

Sistemas Digitales

Tomás Agustín Hernández



1. Introducción a los sistemas de representación

Magnitud

Llamamos magnitud al tamaño de algo, dicho en una medida específica. Es representada a través de un sistema que cumple 3 conceptos fundamentales:

- Finito: Debe haber una cantidad finita de elementos.
- Composicional: El conjunto de elementos atómicos deben ser fáciles de implementar y componer.
- Posicional: La posición de cada dígito determina en qué proporción modifica su valor a la magnitud total del número.

Algunos de los sistemas de representación más utilizados son: binario, octal, decimal y hexadecimal.

Bases

Una base nos indica la cantidad de símbolos que podemos utilizar para poder representar determinada magnitud.

Base	Símbolos disponibles
2 (binario)	0, 1
8 (octal)	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
10 (decimal)	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
16 (hexadecimal)	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Tabla 1: Bases más utilizadas

La tabla anterior representa los símbolos disponibles para las bases 2, 8, 10 y 16.

Consideremos por un momento que estamos en binario; ¿sería correcto que $1 + 1 = 2$? ¡No! Porque 2 no es un símbolo válido en base 2.

Para indicar la base en la que está escrito un número, se coloca la base entre paréntesis en la esquina inferior derecha.

$1024_{(10)}$: 1024 representado en base 10 (decimal)

Dígitos/Bits

Sea $n \in \mathbb{Z}$, cuando decimos que tenemos n bits es lo mismo que decir que tenemos n dígitos.

- 0001: Representa el número 1 en binario, en 4 bits/dígitos.
- 0010: Representa el número 2 en binario, en 4 bits/dígitos.

Teorema de división

Es una manera de poder realizar un cambio de base de un número decimal a otra base. La representación en la otra base es el resto visto desde abajo hacia arriba.

$$a = k * d + r \text{ con } 0 \leq r < |d|$$

donde:

- k = cociente
- d = divisor.
- r = resto de la división de a por d.

Pasaje del número $128_{(10)}$ a $128_{(2)}$ en 8 bits

$$128 = 64 * 2 + 0$$

$$64 = 32 * 2 + 0$$

$$32 = 16 * 2 + 0$$

$$16 = 8 * 2 + 0$$

$$8 = 4 * 2 + 0$$

$$4 = 2 * 2 + 0$$

$$2 = 1 * 2 + 0$$

$$1 = 0 * 2 + 1$$

Luego, $128_{(2)} = 1000\ 0000$

Bit más significativo / menos significativo

El bit más significativo en un número es el que se encuentra a la izquierda, mientras que el menos significativo es el que se encuentra a la derecha.

$$\textcolor{blue}{1}0000000\textcolor{blue}{0}_{(2)}$$

Tipos numéricos

Representemos números naturales y enteros a partir de la representación en base 2 (binario)

Sin signo: Representa únicamente números positivos. No se pueden utilizar los símbolos de resta (-) ni tampoco coma (,)

$$1_{(10)} = 01_{(2)}$$

$$128_{(10)} = 10000000_{(2)}$$

Signo + Magnitud: Nos permite representar números negativos en binario. El bit más significativo indica el signo

- 0: número positivo
- 1: número negativo.

$$18_{(10)} = \textcolor{blue}{0}0010010_{(2)}$$

$$-18_{(10)} = \textcolor{blue}{1}0010010_{(2)}$$

Representar números en S+M suele traer problemas porque el 0 puede representarse de dos maneras

$$+0_{(10)} = \textcolor{blue}{0}0000000_{(2)}$$

$$-0_{(10)} = \textcolor{blue}{1}0000000_{(2)}$$

Para solucionar este problema, las CPU utilizan la notación Complemento a 2 (C_2)

Exceso m: Sea $m \in \mathbb{Z}$, decimos que un número n está con exceso m unidades cuando $m > 0$

$$n_0 = n + m$$

$$n = 1 \wedge m = 10 \longrightarrow n_0 = -9$$

Nota: n_0 indica el valor original de n antes de ser excedido m unidades.

Complemento a 2: Los positivos se representan igual.

El bit más significativo indica el signo, facilitando saber si el número es positivo o negativo. Cosas a tener en cuenta

- **Rango:** -2^{n-1} hasta $2^{n-1} - 1$
- **Cantidad** de representaciones del cero: Una sola
- **Negación:** Invierto el número en representación binaria positiva y le sumo uno.
 - $-2_{(2)} = \text{inv}(010) + 1$
 - $-2_{(2)} = 101 + 1$
 - $-2_{(2)} = 110$
- **Extender número a más bits:** Se rellena a la izquierda con el valor del bit del signo.
- **Regla de Desbordamiento:** Si se suman dos números con el mismo signo, solo se produce desbordamiento cuando el resultado tiene signo opuesto.

Overflow / Desbordamiento

Hablamos de overflow/desbordamiento cuando

- El número a representar en una base dada, excede la cantidad de bits que tenemos disponibles.
- Si estamos en notación C_2 al sumar dos números cambia el signo.

Acarreo / Carry

Ocurre cuando realizamos una suma de números binarios y el resultado tiene más bits que los números originales que estamos sumando

Suma entre números binarios

Se hace exactamente igual que una suma común y corriente.

Es importante prestar atención a la cantidad de dígitos que nos piden para representarlo, y en caso de estar en C_2 que el signo no cambie.

Hagamos sumas en C_2 (sin límite de bits)

$$\begin{array}{r} 0010 = 2 \\ +1001 = -7 \\ \hline 1011 = -5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0101 = 5 \\ +1110 = -2 \\ \hline \textcolor{blue}{1}0011 = 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1011 = -5 \\ +1110 = -2 \\ \hline \textcolor{blue}{1}1001 = -7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0111 = 7 \\ +0111 = 7 \\ \hline \textcolor{red}{1}110 = \text{Overflow} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1010 = -6 \\ +1100 = -4 \\ \hline \textcolor{blue}{1}\textcolor{red}{0}110 = \text{Overflow} \end{array}$$

Nota: El color azul indica el carry; El rojo indica qué es lo que produce overflow (cambio de signo).

Hagamos sumas en C_2 (límite de bits: 4)

$$\begin{array}{r} 0010 = 2 \\ +1001 = -7 \\ \hline 1011 = -5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0101 = 5 \\ +1110 = -2 \\ \hline \textcolor{blue}{1}0011 = \text{Overflow} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1011 = -5 \\ +1110 = -2 \\ \hline \textcolor{blue}{1}1001 = \text{Overflow} \end{array} \quad \begin{array}{r} 0111 = 7 \\ +0111 = 7 \\ \hline \textcolor{red}{1}110 = \text{Overflow} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1010 = -6 \\ +1100 = -4 \\ \hline \textcolor{blue}{1}\textcolor{red}{0}110 = \text{Overflow} \end{array}$$

Nota: Al tener un límite de 4 bits, en las sumas que tenemos carry terminamos teniendo overflow.

Rango de valores representables en n bits

Sean $n, m \in \mathbb{Z}$ decimos que el rango de representación en base n y m bits acepta el rango de valores de: $[-n^m, n^m - 1]$
¿Es posible representar el 1024 en binario y 4 bits? No.

- $2^4 = 16 \implies [-16, 15]$
- Pero, $1024 \notin [-16, 15]$
- Por lo tanto, 1024 no es representable en 4 bits.

Pasar número binario a decimal

1. Si tenemos el mismo número todo el tiempo podemos usar la serie geométrica

¿Qué número decimal representa el número $111111111_{(2)}$?

$$\sum_{i=0}^{j-1} 1 \cdot n^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \text{ Luego,}$$

$$\sum_{i=0}^9 1 \cdot 2^i = 2^{10} - 1 = 1023$$

2. Si no tenemos el mismo número todo el tiempo podemos multiplicar cada dígito por la base donde el exponente es la posición del bit.

$$10_{(2)} = 1 * 2^1 + 0 * 2^0 = 2_{(10)}$$

Extender un número de n bits a m bits

Sea $n, m \in \mathbb{Z}$ donde n es la cantidad de bits inicial y m es la cantidad a la que se quiere extender.

$$n = 3 \wedge m = 8$$

- Signo + Magnitud y exceso m : Se extiende con 0's luego del signo.
 - En 3 bits, $-2 = 110$
 - En 8 bits, $-2 = 10000010$
- Complemento 2 (C_2): Se extiende con el bit más significativo.
 - En 3 bits, $-2 = 110$
 - En 8 bits, $-2 = 11111110$

Cambios de base

Sea $n, m \in \mathbb{Z}$ dos bases distintas, para pasar de base n a base m se debe realizar el siguiente proceso

- Pasar el número a base decimal.
- Aplicar el teorema de división utilizando la base deseada.

Encontremos en base 5, el número que corresponde a $17_{(8)}$:

- $17_{(8)} = 1 * 8^1 + 7 * 8^0 = 15_{(10)}$
- Usando ahora el teorema de división
 - $15 = 3 * 5 + 0$
 - $3 = 0 * 5 + 3$
 - Luego, $30_{(5)}$
- Por lo tanto, $17_{(8)} = 30_{(5)}$

2. Desplazamientos

Utilizamos los desplazamientos para poder mover los bits. Cada casillero representa los bits.

- Desplazamiento hacia la izquierda: Se desplazan los bits del dato tantas posiciones como se indiquen a la izquierda.
 $variable \ll cantidad$

Posición	v_3	v_2	v_1	v_0
a	1	0	1	0
$c = a \ll 2$	1	0	0	0

- Desplazamiento lógico hacia la derecha: Se aplica desplazando los bits del dato tantas posiciones como se indiquen a la derecha.
 $variable \gg_l cantidad$

Posición	v_3	v_2	v_1	v_0
a	1	0	1	0
$c = a \gg_l 2$	0	0	1	0

- Desplazamiento aritmético hacia la derecha: Se aplica desplazando los bits del dato tantas posiciones como se indiquen a la derecha, pero copiando el valor del bit más significativo.
 $variable \gg_a cantidad$

Posición	v_3	v_2	v_1	v_0
a	1	0	1	0
$c = a \gg_a 2$	1	1	1	0

3. Operaciones lógicas

- OR (+): $(1, 0), (0, 1), (1, 1) = 1$
- AND (*): $(1, 1) = 1$
- XOR (\oplus): $(1, 0), (0, 1) = 1$

4. Circuitos combinatorios

Negación

Sea p una variable proposicional, el opuesto de p lo escribimos como \bar{p} .

$$p = 1 \iff \bar{p} = 0$$

Propiedades para operaciones lógicas

Propiedad	AND	OR
Identidad	$1.A = A$	$0 + A = A$
Nulo	$0.A = 0$	$1 + A = 1$
Idempotencia	$A.A = A$	$A + A = A$
Inverso	$A.\bar{A} = 0$	$A + \bar{A} = 1$
Conmutatividad	$A.B = B.A$	$A + B = B + A$
Asociatividad	$(A.B).C = A.(B.C)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Distributividad	$A + (B.C) = (A + B).(A + C)$	$A.(B + C) = A.B + A.C$
Absorción	$A.(A + B) = A$	$A + A.B = A$
De Morgan	$\overline{A.B} = \bar{A} + \bar{B}$	$\overline{A + B} = \bar{A}.\bar{B}$

Operaciones booleanas

Se resuelven utilizando las propiedades para operaciones lógicas

$$\text{Verifique si son equivalentes } (X + \bar{Y} = \overline{(\bar{X} * Y)} * Z + X * \bar{Z} + \overline{(Y + Z)})$$

- $\overline{\bar{X} * Y} * Z + X * \bar{Z} + (\bar{Y} * \bar{Z}) \implies \text{De Morgan}$
- $(X + \bar{Y}) * Z + X * \bar{Z} + (\bar{Y} * \bar{Z}) \implies \text{De Morgan} \wedge \text{Distributiva}$
- $(X + \bar{Y}) * Z + \bar{Z} * (X + \bar{Y})$
- $(X + \bar{Y}) * (Z + \bar{Z}) \implies \text{Inverso}$
- $(X + \bar{Y}) * 1 \implies \text{Identidad}$
- $(X + \bar{Y})$

Nota: También se pueden probar equivalencias utilizando tablas de verdad

Funciones booleanas

- AND = $A * B$
- OR = $A + B$
- NOT = \bar{A}

Tablas de verdad

Nos permiten observar todas las salidas para todas las combinaciones de entradas dada una función. Veamos un ejemplo con una función F:



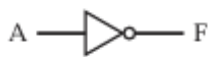


$$\text{Sea } F = X + \bar{Y}$$

X	Y	F
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Protip: El símbolo de + indica OR porque $1 + 0 = 1$ mientras que el símbolo AND indica * porque $1 * 0 = 0$

Compuertas

Son modelos idealizados de dispositivos electrónicos que realizan operaciones booleanas.

Nombre	Símbolo gráfico	Función algebraica	Tabla verdad															
AND		$F = A \cdot B$ or $F = AB$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	A	B	F	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
A	B	F																
0	0	0																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	1																
OR		$F = A + B$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	A	B	F	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
A	B	F																
0	0	0																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	1																
NOT		$F = \bar{A}$ or $F = A'$	<table><tr><th>A</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	F	0	1	1	0									
A	F																	
0	1																	
1	0																	
NAND		$F = \overline{(AB)}$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	B	F	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
A	B	F																
0	0	1																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	0																
NOR		$F = \overline{(A + B)}$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	B	F	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
A	B	F																
0	0	1																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	0																

Nota: $XOR = \oplus$

Compuertas Universales

Nos permiten obtener otros operadores.

- $NAND = \overline{A \wedge B}$
- $NOR = \overline{A \vee B}$
- $XNOR = \overline{A \oplus B}$ = Si son iguales es V

Compuertas en SystemVerilog

- A AND B ($A * B$) = (assign O = A & B)
- A OR B ($A + B$) = *assign* A | B
- A XOR B = *assign* A ^ B
- NOT A (\bar{a}) = ($\sim A$)

Entradas / Salidas de un circuito

Se representan con flechas. En SystemVerilog se llaman input y output.

```
module ALU #(parameter DATA_WIDTH = 16)
    (input [DATA_WIDTH-1:0] operandoZ ,
     input [DATA_WIDTH-1:0] operandoY ,
     input [2:0] opcode ,
     output [DATA_WIDTH-1:0] salidas ,
     output overflow );
end module;
```

Nota: En las ALU no son funcionalmente iguales ni las entradas ni las salidas.

Mecanismo de Traducción fórmula a circuito

Llamaremos ϕ a una fórmula proposicional cualquiera

1. Solo consideramos de la función F, las filas verdaderas.
2. Cada fila verdadera tendrá su índice, y en ese índice estarán los valores de cada variable proposicional. Representamos a esa fila verdadera como t_i
3. Realizamos la conjunción de todas las variables de ese t_i
4. Realizamos la disyunción de todas las conjunciones de t_i

Un ejemplo:

$$\text{Sea } F = X + \bar{Y}$$

X	Y	F
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- F es solamente verdadera en la primera, segunda y tercer fila por lo tanto tenemos t_1 t_2 y t_3
- Por cada fila, hacemos la conjunción de los valores
 - $x_1 \wedge x_2$
 - $x_1 \wedge \bar{x}_2$
 - $\bar{x}_1 \wedge x_2$
- Realizamos la disyunción de todos los t_i
 - $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2)$
- El resultado nos da ϕ' que es una suma de productos y nos permite traducir fácilmente a un circuito combinatorio
 \implies BUSCAR EJEMPLO