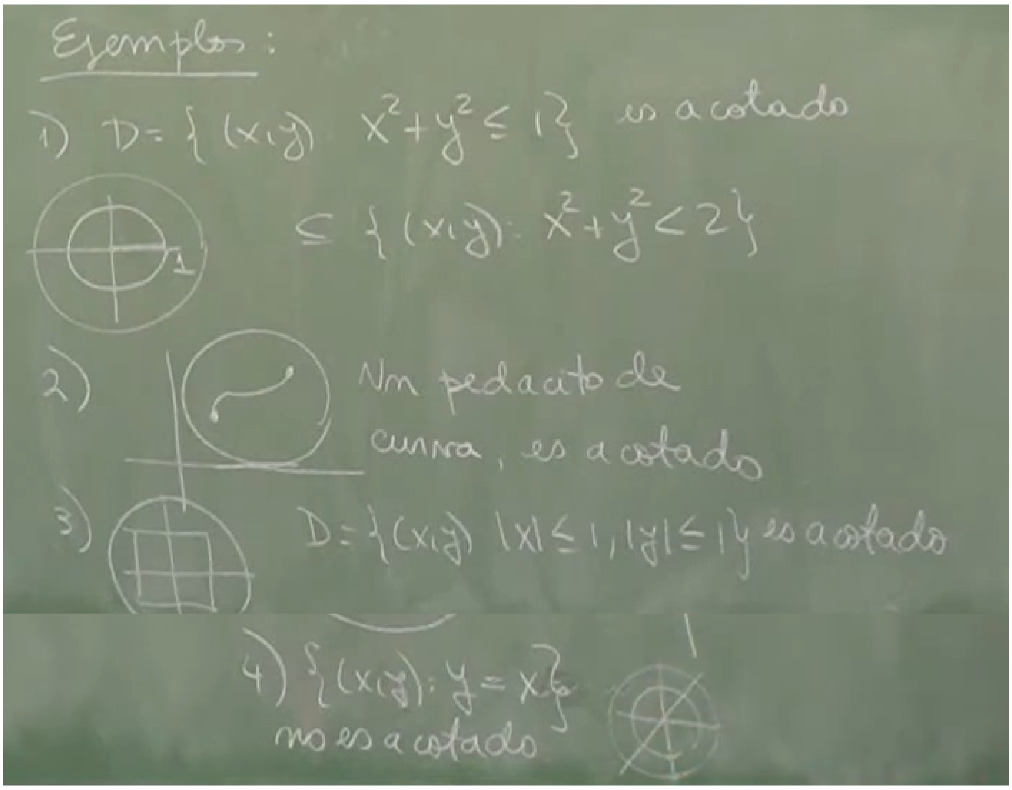
El gráfico de una función continua o la imagen de una curva continua son cerrados. Esto es porque en cualquier punto puedo encontrar un disco tal que hay puntos que están por fuera y por dentro.





Conjunto D acotado

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice acotado si $\exists$ alguna Bola $B \subseteq \mathbb{R}^n / D \subseteq B$



Conjunto Compacto

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice compacto si es cerrado y acotado.
Importante: Usamos D^0 para hablar del conjunto D para los puntos internos mientras que ∂D es el borde.

Generalización del Teorema de Weierstrass (Teorema del Valor Extremo)

Dada $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua con D compacto, entonces f alcanza máximo y mínimo absoluto en D.
Técnica: Buscamos candidatos a extremos de f en D

- 1) Buscamos candidatos a extremos adentro de D.
- 2) Buscamos candidatos a extremos en ∂D.

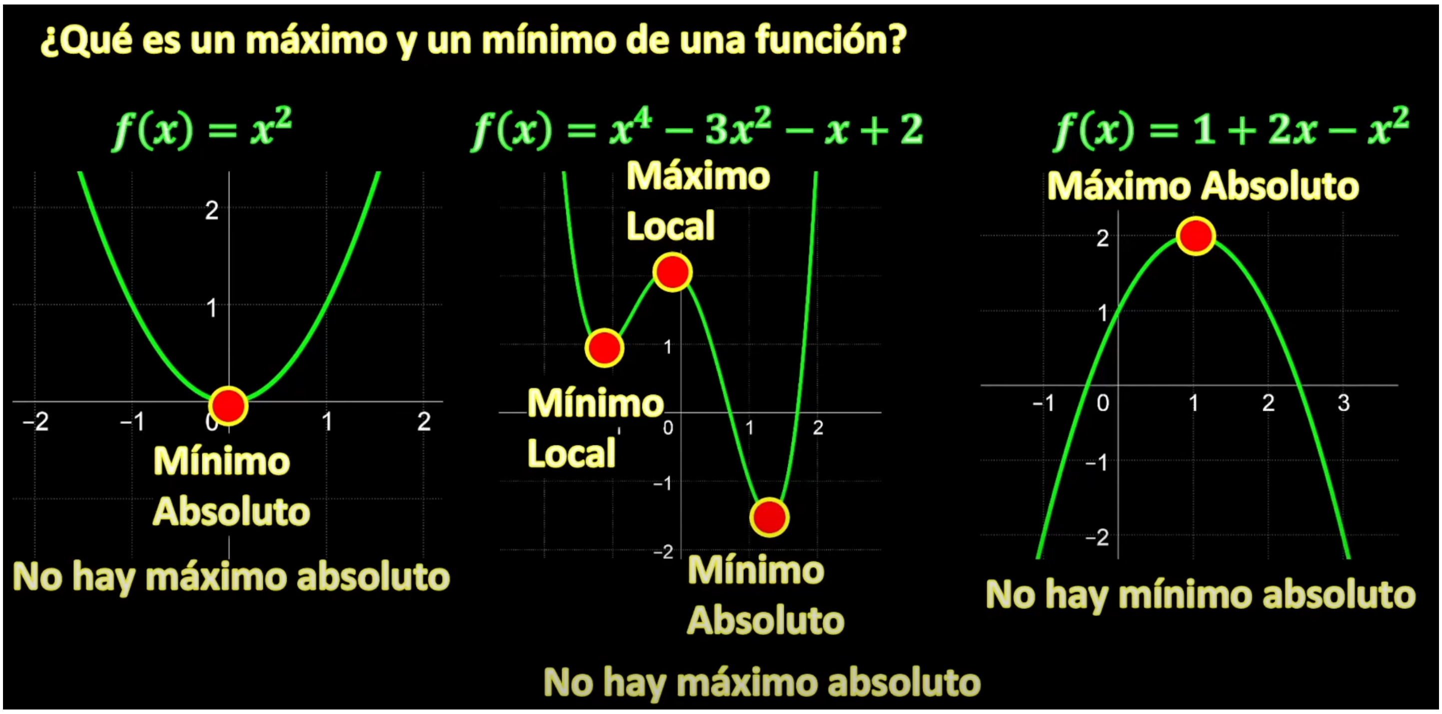
- 3) Para cada punto candidato de 1) y 2) hacemos la evaluación de f. Los puntos donde f tome el valor máximo serán máximos absolutos y los puntos donde tome el valor mínimo serán los mínimos absolutos.

Vamos a resolver este tipo de ejercicios con estas ideas

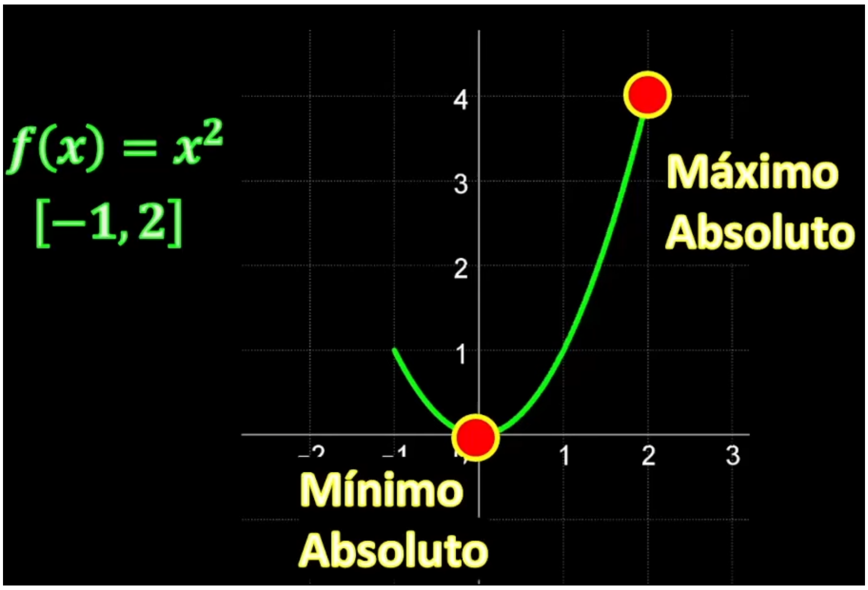
- Si $p \in D$ es máximo (o mínimo) absoluto de f en D y $p \in A \subseteq D$ entonces p es máximo (o mínimo) absoluto de f en A.
- Si p es máximo (o mínimo) absoluto de f en D, entonces p es máximo (o mínimo local) de f en D. Si p está adentro de D, es decir, no está en la frontera, entonces p es un punto crítico.

Véase **anexo** para ver ejemplos.

Extremos Absolutos vs Extremos Locales en Gráficos



- 1. No hay máximo absoluto porque crece infinitamente.
- 2.
  - El máximo local viene de que es el mayor punto de los cercanos a él.
  - El mínimo local viene de que es el menor punto de los cercanos a él.
  - El mínimo absoluto viene porque no existe otro punto en la gráfica que esté por debajo de él.
  - No tiene máximo absoluto porque la función crece infinitamente.
- 3. Tiene un máximo absoluto pero no tiene mínimo absoluto porque decrece infinitamente.



Nótese que si hablamos de un intervalo dado, entonces cosas continuas infinitas como la parábola tendría máximo absoluto. Esto viene por el **Teorema del Valor Extremo** pues la función x^2 es continua.

Multiplicadores de Lagrange (idea)

Sea $f(x, y)$ o $f(x, y, z)$ y buscamos encontrar los extremos de f cuando (x, y) o (x, y, z) está restringido a un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.
Por restringido nos referimos a conjuntos de la forma $g(x, y) = k$, (x,y) están restringidos a vivir en un conjunto de nivel de otra función g (restricción).
La idea entonces es buscar los máximos y mínimos pero cuando mis variables están restringidas a una curva de nivel o una superficie de una función g.

Multiplicadores de Lagrange

Sea f definida en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ diferenciable.
Si P es un extremo de f restringido al conjunto $\{g = k\}$ **existe** un $\lambda \in \mathbb{R} \to$ *multiplicador* tal que $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$ si $\nabla g(P) \neq 0$
Los que verifiquen esa igualdad, son mis candidatos a puntos críticos.
Importante: Los Multiplicadores de Lagrange solo nos ayuda a estudiar los bordes. Hay casos donde nos conviene parametrizar para ver los bordes, y otros no.
Importante 2: En Lagrange **siempre** tenemos dos candidatos (si el conjunto restricción es compacto).
Importante 3: El λ es único.

- Si tuviesemos un solo candidato, la funcion es constante.
- Si tenemos solamente dos candidatos, obligatoriamente uno es mínimo absoluto y el otro máximo absoluto.
- Si existen más de dos candidatos, hay que probar uno por uno para ver cuales son máximos y cuales mínimos.

Ejemplo de Multiplicadores de Lagrange

1. Sea $f(x, y) = 1 - xy$ y $g(x, y) = x^2 + 2y^2 = 4$
Si (x, y) es un extremo de f con la restricción $g = 4 \implies \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$.

- 1. Calculemos los gradientes
  - $\nabla f = (-y, -x)$
  - $\nabla g = (2x, 4y)$
- 2. Ahora planteamos las igualdades en un sistema de ecuaciones, pero no hay que olvidarse que también estas ecuaciones deben cumplir la restricción de g, por lo tanto, agregamos una tercera ecuación adicional para que el punto crítico que encontremos esté en g: $\begin{cases} -y = \lambda 2x \\ -x = \lambda 4y \\ x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$
  A este sistema de ecuaciones se le llama **Sistema de Ecuaciones de Lagrange**

$y = -2\lambda x$
A medida que vamos realizando este sistema llegamos a una ecuación del tipo $-x = -8\lambda^2 x$. Es importante que NO cancelemos las x, sino que en este contexto lo mejor es juntar las x y sacar factor común porque sino perdemos soluciones. Entonces nos queda $0 = x(1 - 8\lambda^2)$ ent de acá sacamos que $x = 0$ o $1 - 8\lambda^2 = 0$
Caso $x = 0$

- Nos queda $0 = 4$ ¡ABS! entonces, $x \neq 0$ sí o sí.

Caso $x = 1 - 8\lambda^2$

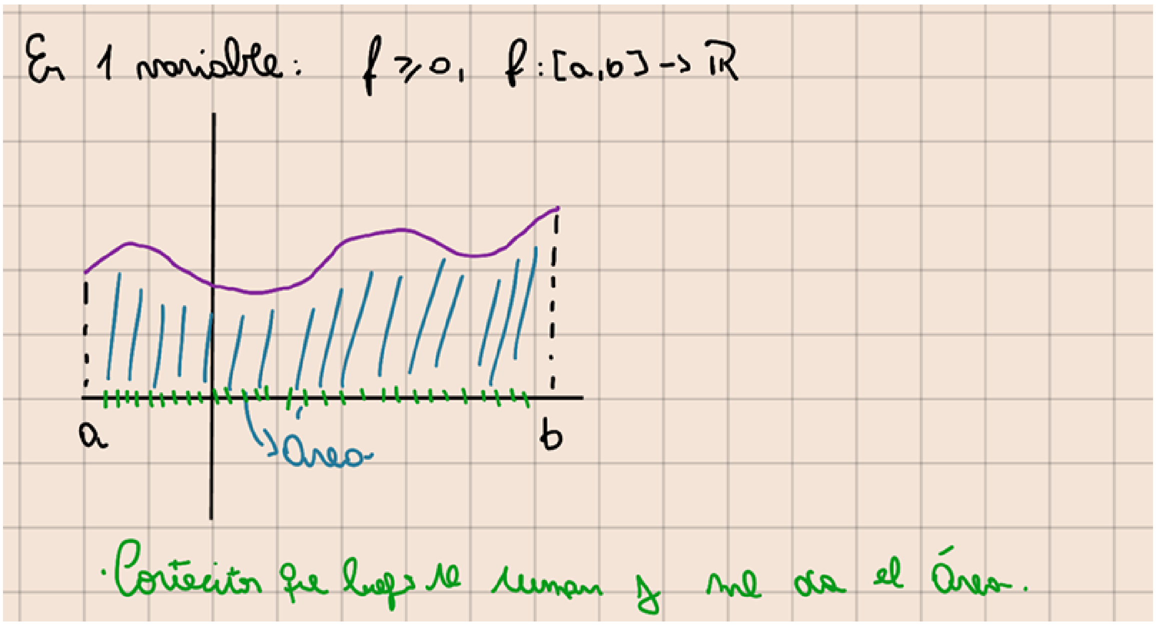
- Tenemos dos casos acá: 2)a) $\lambda = \frac{1}{\sqrt{8}}$ o 2)b) $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{8}}$
- Entonces estos valores de lambda lo colocamos en cualquier otra ecuación
  - Caso 2) a) $\lambda = \frac{1}{\sqrt{8}} = x^2 + 8\lambda^2 x^2 = 4 \equiv x = \pm\sqrt{2}$
    - Ahora reemplazamos en la ecuación del comienzo: $y = -2(\frac{1}{\sqrt{8}}) * \sqrt{2} = -1$ o $y = -2(\frac{1}{\sqrt{8}}) * -\sqrt{2} = 1$
    - Entonces encontramos: $P_1 = (\sqrt{2}, -1)$ y $P_2 = (-\sqrt{2}, 1)$
  - Caso 2) b): Nos queda lo mismo en cuanto a x porque como la ecuación tiene λ^2 siempre es positivo. Entonces $x = \pm\sqrt{2}$
    - Ahora reemplazamos y nos queda $y = -2(-\frac{1}{8}) * \sqrt{2} = 1$ y $y = -2(-\frac{1}{8}) * -\sqrt{2} = -1$
    - Entonces encontramos: $P_3 = (\sqrt{2}, 1)$ y $P_4 = (-\sqrt{2}, -1)$
- Lo siguiente que tendríamos que ver con estos puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 es que no anulen el gradiente de g.

- 3. Ahora vienen los pasos finales
  - Desarrollemos la curva de nivel de g, es decir $x^2+2y^2 = 4$ que esto es una elipse que tiene la forma $(\frac{x^2}{4})^2+(\frac{y}{\sqrt{2}})^2 = 1$. Este conjunto es cerrado y acotado por lo tanto por el teorema de Weierstrass, si a f la restrinjo a esta curva entonces tiene un máximo y un mínimo. Entonces, estos puntos máximos y mínimos debe ser uno de los P que encontramos.
  - Evaluando a f con cada punto nos queda que:
    - $f(P_1) = 1 + \sqrt{2}$ máximo absoluto
    - $f(P_2) = 1 + \sqrt{2}$ máximo absoluto
    - $f(P_3) = 1 - \sqrt{2}$ mínimo absoluto
    - $f(P_4) = 1 - \sqrt{2}$ mínimo absoluto

Véase **anexo** para ejemplos de la práctica.

Integrales

Es lo contrario a derivar.
Las Integrales nos sirven en una variable para poder calcular el área mientras que en más de una variable nos sirve para calcular el volumen.



Esos cortecitos que vemos el el gráfico, la suma nos permite calcular el área. Esto se da gracias a la Suma de Riemann en base a particiones.

- Si la integral posee un número 1, entonces el resultado nos arroja una función.
- Si la integral posee una función y es una integral simple, el resultado es el área.
- Si la integral posee una función y es una integral doble, el resultado es el volumen.

1 Variable

Existencia de la Integral

Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces existe $\int_a^b f(x)\ dx$

Propiedades

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables.

- $\int_a^a$ f(x) dx = 0
- $a < x < b$: $\int_a^b f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^b f(t)dt$. Básicamente si tenemos que ir de $a \to b$ es lo mismo que ir de $a \to x$ y $x \to b$.
- $f(t) \leq g(t) \implies \int_a^b f(t) \leq \int_a^b g(t)dt, \forall t \in [a, b]$. Básicamente que si una función es menor que otra para todo punto en la integral sucede lo mismo.
- $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$
- Linealidad: $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)dt = \alpha \int_a^b (f(t))dt + \beta \int_a^b (g(t))dt$

Integrales Indefinidas

No tienen restricción, es decir, no tienen límite superior ni inferior.
Conjunto de Funciones Primitivas de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ decimos que $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es primitiva de f si $F'(x) = f(x)$
$\int f = \{F : \ F\ primitiva\ de\ f\}$
Ej.: $\int 2x\ dx$ es una Integral Indefinida mientras que $\int_0^2 2x\ dx$ es una Integral Definida.

Conjunto de Primitivas de f

Definimos al Conjunto de Primitivas de f como $\{F(x) + k : k \in \mathbb{R}\}$ donde F es primitiva de f.

Teorema Fundamental del Cálculo

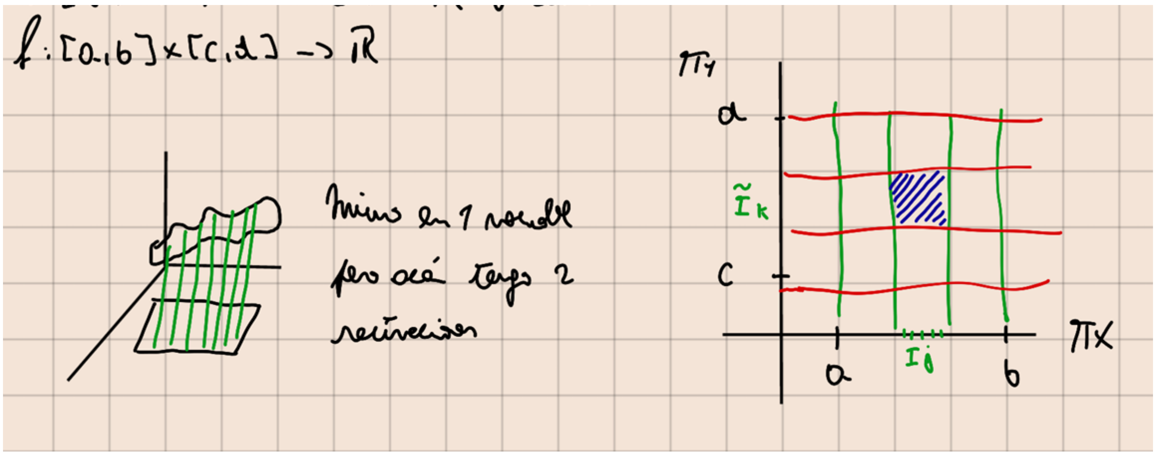
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e integrable $\implies \int_a^x f(t)dt = F(x)$ es primitiva de f y sucede que $F'(x) = f(x)$
Nota: Si vivimos en un intervalo [a,d] y es integrable, también es integrable en cualquier subintervalo. Ej.: [a, b], [b,c], [c, d].
Nota: La integral de una constante es la longitud * cte.

Regla de Barrow

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y G es primitiva de f en $[a, b] \implies \int_a^b f(x)dt = G(b) - G(a)$

2 Variables

En dos variables no buscamos calcular el área sino el volumen. Valen exactamente todas las mismas propiedades que en una variable y la integral se define exactamente igual con la Suma de Riemann en base a particiones.



Teorema de Fubini

Si $f : [a,b]\, x[c,d] \to \mathbb{R}$ es Integrable (continua), entonces se verifica que $\int\int_R f\, dA = \int_a^b (\int_c^d f(x,y)\, dy)\, dx = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)\, dx)\, dy$

Integrales Iteradas

Las Integrales Iteradas nos sirven para calcular integrales múltiples como si estuviesemos derivando parcialmente en una dirección dada.

Importante: Sea el orden en que integremos, dan exactamente igual (**Teorema de Fubini**). Es decir, da igual integrar primero x y luego y, que primero y y después x. Quizá la expresión no queda exactamente igual pero el **resultado** debe ser exactamente lo mismo.

Ej: $f(x,y) = 2xy+1 \qquad [0,1]\times[1,2]$

$$\iint_{[0,1][1,2]} 2xy+1\, dA \quad \begin{cases} \xrightarrow{I} \int_0^1 \left[\int_1^2 (2xy+1)\, dy\right] dx \\ \xrightarrow{II} \int_1^2 \left[\int_0^1 (2xy+1)\, dx\right] dy \end{cases} \quad \text{DAN IGUAL}$$

Hacemos I:

$$\int_0^1 \left[\int_1^2 (2xy+1)\, dy\right] dx$$

$$\int_1^2 (2xy+1)\, dy = 2x \int_1^2 y\, dy + \int_1^2 1\, dy$$

$$= \cancel{2}x \frac{y^2}{\cancel{2}} \Big|_{y=1}^{y=2} + 1 = x(4-1) + 1 = 3x+1$$

$$\int_0^1 (3x+1)\, dx = \frac{3x^2}{2} + x \Big|_0^1 = \frac{5}{2}$$

Véase **anexo** para ver ejemplos de este tema.

Métodos de Integración

- Integración Inmediata: Usamos la tabla de Integrales Indefinidas.

Integrales inmediatas		
Función	**Función simple**	**Función compuesta**
Constante	$\int k\, dx = k \cdot x + C$	–
Potencia	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int u^n \cdot u'\, dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
Exponencial	$\int e^x\, dx = e^x + C$	$\int e^u \cdot u'\, dx = e^u + C$
Exponencial	$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\int a^u \cdot u'\, dx = \frac{a^u}{\ln(a)} + C$
Logarítmica	$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{u'}{u}\, dx = \ln\lvert u\rvert + C$
Logarítmica	$\int \ln(x)\, dx = x \cdot \ln(x) - x + C$	$\int \ln(u) \cdot u'\, dx = u \cdot \ln(u) - u + C$
Logarítmica	$\int \log_a(x)\, dx = \frac{x}{\ln(a)}(\ln(x) - 1) + C$	$\int \log_a(u) \cdot u'\, dx = \frac{u}{\ln(a)}(\ln(u) - 1) + C$
Seno	$\int \mathrm{sen}(x)\, dx = -\cos(x) + C$	$\int \mathrm{sen}(u) \cdot u'\, dx = -\cos(u) + C$
Coseno	$\int \cos(x)\, dx = \mathrm{sen}(x) + C$	$\int \cos(u) \cdot u'\, dx = \mathrm{sen}(u) + C$
Tangente	$\int \tan(x)\, dx = -\ln\lvert\cos(x)\rvert + C$	$\int \tan(u) \cdot u'\, dx = -\ln\lvert\cos(u)\rvert + C$

- Sustitución: Utilizamos un cambio de variable que permita convertir el integrando en algo más sencillo.
- Partes: Lo utilizamos cuando el integrando está formado por un producto o división. Surge de la regla de la derivación del producto.
  - Alguno de los factores debe tener primitiva y otro derivada.
  - La regla mnemotécnica para saber quien toma el rol de f y cual la de g es Lo PITE (logaritmo) (polinomio) (irracional) (trigonometrica) (exponencial). Mediante esta palabra, la que primero aparezca será f y la segunda g.
  - $\int f(g) * g'(x)dx = f(x) * g(x) - \int f'(x) * g(x)dx$
- Fracciones de Raíces Simples: Se utiliza para el tipo $\frac{f(x)}{g(x)}$ con f, g polinomios y donde el grado de f es menor que el de

g.

$\int \frac{3}{x^2+3x}\,dx \longrightarrow g(x)$

rescribimos g como producto de sus raices simples

$Factorizacion\, x^2+3x = x\,(x+3)$

como f(x) = q(x) * g(x) + r(x), entonces $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$

$\frac{3}{x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}$ $\qquad \frac{r(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_n)}$

Ahora tenemos que hallar estos Ai

$\frac{3}{x^2+3x} = \frac{A\,(x-3)+Bx}{x\,(x+3)}$ $\qquad 3 = A\,(x+3)+Bx$

si x = 0

$3 = A\,(0+3)+B\,(0) \rightarrow 3 = A\,(3)+0 \rightarrow 3 = 3A$

$A = \frac{3}{3}$ $\quad A = 1$

si x = -3

$3 = A\,(x+3)+Bx \longrightarrow 3 = A\,(-3+3)+B\,(-3) \rightarrow 3 = -3B$

$B = -\frac{3}{3}$ $\quad B = -1$

Luego

$\int \frac{3}{x^2+3x}\,dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x+3}\right)dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x+3}\,dx$ $\quad = \ln|x| - \ln|x+3| + C$

Integrales Impropias

Las integrales impropias son una extensión de las integrales definidas y se utilizan para calcular el área bajo una curva o la acumulación de una cantidad en casos en los que los límites de integración no son finitos o la función presenta singularidades (la función no es continua) en el intervalo de integración.
Las integrales impropias pueden converger o diverger.

Integrales Impropias en Intervalos Reales

1. Sea $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a+\epsilon, b]$ $\forall \epsilon > 0$ y además $\exists \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^{b} f(t)\, dt$ entonces decimos que f es Integrable de Forma Impropia en $[a, b]$.
Sucede lo mismo pero ahora a está incluido y b no.
2. Sea $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, b-\epsilon]$ $\forall \epsilon > 0$ y además $\exists \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a}^{b-\epsilon} f(t)\, dt$ entonces decimos que f es Integrable de Forma Impropia en $[a, b]$.

Integrales Impropias en Intervalos con Infinitos

1. Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$ $\forall b > 0$ y además $\exists \lim_{b\to 0} \int_{a}^{b} f(t)\, dt = \int_{a}^{\infty} f(t)\, dt$ decimos que f es Integrable de Forma Impropia en $[a, \infty)$
Sucede lo mismo pero ahora el infinito está de la izquierda.
2. Sea $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$ $\forall a < b$ y además $\exists \lim_{a\to\infty} \int_{a}^{b} f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{b} f(t)\, dt$ decimos que f es Integrable de Forma Impropia en $(-\infty, b]$

Valor Principal

Sea $a < c < b$ y $f : [a, b] - \{c\} \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, c-\epsilon] \cup [c+\epsilon, b]$ $\forall \epsilon > 0$ si $\lim_{\epsilon\to 0} \int_{a}^{c-\epsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)\, dx$ existe entonces $Vp(\int_{a}^{b} f(x)dx) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a}^{c-\epsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)dx$
Nota: Es posible que exista $Vp(\int_{a}^{b} f(x)dx)$ pero que f no sea integrable de forma impropia en $[a, c]$ o $[c, b]$
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, b)$ $\forall\ a = b$ **¿ent?** $\exists \lim_{a\to-\infty} \int_{-a}^{a} f(x)\, dx = Vp(\int_{\infty}^{\infty} f(x)dx)$

Integrales Convergentes y Divergentes

Se refieren a la propiedad de ciertas integrales indefinidas de converger a un valor finito o diverger a infinito.

Convergencia de una Integral

Una Integral converge cuando su valor se acerca o se dirige hacia un valor finito a medida que los límites de integración se amplían o se mueven hacia infinito.
Si evaluamos un límite tendiendo a un valor y nos da un resultado no infinito, entonces converge.

Divergencia de una Integral

Una Integral Diverge cuando su valor: se acerca/dirige hacia infinito o no tiene un valor finito a medida que los límites de integración se amplían o se mueven hacia infinito.
Si evaluamos un límite tendiendo a un valor y nos da ∞ entonces diverge.

Critierios para Determinar si una Integral Converge o no

Criterios de Comparación

- Directo: Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}, f, g, \geq 0$ integrables y $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b)$ entonces
  - Si $\int_a^b g(x)\ dx$ converge $\implies \int_a^b f(x)\ dx$ converge.
  - Si $\int_a^b g(x)\ dx$ diverge $\implies \int_a^b f(x)\ dx$ diverge.
- Con paso al límite: Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables, $f, g \geq 0$, $\lim_{t \to b} \frac{f(t)}{g(t)} = l$
  - Si $l \neq 0, l \neq \infty \implies \int_a^b f(t)\ dt$ diverge o converge $\iff \int_a^b g(t)\ dt$ diverge o converge.
  - Si $l = 0 \implies \int_a^b g(t)\ dt$ converge $\iff \int_a^b f(t)\ dt$ converge.
  - Si $l = \infty \implies \int_a^b g(t)\ dt$ diverge $\iff \int_a^b f(t)\ dt$ diverge.

2. Estas derivan de Series:

- $\int_1^{+\infty} = \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} converge\ si\ p > 1 \\ diverge\ si\ 0 < p \leq 1 \end{cases}$
- $\int_0^1 = \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} converge\ si\ 0 < p < 1 \\ diverge\ si\ p \geq 1 \end{cases}$

3. Criterios de D$'$alambert

- Decimos que $\int_a^b f(x)dx$ **converge absolutamente** si $\int_a^b |f(x)|dx$ converge.
- Decimos que $\int_a^b f(x)dx$ **converge condicionalmente** si $\int_a^b f(x)\ dx$ converge y $\int_a^b |f(x)|\ dx$ diverge.

Nota: Si $\int_a^b f(x)\ dx$ **converge absolutamente** $\implies \int_a^b f(x)\ dx$ converge
Nota 2: Hubo una práctica entera de todo esto. Así que véase **anexo** para ver los ejercicios que se dieron.

Integrales en Regiones Rectangulares en $\mathbb{R}^2$

Dado un $R = [a, b]\ x\ [c, d]$ o a veces dado de la siguiente manera: $a \leq x \leq b$ y $c \leq y \leq d$.
La idea es calcular la Integral en la región dada. Esto quiere decir que la única restricción que nos da el rectángulo es cual es el límite inferior de la Integral y cual es el límite superior según con respecto a qué variable integremos.
La idea acá es recordar el Teorema de Fiubini.
Ej. básico: $\int\int_R (1 + 4xy)\ dA$ donde $R = [0, 1]\ x\ [0, 2]$ es equivalente a hacer $\int_1^0 [\int_2^0 (1 + 4xy\ dx)]\ dy$ o $\int_2^0 [\int_1^0 (1 + 4xy\ dy)]\ dx$
Para poder eliminar completamente una de las variables, tendríamos que integrar e ir aplicando Barrow.
La idea es que empieces integrando lo que sea más fácil.
Importante: Esto de que puedas cambiar el orden solo vale cuando estamos integrando en regiones rectangulares.

Encuentre el volumen del sólido S acotado por el paraboloide elíptico $x^2 + 2y^2 + z = 16$ y los planos $x = 2$, $y = 2$
La idea acá, es que sabemos que el plano $x = 2 \equiv [0, 2]$, $y = 2 \equiv [0, 2]$ por lo tanto nos queda un rectángulo de $[0, 2]x[0, 2]$.
Luego, el volumen que nos piden calcular es: $\int_0^2 [\int_0^2\ x^2 + 2y^2 + z = 16\ dy]dx$

Integrales en Regiones Elementales

Hasta ahora solo podíamos integrar regiones que iban en un intervalo determinado del tipo $[a,b]X[c,d]$ pero ahora queremos ir más allá.
Supongamos que la región D es acotada, lo que significa que D puede ser encerrada en una región rectangular R, entonces se define una nueva función F con dominio R

$$\boxed{1} \qquad F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \text{ está en } D \\ 0 & \text{si } (x,y) \text{ está en } R \text{ pero no en } D \end{cases}$$

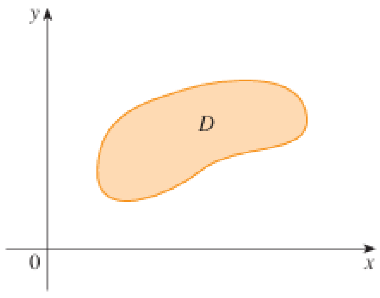


FIGURA 1

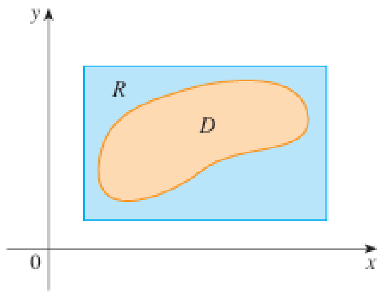
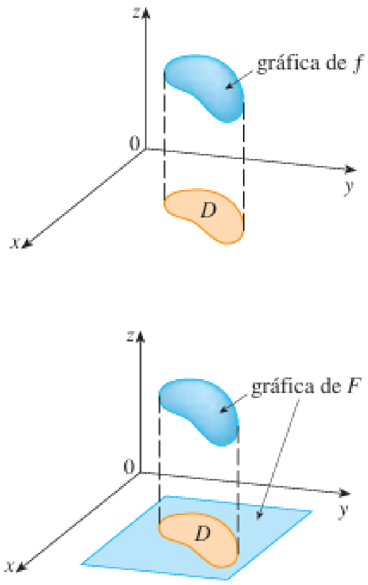


FIGURA 2



Si F es integrable sobre R, definimos la integral doble de f sobre D mediante: $\int\int_D f(x,y)\ dA = \int\int_R F(x,y)\ dA$

Región de Tipo I

Se dice que una región planada D es tipo I si yace entre las gráficas de dos funciones continuas de x

$$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

donde g_1 y g_2 son continuas sobre [a,b]
Entonces, si f es continua sobre una región D tipo I tal que

$$D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

entonces $\int\int_D f(x,y)\ dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\ dy\ dx$
Dato no menor: Cuando integres, siempre te va a quedar una variable menos. Si eso no pasa, algo hiciste mal.

Región de Tipo II

Exactamente igual que la Tipo I, solo que acá la variable libre es y mientras que x se mueve entre funciones continuas de y.

$$D = \{(x,y) \mid a \leq y \leq b, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

donde g_1 y g_2 son continuas sobre [a,b]
Entonces, si f es continua sobre una región D tipo I tal que

$$D = \{(x,y) \mid a \leq y \leq b, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

entonces $\int\int_D f(x,y)\ dA = \int_a^b \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\ dx\ dy$

Notas de Regiones

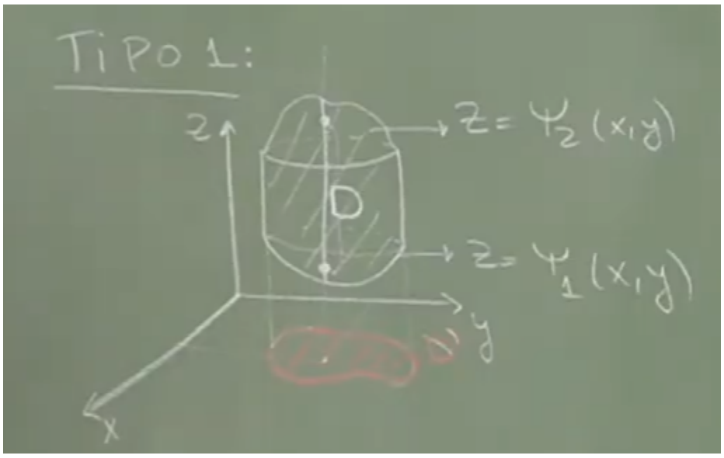
- Muchas veces hay regiones que pueden escribirse de un Tipo y no de otro. Cuando la región puede escribirse de las dos formas, se llama Región de Tipo III. Ah, y otra cosa, que pueda escribirse de las dos formas no significa que al integrar la dificultad sea la misma.
- Siempre hay que buscar la intersección de lo que nos pidan y dibujar. Normalmente el gráfico es en $\mathbb{R}^2$

Véase **anexo** para ver ejercicios de este tema.

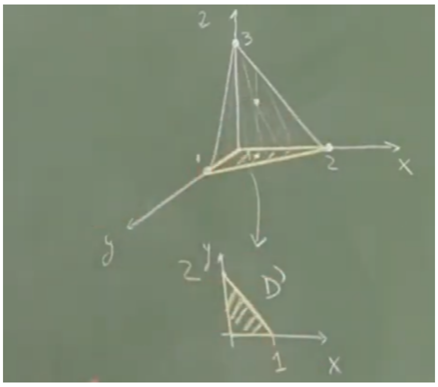
Integrales en Regiones Elementales $\mathbb{R}^3$

Tipo I

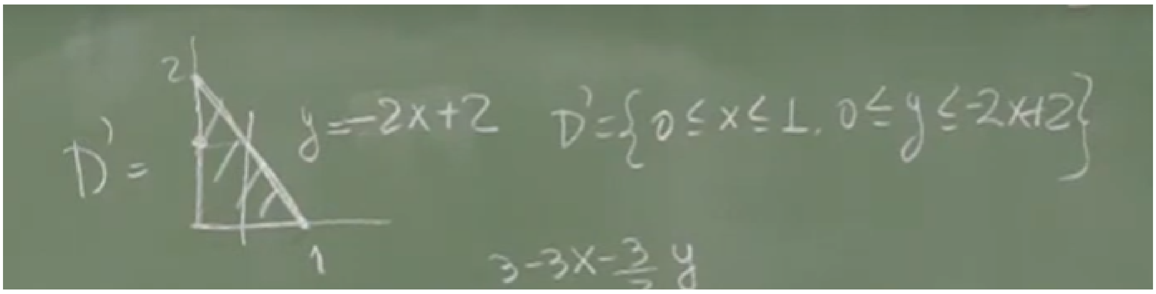
La idea del tipo I es ver la figura desde arriba. Las variables libres son (x, y). Luego, z se mueve entre dos funciones que dependen de x e y.



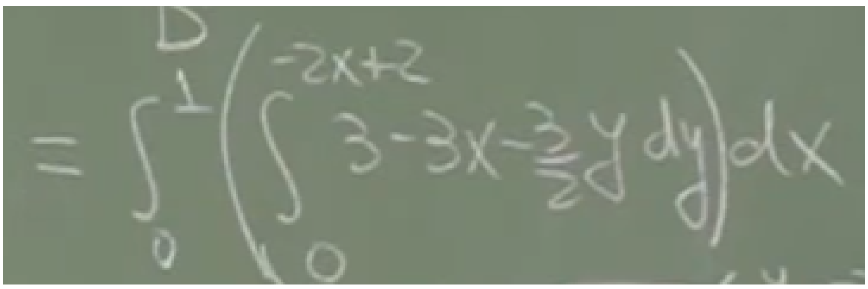
Lo definimos como $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D', \phi_1(x, y) \leq z \leq \phi_2(x, y)\}$ para todo $(x, y) \in D'$
El D' es básicamente ver qué comportamiento tienen (x, y) y luego, hablamos de z.
Ej.: Calcular el volumen de la pirámide de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$
Lo primero que hacemos es dibujar, y la idea de acá en el tipo 1 es ver la figura desde arriba. Entonces, tratamos de ver como se comportan **y**, **x**.



Buscamos qué ecuaciones representan al triangulo que solo dependen de x e y:

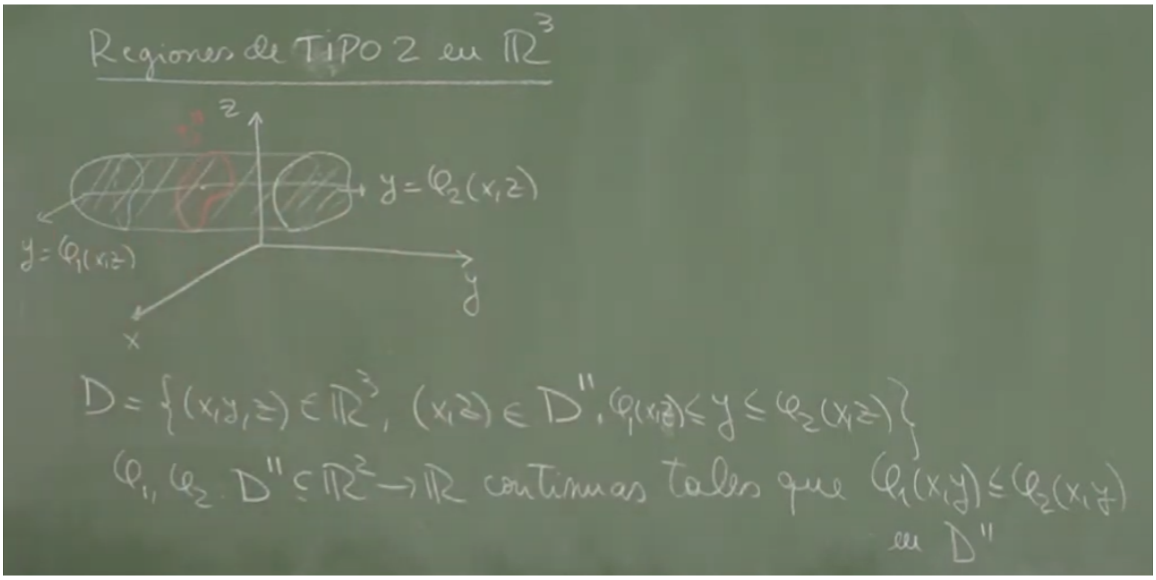


Por último, ya con x, y definidos, ahora para calcular el volúmen ponemos el techo (el plano).



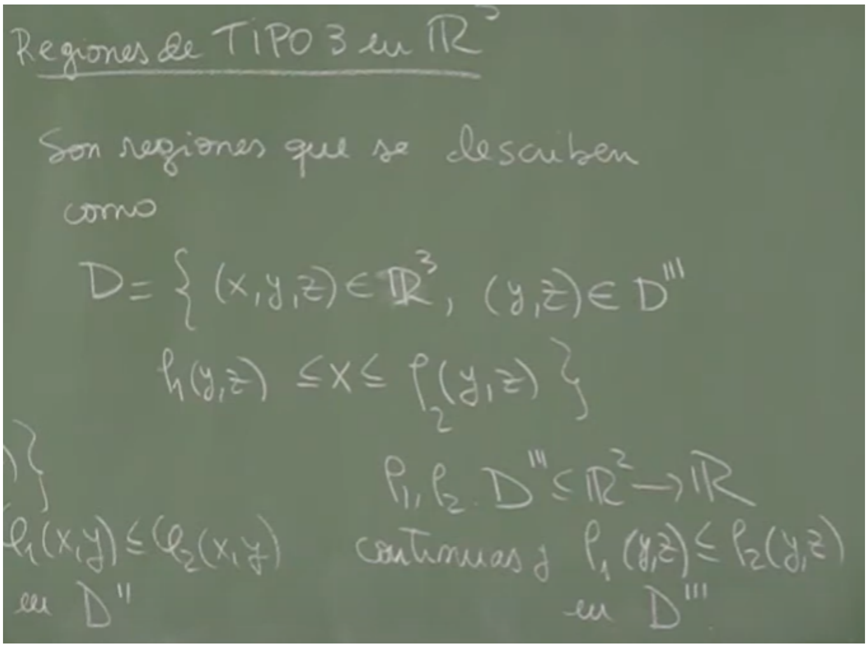
Tipo II

Parecido a una región de tipo I, pero acá la región al estar como de costado, tenemos que ver a la región D' desde arriba (pero la vemos de costado). Las variables libres son (x, z)



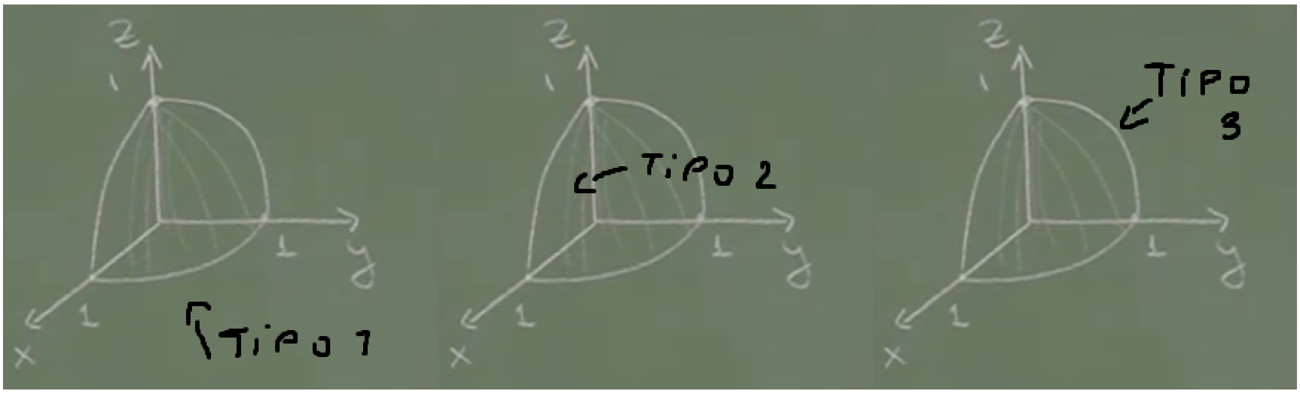
Tipo III

Parecido a una región tipo I y tipo II. Ahora las variables libres son (y, z)

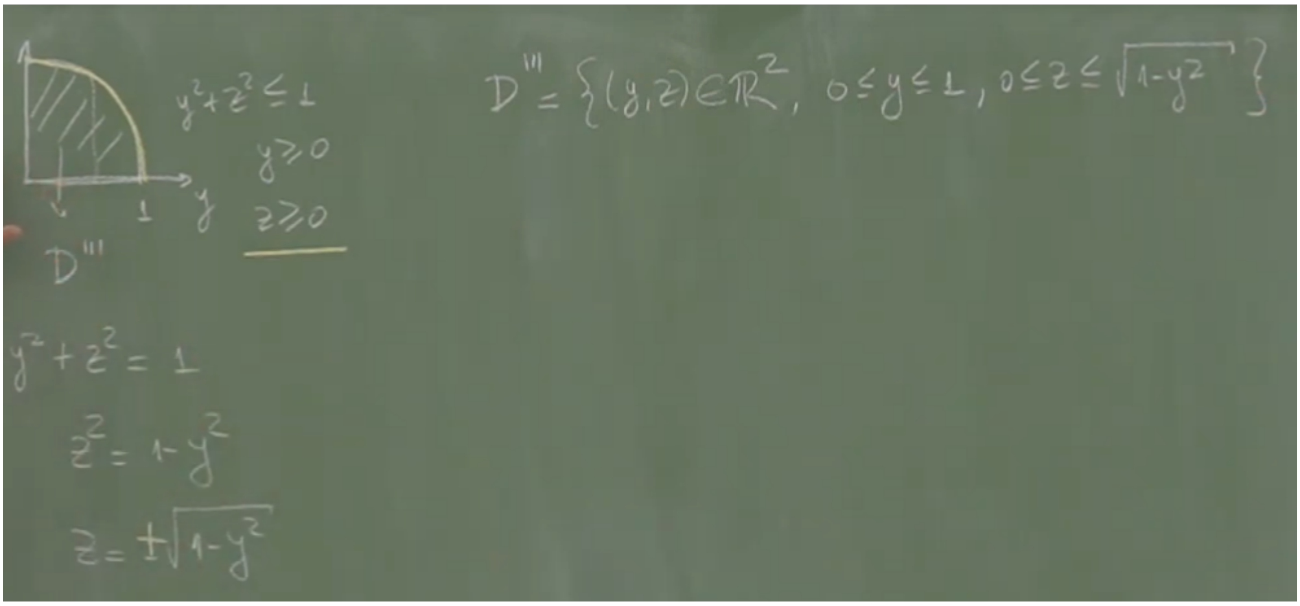


Ej.: Calcular la masa del sólido $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$
Lo primero que hacemos, es graficar qué es lo que pasa con la ecuación más grande cuando alguna de las variables no está, e igualamos al valor en vez de considerar el menor o igual.
Es decir, vemos y graficamos $x + z^2 = 1,\ x + y^2 \leq 1,\ y^2 + z^2 = 1$.
Según queramos, podemos elegir verlo desde cualquier lado. En la imagen que se encuentra debajo, el suelo de cada tipo

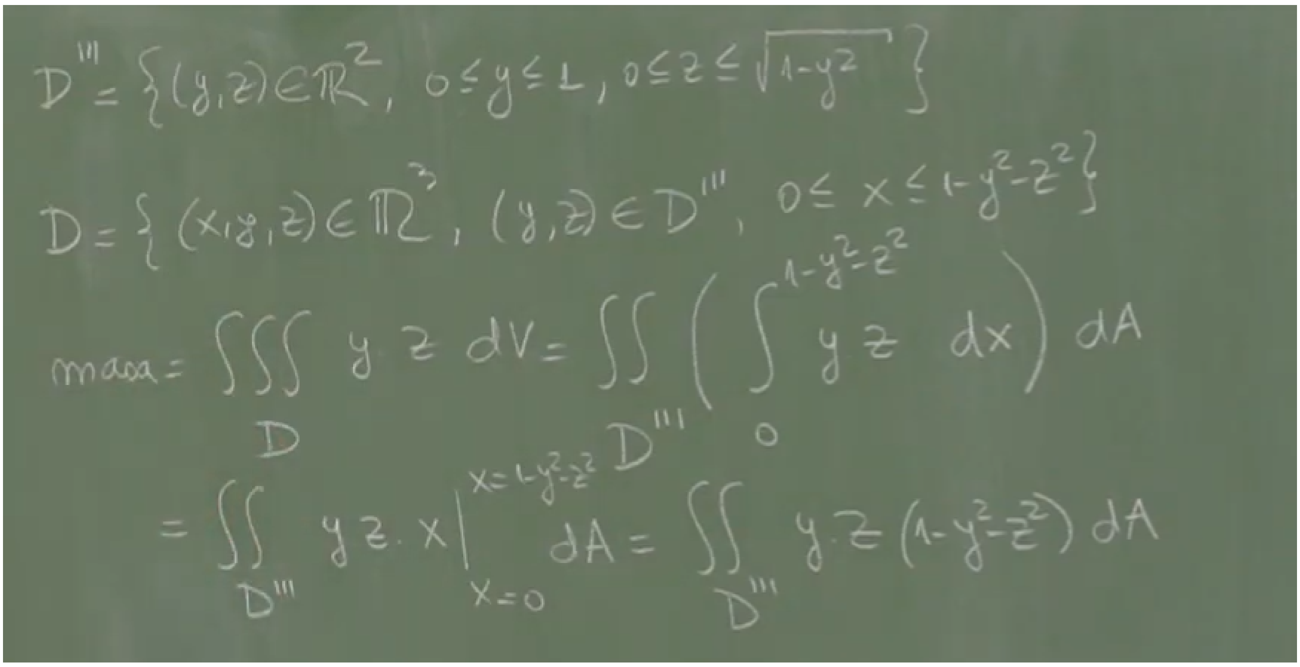
sería el indicado por las flechas.



Normalmente, el tipo lo expresamos en la variable que tiene un menor grado o esté más facil de despejar. En este caso despejando nos queda $x \leq 1 - y^2 - z^2$, y agregando la restricción de como es x nos queda $0 \leq x \leq 1 - y^2 - z^2$ y esta es justo tipo III.
Una vez que elegimos el tipo, nos queda ver la superficie, considerando el piso de la imagen anterior, es decir, la dibujamos en $\mathbb{R}^2$ y vemos como se comportan (y, z)
Entonces como depende de (y, z) es el plano yz, y esto significa que para graficar, tenemos que hacer $x = 0$. Por lo tanto nos queda dibujar en $\mathbb{R}^2$ a $y^2 + z^2 = 1$



Por último, planteamos la integral



Teorema de Cambio de Variable

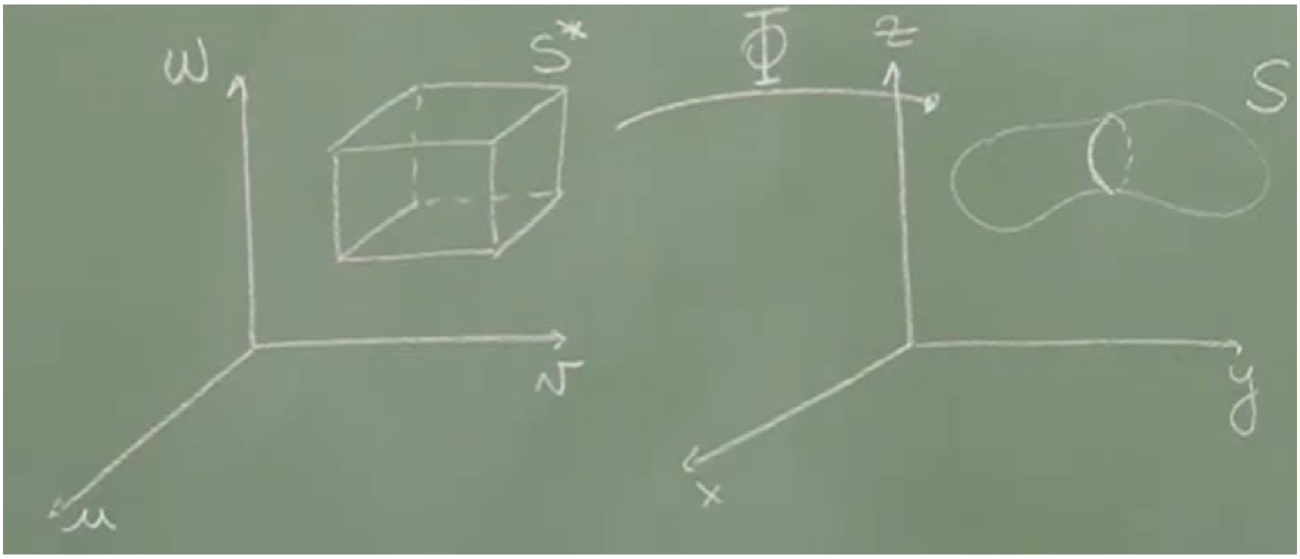
La definición que daré a continuación vale para $\mathbb{R}^n$ pero hasta este momento, solamente la vimos aplicada en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, lo más probable que haya una sección debajo explícitamente generalizándolo.
La idea es que, hay ciertas regiones que son difíciles de integrar por diversos motivos, ya sea porque tengan alguna que otra raíz, o que la primitiva no sea sencilla de hallar.
Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ C'(D^k) inyectiva, $D = T(D^k)$ y $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrable $\implies \int\int_D \; dA = \int\int_D f(x,y) \; dA \; (x,y) = \int\int_{D^*} f(T(u,v)) \; J_t(u,v) \; dA_{(u,v)}$
Esta definición es ultra teórica, pero desambigúemosla un poco y enumerando cosas importantes

- $J_t(u,v)$: Es el Jacobiano, es un numero que vamos a tener que usar dentro de la integral luego de hacer el cambio de variable.
  - Si el cambio de variable es pasar a usar polares, entonces el jacobiano es **siempre r (radio)**.
  - Si el cambio de variable NO es pasar a polares, entonces, hay que hacer transformaciones lineales (lo veremos luego en el anexo).
- Cuando hagamos cambio de variable por polares, si la circunferencia, cilindro o lo que sea está desplazado del centro en coordenadas constantes, el jacobiano sigue siendo r, porque las constantes no afectan en nada a las derivadas.
- (Solo cuando no es en polares): Para calcular el Jacobiano hay que conseguir el diferencial de nuestra función T y calcular su determinante.

Ahora sí, ¿para qué sirve este teorema? bueno, imaginemos una circunferencia. Sabemos que si describimos D del tipo I o tipo II nos quedará una integral medio fea, que seguramente tendrá un límite superior del estilo $\sqrt{1+x^2}$ (puede no ser correcto). ¿Cuál es el problema de esto? que de ninguna forma podemos intercambiar las integrales para que se nos haga más sencillo porque al no estar integrando en constantes, es decir, rectangulos, no podemos usar el teorema de Fubini.
Entonces, la idea es que pasemos a polares y nuestro gráfico va a tener en el eje x el radio, y el eje y será θ o el ángulo.
Esto de pasar a polares, va a ser básicamente una región D^* la cual si la ingresamos dentro de una transformación T, volvemos a conseguir nuestro D original. Es decir, $T(D^*) = D$
Véase **anexo** para ejemplos usando el Cambio de Variable.

Coordenadas Cilíndricas y Esféricas (Teorema de cambio de variable en $\mathbb{R}^3$)

En $\mathbb{R}^2$ con el cambio de variable conseguiamos un rectángulo. En $\mathbb{R}^3$ vamos a obtener un paralelogramo.



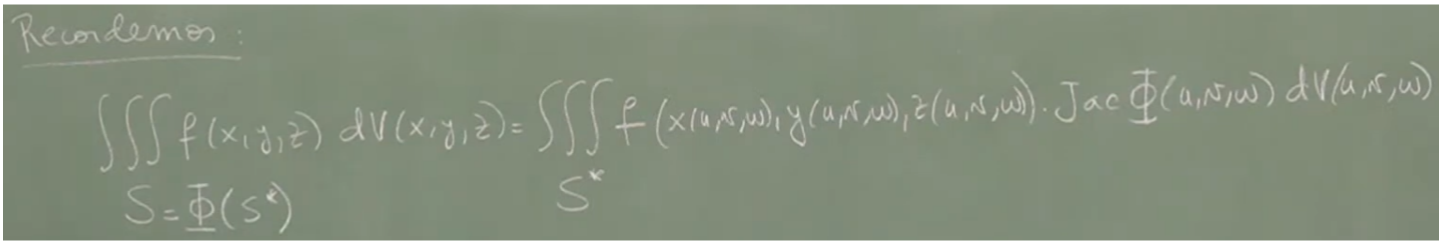
El teorema se enuncia como en $\mathbb{R}^2$, es decir

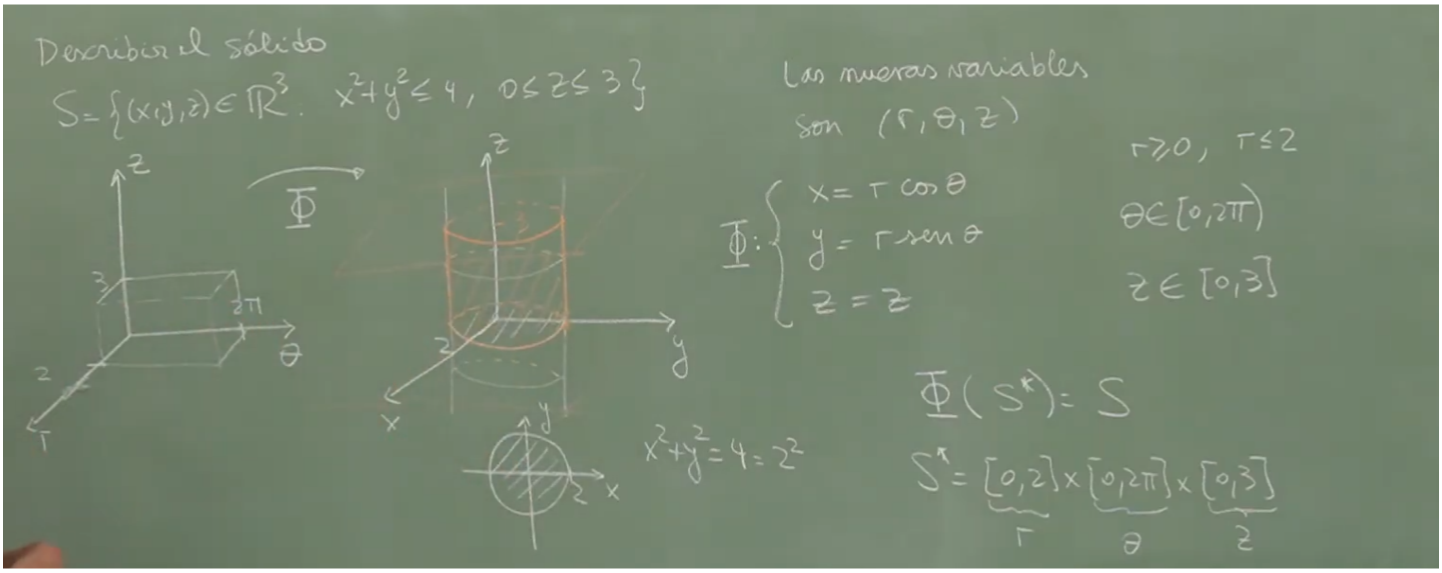
- $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
- $\phi(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$
- $\phi(S^k) = S$
- $Jac \; \phi(u,v,w) = |det \; D\phi(u,v,w)|$

Nota: Acá el jacobiano es de 3x3 pues tenemos 3 coordenadas.
Recordemos que evaluar el cambio de variable en f por el jacobiano, y luego hacer la integral, es lo mismo como si no hiciéramos un cambio de variable en f.

Coordenadas Cilíndricas

Veo el plano (x, y) en polares y z lo dejo igual. Es decir, $(x, y, z) \to (r, \theta, z)$





Entonces

$$\phi: \begin{cases} x = r\ cos(\theta) \\ y = r\ sen(\theta)\ con\ \theta \in [0, 2\pi) \\ z = z\ con\ z \in [0, 3] \end{cases}$$

$\phi(S^*) = S$
$S^* = [0, 2]\ x\ [0, 2\pi]\ x\ [0, 3]$

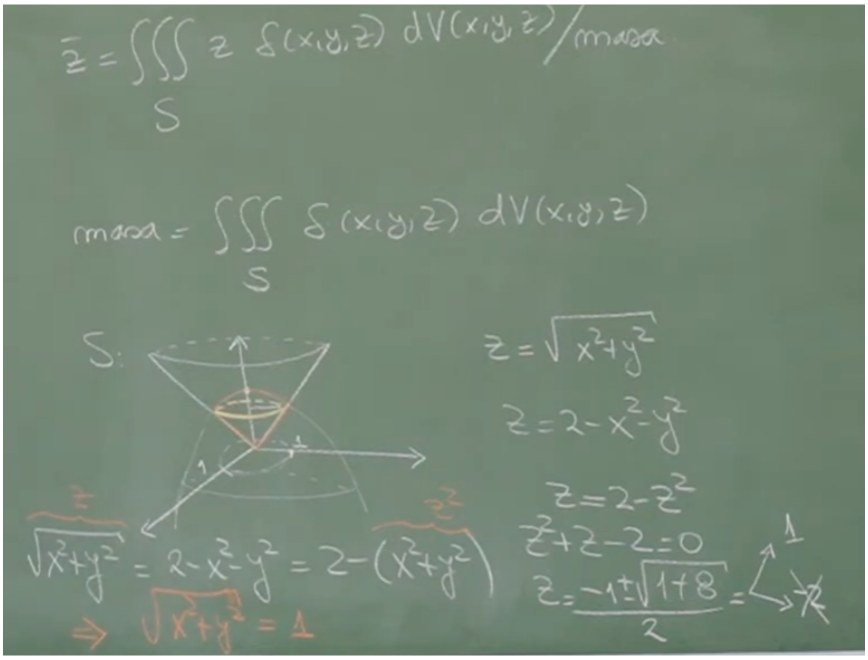
Jacobiano

Viene dado por $\phi(x, y, z) = (x(r, \theta, z), y(r, \theta, z), z(r, \theta, z))$
En nuestro caso, como es una circunferencia, el jacobiano es r.

Estrategias para este tipo de ejercicios

Cuando hay desigualdades, primero graficar las igualdades.
Luego, entender con las desigualdades, cual es el área que hay que integrar.
Por último, ver en donde están las intersecciones para poder hablar de (x,y).
Ej.: Calcular el centro de masa del sólido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2 - x^2 - y^2\}$ donde la densidad de S es

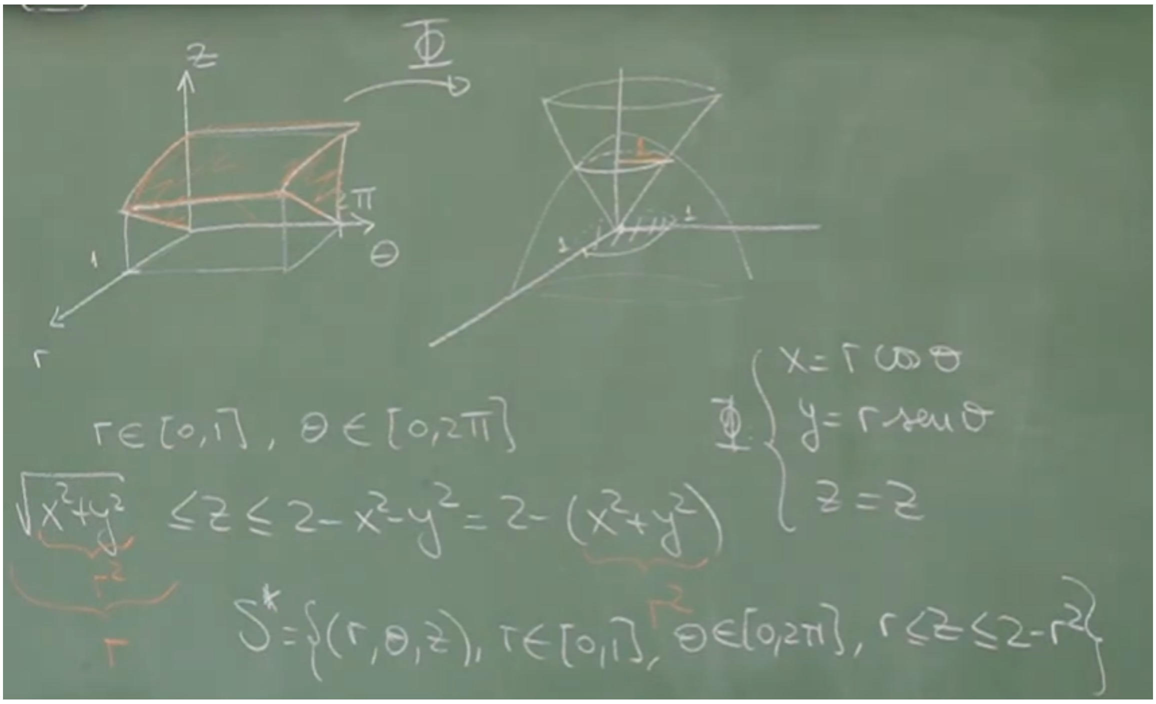
$\partial(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$



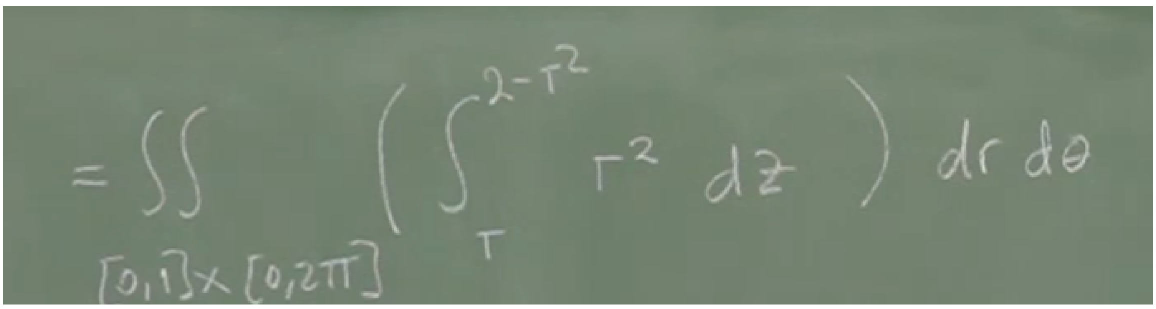
Una vez que entendimos que es lo que pasa con (x, y), z lo dejamos igual.

¡ ϕ: $\begin{cases} x = r\ cos(\theta)\ con\ r \in [0, 1] \\ y = r\ sen(\theta)\ con\ \theta \in [0, 2\pi) \\ z = z\ con\ r \leq z \leq 2 - r^2 \end{cases}$

Nota: Véase que siempre hay que juguetear y terminar reemplazando los $x^2 + y^2$ por r^2 donde corresponda.



Luego, queda literalmente plantear la integral con el z que nos dieron, que casualmente es r, y el jacobiano en polares también es r.

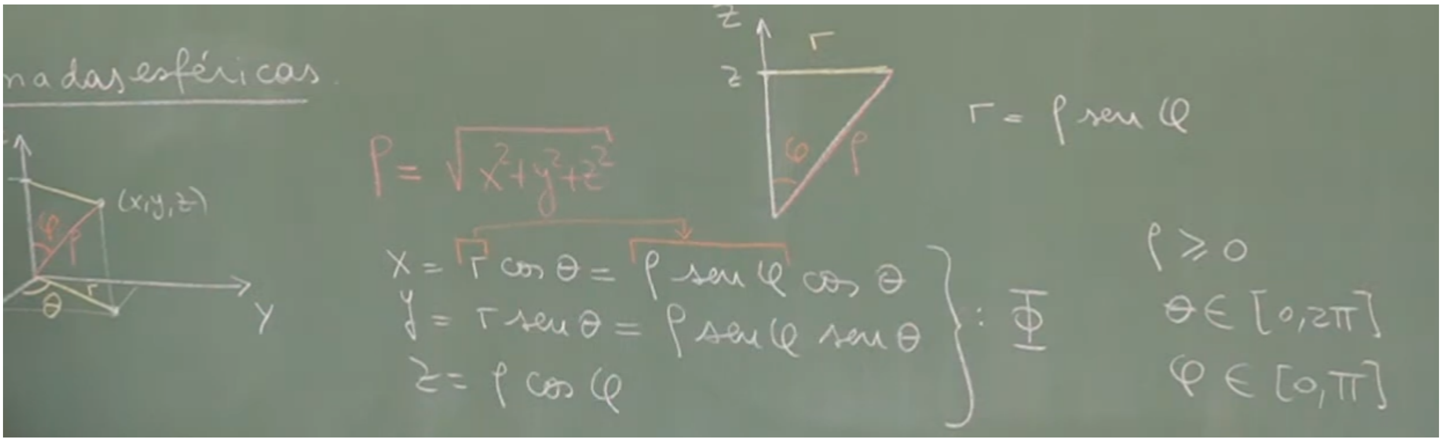


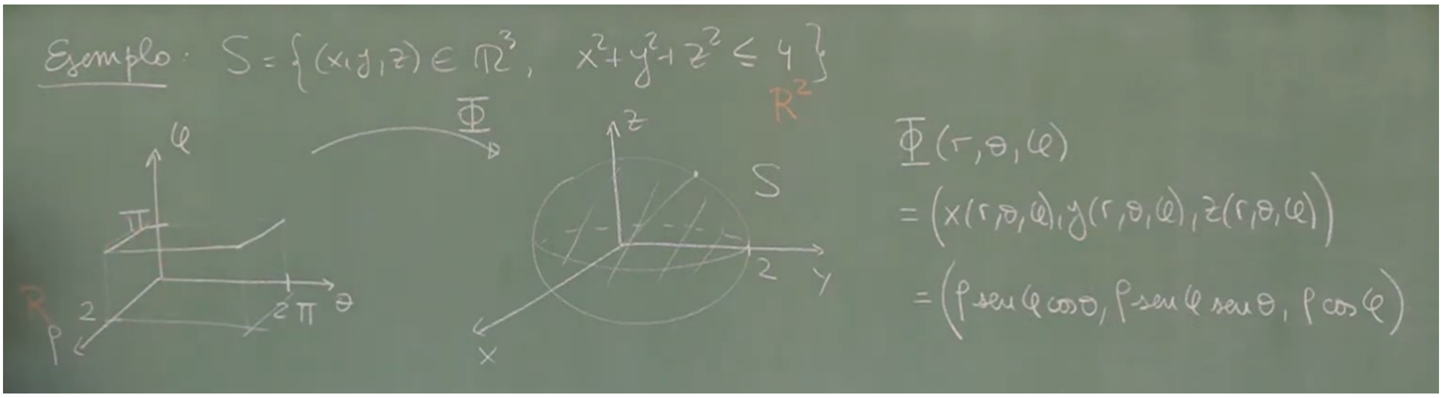
Véase **anexo** para ejercicios de Coordenadas Cilíndricas

Coordenadas Esféricas

Vamos a poder representar un (x,y,z) solo sabiendo lo que vale un ρ, un θ y ϕ.

- ϕ: Es el ángulo que sube el vector: se mueve solo entre $[0, \pi]$
- ρ: Magnitud.
- θ: Ángulo de giro en plano (x,y).

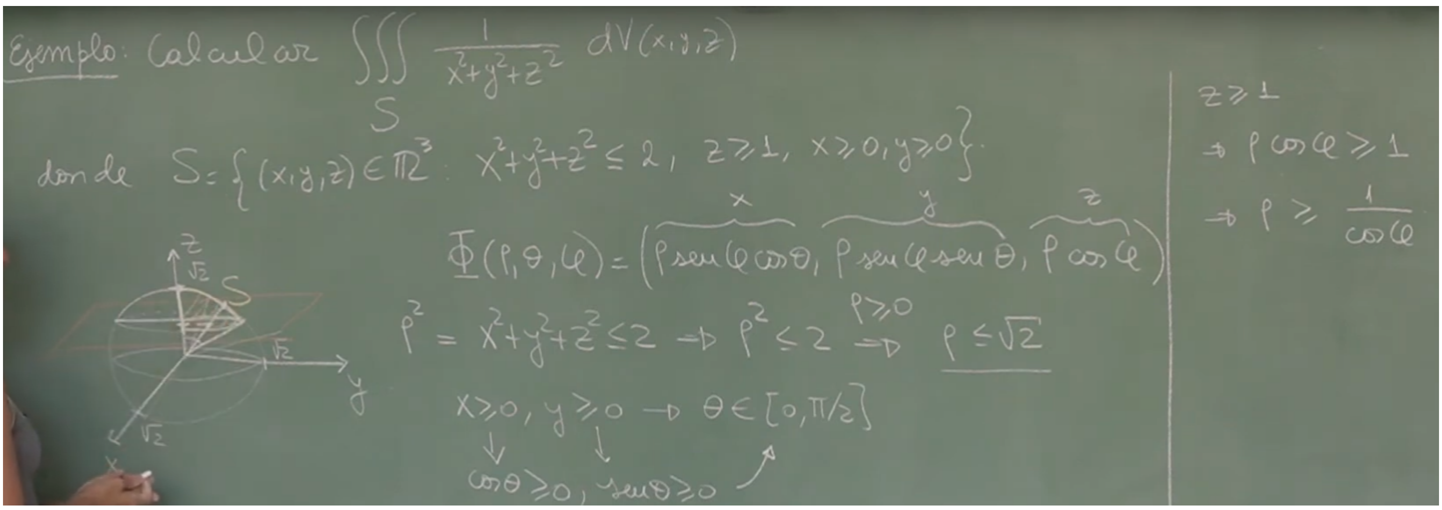




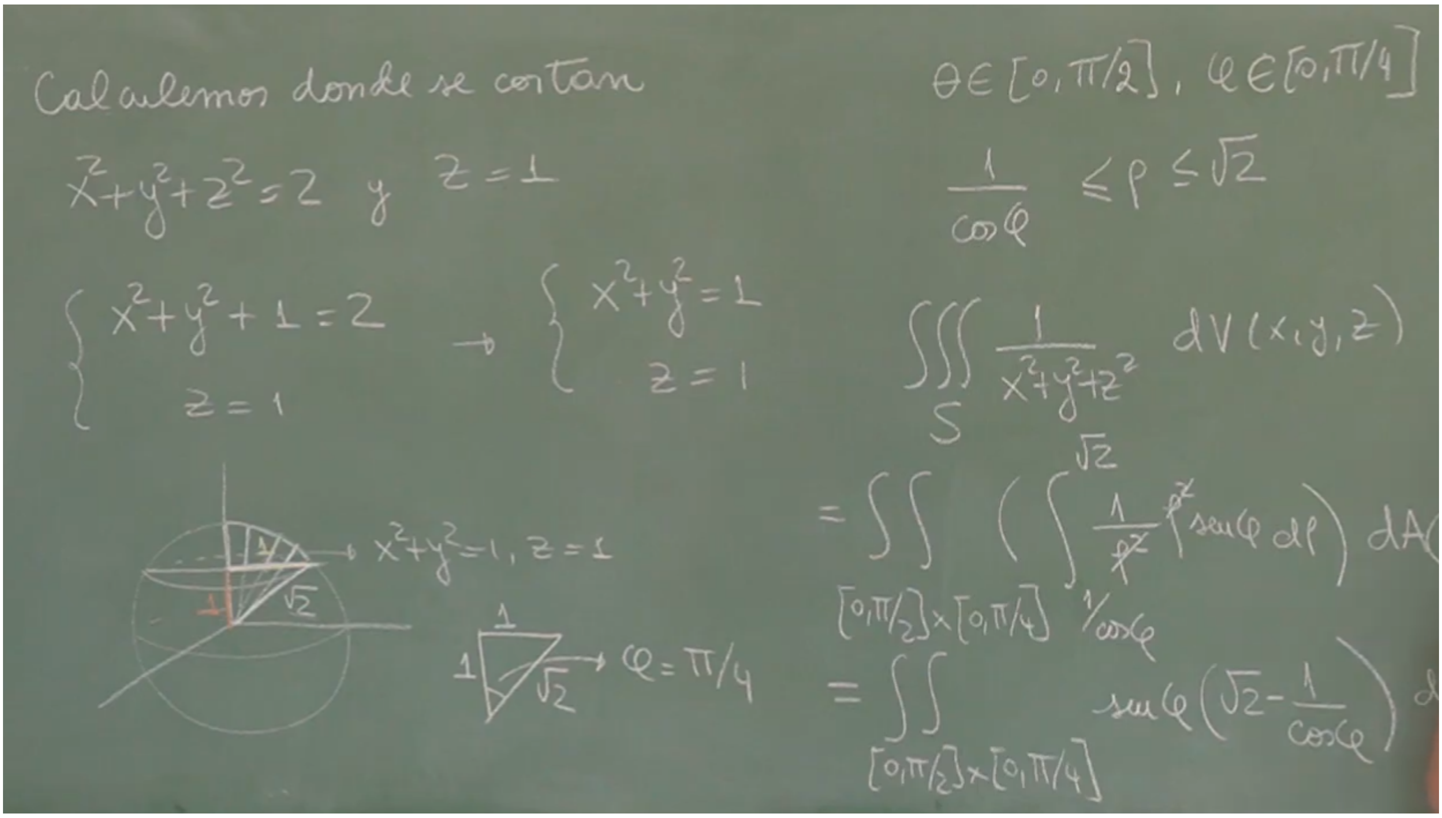
Jacobiano

El Jacobiano en coordenadas esféricas es $|\phi^2 sen(\partial)|$, luego $\phi^2 sen(\partial)$ pues como ϕ se mueve entre $[0, \pi]$ el sen en ese intervalo es positivo.

Ejemplos



La idea es determinar, al comienzo de todo en base a lo que nos dan como queda ϕ y θ.
θ: $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ porque en $\frac{\pi}{2}$ es el último lugar donde $x \geq 0, y \geq 0$.
ϕ: lo calculamos fácilmente igualando la ecuación de la superficie más grande a ρ^2
Por último, nos queda encontrar ρ que es necesario para la coordenada z. Tenemos que tomar todas las restricciones que haya sobre z. En este caso, tenemos una sola, $z \geq 1$, por lo tanto, nuestra coordenada z nos queda $p \geq \frac{1}{cos\phi}$. Si vemos detenidamente el dibujo, del área amarilla, hay que considerar como podemos expresarla, considerando el $z \geq 1$
Como el ρ depende de como se mueve el ϕ, nos falta entender qué región nos quedó atrapada en $z = 1$ y S.



Anexo

Esferas

Complete y lleve a una fórmula conocida: $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y + 16$

- Reordeno: $x^2 + 8x + y^2 - 6y + z^2 = -16$
- Completo cuadrados, los valores que tienen la variable (sin exponente), hago $(num/2)^2$.
  - $(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) + z^2 - 16 - 9 = -16$
  - Nótese que como nos inventamos términos para completar cuadrados, tenemos que restarlos.
- Reordeno: $(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) + z^2 = -16 + 16 + 9$
- Para agrupar un cuadrado, el numero que no tiene variable, tengo que aplicarle la raíz cuadrada. Luego, el símbolo que los separa es el signo del coeficiente que tiene variable grado uno.
  - $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 9$
- Por último, como el radio está elevado al cuadrado lo reducimos $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 3$
- El resultado entonces, es una Esfera en $\mathbb{R}^3$ con centro = (-4, 3, 0) y radio = 3
- Si se quisiera verificar si está bien, podemos desarrollar todos los cuadrados y deberíamos volver a la expresión original.

Completar Cuadrados

Adjunto otro ejercicio que es de cónicas, pero acá tuve que completar cuadrados de una manera ligeramente diferente. La forma de encararlo fue dejar el valor que esta solo del lado positivo.

Luego, como tuve que sacar factor común de las letras, al tener que completar los cuadrados lo que le tengo que restar es el factor común * el valor que agregué. Eso es lo que termino restando.

$$9x^2 - 4y^2 - 72x + 8y + 176 = 0$$

$\underbrace{r>0}$

$$176 = -9x^2 + 72x + 4y^2 - 8y$$

$$176 = -9(x^2 + 8x) + 4(y^2 - 2y)$$

Agregué $-9 \cdot 16$

$$176 = -9(x^2 + 8x + 16) + 4(y^2 - 2y + 1) - (-144) - 4$$

Agregué $4 \cdot 1$

$$176 - 144 - 4 = -9(x+4)^2 + 4(y-1)^2$$

$$36 = -9(x+4)^2 + 4(y-1)^2$$

Planos

1. Hallar la ecuación implícita del plano π cuya normal sea $N = (-3, 0, 4)$ y que pasa por el punto $P = (2, 1, 1)$
Recordemos como podemos armar un plano. Para poder armar un plano necesitamos un vector normal y un punto de paso.
Por lo tanto, este ejercicio es bastante simple, podemos simplemente aplicar la fórmula de $\pi : ax + by + cz = d$
Entonces, nos quedaría algo así: $\pi : -3x + 0y + 4z = d$
Ahora ¿como calculo d?, podemos calcular d evalúando el punto P en el plano.
Por lo tanto $d = -3(2) + 4(1) \equiv d = -2$
Entonces, el plano $\pi : -3x + 4z = -2$

2. Dados los puntos $A = (1, 2, 3), B = (1, 0, 1)\ y\ C = (4, -1, 2)$ encuentre el plano.
Recordemos como podemos armar un plano. Para poder armar un plano necesitamos un vector normal y un punto de paso.
¿Tenemos la normal? No. ¿Como podemos calcularla? La manera de calcular un vector normal sería hacer el producto cruz entre dos vectores directores.
Por lo tanto, calculemos nuestros dos vectores directores $\bar{AB} = (0, -2, -2)$ luego $\bar{BC} = (3, -1, 1)$
Nota: Sería lo mismo calcular AB y BC que AB Y AC. Ahora lo que podemos hacer es una vez que tenemos las dos direcciones podemos buscar con el producto cruz, un vector perpendicular que hará de nuestra normal.
PD: Recordemos que $AxB = -(BxA)$. Por lo tanto da igual que orden pongamos los vectores.

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nuestro vector normal N termina siendo N $= (-4, 6, 6)$
¿Ahora qué nos falta? Un punto. Entonces podemos elegir cualquiera de los puntos A, B, C (xq las rectas estarían contenidas en el plano)
Si quisieramos verificar si efectivamente la normal nos dió bien, podemos calcular el producto escalar de $N * AB$ y $N * BC$ y ambos deberían dar 0.
Entonces, ahora por último hacemos lo mismo que en ejercicio anterior. $\pi : -4x+6y+6z = d \implies d = -4(1)+6(0)+6(1) \implies d = 2$
Finalizamos, juntando la ecuación $\pi : -4x + 6y + 6z = 2 \equiv \pi : -2x + 3y + 3z = 1$

Rectas & Rectas y Planos

1. Dadas la recta $L : t(1, 1, 1) + (3, 0, 4)$ y el plano $\pi : 2x - y + 5z = 10$ halle $L \cap \pi$.
Recordemos qué significa que una recta pueda intersecarse con un plano: que una recta pueda intersecarse con un plano o al revés significa que existe al menos un punto que tienen en común.

Con esto quiero decir que el punto que encontremos debe verificar tanto el plano como la recta.
Como tenemos que encontrar UN PUNTO necesitamos encontrar la fórmula generadora de puntos de la recta o el plano.
En este caso, como tenemos la recta en paramétrica y el plano en implícita nos conviene más fácil pasar la paramétrica y ver qué pinta tienen los puntos.
Entonces, si pasamos L a paramétrica nos queda: $(t+3, t, t+4)$ entonces $x = (t+3), y = t, z = t+4$
Ahora, coloquemos lo que acabamos de encontrar en el plano, esto nos dará la variable t para la recta. Como este t nos lo da después de meterlo el punto de la recta en el plano, cuando reemplacemos en el punto genérico con el t que encontramos, entonces ese punto será el de la intersección del plano y la recta.
$\pi : 2(t+3) - (t) + 5(t+4) = 10 \equiv \pi : 2t + 6 - t + 5t + 20 = 20 \equiv \pi : t = \frac{-8}{3}$
Ahora, este t lo colocamos en la fórmula genérica de los puntos de la recta: $((\frac{-8}{3} + 3), \frac{-8}{3}, \frac{-8}{3} + 4)$.
Entonces, la intersección es el punto $P = (\frac{1}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{4}{3})$
Por lo tanto, verifiquemos ahora, si este punto verifica el plano.
$\pi : 2(\frac{1}{3}) - (\frac{-8}{3}) + 5(\frac{4}{3}) = 10 \equiv 10 = 10$

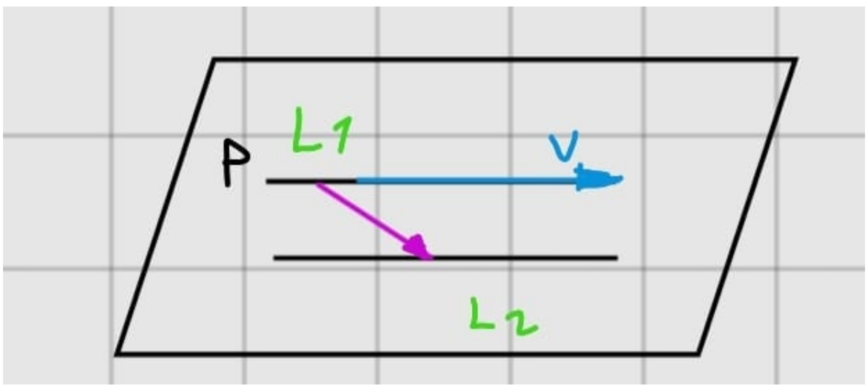
Luego, como el punto lo arrojó la recta, y verifica el plano, entonces la intersección $L \cap \pi = (\frac{1}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{4}{3})$

2. Dar la ecuación implícita del plano π que contiene a la recta.
$L : \alpha(2,1,3) + (2,1,0)$ y al punto $P = (0,1,-1)$ Recordemos que si un plano contiene a una recta, todos los puntos de la recta están en el plano.
(preguntar qué pasaba si el punto estaba en la recta, qué cambiaba el ejercicio, en este caso no está) Lo primero que tenemos que ver es si el punto $P \in L$. Si el punto está en la recta, entonces hay infinitos planos. Si el punto NO está en la recta, entonces hay un único plano.
Como necesito sí o sí dos vectores directores para mi plano, puedo hacer un vector director de la resta de $QP = (0,1,-1) - (2,1,0) = (-2,0,-1)$
Entonces ahora hago el producto cruz entre $(2,1,3)$ y $(-2,0,1)$

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nuestro vector normal N termina siendo N $= (1,4,-2)$
Entonces ahora, finalizamos el ejercicio evaluando en la normal el punto P $\pi : x + 4y - 2z = d$
$d = (0) + 4(1) - 2(-1) \equiv d = 6$
Entonces finalizamos con $\pi : x + 4y - 2z = 6$

3. Dadas las rectas $L_1 : \alpha(-1,0,1) + (4,3,2)$ y $L_2 : \gamma(2,0,-2) + (0,0,1)$. Halle la ecuación implícita del plano π que las contiene.
Lo primero que vemos es que tenemos dos rectas. Necesitamos de alguna manera un vector normal para el plano.
Primero vemos qué relación hay entre las rectas, podemos ver que son paralelas porque si hacemos $(-1,0,1) * -2$ nos da $(2,0,-2)$.
Como son paralelas, necesitamos de alguna manera, llegar desde una recta a la otra, para luego, cuando tenemos un punto que llega y combina las rectas, ahí si podemos calcular con el producto cruz el vector normal.



Entonces, restemos los dos puntos $\bar{P}Q = Q - P = (0,0,1) - (4,3,2) = (-4,-3,1)$.
Por lo tanto, ahora sí que tenemos dos vectores directores (no paralelos) podemos hacer el producto cruz para calcular la normal del plano.

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Nuestro vector normal N termina siendo N $= (3,-5,3)$
Por lo tanto ahora que tenemos el plano $\pi : 3x - 5y + 3z = d$, buscamos el valor de D evaluando cualquier punto de las rectas

$d = 3(0) - 5(0) + 3(1) = 3$
Luego, el plano resultante $\pi : 3x - 5y + 3z = 3$

Pasaje de Coordenadas Cartesianas a Polares y viceversa

Pasaje a COORD CARTESIANAS

$$\begin{cases} x = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ y = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = \sqrt{3} \end{matrix} \Rightarrow P = (1, \sqrt{3})$$

$P = (\underbrace{1, -1}_{\text{4to cuad}}) \Rightarrow$ COORD CARTESIANAS

Pasaje a COORD POLARES

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 & \Rightarrow r^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x} & \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{\pi}{4} \text{ pero} \end{cases}$$

Como lúg en 4to cuad: $2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

Luego, $P = \left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$

Parametrización

1. $L:\ (x, y)\ =\ \lambda(2, 1)\ +\ (0, 1)$

$$f(t) = \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = \lambda\ +\ 1 \end{cases}$$

2. ¿Es C gráfico de una función $y = f(x)$?

$$f(t) = \begin{cases} x = t^3 - 4t \\ y = t + 1 \end{cases}$$

Recordemos que para que una función sea $y = f(x)$ tiene que suceder que para todos los y debe existir un único x.
Vemos unos casos

```
1  t = 2, x = 0, y = 3
2  t = 1, x = -3, y = 2
3  t = 0, x = 0, y = 1
4  t = -1, x = 3, y = 0
5  t = -2, x = 0, y = -1
```

No. No es $y = f(x)$ pues para $x = 0$ existen diferentes valores de y. Si desarrollamos y despejamos nos queda $x = y^3 - 3y^2 - y + 3$ con $y \in \mathbb{R}$

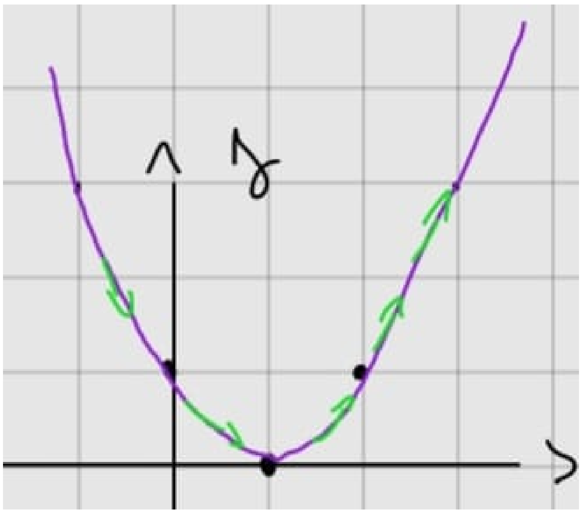
3. Grafique la curva C

$$f(t) = \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t^2 \end{cases}$$

Si primero empezamos a darle valores a t vemos que es el gráfico de una parábola y la dirección es de izquierda a derecha

```
t =−2 x =−1 y = 4
t = −1, x = 0, y = 1
t = 0, x = 1, y = 0,
t = 1, x = 2, y = 1
t = 2, x = 3, y = 4
```

$y = (x-1)^2$. Es una parábola corrida una unidad hacia la derecha.



4. Hallar una ecuación cartesiana y bosqueje la curva indicando la dirección en que se traza la curva cuando crece el parámetro t.
4. 1: $x = \sqrt{t}$ $y = 1 - t$
4. 2: $x = e^t - 1$ $y = e^{2t}$
Comenzamos resolviendo 4,1. Lo que podemos ver es que t ¿0 pues de lo contrario x se indefine.
Si le damos ciertos valores a t nos queda que la curva va hacia la derecha.

```
t = 0, x = 0, y = 1
t = 1, x = 1, y = 0
```

Ahora hagamos 4,2. Lo que podemos ver es que $y = e^{2t}$ es lo mismo que $y = (e^t)^2$.
Por lo tanto, como $x + 1 = e^t$ entonces $y = (x+1)^2$
En este caso es súper importante entender la función e. La función e posee una asíntota en el eje x. En este caso la asíntota está en $y = -1$ pues la función $e^t - 1$ tiene la asíntota y corrida una unidad. Si fuese $e^t + 4$ la asíntota estaría en y = 4
Por lo tanto, el valor mínimo que puede tener x es -1.

Coordenadas Polares

Dada la curva $x^2 + y^2 = 16$ halle una parametrización. Como es una circunferencia, entonces sabemos que el radio es 4. Además, las circunferencias se arman con cos / sen.

$$f(t) = \begin{cases} x = 4\ cos(\theta) \\ y = 4\ sen(\theta)\ con\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{cases}$$

Entonces $\alpha(\theta) = \{4\ cos(\theta), 4\ sen(\theta)\}$

Elipses

EJE MAYOR Y (a debajo de y) | EJE MAYOR X (a debajo de X)

ELIPSE: RDO: FOCOS: $(0, \pm c)$ VÉRTICES: $(0, \pm a)$ | FOCOS: $(\pm c, 0)$ VÉRTICES: $(\pm a, 0)$

/144

$$9x^2 + 16y^2 = 144 \equiv \frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = 1 \equiv \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$a \geq b$ ent., $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$

$$c^2 = a^2 - b^2 \equiv c^2 = 16 - 9 = 7 \equiv c = \sqrt{7}$$

INTERSECCIONES EJE X $(Y=0)$:

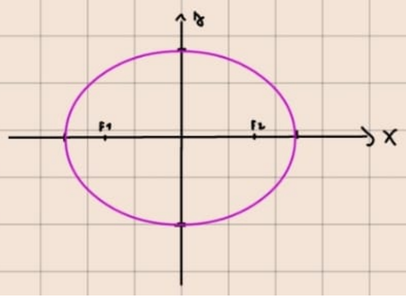
$$\frac{x^2}{16} = 1 \equiv x^2 = 16 \equiv x = \pm 4$$

INTERSECCIONES EJE Y $(X=0)$:

$$\frac{y^2}{9} = 1 \equiv y^2 = 9 \equiv y = \pm 3$$

FOCOS: Como eje MAYOR en X pues $a \geq b$ y a está debajo de x.

$F1 = (-\sqrt{7}, 0)$ $F2 = (\sqrt{7}, 0)$



FOCOS: $(0, \underbrace{\pm 2}_{c})$ VÉRTICES: $(0, \overbrace{\pm 3}^{a})$

semi eje MAYOR Y

$c = 2$

$$\frac{x^2}{b} + \frac{y^2}{a} = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \equiv 2^2 = 3^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 9 - 4 \equiv b = \sqrt{5}$$

Ent, $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

Nota: Si tengo que pasar una elipse, hipérbola o cualquier otra cosa a una parametrización lo que normalmente se hace es hacer un reemplazo sintáctico. Plantear la parametrización y al final poner el valor real de la variable.

PARAMETRIZACIÓN:

$$\left(\underbrace{\frac{x-2}{3}}_{\tilde{x}}\right)^2 + \left(\underbrace{\frac{y-1}{2}}_{\tilde{y}}\right)^2 = 1$$

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 1$$

$$\begin{cases} \tilde{x} = \cos(t) \longrightarrow \dfrac{x-2}{3} = \cos(t) \equiv \underline{x = 3\cos(t) + 2} \\ y = \operatorname{sen}(t) \longrightarrow \dfrac{y-1}{2} = \operatorname{sen}(t) \equiv \underline{y = 2\operatorname{sen}(t) + 1} \end{cases}$$

Con $t \in \mathbb{R}$

Hipérbolas

HIPÉRBOLA:

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \overset{/144}{\equiv} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

4 a = Eje mayor x

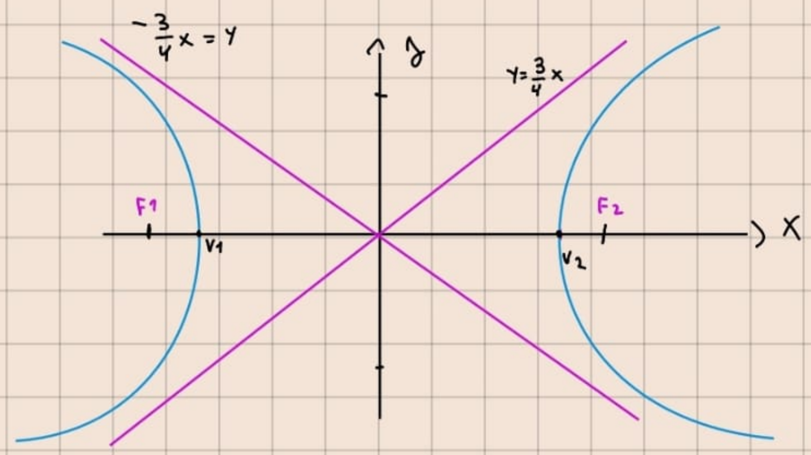
$$c^2 = a^2 + b^2 \equiv c^2 = 16 + 9 \equiv c = 5$$

$F_1 = (-5,0)$ $F_2 = (5,0)$ VÉRTICE $= (\pm 4, 0)$

ASÍNTOTAS: Como a está debajo de x, será b/a.

$A_1 = -\left(\frac{b}{a}\right) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x$ y $y = \frac{3}{4}x$

INTERSECCIÓN EJE Y $(x=0)$: ± 3



Con cónicas desplazadas y completar cuadrados

Ejel: Halle la cónica

$$9x^2-4y^2-72x+8y+176=0$$

$$\underbrace{176}_{r>0} = -9x^2+72x+4y^2-8y$$

$$176 = -9(x^2+8x)+4(y^2-2y)$$

Agregué $-9\cdot 16$

$$176 = -9(x^2+8x+16)+4(y^2-2y+1) - (-144) - 4$$

Agregué $4\cdot 1$

$$176-144-4 = -9(x+4)^2+4(y-1)^2$$

$$36 = -9(x+4)^2+4(y-1)^2$$

HIPÉRBOLA

$$1 = -\frac{(x+4)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9} \equiv \frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+4)^2}{4} = 1$$

Eje mayor y, Centro: $(-4, 1)$ ✓

$c^2 = 9+4 \equiv c=\sqrt{13}$ ✓

Focos: $(-4, 1\pm c) \equiv F_1=(-4, \sqrt{13}-1)$ ✓ y $F_2=(-4, \sqrt{13}+1)$ ✓

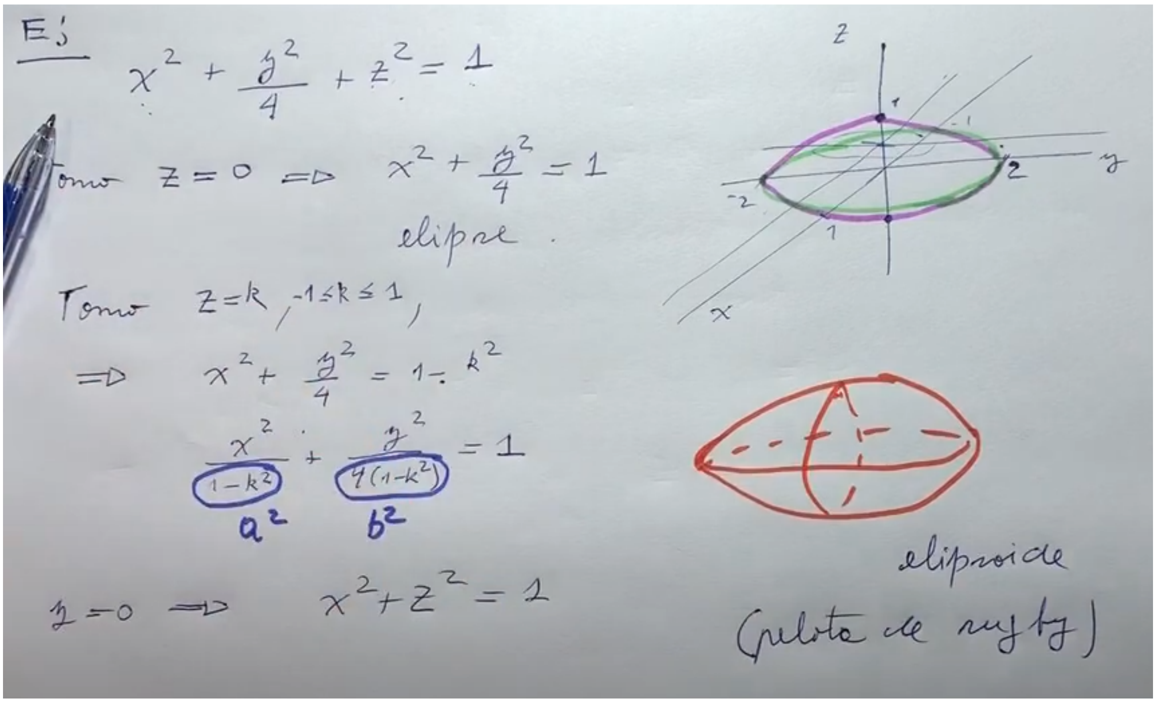
Hipérbola: $\pm\left(\frac{a}{b}\right)(x-\text{Centro})$

$y=\left(\frac{3}{2}\right)(x-4)$ ✓, $y=-\left(\frac{3}{2}\right)(x-4)$ ✓

Aplicando Trazas en Superficies

Para resolver este ejercicio podemos tomar $z=0$ para empezar y vemos que nos queda la ecuación de una elipse. La dibujamos en el plano de $\mathbb{R}^3$. Luego, tomamos $z=k$ y notamos que la constante a lo sumo debe ser 1 porque sino la definición sería erronea, como todos son positivos si $z=2$ falla. Entonces, los k pueden ir desde $-1 \leq k \leq 1$. Notamos que cortando con un $z=k$ en rango nos da una elipse que cada vez es mas chiquita.
Luego, probamos con $y=0$ y esto nos da una circunferencia.
Por último, probamos $x=0$ y nos da una elipse.
Luego de hacer todas las trazas aproximadas, nos quedaría la figura.

Este ejemplo es llamado **elipsoide**.



Dominio de Funciones

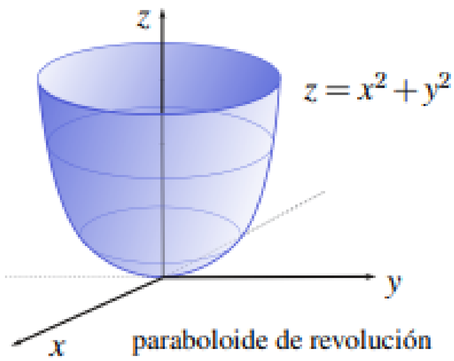
1. Calcule el dominio de $f(x, y) = \sqrt{1 - 2x^2 - 3y^2}$

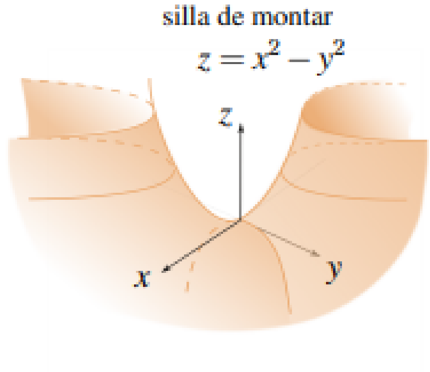
Lo primero que vamos a hacer es reescribir la expresión de la siguiente manera: $z = \sqrt{1 - 2x^2 - 3y^2}$
¿Qué restricciones vemos? ¿Qué valores tomará z? Lo primero que podemos notar es que z siempre será mayor o igual que 0 pues está totalmente atado al cálculo de la raíz.
Como necesitamos que el cálculo de la raíz sea mayor o igual a cero para valer, planteemos la desigualdad $\sqrt{1 - 2x^2 - 3y^2} \geq 0 \iff 1 - 2x^2 - 3y^2 \geq 0 \iff 1 \geq 2x^2 + 3y^2$ ahora como tenemos dos variables, no podemos hacer mucho más.
Por lo tanto, $Dom(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$
Entonces, si tuviesemos que graficar, tendríamos que colorear los $2x^2 + 3y^2 \leq 1$ que estén en $z = 0$ o $z = 1$
¿Qué curva es? Es una elipse, reescribamos la expresión $\frac{x^2}{\frac{1}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{3}} \leq 1 \iff \frac{x^2}{(\sqrt{\frac{1}{2}})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{\frac{1}{3}})^2} \leq 1$

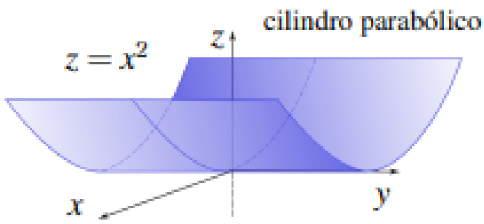
2. Calcule el dominio de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

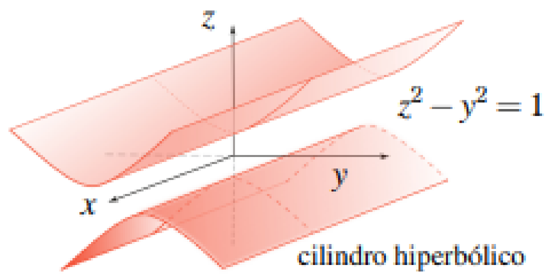
A simple vista no hay ninguna restricción, pues la expresión es $z = x^2 + y^2$. Entonces, $Dom(f) = \mathbb{R}^2$ pues $x \in \mathbb{R}$ y $y \in \mathbb{R}$.
¿Qué curva es? Si hacemos un par de cortes, vemos que si siempre hacemos un valor constante $z = k$ se hacen elipses, pero si damos $y = 0$ o $x = 0$ vemos que son parábolas.
Esto sería un paraboloide.

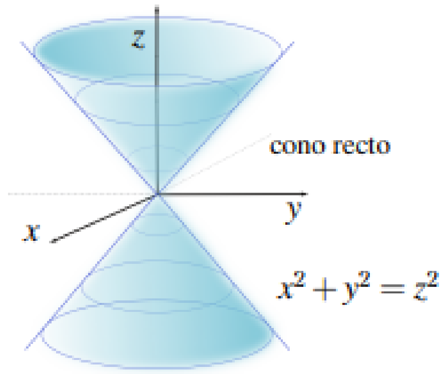
Tabla de Cuadrícas

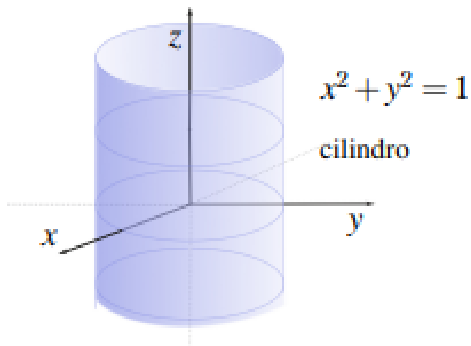


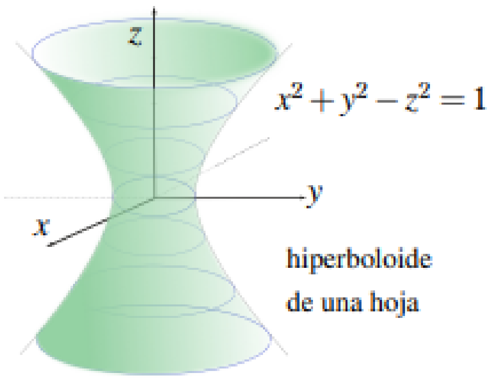


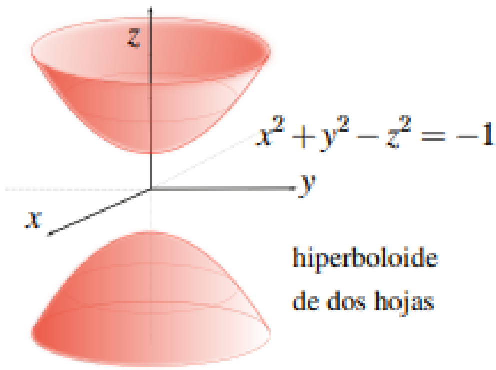


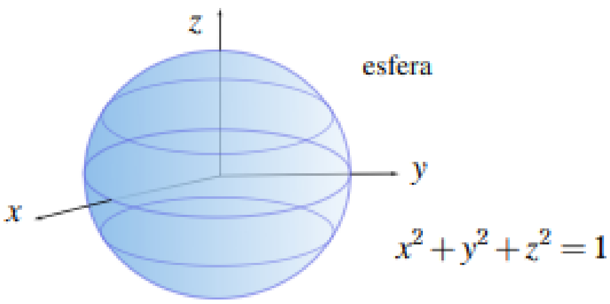












Manual del Acotador Frecuente

Guía del acotador frecuente

Propiedades función módulo

- $x \leqslant |x|,\ 0 \leqslant |x|$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x|^n = |x^n|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $|x| \geqslant y \iff -y \geqslant x \vee x \geqslant y$
- $|x| = |-x|$
- $x = \text{signo}(x)|x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x| \leqslant y \iff -y \leqslant x \leqslant y$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \wedge x = -y$

Para acotar

Por arriba

- $\sin(x) \leqslant 1$
- $\cos(x) \leqslant 1$
- $|\sin(x)| \leqslant 1$
- $|\cos(x)| \leqslant 1$
- $|\sin(x)| \leqslant |x|$
- $\sin(x)\cos(x) \leqslant \frac{1}{2}$
- $|\sin(x)| \leqslant |\tan(x)|$
- $|e^x - 1| \leqslant |x|e^{|x|}$
- Desigualdad triangular:

$$||a+b|| \leqslant ||a|| + ||b|| \qquad ||a-b|| \leqslant ||a|| + ||b||$$

- Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$|V \cdot W| = |\langle V, W\rangle| \leqslant ||V||\,||W|| \qquad \forall\, V, W \in \mathbb{R}^n$$

- $|x| \leqslant ||(x,y)|| \leqslant \sqrt{n}||(x,y)||_\infty = \sqrt{n}\,\text{máx}(|x|,|y|) \Leftrightarrow x^2 \leqslant x^2 + y^2$
- $|y| \leqslant ||(x,y)|| \leqslant \sqrt{n}||(x,y)||_\infty = \sqrt{n}\,\text{máx}(|x|,|y|) \Leftrightarrow y^2 \leqslant x^2 + y^2$
- $|e^x| \leqslant e^{|x|}$

Por abajo

- $\sin(x) \geqslant -1$
- $\cos(x) \geqslant -1$
- $\sin(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}$
- $\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$
- $\sin(x)\cos(x) \geqslant -\frac{1}{2}$
- $\sqrt{x} \geqslant \ln(x)$
- $e^x \geqslant 1 + x$
- $x \geqslant \ln(1+x) \geqslant \frac{x}{1+x}$
- Desigualdad triangular inversa:

$$||a-b|| \geqslant ||a|| - ||b||$$

$$|a+b| \geqslant ||a| - |b|| \qquad |a-b| \geqslant ||a| - |b||$$

- $|a| + |b| \geqslant |a| \iff \frac{1}{|a|+|b|} \leqslant \frac{1}{|a|}$
- $|a| + |b| \geqslant |b| \iff \frac{1}{|a|+|b|} \leqslant \frac{1}{|b|}$
- $e^x > 0$
- $\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy} \implies \frac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy$
- $\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz} \implies \frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geqslant xyz$

Todo

$(x-a, y-b) \neq (0,0)$

- $\frac{|x-a|}{||(x,y)-(a,b)||} \leqslant 1 \iff \frac{(x-a)^2}{(x-a)^2+(y-b)^2} \leqslant 1$
- $\frac{|y-b|}{||(x,y)-(a,b)||} \leqslant 1 \iff \frac{(y-b)^2}{(x-a)^2+(y-b)^2} \leqslant 1$

Demás cosas

- $(x^2 - y^2) = (x+y)(x-y)$
- $(x-a)^2 = |x-a|^2$
- $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$
- $(x-a)^3 = |x-a|^2(x-a)$
- Rectas que pasan por el punto (x_0, y_0)

$$y = m(x - x_0) + y_0$$

Si a la hora de demostrar un límite tomamos más de un δ:

$$\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta(\varepsilon)\}$$

Relaciones trigonométricas

- $|\text{sen}(x)| = \text{sen}(|x|)\ \forall\, x \in [-\pi, \pi]$
- $|\cos(x)| = \cos(|x|)\ \forall\, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\cos(x) = \cos(-x)$
- $\text{sen}(x) = -\text{sen}(-x)$
- $\tan(x) = -\tan(-x)$
- $\text{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\text{sen}(2x) = 2\,\text{sen}(x)\cos(x)$
- $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\cos(2x) = \cos^2(t) - \text{sen}^2(t)$

Límites útiles

- $\text{lím}_{x\to 0} x\ln(x) = 0$
- $\text{lím}_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$
- Si $f(x)$ es acotada y $g(x) \xrightarrow{x\to c} 0$

$$\lim_{x\to c} f(x)g(x) = 0$$

- $\text{lím}_{x\to 0} e^x = 1$
- $\text{lím}_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\text{lím}_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- $\text{lím}_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\text{lím}_{x\to 0} x\sin(x) = 0$
- $\text{lím}_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \text{lím}_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Límites iterados (como variables independientes)

- $\text{lím}_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \text{lím}_{x\to a}\left(\text{lím}_{y\to b} f(x,y)\right)$
- $\text{lím}_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \text{lím}_{y\to b}\left(\text{lím}_{x\to a} f(x,y)\right)$

Si alguno de ellos no existe, no nos dice nada sobre el límite doble. Si ambos existen y dan distinto, entonces $\nexists$ lím.

- Si $a_n \to a \Rightarrow |a_n| \to |a|$
- Si $|a_n| \to 0 \Rightarrow a_n \to 0$

Álgebra de límites

- Si $\text{lím}_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a$, $\text{lím}_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = b$
  - $\text{lím}_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f \pm g)(x,y) = a \pm b$
  - $\text{lím}_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(f \cdot g)(x,y) = ab$
- Si $b \neq 0$
  - $\text{lím}_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{a}{b}$

Límites por Definición

1. Calcular, si existe $\text{lím}_{(x,y)\to(1,2)}\ x + 2y = 5$

Primero revisamos que el límite cuando se acerca al punto no se indefine. En este caso da 5. Por lo tanto, el límite parece existir.
Probemos por definición: Sea $\epsilon > 0\ qvq\ \exists\delta > 0\ tq\ 0 < ||(x,y) - (1,2)|| < \delta \implies |x + 2y - 5| < \epsilon$
En este momento lo que necesitamos hacer es llevar desde $|x + 2y - 5|$ a algo parecido a $||(x,y) - (1,2)||$
Lo que yo tengo es $x + 2y - 5$, necesito de alguna manera un -1. Por lo tanto lo que puedo hacer es sumar 1 y restar uno: $|x + 2y - 5\mathbf{+1-1}|$. De esta manera nos queda $|(x-1) + 2y - 4|$.
Ahora necesitamos de alguna forma, conseguir un $y - 2$ pero veo que $2y - 4$ puedo sacar factor común, por lo tanto $|(x-1) + 2(y-2)|$.
En este momento vemos que nos quedó algo de la forma $|(x-1) + 2(y-2)|$ entonces como tenemos una suma aplicamos (1) la desigualdad triangular $|(x-1) + 2(y-2)| \leq |(x-1)| + |2(y-2)|$
Luego, observamos que podemos aplicar (4)$|2(y-2)| = |2| * |(y-2)|$ por lo tanto nos queda $|(x-1)| + |2| * |(y-2)|$
Ahora vemos que podemos aplicar (1) que $|(x-1)| \leq ||(x,y) - (1,2)||$ y $|(y-2)| \leq ||(x,y) - (1,2)||$ y por lo tanto

3 $||(x,y)-(1,2)||$ Por último, necesitamos pedir que $< 3\ \delta < \epsilon$. Luego $\delta < \frac{\epsilon}{3}$
2. Calcular, si existe el siguiente límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$.
Vemos a qué tienden aplicando el punto $(0,0)$. Nos queda una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. OJO: Acá no podemos usar L'Hopital primero porque no sabemos si es derivable, pero peor aún, no estamos en $\mathbb{R}$, estamos en $\mathbb{R}^2$.
Como el grado del numerador es más grande que el grado del denominador nos jugamos y proponemos $L = 0$ ¿por qué?
Aplicamos la definición: Sea $\epsilon > 0\ qvq\ \exists\delta > 0\ tq\ 0 < ||(x,y)-(0,0)|| \implies ||\frac{x^3}{x^2+y^2} - 0|| < \epsilon$
Entonces nosotros empezamos como $||\frac{x^3}{x^2+y^2}||$ y queremos llegar a $||(x,y)-(0,0)||$.
Lo primero que podemos notar es que si sacamos factor común en el numerador nos queda $||\frac{x^2*x}{x^2+y^2}||$ y esto nos suena de una propiedad conocida 7 pero antes de alguna manera necesitamos sacar el $*x$.
Por lo tanto $||\frac{x^2}{x^2+y^2}|| * |x|$
Ahora podemos aplicar 7 y nos queda $1 * |x|$
Por último $|x| \equiv |x-0|$ y por la propiedad de 1 sabemos que $||(x,y)-(x_0,y_0)||$ que en este caso $|x| \leq |(x,y)-(0,0)| \equiv |(x,y)|$
Concluimos entonces que $|(x,y)| < \delta < \epsilon$. Luego $\delta < \epsilon$

Demostrando que Límites no existen

Una técnica para ver que un límite no existe es usando rectas, parábolas o una familia de funciones.
1. Calcular, si existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
Si evalúamos a que tiende este límite con el punto (0, 0) nos queda una indeterminación de 0 sobre 0.
Me acerco al límite por rectas que pasen por el punto. En este caso considero rectas del tipo $y = mx$ pues si hubiese b no pasaría por el punto (0,0).
Trabajamos entonces con $f(x,mx) = \frac{x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2}$
Entonces, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-(mx)^2}{x^2+(mx)^2} \equiv \frac{1-m^2}{1+m^2}$ entonces como el límite depende de un valor de m, el límite no existe.
Expongamos un contraejemplo: Si $m = 0$ sucede que $L = 1$ pero si $m = 2$ sucede que $L = \frac{-3}{5}$ y esto demuestra que el límite no existe.

Derivadas Parciales

1. Dada $f(x,y) = x^5y - x^3 + 2y^2$. Calcule $f_x(1,2)$ y $f_y(1,2)$
Lo primero que tenemos que pensar a la hora de fijar una variable es: si la variable está fija, es decir, pienso como si fuese un número y me fijo si es derivable.
Podemos notar que si fijamos el valor de y, la función es derivable porque es un polinomio, y lo mismo sucede si fijamos x.
Entonces:

- $f_x(x,y) = 5x^4y - 3x^2$
  - Voy derivando las x, acá y son constantes.
- $f_y(x,y) = x^5 + 4y$
  - Voy derivando las y, acá x son constantes.

Entonces $f_x(1,2) = 5*2-3 = 7$ y $f_y(1,2) = 1^5 + 4(2) = 9$
2. Dada $f(x,y) = ln(\frac{x}{1+y})$. Calcular $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$
Lo primero que notamos es que la función va a estar definida siempre que $y \neq 0$ pero además de eso el cálculo interno debería ser mayor a 1.
Sabiendo esto, vamos a calcular:

- $f_x(x,y) = \frac{1}{\frac{x}{1+y}} * \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{1+y}) = \frac{1+y}{x} * \frac{1}{1+y} = \frac{1}{x} \to$ Acá derivamos sobre x
- $f_y(x,y) = \frac{1}{\frac{x}{1+y}} * \frac{\partial}{\partial y}(\frac{x}{1+y}) = \frac{1+y}{x} * x(\frac{-1}{(1+y)^2}) = \frac{-1}{1+y} \to$ Acá derivamos sobre y.

Diferenciabilidad, Continuidad, Derivadas, Límites y Más

1. Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2*y*sen(\frac{1}{x^2+y^2})}{x^2+y^2}\ si\ (x,y)\ \neq (0,0) \\ 0\ si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Se pide

- a. Dar el dominio
- b. Analizar la continuidad en todo $\mathbb{R}^2$

- c. Analizar la diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$

Ítem a: El dominio es todo $\mathbb{R}^2$ porque si bien tenemos conflictos en la rama A con el punto $(0, 0)$ pues se indefine el argumento del sen, este punto está siendo capturado por la rama 2.
Ítem b: Para que sea continua debemos verificar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (f(x, y) = f(0, 0) = 0)$. Esto porque como el límite **tiende** a (0, 0) debemos verificar que este límite de exactamente 0 como dice la rama 2.
Lo primero que tenemos que notar rápidamente es que el árgumento del sen tiende a ∞ porque es del tipo $\frac{1}{0} = \infty$, ahora, como tenemos que acordarnos siempre, el sen se puede acotar por su rango que es $-1 \leq sen \leq 1$ entonces dejaríamos de tener un problema grande.
Lo segundo que podemos notar rápidamente es que tenemos algo del tipo $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ y sabemos que esto es ≤ 1.
Lo último que podemos notar es que si ya acotamos lo de la izquierda por 1, y el sen tambien por uno, entonces nos queda solo la y lo cual al evaluar nos arroja 0, entonces, por 0 por acotado sabemos que el límite es 0
Esto es una manera justificada de resolver el límite sin ni siquiera hacer mucho, ni tampoco sandwich, pero si se quisiera hacer sandwich sería algo así: $0 \leq |\frac{x^2*y*sen(\frac{1}{x^2+y^2})}{x^2+y^2}|$
$= |\frac{x^2}{x^2+y^2}| * |y| * |sen(\frac{1}{x^2+y^2})|$
$\leq 1 * |y| * 1$
Luego, como y tiende a 0, entonces evaluamos y = 0 y nos queda un 0
$= 1 * 0 * 0 = 0$
Entonces, por sandwich probamos que el límite existe y es 0.
Por último, la continuidad es todo $\mathbb{R}^2$ pues la rama A al ser producto de continuas, cociente de continuas es continua, y en el único punto conflictivo que hay, se encarga la rama B de resolver eso.
Ítem c: Recordemos que para que sea diferenciable primero necesitamos considerar un punto que queramos evaluar, en este caso, vamos a probar con el (0,0). Entonces, por definición esto debería dar 0.

Derivadas Direccionales

Ejemplo 1.: Vamos a hacerlo por definición Dada $f(x, y) = x + 2y, (x_0, y_0) = (1, 2)$ y $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.
Lo primero que tenemos que ver es si efectivamente el vector v está normalizado, es decir, tiene norma 1
Por lo tanto $|v| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$
Ahora planteamos el límite $\lim_{t\to0} \left(\frac{f((1,2)+t(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}))-f(1,2)}{t}\right) = \lim_{t\to0} \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$
Luego, $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$
Ejemplo 2.: $f(x, y) = x^2y^3 - 4x + y, (x_0, y_0) = (1, 2)$ calcular la razón de cambio de f en la dirección dada por $v = (3, 4)$ en x_0, y_0

- Calculamos $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 - 4$
- Calculamos $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2x^2 + 1$

Entonces tenemos $\nabla f(1, 2) = (12, 13)$
Luego, observamos que el vector director $(3, 4)$ no es de módulo 1 por lo tanto lo normalizamos dividiendolo por su módulo $|v| = 5$, entonces $u = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$
Luego, por el teorema de la diferenciabilidad $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 2) = \nabla f(1, 2) = (12, 13) * (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = \frac{166}{5}$

Direcciones de Máximo y Mínimo Crecimiento

Un insecto se halla en un ambiente tóxico. El nivel de toxicidad está dado por $T(x, y) = 2x^2 - 4y^2$.
Si el insecto está en el punto $(x_0, y_0) = (-1, 1)$
¿En qué dirección se debe mover para disminuir la toxicidad?
Calcule la dirección de máximo, y mínimo cambio.
Como f es diferenciable, porque es un polinomio, y los polinomios son continuos entonces podemos aplicar el teorema que nos dice que: $\frac{\partial T}{\partial v}(-1, 1) = \nabla T(-1, 1) * \frac{v}{||v||}$
Empecemos calculando las derivadas parciales de f: $\frac{\partial T}{\partial x} = 4x$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = -8y$
Ahora evaluemos el gradiente, en el punto que nos piden (-1, 1): $\nabla t(-1, 1) = (-4, -8)$
Si dejaramos esta dirección, estaríamos acercando al insecto a la toxicidad: (-4, -8) **representa la dirección de máximo cambio**.
Por lo tanto, tenemos que hacer lo contrario.
Luego, $v = \nabla T(x, y) = -(-4, -8) = (4, 8)$: (4, 8) **representa la dirección de mínimo cambio (máxima disminución)**
Ahora sí, entonces, notamos que antes de calcular lo que necesitamos es normalizar el vector, luego $v = \frac{-\nabla t(-1,1)}{||\nabla(-1,1)||} = (\frac{4}{\sqrt{80}}, \frac{8}{\sqrt{80}})$
Este vector v representa la dirección unitaria a la cual el insecto debe moverse para disminuir la toxicidad.
Ahora, por último calculemos el **cambio máximo de disminución** en la toxicidad al moverse en la dirección del vector normalizado V.

$\frac{\partial T}{\partial v} = \triangledown T(-1,1) * V = -||\triangledown T(-1,1)|| = -\sqrt{80}$
Luego,

- El gradiente positivo señala la dirección de mayor aumento de toxicidad. Si el insecto se mueve en esa dirección, experimentará el aumento más rápido de toxicidad.
- El gradiente negativo es la dirección en la que la toxicidad disminuye más rápidamente, o sea, la mejor dirección si el insecto quiere escapar de la toxicidad.

Halle la expresión del resto & estimar el error

1. Sea $f(x) = \sqrt{1+x}$, calcule el Polinomio de Maclaurin de orden 2, halle la expresión del resto y estime el error que se comete al aproximar f(0,2) por p(0,2)
Calculemos primero todas las derivadas hasta orden 3 inclusive, porque como nos piden de orden 2, necesitamos la derivada extra para la expresión del resto.
Como el Polinomio de Maclaurin está centrado en (0,0) calculemos entonces las derivadas y evaluemos cada función en ese punto.

- $f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$
- $f''(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}}$
- $f'''(x) = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)(1+x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}$

Evaluamos entonces

- $f(0) = 1$
- $f'(0) = \frac{1}{2}$
- $f''(0) = -\frac{1}{4}$

Por lo tanto, nuestro $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$
Calculamos ahora la Expresión del Resto: $R_2 = \frac{f'''(c)(x-0)^3}{3!} \equiv \frac{f'''(c)(x)^3}{6} \equiv \frac{\frac{3}{8}*(1+c)^{-\frac{5}{2}}*x^3}{6} \equiv \frac{\frac{1}{8}*(1+c)^{-\frac{5}{2}}*x^3}{2} \equiv \frac{x^3}{16} * \frac{1}{(1+c)^{\frac{5}{2}}}$
Ahora sí, veamos cuanto nos da nuestro Polinomio de Taylor evaluado en (0,2): $P(0,2) = 1 + \frac{1}{2}(0,2) - \frac{1}{8}(0,2)^2 = 1{,}095$
Ahora sí que tenemos nuestra expresión R_2 podemos ver qué cantidad en error tiene ese 1.095 (**importante**: Hacer el CÁLCULO sin CALCULADORA. Luego veremos por qué)
Evaluamos la expresión del resto, $\frac{(0,2)^3}{16} * \frac{1}{(1+c)^{\frac{5}{2}}}$ y recordemos ahora, que nuestro c debe estar acotado por x_0 y x. Entonces, $0 < c < 0,2$
Ahora tenemos que acotar, es decir, debemos encontrar un rango, por lo tanto definimos $e_2(x) = |R_2(x)|$
Por lo tanto $e_2(0{,}2) = \left|\frac{(0,2)^3}{16} \cdot \frac{1}{(1+c)^{\frac{5}{2}}}\right|$
Ahora la idea es llevar el $0 < c < 0,2$ a algo parecido a $(1+c)^{\frac{5}{2}}$. Nótese que es lo único que nos importa pues depende de c.

- $1 < c+1 < 0,2+1$
- $1^{\frac{5}{2}} < (c+1)^{\frac{5}{2}} < (1,2)^{\frac{5}{2}}$

Luego, como ya tenemos exactamente lo que queríamos, ahora queda simplemente elegir qué termino nos conviene conservar. En este caso nos conviene quedarnos con el más grande porque es el **peor caso**.
Entonces, tenemos que $\frac{1}{1^{\frac{5}{2}}} > \frac{1}{(1+c)^{\frac{5}{2}}} > \frac{1}{(1,2)^{\frac{5}{2}}}$.
Por lo tanto, ahora nuestra expresión nos queda $\left|\frac{(0,2)^3}{16} \cdot \frac{1}{1^{\frac{5}{2}}}\right| = \frac{1}{80}$
Entonces, $e_2(0,2) < \frac{1}{80}$.
Ahora, evaluemos $f(0,2)$ con calculadora. Nos da 1.095445115 clavado, entonces, como a nosotros en el Polinomio nos dió 1,095 los decimales que faltan, es justamente el error que calculamos, es decir, la diferencia entre ambos numeros es $< \frac{1}{80}$
2. Calcule la expresión del resto genérico para un Polinomio de Taylor de Grado 2 en dos variables.
Como nos piden el Polinomio de Taylor de Grado 2, la expresión del resto necesitamos calcular una derivada más.
Por lo tanto, la expresión del resto sería algo así (todas las combinaciones de las derivadas): $R_2 = \frac{f_{xxx}(x_0,y_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f_{yyy}(x_0,y_0)}{3!}(y-y_0)^3 + \frac{f_{xxy}(x_0,y_0)}{3!}(x-x_0)^2(y-y_0) + \frac{f_{xyx}(x_0,y_0)}{3!}(x-x_0)^2(y-y_0) + \frac{f_{yxx}(x_0,y_0)}{3!}(x-x_0)^2(y-y_0) + \frac{f_{yyx}(x_0,y_0)}{3!}(x-x_0)(y-y_0)^2 + \frac{f_{yxy}(x_0,y_0)}{3!}(x-x_0)(y-y_0)^2 + \frac{f_{xyy}(x_0,y_0)}{3!}(x-x_0)(y-y_0)^2$
¿Qué es lo que podemos notar? Que hay varios términos que coinciden, es decir, tienen en común $(x-x_0)(y-y_0)^2$ y $(x-x_0)^2(y-y_0)$. Por lo tanto, esto significa que las derivadas van a dar **exactamente igual**, porque justamente, cuando tenemos que calcular el Polinomio de Taylor y el resto estamos en C^n con $n \in \mathbb{N}$.
Entonces ahora el problema se reduce a simplemente saber que vamos a tener 4 términos nada más.

Cuando tenemos dos apariciones de x podemos elegir cualquier derivada, y lo mismo con las de y porque dan exactamente igual.
Luego, $R_2(x,y) = \frac{f_{xxx}(c_1,c_2)}{6}(x-x_0)^3 + \frac{f_{yyy}(c_1,c_2)}{6}(y-y_0)^3 + 3\frac{f_{xxy}(c_1,c_2)}{6}(x-x_0)^2(y-y_0) + 3\frac{f_{yyx}(c_1,c_2)}{6}(x-x_0)(y-y_0)^2 \equiv \frac{f_{xxx}(c_1,c_2)}{6}(x-x_0)^3 + \frac{f_{yyy}(c_1,c_2)}{6}(y-y_0)^3 + \frac{f_{xxy}(c_1,c_2)}{2}(x-x_0)^2(y-y_0) + \frac{f_{yyx}(c_1,c_2)}{2}(x-x_0)(y-y_0)^2$
Conclusión: No siempre es necesario colocar todas las derivadas, sino que las que coincidan en misma cantidad de variables dan exactamente igual.
3.: Sea $f(x,y) = xe^y$

- Calcular T_1 centrado en $(1,0)$
- Aproximar $F(0{,}98; 0,02)$ con $T_1(x,y)$
- Estimar/Acotar el error cometido.

Calculemos las derivadas y lo que valen ahí.

- $F(1,0) = 1 * e^0 = 1$
- $F_x = e^y + x * e^y * 0 = e^y = F_x(1,0) = e^0 = 1$
- $F_y = xe^y = F_y(1,0) = 1 * e^0 = 1$
- $F_{xx} = 0$
- $F_{yy} = xe^y$
- $F_{xy} = e^y$

Entonces, $T_1(x,y) = 1 + x - 1 + y = x + y$
$F(0,98; 0,02) = 0{,}93858$ y $T_1(0,98; 0,02) = 1$
La expresión del resto en este caso depende de las derivadas f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} pero ojo, sabemos que tambien indirectamente tenemos f_{yx} pero como solamente es lo mismo que xy con las letras permutadas entonces vamos a tener un 2 delante del término que se terminará cancelando con el factorial de 2.
$R_1(x,y) = \frac{f_{xx}(c_1,c_2)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f_{yy}(c_1,c_2)}{2!}(y-y_0)^2 + 2\frac{f_{xy}(c_1,c_2)}{2!}(x-x_0)(y-y_0) = \frac{f_{xx}(c_1,c_2)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f_{yy}(c_1,c_2)}{2!}(y-y_0)^2 + f_{xy}(c_1,c_2)(x-x_0)(y-y_0)$
Reemplazando por lo que tenemos: $R_2(x,y) = \frac{f_{xx}(c_1,c_2)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f_{yy}(c_1,c_2)}{2!}y^2 + f_{xy}(c_1,c_2)(x-1)y = \frac{c_1 e^{c_2}}{2}y^2 + e^{c_2}(x-1)y$
Definamos entonces ahora lo que queremos acotar. Sabemos que $0,98 < c_1 < 1$ y $0 < c_2 < 0,02$
Definimos $e_1(x,y) = |R_2(x,y)|$, y evaluamos en el punto que nos piden: $e_2(0,98; 0,02) = \left|\frac{c_1}{2} * 0,0004 * e^{c_2} - 0,0004 * e^{c_2}\right| \overset{DT}{\leq} |c_1 * 0,0002 * e^{c_2}| + |0,0004 * e^{c_2}| = |c_1| * |0,0002| * |e^{c_2}| + |0,0004| * |e^{c_2}|$
El único rompecabezas acá sería rearmar en base a $0 < c_2 < 0,02$ el e^{c_2}, nos queda $e^0 < c_2 < e^{0,02}$ en este caso el caso más copado para acotar es encontrar el peor caso entre 0 y 0,02 que sea entero. Por lo tanto acotamos con $< e^1 = e < 3$.
Finalizando, $< 0,0006 + 0,0012 = 0,0018$
Luego, $e_1(0,98; 0,02) < 0,0018$

Cálculo de Puntos Crítico & determinar si son Extremos Locales

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$
Sabemos por el Teorema de Fermat generalizado, el gradiente evaluado en un punto p_0 debe ser el vector 0.
Por lo tanto, calculemos el gradiente y veamos que valores de (x,y) dan 0 $\implies \nabla f(x,y) = 2(x,y) = (0,0) \implies (x,y) = (0,0)$.
En este caso el único punto crítico es (0,0).
Como $f(0,0) = 0$ y sabemos que $f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0,0)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ entonces $(0,0)$ es mínimo global de f en todo $\mathbb{R}^2$.
Hagamos este ejercicio también pero con la Matriz Hessiana

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora evalúemos en el punto crítico.
$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
Ahora calculemos su determinante, esto nos queda $d = det\ Hf(0,0) = (2*2) - (0*0) = 4$.
Volviendo al criterio de las derivadas segundas en dos variables, como $d > 0$ y $f_{xx}(p_0) > 0$ entonces p_0 es mínimo local de f.

2. $f(x,y) = x^2 - y^2$
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$
Sabemos por el Teorema de Fermat generalizado, el gradiente evaluado en un punto p_0 debe ser vector 0.

Por lo tanto, calculemos el gradiente y veamos qué valores de (x, y) dan 0 $\implies \nabla f(x,y) = (2x, -2y) = 0 \implies x, y = 0$. En este caso el único punto crítico es (0,0).
Si o bien (0,0) es un máximo o bien un mínimo.
Proponemos

- $f(x, 0) = x^2 \geq 0 = f(0,0)$
  - Por la recta $y = 0$ sucede que $(0,0)$ es un mínimo pues $f(x,0) \geq 0$ para cualquier x.
- $f(0, y) = -y^2 \leq 0 = f(0,0)$
  - Por la recta $x = 0$ sucede que $(0,0)$ es un máximo pues $f(0,y) \leq 0$ para cualquier y.

Como por un lado es un mínimo y por otro un máximo, entonces el $(0,0)$ no es máximo ni mínimo.
Hagamos este ejercicio también pero con la Matriz Hessiana

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ahora evalúemos en el punto crítico.
$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
Ahora calculemos su determinante, esto nos queda $d = det\ Hf(0,0) = (2 * -2) - (0 * 0) = -4$.
Volviendo al criterio de las derivadas segundas en dos variables, como $d < 0$ entonces estamos en el caso donde p_0 es un punto silla de f.
Nota: $\leq$ o $\geq$ depende del signo del término.

3. Calcular los puntos críticos de $f(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + 2y^2 - 4xy$
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciable.
Calculemos el gradiente $\nabla f(x,y) = (x^3 - 4y, 4y - 4x) = (0,0)$
Esto sucede si $\iff \begin{cases} x^3 - 4y = 0 \\ 4y - 4x = 0 \iff y = x \end{cases}$

Si y = x $0 = x^3 - 4y = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0$ y acá nos quedan tres casos $\iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Entonces los puntos críticos son: $\{(0,0), (2,2), (-2,-2)\}$
Hagamos este ejercicio también pero con la Matriz Hessiana
$\nabla f(x,y) = (x^3 - 4y, 4y - 4x) = (0,0)$ sí y solo sí $(x,y) = (0,0), (2,2)\ o\ (-2,-2)$
$H_f = \begin{pmatrix} 3x^2 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$
Veamos ahora caso por caso:
Caso $(0,0)$: $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$
Sea $d = det(H_f(0,0)) = (0 * 4) - (-4 * -4) = -16$ entonces como $d < 0$ entonces el $(0,0)$ es un punto silla.
Caso $(2,2)$: $H_f(2,2) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$
Sea $d = det(H_f(0,0)) = (12 * 4) - (-4 * -4) = 32$ entonces como $d > 0$ y $f_{xx} > 0$ entonces el $(0,0)$ es un mínimo local de f.
Caso $(-2,-2)$: $H_f(2,2) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$
Sea $d = det(H_f(0,0)) = (12*4) - (-4*-4) = 32$ entonces como $d > 0$ y $f_{xx} > 0$ entonces el $(-2,-2)$ es un mínimo local de f.

Teorema de Weierstrass

Cuando nos piden calcular extremos absolutos, bajo ninguna circunstancia vamos a usar el hessiano porque el hessiano nos sirve para calcular extremos relativos/locales.
Antes de usar este teorema, siempre hay que acordarse de justificar que f está definida, es continua y existe un $A \subseteq \mathbb{R}^n$ donde f alcanza máximo y mínimo.
A^0: Denota el Conjunto Acotado sin considerar el borde.
Hay un algoritmo bastante particular para hacer estos ejercicios y es el siguiente:

- Busco en A^0 cuando $\nabla f(x,y) = (0,0)$ y donde no exista el gradiente.
- Busco en ∂A

- Opción 1: Parametrizamos todas las partes de cada uno de los bordes y analizamos $f(\alpha(t))$ donde α es la parametrización.
- Opción 2: Multiplicadores de Lagrange

Ejercicio 1.: Hallar extremos absolutos de $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ restringida a $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$
Lo primero que tenemos que hacer es ver qué figuras son f y A.
En este caso f es un paraboloide mientras que A es una circunferencia de radio 2. La idea sería dibujarlos de forma aproximada, aunque lo obligatorio de dibujar es A.
Como nos piden extremos absolutos, sabemos que como estamos en una región A tenemos que ver si esta es compacta, es decir, si es cerrada y acotada.
Recordemos que un conjunto A es acotado si existe una bola tal que mi conjunto A está encerrado en ella, y es cerrada si todos los puntos de la frontera de A son parte del conjunto A.
Por lo tanto, como A es acotado, entonces por el teorema de Weierstrass sabemos que siendo f existe,es continua y A compacto entonces existe máximo y mínimo absoluto restringido a A.
Ahora sí, veamos el **interior del conjunto A**, es decir $A^0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4\}$. En este caso tenemos que ver buscar puntos críticos, es decir los $\triangledown f(x,y) = (0,0)$. Tenemos que usar el gradiente cuando estamos en interiores por definición de la derivada.
Llegamos a que el gradiente se anula sí y solo sí $x = -1$ $y = 0$.
Ahora lo que tenemos que ver es si este punto verifica la ecuación de la región restringida, porque justamente estamos buscando los extremos ahí adentro: $(-1)^2 + 0^2 < 4$ y por lo que podemos ver satisface la ecuación. Por lo tanto, encontramos $P_1 = (-1,0)$
Ahora sí, veamos el **borde del conjunto A**, es decir, $\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$
Nota: Próximamente veremos como resolver este tipo de problemas del borde usando Multiplicadores de Lagrange, pero por ahora lo veremos de esta manera porque hay casos donde no podemos usar Lagrange y sí o sí hay que entender esta forma.
Lo primero que hacemos cuando tenemos ∂A es parametrizar, entonces: $\alpha(t) = (2cos(t), 2sen(t))$ con $[0, 2\pi]$. Nótese que acá estamos usando $[0,2\pi]$ aunque 0 y 2π sean el mismo punto en una circunferencia, pero esto lo hacemos porque Weierstrass nos pide un intervalo cerrado.
Como ahora tenemos parametrizada la región del borde, la idea es acoplarla a la función original que tenemos, por lo tanto, esa es la idea de la composición: $(f \circ \alpha)(t) = g(t)$ en $[0,2\pi]$. Y ahora es exactamente como si estuviesemos calculando puntos críticos.
Entonces, los puntos críticos que nos vamos a encontrar salen de $\begin{cases} g'(t) = 0 \iff (2cos(t)+1)^2 + 4sen^2(t) \\ 0 \text{ y } 2\pi \end{cases}$
Nota: Nótese que los extremos también son candidatos.
Es muy, muy importante acá la trigonometría ¿por qué? porque a la hora de desarrollar antes de derivar nos va a quedar $4cos^2 + 4cos(t) + 1 + 4sen^2(t)$ y como tenemos $4cos^2(t) + 4sen^2(t)$ esto es $4*1$ pues $cos^2(t) + sen^2(t) = 1$. Siguiendo el calculo, nos queda que $g(t) = 4cos(t) + 5$.
Por lo tanto, calculamos la derivada para ver sus puntos críticos y nos queda $g'(t) = -4sen(t)$. Esto es 0 sí y solo sí $t = 0, \pi, 2\pi$.
Ahora, ojo, estos t no son puntos críticos porque nosotros estamos trabajando en $\mathbb{R}^2$ entonces lo que tenemos que hacer es enchufar estos t en un lugar donde nos devuelva dos variables ¿donde? en $\alpha(t)$.
Luego, los puntos críticos que nos quedan son: $\alpha(0) = (2,0) = P_2$, $\alpha(\pi) = (-2,0) = P_3$, $\alpha(2\pi) = (2,0) \equiv P_2$
Finalizando, comparamos entre todos los candidatos y nos queda que:

- f(-1, 0) $= 0$
- f(2, 0) $= 9$
- f(-2, 0) $= 1$

Concluyendo, el mínimo absoluto se alcanzará en $P_1 = (-1,0)$ y el máximo absoluto se alcanzará en $P_2 = (2,0), P_4 = (2,0)$.
Ejercicio 2 (**parcial**). Sea $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2+y^2}$

- a. Hallar extremos locales en $A^0 = \{x^2 + y^2 < 4\}$
- b. Hallar extremos absolutos en $A = \{x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y\}$

Como la región A es compacta, es decir, cerrada y acotada. Por Weierstrass f alcanza mínimo/máximo absoluto en A.
Inciso a: Como nos piden los extremos locales lo que tenemos que calcular es $\triangledown f(x,y) = (0,0)$. Luego de haber hecho esto, vemos si estos puntos efectivamente pertenecen al interior de la región A^0, es decir, si están en $x^2 + y^2 < 4$. Para finalizar este inciso, tenemos que también utilizar el Hessiano para clasificar a el/los puntos que encontramos.
Por lo tanto, empecemos a derivar. Acá hay bastante regla de la cadena asi que ojo.

- f(x,y) $= (x^2+y^2)e^{x^2+y^2}$
- fx(x,y) $= (2x)e^{x^2+y^2} + (x^2+y^2)e^{x^2+y^2}(2x) = 2xe^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)$
- fy(x,y) $= (2y)e^{x^2+y^2} + (x^2+y^2)e^{x^2+y^2}(2y) = 2ye^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)$

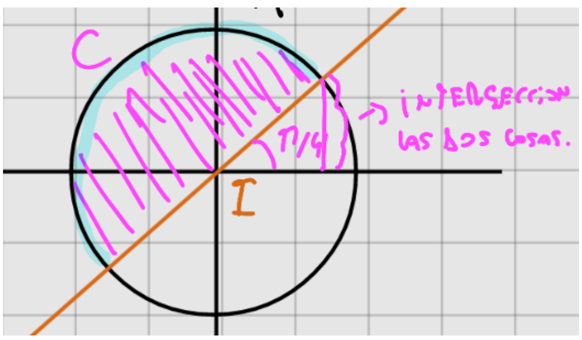
- fxx(x,y) $= 2e^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2) + 2xe^{x^2+y^2}(2x)(1+x^2+y^2) + 2xe^{x^2+y^2}(2x) = 2e^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2) + 4x^2e^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2) + 4x^2e^{x^2+y^2} = 2e^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2+2x^2(1+x^2+y^2)+2x^2)$
- fxy(x,y) $= 2xe^{x^2+y^2}(2y)(1+x^2+y^2) + 2xe^{x^2+y^2}(2y) = 4xye^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2) + 4xye^{x^2+y^2} = 4xye^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2+1)$
- fyy(x,y) $= 2e^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2) + 2ye^{x^2+y^2}(2y)(1+x^2+y^2) + 2ye^{x^2+y^2}(2y) = 2e^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2) + 4y^2e^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2) + 4y^2e^{x^2+y^2} = 2e^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2+2y^2(1+x^2+y^2)+2y^2)$

No es necesario buscar fyx porque al ser C^∞ vale el teorema de Clairaut.
Por lo tanto, ahora sí, veamos cuando se anula el gradiente.
$$\begin{cases} 2xe^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2) = 0 \\ 2ye^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2) = 0 \end{cases}$$
Observando ambas ecuaciones a la vez, como la exponencial no puede ser 0, y el término que está entre paréntesis siempre es positivo, la única forma de hacer esto 0 es que $x, y = 0$
Por lo tanto, ahora chequeamos si el punto $(0,0) \in A^0$ y efectivamente vale pues $0^2 + 0^2 < 4$. Entonces, nuestro $P_1 = (0,0)$ es un punto crítico.

Ahora clasifiquémoslo $H_f = \begin{pmatrix} 2e^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2+2x^2(1+x^2+y^2)+2x^2) & 4xye^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2+1) \\ 4xye^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2+1) & 2e^{x^2+y^2}(1+x^2+y^2+2y^2(1+x^2+y^2)+2y^2) \end{pmatrix}$

Evaluando en el (0,0) y calculando el determinante nos queda $det(H_f(0,0)) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Luego, $(2*2) - (0*0) = 4$ por lo tanto, como el determinante es mayor que 0 entonces el punto (0,0) es mínimo local.
Inciso b: Ahora tenemos que concentrarnos en ∂A es decir, el borde de A.
En este caso, vamos a darle mucha importancia a $x^2 + y^2 = 4, x \leq y$



Como la región que queremos ver está cortada por una recta y la circunferencia no está completamente pintada, acá tenemos que separar el trabajo en dos partes.
El primer trabajo es analizar la recta y el segunda es analizar ese pedazo de circunferencia.
Recta: Para poder saber como se mueve una partícula dada a través de esa recta, debemos saber el desde **donde** hasta **donde** se mueve. Para esto, podemos calcular la intersección entre la recta y la circunferencia.
Entonces, calculando la intersección nos queda que $2x^2 = 4 \iff x^2 = \sqrt{2} \iff x = \pm\sqrt{2}$.
Como por dato sabemos que $x = y$, entonces, sabemos que los vértices de la recta son $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ y estos puntos valen como candidatos.
Entonces, ahora que ya sabemos los límites de la recta, parametricemos y componemos con f para saber qué puntos de la recta nos interesan.
Recordar: La parametrización de una recta es asignarle $x = t$ mientras que la **y** queda igual pero con **las ocurrencias de x reemplazadas por t**.
$\sigma_1(t) = (t, y = t) \iff (t, t)\ t \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
$h(t) = (f \circ \sigma_1)(t) = t^2 + t^2 \iff 2t^2$
Ahora derivamos para ver qué puntos críticos tiene esta función: $h'(t) = 4t = 0 \iff t = 0$.
Por lo tanto, ahora volviendo a σ_1 y evaluando con $t = 0$ nos queda $\sigma_1(0) = (0,0)$ pero este punto **no vale** pues no pertenece a ∂A.
Circunferencia: Tenemos que saber como se va a mover el ángulo. Como vemos que la recta es por así decirlo la que nos indica desde donde empezamos a contemplar la circunferencia, podemos calcualr el ángulo que tiene esa recta haciendo $arctan(1)$ pues la pendiente de la recta $y = x$ es 1. El resultado de esto es $\frac{\pi}{4}$ y como el ángulo es simétrico va hasta $1 + \frac{1}{4} \equiv \frac{5\pi}{4}$

Entonces, parametrizamos la circunferencia que recordemos que es de la siguiente manera $\begin{cases} x = rcos(t) + Cx \\ y = rsen(t) + Cy \end{cases}$

Ojo: Recordar que Cx, Cy son el valor original del centro. Es decir, si es $(x+1)^2 + (y-1)^2$ el centro es $(-1, 1)$ por lo tanto $Cx = -1, Cy = 1$

Entonces nos queda $\sigma_2(t) = \begin{cases} x = 2cos(t) \\ y = 2sen(t)\ con\ t[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}] \end{cases}$

Ojo: Acá es el intervalo cerrado porque así lo dice Weierstrass

$j(t) = (f \circ \sigma_2(t)) = (2cos(t))^2 + (2sen(t))^2 = 4cos^2(t) + 4sen^2(t) = 4$
Ahora, derivando... $j'(t) = 0$ entonces esto nos indica que todos los puntos son candidatos.
Finalizando, evalúemos los puntos en f que encontramos, es decir: $P_1 = (0,0)$ que lo conseguímos del interior, $P_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ y $P_3 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$
$f(P_1) = 0$
$f(P_2) = ((\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2)e^{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = 4e^4$
$f(P_3) = ((\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2)e^{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = 4e^4$
Luego, f alcanza máximo absoluto en P_2 y P_3 y mínimo absoluto en P_1.

Multiplicadores de Lagrange

Recordemos que los Multiplicadores de Lagrange solo nos sirve para estudiar los bordes. Es un teorema más fuerte que el teorema de fermat que nos decía que si la derivada se anula entonces es un punto crítico.
La idea de Lagrange es usarlo cuando nos dan una curva de nivel la cual estamos restringidos.
Voy a mostrar dos formas de hacerlo, una es la manera de la teórica y otra con la manera de la práctica.

Ejercicio 1. Sea $f(x,y) = x^2y$ y $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$
Como A es compacto, es decir, cerrado y acotado por Weierstrass f alcanza máximo y mínimo absoluto en A.
A^0: Veamos cuando se anula el gradiente de f y veamos si esos puntos están en A.
$\nabla(f) = (2xy, x^2) = (0,0)$
Como la segunda coordenada solo depende de x, notamos que $x = 0$ hace que la primera ecuación sea $2(0)y = 0$ pero y está totalmente libre, por lo tanto, hay que ver qué valores puede tomar y cuando x es 0.
Por lo tanto, si notamos la región A, tenemos que ver que $0^2 + y^2 < 9$ y podemos notar que al estar y^2 esta ecuación vale $\forall y(-3,3)$.
Por lo tanto, todos los puntos de la forma $(0, y)$ con y restringido desde (-3, 3) son puntos críticos.
∂A: Utilicemos Lagrange, por lo tanto nos quedaría el siguiente sistema

$$\begin{cases} 2xy = \lambda 2x \iff xy = \lambda x \\ x^2 = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Recordemos que la idea es **no pasar dividiendo** porque perdemos soluciones, pero hagamos un análisis antes de todo.
Los problemas más grandes son cuando $x = 0$ o $y = 0$, por lo tanto analicemos caso a caso. Esto nos sirve para después poder pasar dividiendo y no meter la pata con estos casos borde.
Caso x = 0: El sistema nos queda de esta forma

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = \lambda 2y \\ 0 + y^2 = 9 \end{cases}$$

De acá podemos sacar bastante información.

- De la segunda ecuación podemos notar que puede suceder que: $\lambda = 0$ o $y = 0$
  - Si $\lambda = 0$ entonces de la tercera ecuación que falta satisfacer podemos encontrar que $y = \pm 3$. Por lo tanto, $(0, \pm 3)$ vale con $\lambda = 0$.
  - Si $y = 0$ no nos sirve para nada porque la tercera ecuación no se satisface.

Por lo tanto, el único dato que pudimos rescatar es que si $x = 0$ entonces tenemos dos posibles soluciones $(0, \pm 3)$ y $\lambda = 0$
Caso y = 0: El sistema nos queda de esta forma

$$\begin{cases} 0 = \lambda 2x \\ x^2 = 0 \\ x^2 + 0 = 9 \end{cases}$$

Por la segunda ecuación estamos prácticamente obligados a que $x = 0$ pero ya de por si vemos que no satisface ni siquiera la tercera.
Por lo tanto, conclusiones

- $x = 0, y = 0$ no vale nunca.
- $x = 0, y = \pm 3$
- $y = 0$ no vale para ningun x en particular.

Ahora sí podríamos empezar a hacer pasajes sin tener ningún tipo de miedo acerca de que puedan ser potenciales 0's.
Despejando λ de la 3ra ecuación nos queda $\lambda = \frac{9}{2y} - \frac{1}{2}y$ y si lo ingresamos dentro de la primera ecuación nos queda $y^2 = 3 \equiv y = \pm\sqrt{3}$
Ingresando este dato nuevamente de la tercera ecuación nos queda que los puntos posibles son $(\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{3})$. El problema con esta foram de hacerlo sería que habría que buscar un lambda y empezar a ver si verifican todas las ecuaciones. Sin embargo,

en este caso las soluciones valen todas :).
¿Cómo sería una mejor forma de encarar esto? bueno, desde la primera ecuación pasar restando y hacer factor común para que nos quede $x(\lambda - y) = 0$ y se nos abren dos casos $x = 0, \lambda = y$. Acá el caso $x = 0$ lo vimos antes, pero es exactamente igual como llegamos antes. Si $\lambda = y$ por la segunda ecuación nos queda $x^2 = 2y^2$ que a su vez, en la tercera ecuación nos queda que $y = \pm\sqrt{3}$ y reemplazando en la segunda caso a caso nos queda $\pm\sqrt{6}$.
En esta forma de hacerlo, llegamos a los mismos resultados pero sigamos que tuvimos los lambda concretos para verificar todas las cuentas.
Luego, haciendo todas las evaluaciones llegamos a que f alcanza máximos absolutos en $(\sqrt{6}, \sqrt{3}), (-\sqrt{6}, \sqrt{3})$ y mínimos absolutos en $(\sqrt{6}, -\sqrt{3}), (-\sqrt{6}, -\sqrt{3})$
Ejercicio 2.
Sea $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 6xy$ calcule los extremos de f restringido a $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0\}$
Como A es cerrado y acotado por Weierstrass f alcanza máximo absoluto y mínimo absoluto en A.
Analicemos primero el interior A^0 donde las ecuaciones de A serían $\{x^2 + y^2 < 4, x > 0\}$
Calculemos el $\triangledown f(x, y) = (-2x + 6y, -2y + 6x) = (0, 0)$.

$$\begin{cases} -2x + 6y = 0 \\ -2y + 6x = 0 \end{cases}$$

Dividiendo todo por 2 nos queda $\begin{cases} -x + 3y = 0 \\ -y + 3x = 0 \end{cases}$

Luego $\begin{cases} x = 3y \\ -y + 3x = 0 \end{cases}$

Reemplazando en la segunda ecuación tenemos que $-y + 3(3y) = 0 \iff 8y = 0 \iff y = 0$.
Luego, reemplazando en la primera nos queda que $x = 0$.
Por lo tanto, el único punto crítico que sale de acá es el (0,0) pero no vale pues no satisface $x > 0$
Analicemos ahora el borde ∂A usando Lagrange y parametrizaciones.
Se puede ver claramente que la circunferencica no está entera, sino que solamente nos quedamos con la parte positiva. Es decir, la circunferencia está centrada pero empezamos a **considerar** a partir del $x \geq 0$ entonces, la circunferencia si hubiese que parametrizarla iría desde $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ y para parametrizar la recta es básicamente $(0, t)$ con t los valores donde tiene intersección la circunferencia y la recta.
Por lo tanto, busquemos la intersección, es decir, los iguales: $y^2 = 4 \iff y = \pm 2$. Entonces, los vértices a considerar son $P_1 = (0, 2), P_2 = (0, -2)$
Parametrizando la recta nos queda $\sigma_1(t) = (0, t)$ con $t \in (-2, 2)$
Componiendo $h(t) = (f \circ \sigma_1)(t) = (-t^2)$ y ahora sabemos que por Fermat, si la derivada se anula entonces es un posible punto crítico. Entonces $h'(t) = -2t = 0 \iff t = 0$. Volviendo a $\sigma_1(0)$, el punto resultante es $P_3 = (0, 0)$ y este vale porque satisface $x^2 + y^2 \leq 4$ y $x \geq 0$ y está en la recta.
Ahora sí, usemos Multiplicadores de Lagrange:
Nota: Acá vamos a tener que chequear también que los $x \geq 0$ se cumpla.

$$\begin{cases} -2x + 6y = \lambda 2x \\ -2y + 6x = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$ Veamos como siempre los casos más conflictivos primero.

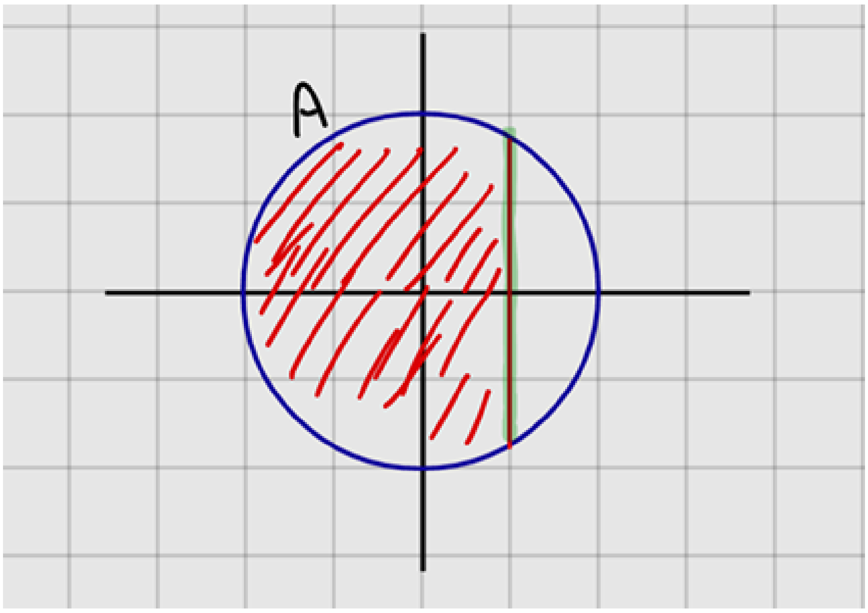
Caso $x = 0$: Por la primera ecuación queda $6y = 0$ entonces la única forma de que esto valga es que $y = 0$ pero si esto pasa, no se cumple la tercera ecuación. Por lo tanto, no hay forma de que $x = 0$. Caso $y = 0$: Por la segunda ecuación nos queda $6x = 0$, entonces la única forma de que esto pase es que $x = 0$ pero vimos que no cumple la tercera ecuación entonces no hay forma de que pasen simultáneamente.
Entonces sí o sí, podemos asumir que $x \neq 0$, $y \neq 0$
De la primera ecuación obtenemos $\lambda = \frac{-x+3y}{x}$
De la segunda ecuación obtenemos $\lambda = \frac{-y+3x}{y}$
Ahora igualando ambas ecuaciones λ nos queda $\frac{-x+3y}{x} = \frac{-y+3x}{y} \iff y(-x + 3y) = x(-y + 3x) \iff |y| = |x|$ es decir, $y = x, y = -x$.
Caso $y = x$: Por la ecuación 3 tenemos $2x^2 = 4 \iff x = \pm\sqrt{2}$.
Caso $y = -x$: Por la ecuación 3 tenemos la misma información, pero acá hay soluciones que tirar a la basura y son aquellas que tienen $x < 0$
Entonces, los puntos que encontramos de Lagrange son: $P_4 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $P_5 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
Luego, evaluando todos los puntos notamos que f alcanza máximo absoluto en P_4 y mínimo absoluto en P_5 **Ejercicio 3**. Sea $f(x, y, z) = x + y - 2z$. Hallar los extremos de f restringido a $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1\}$
Como acá no nos dan la curva de nivel explícitamente, la tenemos que armar, pero la idea es que $g(x, y, z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2$
Ahora calculamos los gradientes: $\triangledown f(x, y, z) = (1, 1, -2)$ y $\triangledown g(x, y, z) = (2x, \frac{y}{2}, 2z) \neq (0, 0, 0)$
Acá tenemos que justificar con que $g^{-1}(1)$ es compacto porque es cerrada y acotada, y por lo tanto entonces f por weirstrass

tiene un máximo absoluto y mínimo absoluto en g. $\begin{cases} 1.\ 1 = \lambda 2x \\ 2.\ 1 = \lambda \frac{y}{2} \\ 3.\ -2 = \lambda 2z \\ 4.\ x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1 \end{cases}$

Observaciones:

- $\lambda \neq 0$ porque si $\lambda = 0$ no tiene sentido, nos queda un absurdo en las ecuaciones.

Dividiendo por λ nos queda $x = \frac{1}{2\lambda}, y = \frac{2}{\lambda}, z = -\frac{1}{\lambda}$
Reemplazando en la ecuación 4, nos queda $\lambda = \pm\frac{3}{2}$. Luego, hay que buscar los x,y,z con $\lambda = \pm\frac{3}{2}$.
Finalmente, ver de esos puntos (que van a ser dos) ver cual es el máximo y cual el mínimo.
Ejercicio 4.: Este ejercicio es súmamente importante. Se dió varias veces en una práctica cambiando algún que otro dato, pero todos coinciden en lo que hay que hacer.
Sea $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x+1}$. Halle los extremos absolutos de f restringido a: $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 1\}$
Lo primero que notamos es que la región está restringida y tiene una intersección de condiciones, dibujemosla.



Cosas importantes a notar: ¿qué es lo que hacemos en este tipo de ejercicios? bueno, vemos el interior, los bordes con Lagrange pero ¿qué pasa en este caso? Con Lagrange no es suficiente porque tranquilamente podría haber un mínimo o máximo en la intersección resaltada en verde, esto es porque Lagrange nos restringe por la tercera ecuación a que sea la circunferencia entera.
Propongo la siguiente idea

- a. Analizar el interior de A, es decir, A^0 calculando el gradiente de f y viendo cuando se hace (0,0).
- b. Intersecar $x^2 + y^2$ con $x \leq 1$, parametrizar ese trozo y calcular los posibles puntos críticos.
- c. Calcular por Lagrange los bordes de A, y ver cuales cumplen la restricción (ojo, aca en Lagrange nos van a dar puntos demás. Tenemos que ver cuales cumplen $x \leq 1$)

a. $\nabla f(2xe^{-x+1} + (x^2 + y^2)e^{-x+1} * (-1), 2ye^{-x+1})$
La condición más sencilla de empezar a resolver es la segunda, vemos que lo único que puede ser 0 es la y, entonces, $y = 0$.
Reemplazamos en la primera ecuación y podemos sacar **factor común** para no perder soluciones: $e^{-x+1}(2x - x^2) = 0$. Acá lo único que se puede hacer cero es la condición interna.
Por lo tanto, esto solo sucede cuando $x = 0$ o $x = 2$ entonces los posibles puntos críticos son $(0, 0)$ y $(2, 0)$ pero $(2, 0) \notin A$.
Luego, $P_1 = (0, 0)$
b. $\alpha(t) = (1, t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
Para ver donde se mueve t veamos la intersección: $1 + y^2 = 4$ acá tenemos dos soluciones: $y \pm \sqrt{3}$. Esto lo que nos dice es por donde se mueve t. Ahora tenemos que hacer la composición.
Analicemos los puntos críticos de f con A en la intersección: $g(t) = (f \circ \alpha)(t) = (1 + t^2)e^{-1+1} = 1 + t^2$ con $t \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.
Recordemos que luego de hacer la composición, tenemos que considerar los vértices como posibles candidatos.
Como esta función es continua en el intervalo cerrado, entonces los puntos críticos podemos buscarlos en la derivada por el teorema de Fermat.
$g'(t) = 2t$ y esto es 0 sí y solo sí t = 0.
Ahora volvemos a $\alpha(t)$ y evaluamos en $t = 0$, $t \pm \sqrt{3}$ ¡importante! vemos que la derivada no nos dió ninguna información sobre el $\pm\sqrt{3}$ pero nosotros lo calculamos antes porque literalmente son los vértices.

Luego de evaluar en $\alpha(t)$ nos queda $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (1, -\sqrt{3})$, $P_4 = (1, \sqrt{3})$
c. Finalmente, ahora queda hacer Lagrange y ver qué puntos cumplen la condición mas importante $x \leq 1$.
Calculamos $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$.
$\Big\{1.e^{-x+1}(2x - (x^2 + y^2)) = \lambda 2x2.2ye^{-x+1} = \lambda 2y3.x^2 + y^2 = 4$
Lo primero que hay que recordar es que NO hay que cancelar de los dos lados porque se pierden soluciones, si hay algo en común juntarlos del mismo lugar y sacar factor común.
Usando 2: $2y(e^{-x+1} - \lambda) = 0$ esto pasa sí y solo sí $y = 0$ o $\lambda = e^{-x+1}$.
Caso $y = 0$ Reemplazamos en 1 y nos queda $e^{-x+1}(2x - x^2) = \lambda 2x$, como $x \neq 0$ pues $(0, 0)$ no cumple la tercera ecuación puedo despejar λ y siempre $\exists \lambda$ que cumple.
Reemplazando en la tercera nos queda $x^2 = 4$ que esto es $x \pm 2$.
Por lo tanto el único punto que nos sirve a nosotros, va a ser el $P_5 = (-2, 0)$
Caso $\lambda = e^{-x+1}$
Reemplazando en 1 llegamos a un absurdo.
Luego, viendo todos nuestros candidatos posibles el **mínimo absoluto de f en A** es el 0 con el punto (0,0) y el **máximo absoluto de f en A** es el $4e^3$ con el punto (-2, 0)

Integrales Impropias, Convergencia y Divergencia (idea)

- Ver cuales son los puntos conflictivos.
- Ver el denominador
  - Si tenemos exponente sospechar que vamos a usar series p.
  - Si tenemos una raíces, vamos a tener que usar fracciones simples.
- Si en el numerador tenemos muchas cosas como cos, sen, vamos a acotar por algo más grande. Es decir, por el máximo valor que pueden tomar.

Recordar que el criterio que más vamos a usar es el de comparación directa. Es decir, si empezamos con una integral f(x) y vamos acotando por algo mayor y llegamos a un resultado, esta f(x) está obligada a tender a lo mismo.
Es realmente importante notar que límites tienen las integrales. Si las integrales tienen infinito podemos muchas veces prescindir de información porque **no aportan nada**. Mientras que si las integrales no tienen infinito, no podemos usar ese truco.
En las Integrales que no tienden a infinito casi siempre tenemos que estar usando límites y analizar por cada lado.

Integrales Impropias, Convergencia y Divergencia

Determinar si las Integrales Impropias convergen o no.
Ejercicio 1: $\int_1^2 \frac{1}{x-2}dx$: Lo primero que hay que notar desde ya es que la integral tiene límites constantes, por lo tanto no podemos usar ninguna propiedad donde acotamos porque indicamos que en el infinito x cosa no aporta.
Lo segundo que podemos notar es que en el denominador tenemos una x, y en el numerador un 1. Esto se parece a series p pero de alguna manera tendríamos que sacarnos de encima el -2.
Como es una Integral bastante simple, probemos viendo qué pasa cuando hacemos el límite. Es decir, vamos a ver qué pasa cuando nos acercamos al 2 por izquierda.
$\lim_{t \to 2^-} \int_1^t \frac{1}{x-2}dx = lim_{t \to 2^-} ln|x-2|\Big|_1^t = lim_{t \to 2^-} ln|t-2| - ln|1-2| = lim_{t \to 2^-} ln|1{,}99-2| = lim_{t \to 2^-} ln(0^+) = -\infty$
Nota: $ln(0^+) = \infty$
Ejercicio 2: $\int_1^4 \frac{1}{x-2}dx$: Este no lo voy a hacer pero si está bueno justificar el por qué. Si nos damos cuenta, el problema está también en x = 2, por lo tanto para poder analizar el caso podemos separar en dos integrales $\int_1^2 \frac{1}{x-2}dx + \int_2^4 \frac{1}{x-2}dx$ y observando la integral de la izquierda, es la que hicimos antes acercándonos a 2 por izquierda y divergía. Por lo tanto, la Integral más grande $\int_1^4 \frac{1}{x-2}dx$ también diverge. Con esto quiero decir que si **una** de las integrales diverge, las demás también.
Ejercicio 2:$\int_1^4 \frac{1}{(x-2)(x-4)}dx$: Los problemas en esta integral vienen en $x = 2$ y en $x = 4$. Por lo tanto, lo primero que podemos hacer es hacer fracciones simples.
$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} = \frac{1}{(x-2)(x-4)}$
$\frac{A(x-4)+B(x-2)}{(x-2)(x-4)} = \frac{1}{(x-2)(x-4)}$
$A(x-4) + B(x-2) = \frac{(x-2)(x-4)}{(x-2)(x-4)}$
$A(x-4) + B(x-2) = 1$
A partir de ahora como tenemos que encontrar A y B simplemente los posibles valores a x que puede tomar, en este caso:

- Si $x = 4, 2B = 1 \implies B = \frac{1}{2}$
- Si $x = 2, -2A = 1 \implies A = -\frac{1}{2}$

Ahora reemplazamos en cada fracción en particular, es decir: $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} \equiv \frac{-\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-4}$
Volvemos a la Integral y nos queda: $\int_1^4 \frac{-\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{2}}{x-4} \equiv \int_1^4 -\frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x-4)}$. Ahora sí podemos separar la integral en dos por propiedades
$\int_1^4 -\frac{1}{2(x-2)} + \int_1^4 \frac{1}{2(x-4)}$
Ahora analicemos una por una en los puntos conflictivos. Recordar que con que una diverja, todo diverge. Entonces, tomemos la primera y separemos en dos intervalos.
$\int_1^2 -\frac{1}{2(x-2)} + \int_2^4 -\frac{1}{2(x-2)}$
Analicemos por izquierda la primera integral.
$-\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{(x-2)}dx$
Planteamos el límite: $\lim_{t\to 2^-} -\frac{1}{t}\int_1^2 \frac{1}{(x-2)}dx \overset{sustitucion}{=} \lim_{t\to 2^-} -\frac{1}{2}ln(|x-2|)\Big|_1^t = \lim_{t\to 2^-} -\frac{1}{2}(ln(|t-2|) - ln(|-1|)) = \lim_{t\to 2^-} -\frac{1}{2}(ln(0) - 0)$
Como entonces nos quedó $\lim_{t\to 2^-} -\frac{1}{2}(ln(0^+)) = \lim_{t\to 2^-} -\frac{1}{2}\infty = \infty \implies diverge$
Luego, toda la integral diverge.
Ejercicio 3: $\int_0^1 \frac{ln(x)}{x}$. Esta Integral tiene un problema en $x = 0$ por lo tanto, planteemos el límite y la integral. Sale rápido por sustitución: $\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x}ln(x)dx \overset{sust}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{ln^2(x)}{2}\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+} 0 - \frac{ln^2(t)}{2} = \lim_{t\to 0^+} -(-\infty)^2 = -\infty \implies diverge$

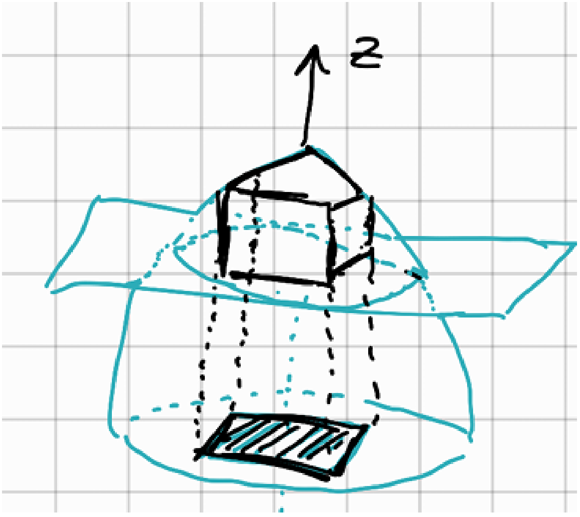
Integrales Impropias: Criterio de Comparación Directa

Criterio de Comparación Directa: Si tengo una función f y g ambas integrables en un intervalo cerrado y $f(x) \leq g(x)$ entonces si encuentro una función $g(x)$ mayor a $f(x)$ que converja, entonces f converge.
Si $g(x)$ diverge y $f(x) \geq g(x)$, entonces f diverge.
Ejercicio 1: $\int_1^{+\infty} \frac{x^2|sen(x)|}{(x^2+1)x^5}$
Vamos a usar el criterio de comparación directa, entonces acotemos para buscar funciones más grandes.
$\overset{sen}{\leq} \frac{x^2}{(x^2+1)x^5} = \frac{x^2}{x^7+x^5} \overset{x^7>x^5}{\leq} \frac{x^2}{x^7} = \frac{1}{x^5} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5}$ Esta función g que encontramos, es decir $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5}$ converge pues $p > 1$. Luego, como $f(x) \leq g(x)$ entonces por el criterio de comparación directa $f(x)$ también converge.
¿A qué valor converge?: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^5}dx = \int_1^{\infty} x^{-5}dx = \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{x^{-4}}{4} = \frac{1}{\frac{x^4}{4}} = \frac{1}{4x^4}\Big|_1^{\infty} = (0 + \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$

Integrales Iteradas

Es exactamente la misma idea que cuando derivabamos pero ahora integramos y aplicamos Barrow. Recordar siempre que si empezamos por x o y da igual. Por teorema vamos a llegar al mismo resultado.
1. Calcular $\int_0^1 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\ dx\ dy$
Primero arrancamos poniendo los corchetes (importante y obligatorio): $\int_0^1 [\int_{-1}^1 (x^2 + y^2 dx)]dy = \int_0^1 (\frac{x^3}{3}y + y^2x)\Big|_{-1}^1 dy \overset{barrow}{=} \int_0^1 [(\frac{1}{3} + y^2) - (-\frac{1}{3} - y^2)]\ dy = \int_0^1 (\frac{2}{3} + 2y^2)\ dy = (\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}y^2) = ((\frac{2}{3}(1) + \frac{2}{3}(1)) - (\frac{2}{3}(0) - \frac{2}{3}(0))) = \frac{4}{3}$
2. Calcular el volúmen del sólido encerrado por las superficies $z = 3$, $z = -x^2 - y^2 + 6$, $x = -1$, $x = 1$, $y = -1$, $y = 1$.
La idea acá es primero, repasar las cúadricas porque nos van a hacer dibujar. La cúadrica en este caso es un paraboloide triste :(
El Rectángulo está dado por $R = [-1, 1]x[-1, 1]$
El Volúmen lo calculamos como $V(S) =$ Techo - Piso $= \int\int(-x^2 - y^2 + 6 - 3)\ da$
Esto se calcula exactamente igual que con Iteradas y con la misma idea de cuando calculábamos área, es decir, debemos notar cual es el piso y cual es el techo.

En este caso, si dibujamos notaremos que el techo es el paraboloide y el piso el plano.



Integrales en Regiones Elementales

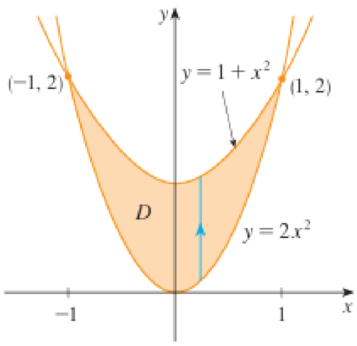


FIGURA 8

V EJEMPLO 1 Evalúe $\iint_D (x + 2y)\, dA$, donde D es la región acotada por las parábolas $y = 2x^2$ y $y = 1 + x^2$.

SOLUCIÓN Las parábolas se cortan cuando $2x^2 = 1 + x^2$, es decir, $x^2 = 1$; por tanto, $x = \pm 1$. Se nota que la región D, bosquejada en la figura 8, es una región tipo I, pero no una región tipo II, y se puede escribir

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ 2x^2 \leqslant y \leqslant 1 + x^2\}$$

Puesto que la frontera inferior es $y = 2x^2$ y la frontera superior es $y = 1; + x^2$, la ecuación 3 da

$$\begin{aligned}
\iint_D (x + 2y)\, dA &= \int_{-1}^{1} \int_{2x^2}^{1+x^2} (x + 2y)\, dy\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left[xy + y^2\right]_{y=2x^2}^{y=1+x^2} dx \\
&= \int_{-1}^{1} [x(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 - x(2x^2) - (2x^2)^2]\, dx \\
&= \int_{-1}^{1} (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1)\, dx \\
&= -3\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \Bigg]_{-1}^{1} = \frac{32}{15}
\end{aligned}$$

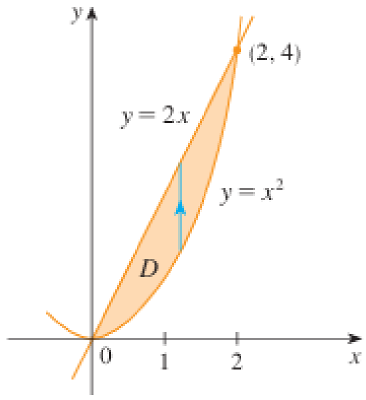


FIGURA 9
D es una región tipo I

EJEMPLO 2 Encuentre el volumen del sólido que yace debajo del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y arriba de la región D en el plano xy acotado por la recta $y = 2x$ y la parábola $y = x^2$.

SOLUCIÓN 1 En la figura 9 se ve que D es una región tipo I y

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 2,\ x^2 \leqslant y \leqslant 2x\}$$

Por tanto, el volumen debajo de $z = x^2 + y^2$ y arriba de D es

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx \\
&= \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=x^2}^{y=2x} dx \\
&= \int_0^2 \left[x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2 x^2 - \frac{(x^2)^3}{3} \right] dx \\
&= \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx \\
&= -\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \Bigg]_0^2 = \frac{216}{35}
\end{aligned}$$

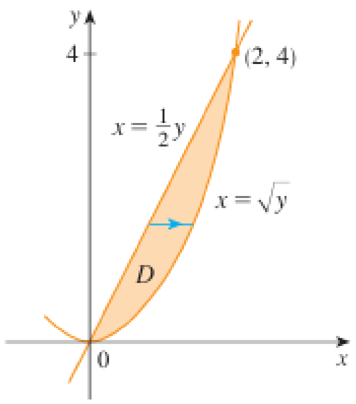


FIGURA 10
D como una región tipo II

SOLUCIÓN 2 De la figura 10 se ve que D puede escribirse también como una región tipo II:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4,\ \tfrac{1}{2}y \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\}$$

Por tanto, otra expresión para V es

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D (x^2 + y^2)\, dA = \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2)\, dx\, dy \\
&= \int_0^4 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy \\
&= \tfrac{2}{15}y^{5/2} + \tfrac{2}{7}y^{7/2} - \tfrac{13}{96}y^4 \Big]_0^4 = \tfrac{216}{35}
\end{aligned}$$

V EJEMPLO 3 Evalúe $\iint_D xy\,dA$, donde D es la región acotada por la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

SOLUCIÓN La región D se muestra en la figura 12. De nuevo D es tipo I y tipo II, pero la descripción de D como una región tipo I es más complicada porque el límite inferior consta de dos partes. Por tanto, se prefiere expresar a D como una región tipo II:

$$D = \left\{(x, y) \mid -2 \leqslant y \leqslant 4,\ \tfrac{1}{2}y^2 - 3 \leqslant x \leqslant y + 1\right\}$$

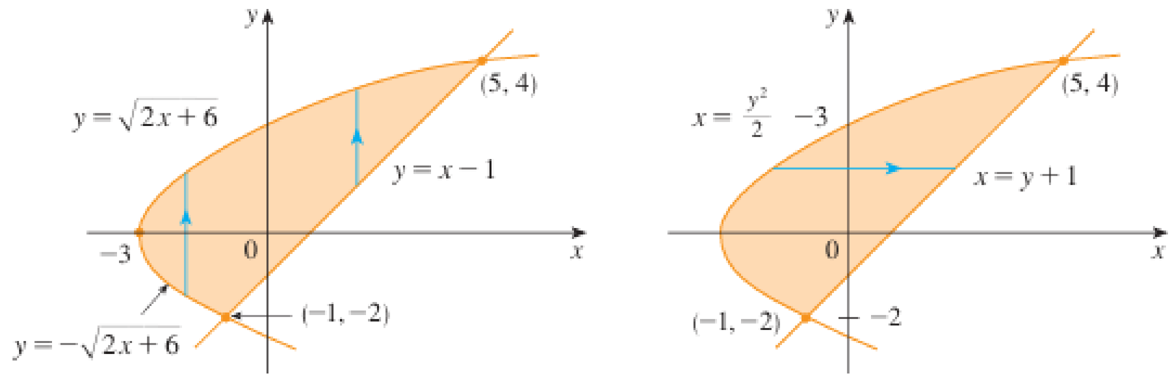


FIGURA 12 a) D como una región tipo I b) D como una región tipo II

Entonces $\boxed{5}$ da

$$\iint_D xy\,dA = \int_{-2}^{4}\int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy\,dx\,dy = \int_{-2}^{4}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{x=\frac{1}{2}y^2-3}^{x=y+1} dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{4} y\left[(y+1)^2 - \left(\tfrac{1}{2}y^2 - 3\right)^2\right] dy$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y\right) dy$$

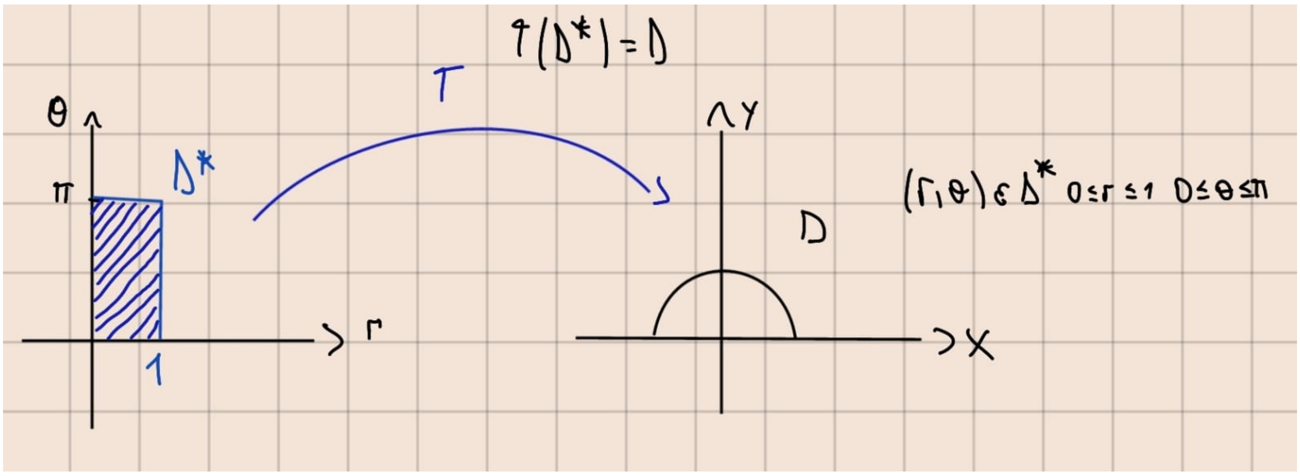
$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2\right]_{-2}^{4} = 36$$

Teorema de Cambio de Variable

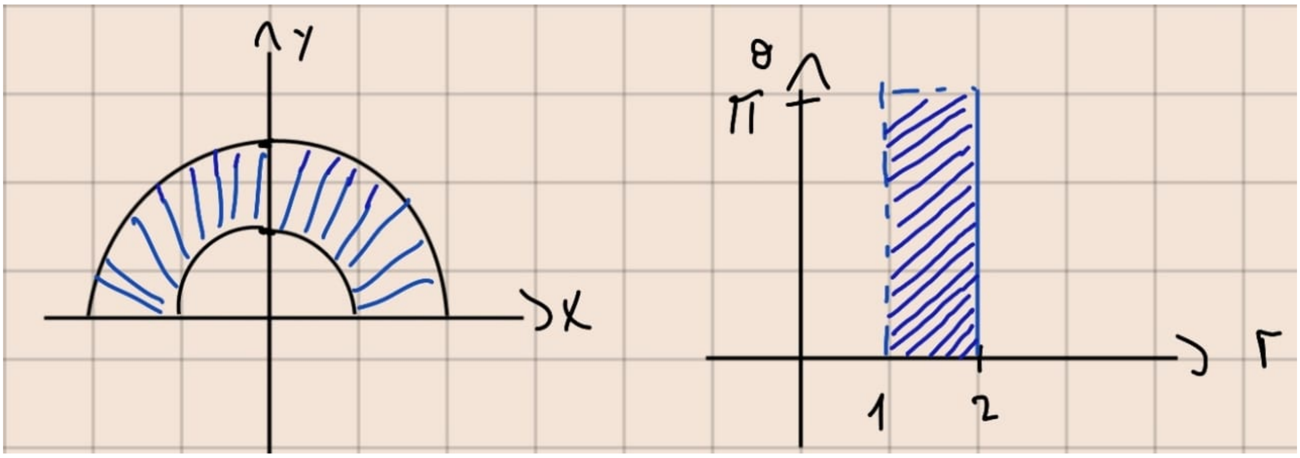
1. Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ calcule su área.

Lo primero que intentaríamos hacer es describirla como tipo I o tipo II, pero haciendola de tipo II nos quedaría $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$. Si intentás hacer la integral, te vas a dar cuenta que es dificil.
El teorema viene a salvarnos la vida, por qué? porque como estamos hablando de una circunferencia y una restricción de ella $y \geq 0$ podemos hacer un gráfico aproximado y ver a ojo, cual es su radio y cual es su ángulo (recorrido).
Sabemos por fórmula, que es una circunferencia de radio 1 y centro (0,0) pero ¿cómo cambia su ángulo?. Si $y \geq 0$ entonces la parte de la circunferencia que sobrevive es el primer y segundo cuadrante, y estos corresponden a $0 \leq \theta \leq \pi$
Importante: Graficar. Por obvios motivos y porque este ejemplo es sencillo decidí omitirlo.
Una vez que conocemos esa información, listo. Ya podemos aplicar el teorema de cambio de variable porque sabemos que el Jacobiano cuando vamos a usar polares es siempre **r** por lo tanto no necesitamos decir nada más. Entonces, veamos como como cambió y ahora sí veamos qué representa nuestro cambio de variable.
$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ pasamos a $D^* = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}$

Grafiquemos D^*

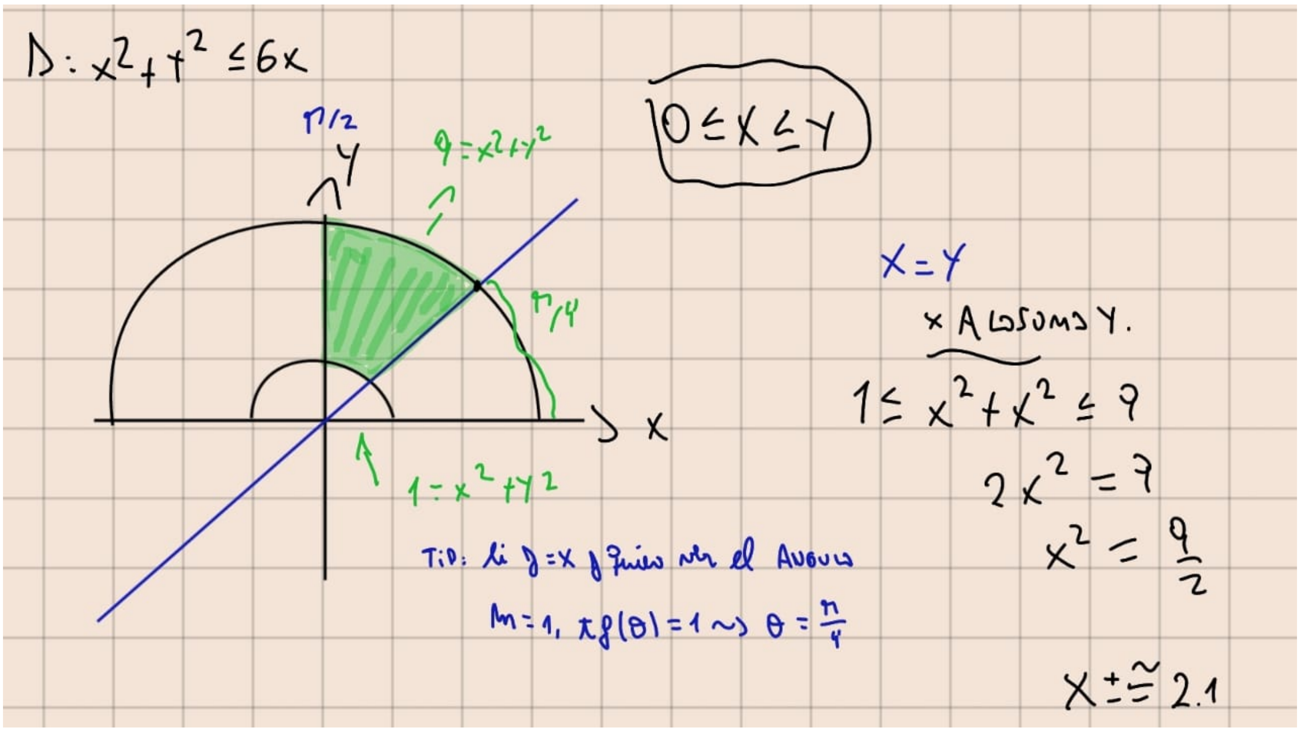


Como podemos notar, ahora nuestra región en coordenadas polares es un rectángulo y podemos integrar en cualquier orden (se recomienda primero las constantes), por lo tanto lo único que resta hacer es: $\int\int_D 1\ dx\ dy \overset{T(D^*)=D}{=} \int\int_{D^*} 1\ rdrd\theta = \int_0^\pi (\int_0^1\ r\ dr\ d\theta)$ que termina dando $\frac{\pi}{2}$.
2. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, calcular $\int\int_D = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$
Mismo caso que el anterior. Como nuestro D es una circunferencia de radio 2 (que empieza a partir del 1 hacia arriba) el dibujo es ligeramente diferente.

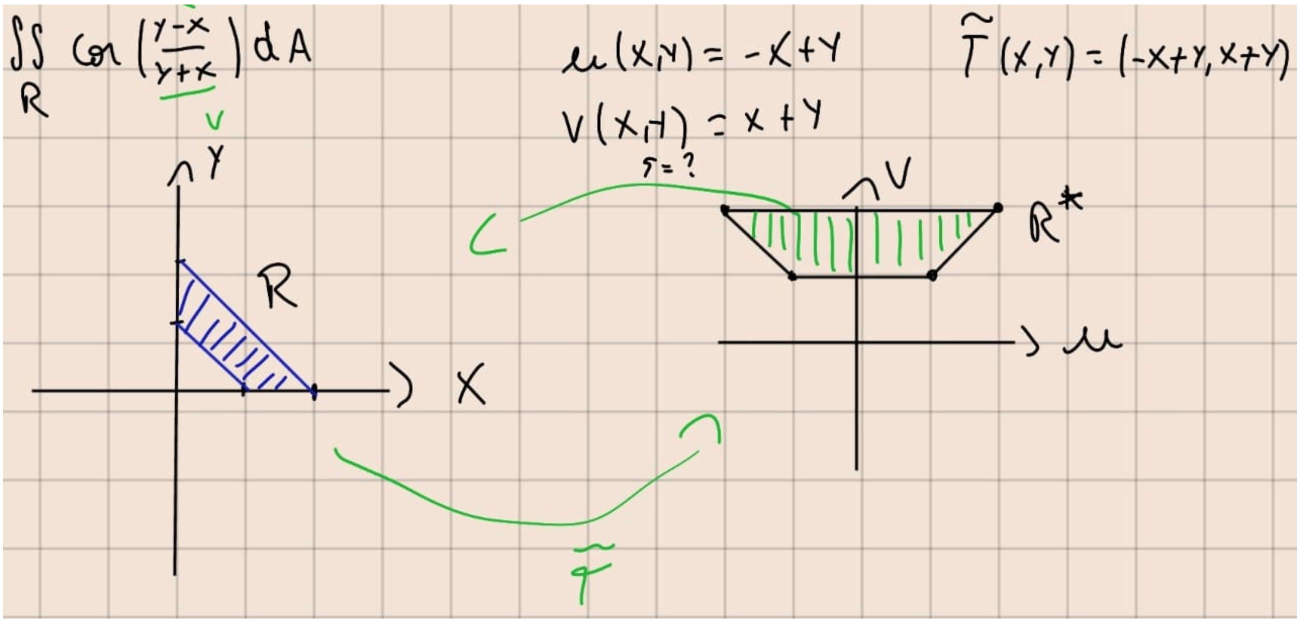


Bueno, misma idea que antes. Como estamos usando polares, sabemos que el Jacobiano va a ser **r**.
Por lo tanto, nuestro $D^* = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, y sabemos que satisface que $T(D^*) = D$ por el teorema de cambio de variable.
Luego, $\int\int_D \sqrt{4 - x^2 - y^2} dx\ dy \overset{TCV}{=} \int\int_{D^*} \sqrt{4 - r^2 * r}\ dr\ d\theta$. Queda resolver la integral y listo.
3. Hallar el área de $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq x \leq y\}$
Primera idea: Nótese que el círculo que vamos a dibujar empieza desde radio 1 hacia arriba, particularmente hasta radio 3.
Luego, vemos que x es **a lo sumo y**. Por lo tanto, si queremos ver cual es el máximo valor que toma x podemos hacer $x = y$, y reemplazar en la ecuación de la circunferencia.
Esto nos dará $x^2 + x^2 = 9 \iff x = \pm 2{,}1$ aprox, entonces sabemos que el área que hay que pintar no tiene que ser mayor a 2.1 en x.
Luego, por también $x \leq y$ sabemos que si vemos la igualdad $x = y$ esto es una recta que pasa por el origen.

Juntando todos estos datos, nos quedaría algo así:



Nótese que si el dibujo está totalmente bien, a ojo podemos notar que la parte coloreada es básicamente la región $\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{4}$. Lo único que nos queda ver es el radio, pero sabemos que es $1 \leq r \leq 3$ y como son polares, el Jacobiano lo conocemos y es r.
La integral entonces nos quedaría $\int\int_D = 1dA \overset{TCV}{=} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \int^3 \int^1 1\ r\ dr\ d\theta = \pi$
Importante: Si se diese el caso que por ejemplo, nuestro gráfico incluye el 1er y 3er cuadrante, se representaría con un ángulo negado. Ese ángulo negado, en realidad es $\frac{3}{2}pi$ pero acá ese rango lo vamos a tomar como $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$
Importante 2: Recordar también, que si se da el caso de que nos dan una circunferencia para completar cuadrados o ya lista, y el centro NO es el (0,0) podemos justificar con que vale igual pasarlo a polares de la misma forma como si estuviese centrada en el (0,0) porque al ser una constante (lo que nos mueve del origen), al momento de calcular las derivadas para el Jacobiano no nos aportan en nada.
Importante 3: Si no se nos ocurre qué angulo que tiene una recta, por ejemplo y = x. Podemos hallar la pendiente de esa recta, y calcular $m = 1$, $tg(\theta) = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ 4. Ahora sí, veamos un ejemplo que tengamos que calcular el Jacobiano a mano.
Calcular $\int\int_R cos(\frac{y-x}{y+x})dA$ donde R es la región trapezoidal con vértices (1,0), (2,0), (0,2) y (0, 1).
Bueno, acá no podemos usar polares porque la región R que nos dan no es una circunferencia.
Si hacemos el gráfico, veremos que nos queda una figura bastante complicada de hacer de tipo I o tipo II.

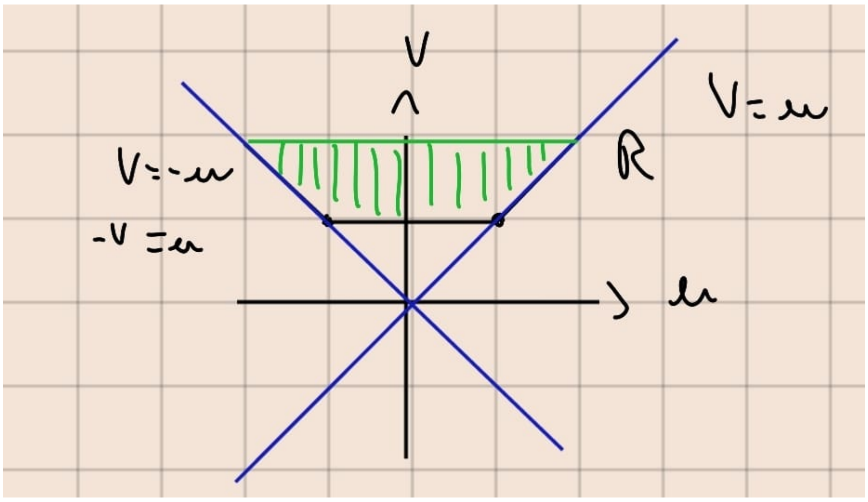


Entonces ahora sí, tenemos que encontrar a mano todo.
Como no tenemos muchos datos, lo que hacemos es tomar los argumentos del coseno (que es lo que vamos a tener que integrar, y es dificil), y lo convertimos en u y al otro en v.

Entonces recordando la definición tiene que suceder que $T(D^*) = D$.
Armamos $u(x, y) = -x+y$, $v(x, y) = x+y$ y ahora conseguimos armar una transformación, que nos da $\hat{T}(x, y) = (-x+y, x+y)$ y evaluando los puntos de nuestro figura nos quedan los siguientes puntos

- $\hat{T}(0, 1) = (1, 1)$
- $\hat{T}(1, 0) = (-1, 1)$
- $\hat{T}(2, 0) = (-2, 2)$
- $\hat{T}(0, 2) = (2, 2)$

Entonces ahora, ya conseguimos nuestro gráfico. Veamos qué se forma y de qué manera lo podemos expresar.



Esta nos conviene hacerla de tipo II porque el piso y el techo van a ser dos simples rectas.
Entonces nos queda $-v \leq u \leq v$ y $1 \leq v \leq 2$. Esto que conseguimos nos sirve para los límites de la integral.
Ahora para hallar T(u, v), necesitamos el jacobiano.
Teniendo $u = -x + y,\ v = x + y$, y despejando el sistema de ecuaciones lineales nos queda $T(u, v) = (-\frac{u}{2} + \frac{v}{2}, \frac{u}{2} + \frac{v}{2})$, armamos la matriz derivando coordenada a coordenada con respecto a u, y luego a v y nos queda que $|det(DT)| = \frac{1}{2}$.
Finalmente, luego de todo este proceso nos queda resolver la integral: $\int_1^2 \int_{-v}^{v} cos(\frac{u}{v})\frac{1}{2}\ du\ dv$

Coordenadas Cilíndricas

Ejercicio 1.: Calcular el volumen de $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$
La buena pregunta antes de comenzar todo ejercicio es: ¿por qué usar cilíndricas?
En este caso la respuesta está en que las dos superficies que nos están dando son de la pinta $x^2 + y^2$ en $\mathbb{R}^3$. Es decir, cilindros.
Una vez que ya detectamos que este ejercicio sale por coordenadas cilíndricas, recordemos qué es lo que necesitamos en la transformación a cilíndricas.

- r: Será el radio donde se moverá el volumen/área que querramos integrar.
- θ: Será el ángulo determinado por x, y el cual se moverá el volumen en el piso.
- z: z prácticamente igual pero escrito en coordenadas polares.

Recordemos que por coordenadas polares, sabemos que $r^2 = x^2 + y^2$ y además que, en este caso el Jacobiano es r.
Una vez que tenemos toda esta información ya podemos comenzar a pensar cómo va a quedar la integral.
Lo primero es lo primero, el radio no puede ser cualquiera, sino que el radio va a ser básicamente entre todas las figuras, el espacio que tengan todas en común. Por lo tanto, lo primero que podemos hacer es analizar cada superficie una por una.
Analicemos $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$: Esto es un cilindro hueco, que empieza a contar desde **radio 1 hasta radio 3** ($1 \leq r^2 \leq 9 \equiv 1 \leq r \leq 3$). Notar que NO aparece z. Por lo tanto no aporta NADA en z.
Analicemos $0 \leq z \leq x^2 + y^2$: Si nos ponemos a ver curvas de nivel esto es un paraboloide que se compone por dos cosas: en $z = 0$ hay un plano, y a partir de $z = 0$ está el paraboloide.
Si juntamos ambas superficies en un gráfico, como el cilindro tiene un ancho determinado y el paraboloide no, entonces de alguna manera sabemos que el paraboloide atravesará al cilindro en una altura dada.
Radio: Pensemos ahora qué podemos decir del radio. Como el paraboloide no aporta información de radios particulares (porque son infinitos), en este caso nos quedamos con el subconjunto más chico que sabemos que está incluído en el paraboloide. En este caso, decimos que el radio es: $1 \leq r \leq 3$. ¿Por qué? Porque este radio que está en el cilindro (una superficie mucho más chica que un paraboloide en ancho).
θ: La única condición que tenemos acerca del piso, es que $y \geq 0$. Por lo tanto, la única forma de que esto se cumpla, es que

valga $0 \leq \theta \leq \pi$.
Techo / Piso: Como el Cilindro no aporta información sobre techo y piso de la región que tenemos que contemplar porque en z es infinito, sabemos que el piso del volumen que tenemos que contemplar es el plano $z = 0$ y el techo es el mismo paraboloide $x^2 + y^2$ que en polares es r.
Por lo tanto, la Integral a resolver queda: $\int_1^3 \int_0^\pi \int_0^{r^2} 1 * r * dz\ d\theta\ dr$

Funciones Trigonométricas

- sen, cos: acotadas entre [-1, 1]
- arctan, arcsen: acotada entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- arccos: acotada entre $[0, \pi]$

Más Integrales

- $\int e^{-y} = -e^{-y}$ Sale por sustitución con u = -y, du = -1 dx.
- $\int e^{-ln(x)} = \frac{1}{x}$