

Sistemas Digitales

Tomás Agustín Hernández



1. Introducción a los sistemas de representación

Magnitud

Llamamos magnitud al tamaño de algo, dicho en una medida específica. Es representada a través de un sistema que cumple 3 conceptos fundamentales:

- Finito: Debe haber una cantidad finita de elementos.
- Composicional: El conjunto de elementos atómicos deben ser fáciles de implementar y componer.
- Posicional: La posición de cada dígito determina en qué proporción modifica su valor a la magnitud total del número.

Algunos de los sistemas de representación más utilizados son: binario, octal, decimal y hexadecimal.

Bases

Una base nos indica la cantidad de símbolos que podemos utilizar para poder representar determinada magnitud.

Base	Símbolos disponibles
2 (binario)	0, 1
8 (octal)	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
10 (decimal)	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
16 (hexadecimal)	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Tabla 1: Bases más utilizadas

La tabla anterior representa los símbolos disponibles para las bases 2, 8, 10 y 16.

Consideremos por un momento que estamos en binario; ¿sería correcto que $1 + 1 = 2$? ¡No! Porque 2 no es un símbolo válido en base 2.

Para indicar la base en la que está escrito un número, se coloca la base entre paréntesis en la esquina inferior derecha.

$1024_{(10)}$: 1024 representado en base 10 (decimal)

Dígitos/Bits

Sea $n \in \mathbb{Z}$, cuando decimos que tenemos n bits es lo mismo que decir que tenemos n dígitos.

- 0001: Representa el número 1 en binario, en 4 bits/dígitos.
- 0010: Representa el número 2 en binario, en 4 bits/dígitos.

Teorema de división

Es una manera de poder realizar un cambio de base de un número decimal a otra base. La representación en la otra base es el resto visto desde abajo hacia arriba.

$$a = k * d + r \text{ con } 0 \leq r < |d|$$

donde:

- k = cociente
- d = divisor.
- r = resto de la división de a por d.

Pasaje del número $128_{(10)}$ a $128_{(2)}$ en 8 bits

$$128 = 64 * 2 + 0$$

$$64 = 32 * 2 + 0$$

$$32 = 16 * 2 + 0$$

$$16 = 8 * 2 + 0$$

$$8 = 4 * 2 + 0$$

$$4 = 2 * 2 + 0$$

$$2 = 1 * 2 + 0$$

$$1 = 0 * 2 + 1$$

Luego, $128_{(2)} = 1000\ 0000$

Bit más significativo / menos significativo

El bit más significativo en un número es el que se encuentra a la izquierda, mientras que el menos significativo es el que se encuentra a la derecha.

$$\textcolor{blue}{1}0000000\textcolor{blue}{0}_{(2)}$$

Tipos numéricos

Representemos números naturales y enteros a partir de la representación en base 2 (binario)

Sin signo: Representa únicamente números positivos. No se pueden utilizar los símbolos de resta (-) ni tampoco coma (,)

$$1_{(10)} = 01_{(2)}$$

$$128_{(10)} = 10000000_{(2)}$$

Signo + Magnitud: Nos permite representar números negativos en binario. El bit más significativo indica el signo

- 0: número positivo
- 1: número negativo.

$$18_{(10)} = \textcolor{blue}{0}0010010_{(2)}$$

$$-18_{(10)} = \textcolor{blue}{1}0010010_{(2)}$$

Representar números en S+M suele traer problemas porque el 0 puede representarse de dos maneras

$$+0_{(10)} = \textcolor{blue}{0}0000000_{(2)}$$

$$-0_{(10)} = \textcolor{blue}{1}0000000_{(2)}$$

Para solucionar este problema, las CPU utilizan la notación Complemento a 2 (C_2)

Exceso m: Sea $m \in \mathbb{Z}$, decimos que un número n está con exceso m unidades cuando $m > 0$

$$n_0 = n + m$$

$$n = 1 \wedge m = 10 \longrightarrow n_0 = -9$$

Nota: n_0 indica el valor original de n antes de ser excedido m unidades.

Complemento a 2: Los positivos se representan igual.

El bit más significativo indica el signo, facilitando saber si el número es positivo o negativo. Cosas a tener en cuenta

- **Rango:** -2^{n-1} hasta $2^{n-1} - 1$
- **Cantidad** de representaciones del cero: Una sola
- **Negación:** Invierto el número en representación binaria positiva y le sumo uno.
 - $-2_{(2)} = \text{inv}(010) + 1$
 - $-2_{(2)} = 101 + 1$
 - $-2_{(2)} = 110$
- **Extender número a más bits:** Se rellena a la izquierda con el valor del bit del signo.
- **Regla de Desbordamiento:** Si se suman dos números con el mismo signo, solo se produce desbordamiento cuando el resultado tiene signo opuesto.

Overflow / Desbordamiento

Hablamos de overflow/desbordamiento cuando

- El número a representar en una base dada, excede la cantidad de bits que tenemos disponibles.
- Si estamos en notación C_2 al sumar dos números cambia el signo.

Acarreo / Carry

Ocurre cuando realizamos una suma de números binarios y el resultado tiene más bits que los números originales que estamos sumando

Suma entre números binarios

Se hace exactamente igual que una suma común y corriente.

Es importante prestar atención a la cantidad de dígitos que nos piden para representarlo, y en caso de estar en C_2 que el signo no cambie.

Hagamos sumas en C_2 (sin límite de bits)

$$\begin{array}{r} 0010 = 2 \\ +1001 = -7 \\ \hline 1011 = -5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0101 = 5 \\ +1110 = -2 \\ \hline \textcolor{blue}{1}0011 = 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1011 = -5 \\ +1110 = -2 \\ \hline \textcolor{blue}{1}1001 = -7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0111 = 7 \\ +0111 = 7 \\ \hline \textcolor{red}{1}110 = \text{Overflow} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1010 = -6 \\ +1100 = -4 \\ \hline \textcolor{blue}{1}\textcolor{red}{0}110 = \text{Overflow} \end{array}$$

Nota: El color azul indica el carry; El rojo indica qué es lo que produce overflow (cambio de signo).

Hagamos sumas en C_2 (límite de bits: 4)

$$\begin{array}{r} 0010 = 2 \\ +1001 = -7 \\ \hline 1011 = -5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 0101 = 5 \\ +1110 = -2 \\ \hline \textcolor{blue}{1}0011 = \text{Overflow} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1011 = -5 \\ +1110 = -2 \\ \hline \textcolor{blue}{1}1001 = \text{Overflow} \end{array} \quad \begin{array}{r} 0111 = 7 \\ +0111 = 7 \\ \hline \textcolor{red}{1}110 = \text{Overflow} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1010 = -6 \\ +1100 = -4 \\ \hline \textcolor{blue}{1}\textcolor{red}{0}110 = \text{Overflow} \end{array}$$

Nota: Al tener un límite de 4 bits, en las sumas que tenemos carry terminamos teniendo overflow.

Rango de valores representables en n bits

Sean $n, m \in \mathbb{Z}$ decimos que el rango de representación en base n y m bits acepta el rango de valores de: $[-n^m, n^m - 1]$
¿Es posible representar el 1024 en binario y 4 bits? No.

- $2^4 = 16 \implies [-16, 15]$
- Pero, $1024 \notin [-16, 15]$
- Por lo tanto, 1024 no es representable en 4 bits.

Pasar número binario a decimal

1. Si tenemos el mismo número todo el tiempo podemos usar la serie geométrica

¿Qué número decimal representa el número $111111111_{(2)}$?

$$\sum_{i=0}^{j-1} 1 \cdot n^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \text{ Luego,}$$

$$\sum_{i=0}^9 1 \cdot 2^i = 2^{10} - 1 = 1023$$

2. Si no tenemos el mismo número todo el tiempo podemos multiplicar cada dígito por la base donde el exponente es la posición del bit.

$$10_{(2)} = 1 * 2^1 + 0 * 2^0 = 2_{(10)}$$

Extender un número de n bits a m bits

Sea $n, m \in \mathbb{Z}$ donde n es la cantidad de bits inicial y m es la cantidad a la que se quiere extender.

$$n = 3 \wedge m = 8$$

- Signo + Magnitud y exceso m : Se extiende con 0's luego del signo.
 - En 3 bits, $-2 = 110$
 - En 8 bits, $-2 = 10000010$
- Complemento 2 (C_2): Se extiende con el bit más significativo.
 - En 3 bits, $-2 = 110$
 - En 8 bits, $-2 = 11111110$

Cambios de base

Sea $n, m \in \mathbb{Z}$ dos bases distintas, para pasar de base n a base m se debe realizar el siguiente proceso

- Pasar el número a base decimal.
- Aplicar el teorema de división utilizando la base deseada.

Encontremos en base 5, el número que corresponde a $17_{(8)}$:

- $17_{(8)} = 1 * 8^1 + 7 * 8^0 = 15_{(10)}$
- Usando ahora el teorema de división
 - $15 = 3 * 5 + 0$
 - $3 = 0 * 5 + 3$
 - Luego, $30_{(5)}$
- Por lo tanto, $17_{(8)} = 30_{(5)}$

2. Desplazamientos

Utilizamos los desplazamientos para poder mover los bits. Cada casillero representa los bits.

- Desplazamiento hacia la izquierda: Se desplazan los bits del dato tantas posiciones como se indiquen a la izquierda.
 $variable \ll cantidad$

Posición	v_3	v_2	v_1	v_0
a	1	0	1	0
$c = a \ll 2$	1	0	0	0

- Desplazamiento lógico hacia la derecha: Se aplica desplazando los bits del dato tantas posiciones como se indiquen a la derecha.
 $variable \gg_l cantidad$

Posición	v_3	v_2	v_1	v_0
a	1	0	1	0
$c = a \gg_l 2$	0	0	1	0

- Desplazamiento aritmético hacia la derecha: Se aplica desplazando los bits del dato tantas posiciones como se indiquen a la derecha, pero copiando el valor del bit más significativo.
 $variable \gg_a cantidad$

Posición	v_3	v_2	v_1	v_0
a	1	0	1	0
$c = a \gg_a 2$	1	1	1	0

3. Operaciones lógicas

- OR (+): $(1, 0), (0, 1), (1, 1) = 1$
- AND (*): $(1, 1) = 1$
- XOR (\oplus): $(1, 0), (0, 1) = 1$

4. Circuitos combinatorios

Negación

Sea p una variable proposicional, el opuesto de p lo escribimos como \bar{p} .

$$p = 1 \iff \bar{p} = 0$$

Propiedades para operaciones lógicas

Propiedad	AND	OR
Identidad	$1.A = A$	$0 + A = A$
Nulo	$0.A = 0$	$1 + A = 1$
Idempotencia	$A.A = A$	$A + A = A$
Inverso	$A.\bar{A} = 0$	$A + \bar{A} = 1$
Conmutatividad	$A.B = B.A$	$A + B = B + A$
Asociatividad	$(A.B).C = A.(B.C)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Distributividad	$A + (B.C) = (A + B).(A + C)$	$A.(B + C) = A.B + A.C$
Absorción	$A.(A + B) = A$	$A + A.B = A$
De Morgan	$\overline{A.B} = \bar{A} + \bar{B}$	$\overline{A + B} = \bar{A}.\bar{B}$

Operaciones booleanas

Se resuelven utilizando las propiedades para operaciones lógicas

$$\text{Verifique si son equivalentes } (X + \bar{Y} = \overline{(\bar{X} * Y)} * Z + X * \bar{Z} + \overline{(Y + Z)})$$

- $\overline{\bar{X} * Y} * Z + X * \bar{Z} + (\bar{Y} * \bar{Z}) \implies \text{De Morgan}$
- $(X + \bar{Y}) * Z + X * \bar{Z} + (\bar{Y} * \bar{Z}) \implies \text{De Morgan} \wedge \text{Distributiva}$
- $(X + \bar{Y}) * Z + \bar{Z} * (X + \bar{Y})$
- $(X + \bar{Y}) * (Z + \bar{Z}) \implies \text{Inverso}$
- $(X + \bar{Y}) * 1 \implies \text{Identidad}$
- $(X + \bar{Y})$

Nota: También se pueden probar equivalencias utilizando tablas de verdad

Funciones booleanas

- AND = $A * B$
- OR = $A + B$
- NOT = \bar{A}

Tablas de verdad

Nos permiten observar todas las salidas para todas las combinaciones de entradas dada una función.
Veamos un ejemplo con una función F:

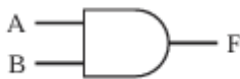

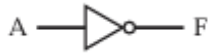



$$\text{Sea } F = X + \bar{Y}$$

X	Y	F
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

Protip: El símbolo de + indica OR porque $1 + 0 = 1$ mientras que el símbolo AND indica * porque $1 * 0 = 0$

Compuertas

Son modelos idealizados de dispositivos electrónicos que realizan operaciones booleanas.

Nombre	Símbolo gráfico	Función algebraica	Tabla verdad															
AND		$F = A \cdot B$ or $F = AB$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	A	B	F	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1
A	B	F																
0	0	0																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	1																
OR		$F = A + B$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	A	B	F	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
A	B	F																
0	0	0																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	1																
NOT		$F = \overline{A}$ or $F = A'$	<table><tr><th>A</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	F	0	1	1	0									
A	F																	
0	1																	
1	0																	
NAND		$F = \overline{(AB)}$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	B	F	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
A	B	F																
0	0	1																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	0																
NOR		$F = \overline{(A + B)}$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>F</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	B	F	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0
A	B	F																
0	0	1																
0	1	0																
1	0	0																
1	1	0																
XOR		$F = A \oplus B$	<table><tr><th>A</th><th>B</th><th>A XOR B</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	A	B	A XOR B	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0
A	B	A XOR B																
0	0	0																
0	1	1																
1	0	1																
1	1	0																

Nota: $XOR = \oplus$

Compuertas Universales

Nos permiten obtener otros operadores.

- $NAND = \overline{A \wedge B}$
- $NOR = \overline{A \vee B}$
- $XNOR = \overline{A \oplus B}$ = Si son iguales es V

Compuertas en SystemVerilog

- $A \text{ AND } B$ ($A * B$) = (assign $O = A \& B$)

- A OR B $(A + B) = \text{assign } A \mid B$
- A XOR B $= \text{assign } A \wedge B$
- NOT A $(\bar{a}) = (\sim A)$

Entradas / Salidas de un circuito

Se representan con flechas. En SystemVerilog se llaman input y output.

```
module ALU #(parameter DATA_WIDTH = 16)
    (input [DATA_WIDTH-1:0] operandoZ ,
     input [DATA_WIDTH-1:0] operandoY ,
     input [2:0] opcode ,
     output [DATA_WIDTH-1:0] salidas ,
     output overflow);
end module;
```

Nota: En las ALU no son funcionalmente iguales ni las entradas ni las salidas.

Mecanismo de Traducción fórmula a circuito

Llamaremos ϕ a una fórmula proposicional cualquiera

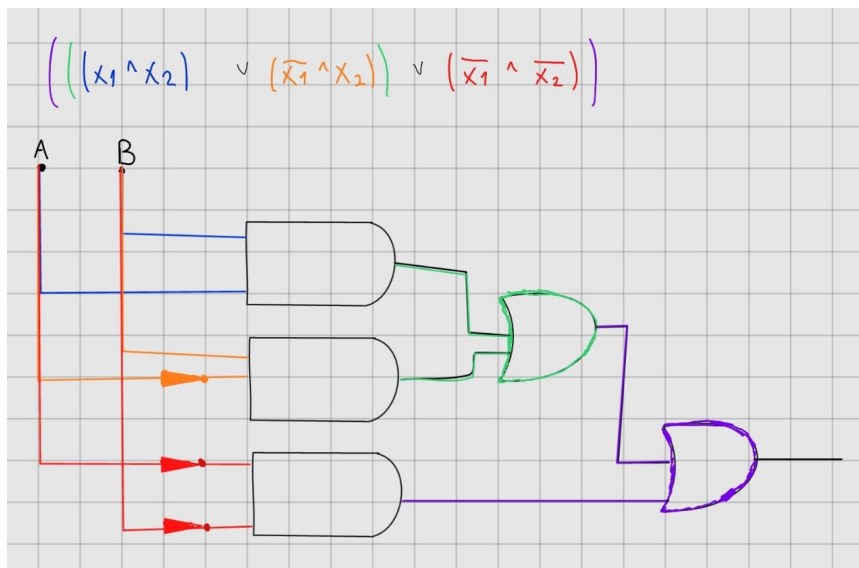
1. Solo consideramos de la función F, las filas verdaderas.
2. Cada fila verdadera tendrá su índice, y en ese índice estarán los valores de cada variable proposicional. Representamos a esa fila verdadera como t_i
3. Realizamos la conjunción de todas las variables de ese t_i
4. Realizamos la disyunción de todas las conjunciones de t_i

Un ejemplo:

$$\text{Sea } F = X + \bar{Y}$$

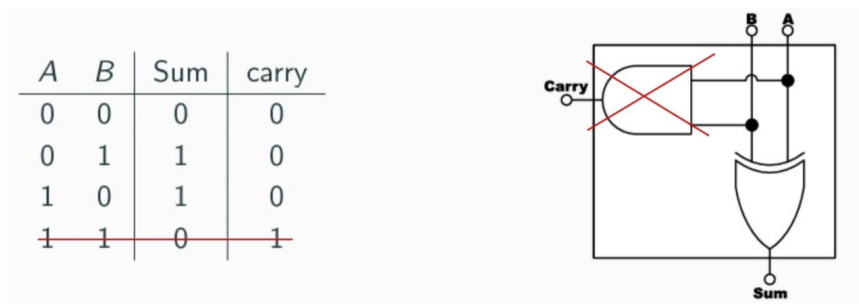
X	Y	F
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	1

- F es solamente verdadera en la primera, segunda y tercer fila por lo tanto tenemos t_1 t_2 y t_3
- Por cada fila, hacemos la conjunción de los valores
 - $x_1 \wedge x_2$
 - $\bar{x}_1 \wedge x_2$
 - $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2$
- Realizamos la disyunción de todos los t_i
 - $(x_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2) \vee (\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2)$
- El resultado nos da ϕ' que es una suma de productos y nos permite traducir fácilmente a un circuito combinatorio



Carry en circuitos

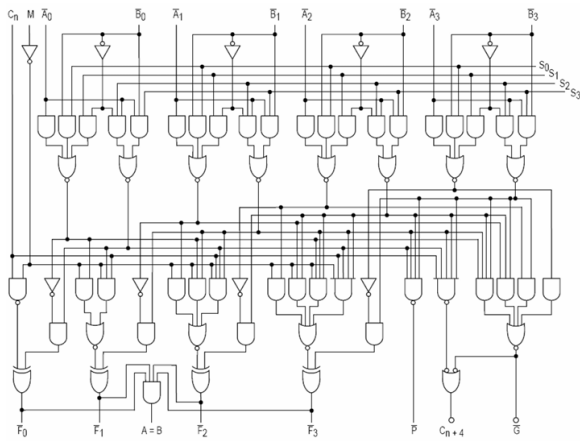
El carry debe colocarse en los circuitos en la suma porque en caso de no hacerlo, se nos pierden casos.



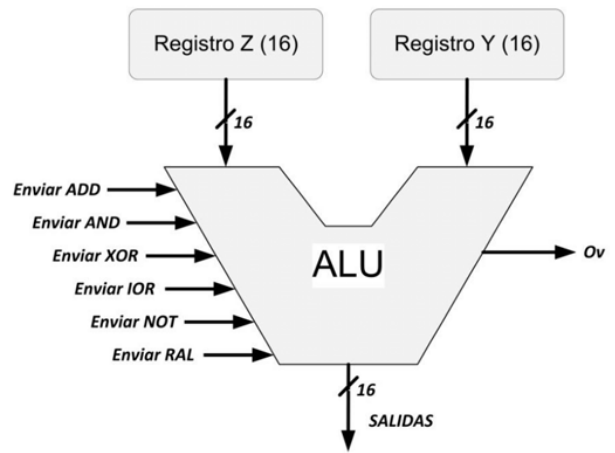
Si eliminamos el carry se nos pierde el caso 1 + 1, por lo tanto lo ideal sería que al hacer una suma nos quede así:



Caja Blanca / Caja Negra en Circuitos



(a) Caja Blanca



(b) Caja Negra

Timing

En un circuito combinatorio el tiempo que tarda la salida en estabilizarse depende de la cantidad de capas de compuertas (latencia). Para enfrentar el problema usamos secuenciales.