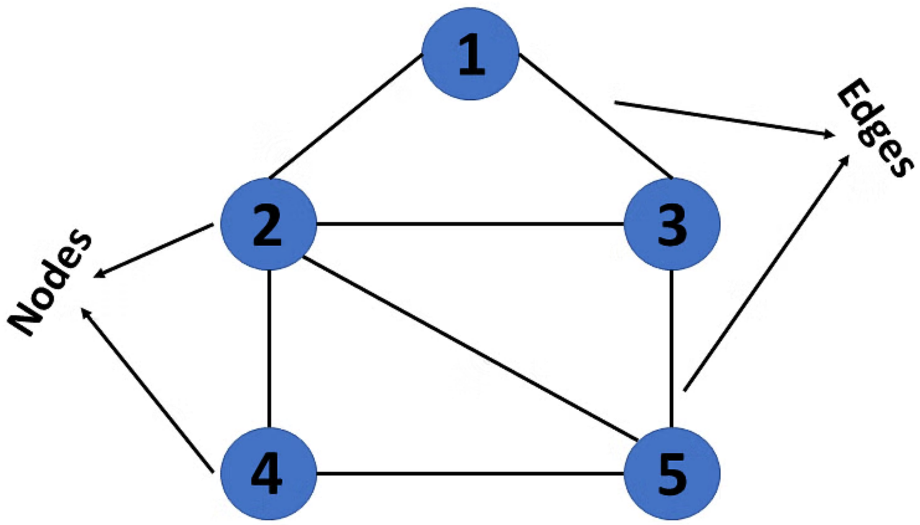
Técnicas y Diseños de Algoritmos

Tomás Agustín Hernández

Grafos

Un grafo es una estructura de datos compuesta por **V un conjunto de vértices (nodos)** y **E un conjunto de aristas que conectan pares de vértices**.
Definimos un grafo como: $G = (V, E)$ donde $E \subseteq VXV$.



Nótese que tiene sentido que el conjunto de aristas E esté formado por un par VXV. De lo contrario no existiría una arista.
Good to Know

- Si dos vértices están conectados por una arista, entonces estos se llaman **adyacentes**.
- La relación entre dos vértices define a $e = (u, v) \in E$. En este caso, decimos que **e** es incidente a **u** y **v**.
- La cantidad de vértices la notamos con la letra **n** y la cantidad de aristas con la letra **m**.

¿Por qué le decimos vértices a los nodos?

Porque los grafos tienen un fundamento mucho más matemático.

Self Loop

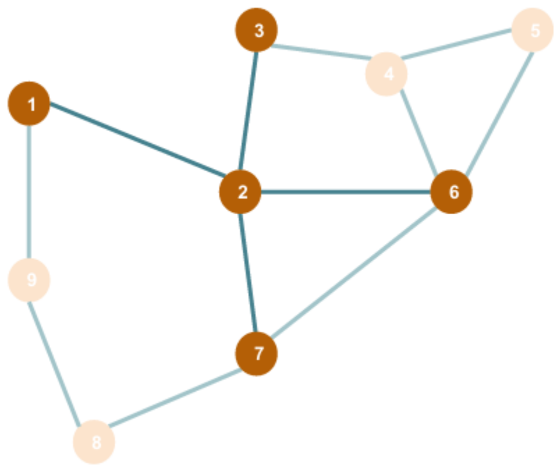
En un grafo, hablamos de self loop cuando un vértice se relaciona consigo mismo.

Cantidad de vertices y cantidad de aristas

Definimos la cantidad de vértices de un grafo como $|V| = n$ y la cantidad de aristas como $|E| = m$.
Good to Know: En un grafo T (árbol) **siempre** sucede que $|V| > |E|$ en una unidad. Lo veremos más adelante, pero está bueno notarlo.

Vecindad de un vértice

Llamamos vecindad de un vértice v a todos los vértices adyacentes de v.
Formalmente, lo definimos como: $N(v) = \{u \in V : (v, u) \in E\}$



Ej.: $N(2) = \{1, 3, 7, 6\}$
Good to Know: Se utiliza la letra N de Neighbor (vecino) en inglés.

Grafo Simple

Un Grafo Simple es un grafo que no tiene más de una arista entre dos mismos nodos. Nótese que aquí no importa la relación entre ellos, sino que, no debería estar repetido el mismo par (sin importar el orden).

- $E = \{(A, B), (A, B)\}$ NO es un Grafo Simple.
- $E = \{(A, B), (B, A)\}$ o $E = \{(B, A), (A, B)\}$ NO es un Grafo Simple.
- $E = \{(A, B)\}$ SÍ es un Grafo Simple.

Grafo no Simple

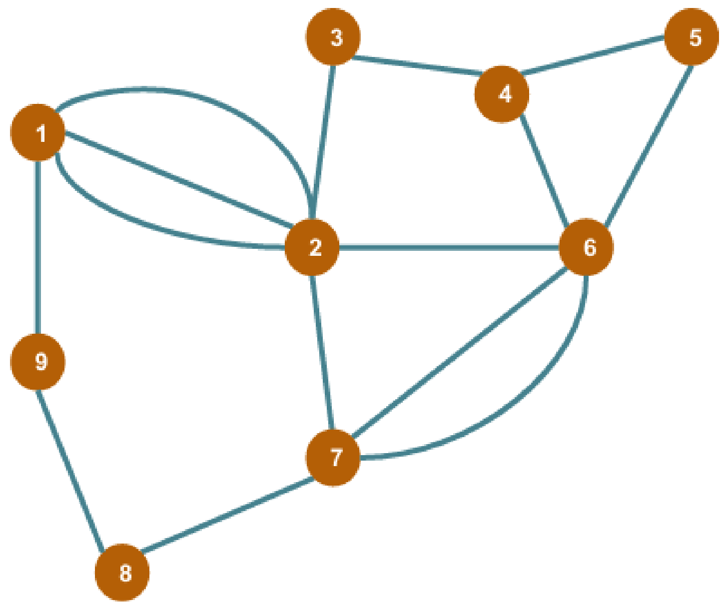
Un Grafo no Simple es un grafo que no tiene ninguna restricción con respecto a la relación entre dos vértices (nodos).

- $E = \{(A, B), (A, B)\}$ es un Grafo no Simple.
- $E = \{(A, B), (B, A)\}$ o $E = \{(B, A), (A, B)\}$ es un Grafo no Simple.
- $E = \{(A, B)\}$ SÍ es un Grafo no Simple.

Good to Know: Los grafos simples, son subconjuntos de grafos no simples. Por ende, si tenemos un grafo no simple que cumple las propiedades de un grafo simple, consideramos que es un **grafo simple** al ser más restrictivo.
En los ejemplos anteriores, entonces, $E = \{(A, B)\}$ sería mejor considerado como Grafo Simple.

Multigrafo

Un Multigrafo es un tipo de **grafo no simple** el cual puede haber más de una arista entre el mismo par de vértices.



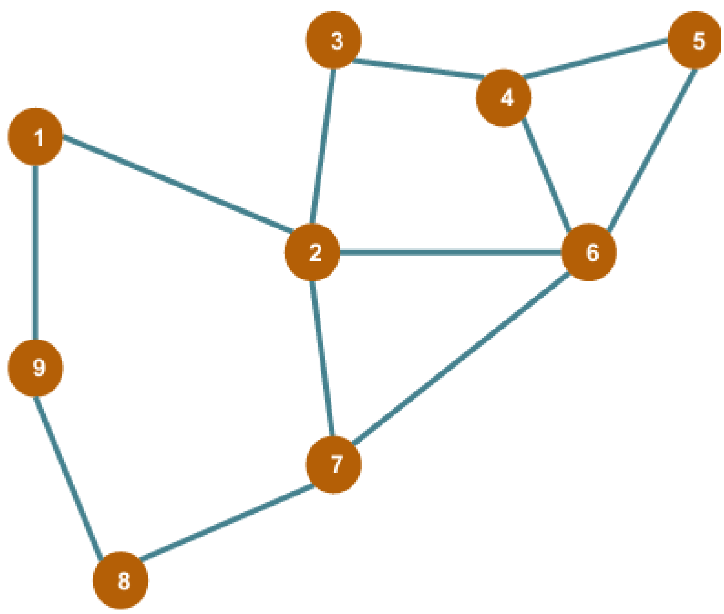
En el gráfico anterior, se definió el siguiente multigrafo: $G = \{\mathbf{(1,\ 2),\ (1,\ 2),\ (1,\ 2)}, (2,3), (3,4), (3,2), (4,3)...\}$

Pseudografo

Un Pseudografo es un tipo de **grafo no simple** el cual tiene la particularidad de que puede haber más de una arista entre el mismo par de vértices, y, además, los vértices pueden tener self-loops.
Good to Know: Puede haber más de un self-loop de un vértice.

Grado de un vértice (nodo)

El grado de un vértice es la cantidad de conexiones que tiene un nodo.
Definimos formalmente al grado de un vértice como $deg(v) = \#\{e \in E : v \in e\}$
Good to Know: deg refiere a degree.
Good to Know 2: **e** es una arista particular $e = (v, w)$.
Good to Know 3: En un grafo G, al grado mínimo lo notamos como $\delta(G)$ mientras que al grado máximo lo notamos como $\triangle(G)$



En este caso particular, tenemos que $\delta(G) = 2$ y $\triangle(G) = 4$, y, a modo de ejemplo, $deg(2) = 4$
Good to Know 4: Por cada par de vértices, tenemos una suma de grado 2. Ej.: $\{(1,2)\}$ nos da $deg(1) + deg(2) = 2$

Grado de un vértice en un Multigrafo

Exactamente igual que en un Grafo, pero acá hay que aclarar que como podemos tener una relación entre dos vértices más de una vez tenemos que contar cada arista. Por ejemplo, si tenemos $\{(1,2),(1,2)\}$ entonces $deg(1) = 2$.

Grado de un vértice en un Pseudografo

Exactamente igual que en un Grafo, pero acá el self-loop cuenta 2 veces. Por ejemplo, si tenemos $\{(1,2),(1,2),(1,1),(1,1)\}$ entonces $deg(1) = 6$. Si en algún momento te maréas, el self-loop vale dos porque tenés el mismo número en el par.

Suma de los grados de los vértices

Dado un grafo G = (V, E) la **la suma de los grados** de sus vértices es igual a 2 veces el número de aristas. Es decir,

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2 \times \#\{e \in E = 2m\}$$

Para ver acerca de cómo demostrarlo, véase **anexo**
Corolario: En un grafo, siempre hay una cantidad par de vértices que tienen grado impar. Ej.: $\{(1,2),(2,3)\}, deg(1) = 1, deg(2) = 2, deg(3) = 1$

Grafo Dirigido (Digrafo)

Un Grafo Dirigido es un tipo de grafo (que puede ser simple o no simple) pero importa quién se relaciona con quién, es decir, el orden en que guardamos la relación. En dibujos, lo notamos con una flecha.

- $E = \{(A,B)_{\rightarrow}, (B,A)_{\leftarrow}\}$ es un grafo dirigido, esto quiere decir que $(A,B) \neq (B,A)$

Good to Know: A nivel estructura de datos, parece que E es igual en un Grafo Dirigido que un Grafo No Dirigido. No obstante, optamos, a nivel de notación incluir una fecha para indicar la relación entre ambos. A nivel código, deberías manejar alguna información extra para entender si es dirigido o no.

Grado de un vértice en un Grafo Dirigido

En un Grafo Dirigido, el grado de un vértice se calcula como $deg(v) = indeg(v) + outdeg(v)$
¿A qué nos referimos con indeg(v) y outdeg(v)? Como es un grafo dirigido, la relación entre los vértices importa. Por lo tanto, aquellas aristas entrantes al nodo v origen las agrupamos en indeg(v) mientras que aquellas aristas salientes desde el nodo v las agrupamos en outdeg(v).

- $E = \{(A,B)_{\rightarrow}, (B,A)_{\leftarrow}, (A,C)_{\rightarrow}\}$ es un grafo dirigido. Siendo indeg(A) = 1, outdeg(A) = 2 $\implies deg(A) = 3$

Cantidad de Aristas de un Grafo Dirigido Simple

Como acá importa la relación los vértices pues contamos todas las aristas pues $(A,B) \neq (B,A)$

$$0 \leq |E| \leq n(n-1)$$

Cantidad de Aristas de un Grafo Dirigido NO Simple

No hay límite, pueden ser infinitas. No hay fórmula concreta.

Grafo No Dirigido

Un Grafo No Dirigido es un grafo el cual no existe la dirección en una relación entre dos vértices.

- $E = \{(A,B),(B,A)\}$ es un grafo no dirigido, esto quiere decir que $(A,B) = (B,A)$

Good to Know: Los Grafos Dirigidos o Grafos no Dirigidos pueden ser Grafos Simples o no Simples.

Cantidad de Aristas de un Grafo NO Dirigido Simple

Como no importa la relación entre los vértices pues $(A,B) = (B,A)$, contamos solo una vez esa arista

$$0 \leq |E| \leq \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$$

Cantidad de Aristas de un Grafo NO Dirigido NO Simple

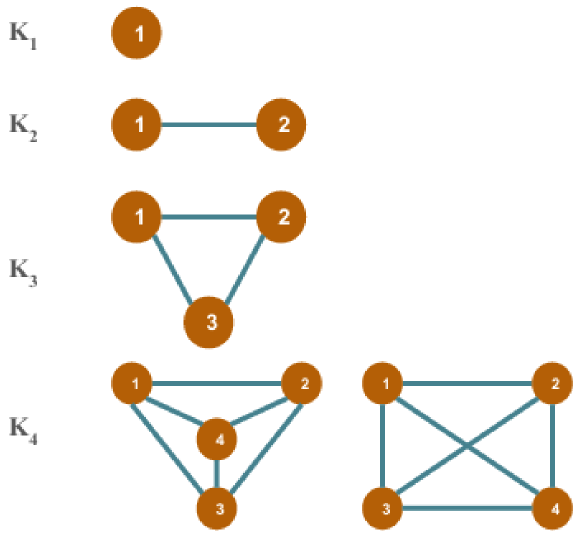
No hay límite, pueden ser infinitas. No hay fórmula concreta.

Grado de un vértice en un Grafo No Dirigido

Es la misma cuenta que hacemos en un grafo dirigido, pero sin distinguir en grupos a las aristas **(porque no tienen dirección)**.

Grafo Completo

Llamamos Grafo Completo a un Grafo que tiene todos sus vértices están conectados entre sí.
Formalmente, lo notamos como K_n donde **n** es la cantidad de vértices que tiene el grafo.



Grafo Complemento

Un Grafo Complemento (G^C) es el Grafo que tiene todas las aristas que no estaban en G.
Ej.: $G = \{(1,2),(3,2)\}$ entonces $G^c = \{(1,3),(2,3)\}$

Cantidad de aristas de un Grafo Complemento

$$m_{\overline{G}} = \frac{n(n-1)}{2} - m$$

Creo que es necesario que sea un Grafo simple no dirigido

Camino

Un camino en un grafo es una sucesión de aristas.
Lo definimos formalmente de la siguiente manera: $e_i^f = e_{i+1}^0 \ \forall i \ (v = e_i^0, w = e_r^f)$
Good to Know: El 0 indica desde donde comienza el camino.

Camino en un Grafo Dirigido

Importa quién se relaciona con quien. Ej.: $E = \{(A,B)_\to, (B,C)_\to\}$

Camino en un Grafo no Dirigido

No importa quién se relaciona con quien. Ej.: $E = \{(A,B),(B,C)\}$. El camino podría ser en cualquier sentido.

Ciclos

Los ciclos son caminos tal que $v_0 = v_r$. Solo existe en grafos no simples.

- $E = \{(A,B)_\to, (B,C)_\to, (C,A)_\to\}$ es un ciclo.

Una forma sencilla de pensarlo es lo siguiente: todo vértice recibe a un vértice, y todo vértice emite a un vértice. En algún momento se cierra la relación y los junta a todos.

Grafo Conexo

Un Grafo Conexo es un Grafo que tiene la particularidad donde todos sus vértices están conectados entre sí.

- $E = \{(A,B)_{\rightarrow},(B,C)_{\rightarrow},\}$ es un grafo conexo.
- $E = \{(A,B)_{\rightarrow},(C,D)_{\rightarrow}\}$ no es un grafo conexo.

Grafo fuertemente Conexo

Un Grafo fuertemente conexo es un grafo dirigido y conexo. Todos los nodos deben tener una relación simétrica entre ellos.

- $E = \{(A,B)_{\rightarrow},(B,C)_{\rightarrow}\}$ es un grafo conexo.
- $E = \{(A,B)_{\rightarrow},(B,C)_{\rightarrow},(C,B)_{\rightarrow},(B,A)_{\rightarrow},\}$ es un grafo fuertemente conexo.

Grafo T

Es un árbol que cumple con las siguientes propiedades

- Es conexo.
- No tiene ciclos.

Grafo Bosque

Es un árbol que cumple con la propiedad de que **no tiene ciclos**.

Anexo

Demostraciones de Grafos

Normalmente se hace inducción sobre las aristas, aunque en algunos casos, optamos sobre los vértices.
Lo más común es tener un caso base del tipo $n = 1, m = 0$ o $n = 2, m = 1$. **Good to Know**: Usar a favor las propiedades.

Suma de los grados de los vértices