진동실험 3주차

[기계공학실험1]　　1분반(금요일 3조)　　학번: 20191820　　이름: 김형준

1. 1자유도 자유 진동

문제 a)

주어진 1자유도 시스템의 운동 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sum M_0 = I_0\ddot{\theta}$$

평형상태를 기준으로 잡고, Small motion을 가정하면, $(\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1)$

$$I_0 = ML^2 + \frac{mL^2}{3} = (\mathrm{M} + \frac{m}{3})L^2$$

$$I_0\ddot{\theta} = (M + \frac{m}{3})L^2\ddot{\theta} = -kL^2\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{M + \frac{m}{3}}\theta = 0$$

이다.

이 때 스프링 상수 k는

$$\mathrm{k} = \frac{Gd^4}{64nR^3} = \frac{8 \times 10^{10} \times 0.00246^4}{64 \times 7 \times 0.023^3} = 537.488\ [{}^{\mathrm{N}}/_{m}]$$

(스프링의 재질이 steel이므로 Table 1.2에 따라 $\mathrm{G} = 8 \times 10^{10}\ [{}^{N}/_{m^2}]$)

이고, 이 값을 사용하여 고유진동수 ω_n을 구하면,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{3}}} = \sqrt{\frac{537.488}{0.350 + \frac{0.315}{3}}} = 34.370\left[{}^{rad}/_{s}\right] = 5.470\ [\mathrm{Hz}]$$

이다.

문제 b)

스프링의 질량을 고려하면 시스템의 전체 유효 질량에 스프링의 질량의 $\frac{1}{3}$이 추가되므로

스프링의 질량 m_s에 의한 영향을 고려하여 운동방정식을 다시 구하면,

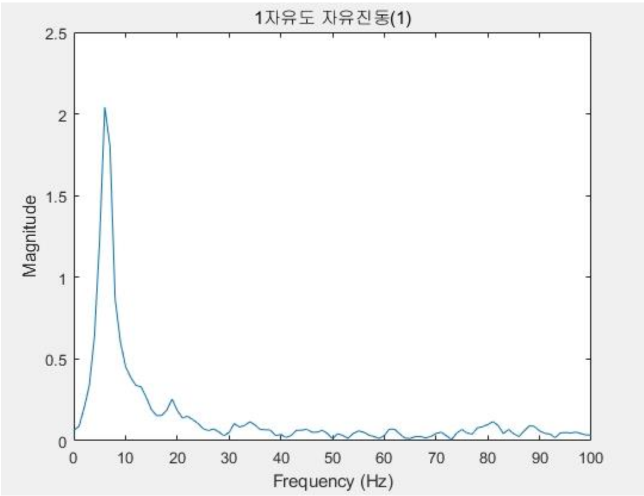
$$I_0 = ML^2 + \frac{mL^2}{3} + \frac{m_s L^2}{3} = (\mathrm{M} + \frac{m}{3} + \frac{m_s}{3})L^2$$
$$I_0\ddot{\theta} = (\mathrm{M} + \frac{m}{3} + \frac{m_s}{3})L^2\ddot{\theta} = -kL^2\theta$$
$$\ddot{\theta} + \frac{k}{M + \frac{m}{3} + \frac{m_s}{3}}\theta = 0$$

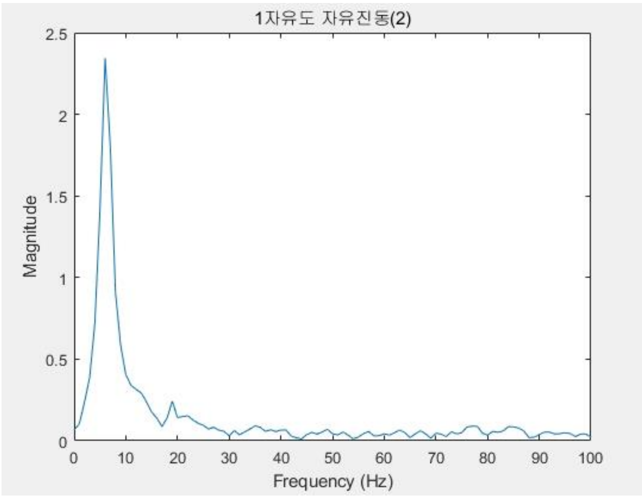
위 식을 사용하여 고유진동수 w_n을 구하면,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{3} + \frac{m_s}{3}}} = \sqrt{\frac{537.488}{0.350 + \frac{0.315}{3} + \frac{0.043}{3}}} = 33.841 \left[{}^{rad}/_{s}\right] = 5.386\ [\mathrm{Hz}]$$

이다.

문제 c)





실험값으로 주어진 데이터들을 각각 FFT를 사용하여 time domain에서 frequency domain으로 변환하면 위와 같다. 각각의 그래프에서 모두 고유진동수 f = 6 $[Hz]$가 측정되었다. 따라서 이 시스템의 고유진동수 $\omega_n = 6\ [Hz] = 37.70\ [{}^{rad}/_{s}]$ 이다.

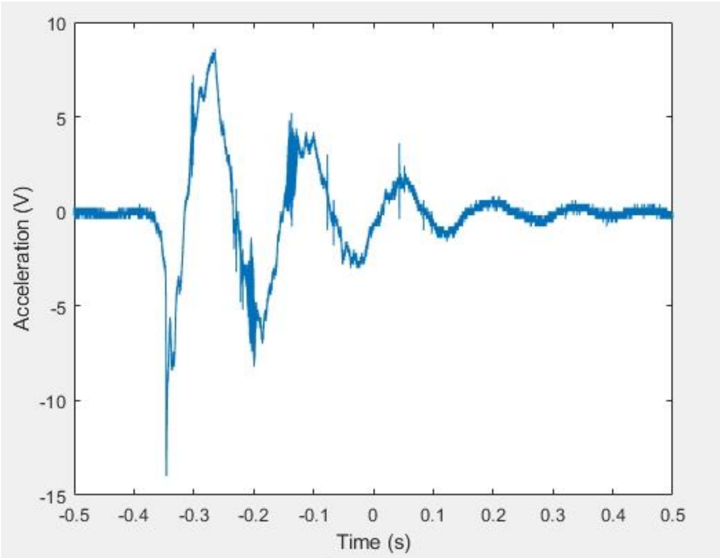
이를 사용해 k 값을 구하면,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{M + \frac{m}{3} + \frac{m_s}{3}}} = 37.70\ [{}^{rad}/_{s}]\text{에서}$$

$$\mathrm{k} = \left(M + \frac{m}{3} + \frac{m_s}{3}\right) \times {\omega_n}^2 = \left(0.350 + \frac{0.315}{3} + \frac{0.043}{3}\right) \times (37.70)^2 = 667.027\ [{}^{N}/_{m}]$$

이다.

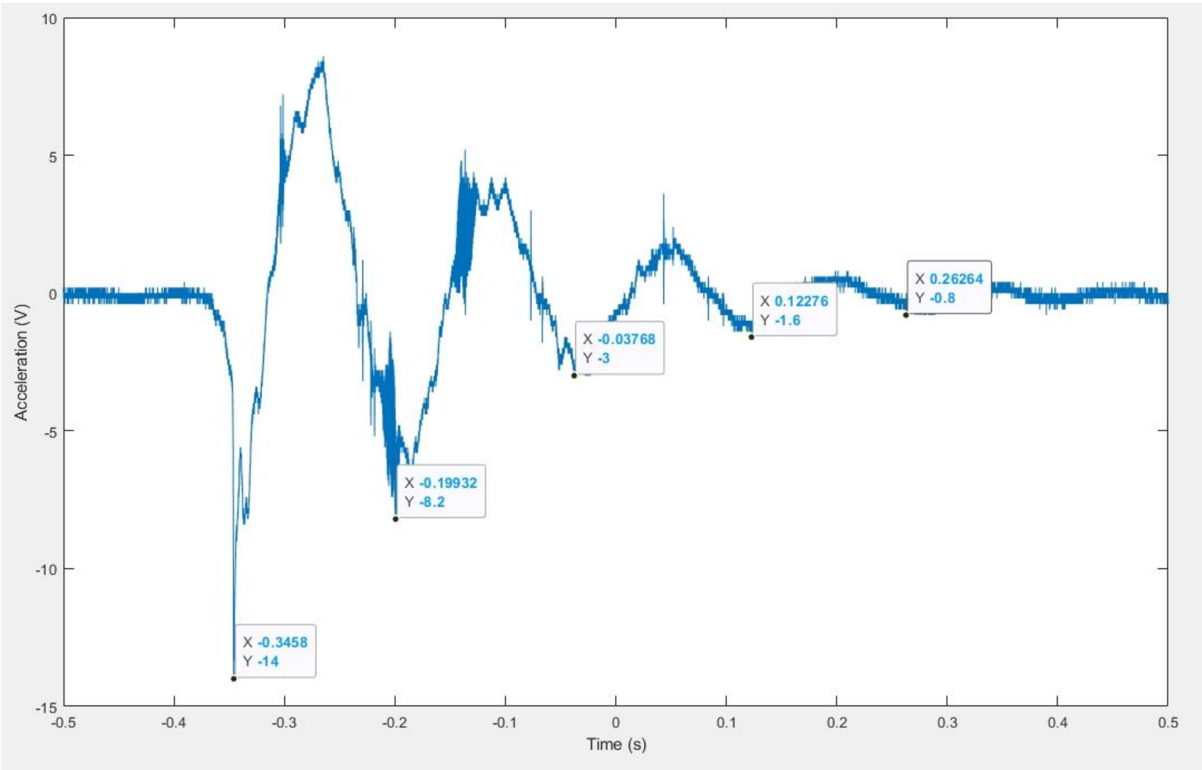
문제 d)



[1자유도 자유진동 (1)의 Time vs Acceleration 그래프]

δ(Logarithmic decrement)를 아래와 같은 식으로 구하기 위해 아래 사진과 같이 그래프에서 5개의 골(local minimum) 지점을 선택해, 골부터 다음 골 사이를 한 주기로 간주했다.

$$\delta = ln\frac{x(t)}{x(t+T)} \approx ln\frac{\ddot{x}(t)}{\ddot{x}(t+T)} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$



위의 식에서 $\delta \approx ln\frac{\ddot{x}(t)}{\ddot{x}(t+T)}$로 δ를 구한다.

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\text{에서,} \qquad \zeta = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{4\pi^2}{\delta^2}}}\text{이다.}$$

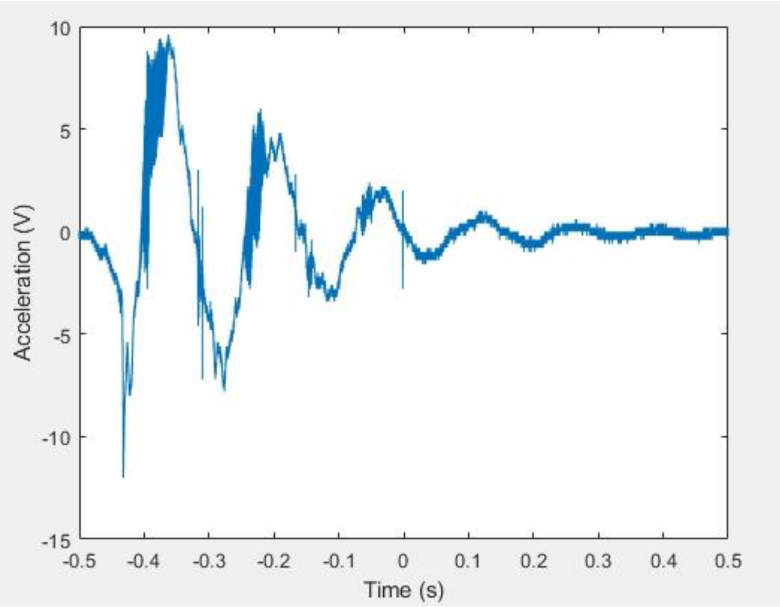
$$\text{또한, } c = 2\zeta\sqrt{km_{eff}} = 2\zeta\sqrt{k(M+\frac{m}{3}+\frac{m_s}{3})}\text{ 이므로}$$

$$(k = 667.027\ [{}^{N}/_{m}], m_{eff} = M + \frac{m}{3} + \frac{m_s}{3} = 0.4693\ [kg])$$

위 식들을 사용해 δ, ζ, c의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

<table>
<tr><td>t [s]</td><td colspan="2">-0.3458</td><td colspan="2">-0.19932</td><td colspan="2">-0.03768</td><td colspan="2">0.12276</td><td colspan="2">0.26264</td></tr>
<tr><td>$\ddot{x}(t)$ $[V]$</td><td colspan="2">-14</td><td colspan="2">-8.2</td><td colspan="2">-3</td><td colspan="2">-1.6</td><td colspan="2">-0.8</td></tr>
<tr><td>δ $[-]$</td><td></td><td colspan="2">0.53492</td><td colspan="2">1.0055</td><td colspan="2">0.62861</td><td colspan="2">0.69315</td><td></td></tr>
<tr><td>ζ $[-]$</td><td colspan="10">0.11315</td></tr>
<tr><td>c $[{}^{Ns}/_{m}]$</td><td colspan="10">4.0041</td></tr>
</table>

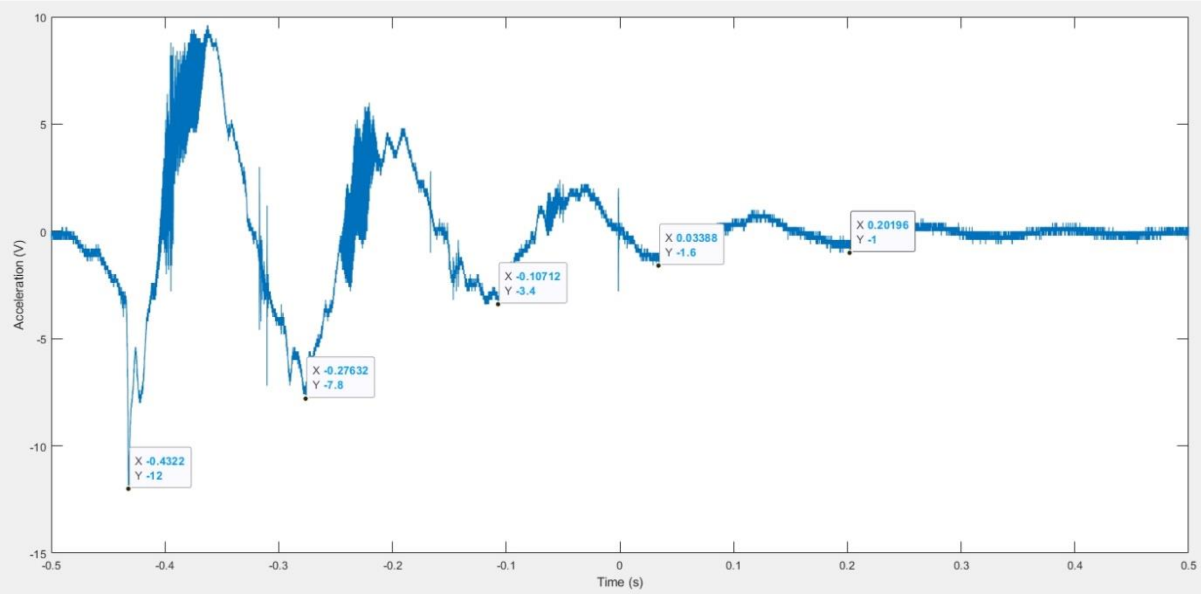
※ ζ 계산시 δ의 평균값 0.71555을 사용하였음



[1자유도 자유진동 (2)의 Time vs Acceleration 그래프]

위와 같은 과정을 2번째 측정 데이터에도 각각 적용하면 다음과 같다.

아래의 사진은 위 그래프에서 5개의 골(local minimum) 지점을 선택한 것을 보여준다.



위 그림에서 선택한 값을 통해 계산된 δ, ζ, c의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

<table>
<tr><td>t [s]</td><td colspan="2">-0.4322</td><td colspan="2">-0.27632</td><td colspan="2">-0.10712</td><td colspan="2">0.03388</td><td colspan="2">0.20196</td></tr>
<tr><td>$\ddot{x}(t)$ $[V]$</td><td colspan="2">-12</td><td colspan="2">-7.8</td><td colspan="2">-3.4</td><td colspan="2">-1.6</td><td colspan="2">-1</td></tr>
<tr><td>δ $[-]$</td><td></td><td colspan="2">0.43078</td><td colspan="2">0.83035</td><td colspan="2">0.75377</td><td colspan="2">0.47000</td><td></td></tr>
<tr><td>ζ $[-]$</td><td colspan="10">0.09839</td></tr>
<tr><td>c $[{}^{Ns}/_{m}]$</td><td colspan="10">3.4818</td></tr>
</table>

※ ζ 계산시 δ의 평균값 0.62123을 사용하였음

문제 e)

고유진동수의 이론값과 실험값에 차이가 생기는 이유는 여러가지가 있다.

먼저, 보에 힘을 가할 때 손으로 힘을 가했기 때문에 정확히 한 점에 수직으로 가하지 못했기 때문에 실험값에 오차가 생길 수 있다. 또한 실험에서는 공기저항으로 인한 감쇠, 실험 장치에 의한 감쇠, 실험장치 주변의 진동, 실험실의 습도, 실험장치 사이에 발생하는 마찰 등이 발생한다.

이론값을 구하는 과정에는 위와 같은 요소들을 포함시키지 않는 이상적인 상황을 가정했으므로 실험값과 이론값 사이에 차이가 발생한다. 이론값을 구할 때는 실험장치의 각 요소들의 부피를 무시하고 질점으로 가정하고 계산하였으므로 물체의 부피와 질량 분포가 가지는 효과를 무시했으므로 오차가 발생할 수 있다. 마지막으로, 센서의 측정한계(분해능) 때문에 정확한 값을 측정할 수 없어

truncation error가 발생한다. 또한, 센서의 측정 시간 간격도 존재하므로 측정된 실험 데이터는 연속적이지 않고 이산적인 값만을 구할 수 있어 측정 오차가 발생해 이론값과 실험값 사이에 차이가 발생할 수 있다.

2. 1자유도의 강제진동 (기저 가진)

문제 a)

진폭 X, Y와 가속도의 관계는 다음과 같은 식으로 표할 수 있다.

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^T x^2 dt = \frac{X^2\omega^4}{T}\int_0^T sin^2\omega t dt = \frac{X^2\omega^4}{2} \approx \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{n=T/\Delta t} {a_n}^2\Delta t$$

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^T y^2 dt = \frac{Y^2\omega^4}{T}\int_0^T sin^2\omega t dt = \frac{Y^2\omega^4}{2} \approx \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{n=T/\Delta t} {a_n}^2\Delta t$$

여기서, $\frac{X^2\omega^4}{2} \approx \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{n=T/\Delta t} {a_n}^2\Delta t$ 이므로 식을 진폭 X에 대해 나타내면,

$$\mathrm{X} = \sqrt{\frac{2}{T\omega^4}\sum_{n=1}^{n=T/\Delta t} {a_n}^2\Delta t}$$

마찬가지로 $\frac{Y^2\omega^4}{2} \approx \frac{1}{T}\sum_{n=1}^{n=T/\Delta t} {a_n}^2\Delta t$를 진폭 Y에 대해 나타내면,

$$\mathrm{Y} = \sqrt{\frac{2}{T\omega^4}\sum_{n=1}^{n=T/\Delta t} {a_n}^2\Delta t}$$

이다.

위 식들을 Matlab 코드로 변환하여 각각의 실험 데이터들을 사용해 진폭 X, Y를 구하면 다음과 같다.

	실험1	실험2	실험3	실험4	실험5
f [Hz]	4	5	6	7	8
X	4.5861×10^{-6}	3.2637×10^{-6}	4.5734×10^{-6}	8.9493×10^{-6}	6.3261×10^{-6}
Y	4.1984×10^{-6}	4.1197×10^{-6}	9.2403×10^{-6}	2.8914×10^{-6}	2.0140×10^{-6}

```
1   clc;close all;clear all;
2
3   userpath('C:\Users\Ninfia\Documents\MATLAB\기공실') % 실험 데이터 파일 위치 입력
4   DataX = xlsread('forced05A.csv'); % ch3 (X''(t) 데이터 입력)
5   DataY = xlsread('forced05B.csv'); % ch4 (Y''(t) 데이터 입력)
6   Xn = DataX(:,3);
7   Yn = DataY(:,3);
8   FXn = DataX(:,4);
9   FYn = DataY(:,4);
10  Tx = size(Xn);
11  Ty = size(Yn);
12  Tx = Tx(1);
13  Ty = Ty(1);
14  dTx = (Xn(Tx)-Xn(1))/Tx;
15  dTy = (Yn(Ty)-Yn(1))/Ty;
16  w = 8*pi*2; % 가진 주파수 [rad/s]
17  X = sqrt(sum(FXn.^2*dTx)*(2/Tx/power(w,4)));
18  Y = sqrt(sum(FYn.^2*dTy)*(2/Ty/power(w,4)));
19  fprintf("X = %g, Y = %g",X, Y); % 값 출력용
```

[문제 a에서 사용된 Matlab 코드]

※ 4, 5번 줄의 forced05A, forced05B를 변경해 실험 데이터 파일을 선택하고, 16번 줄의 가진주파수(w)를 각각 (4, 5, 6, 7, 8) *pi*2로 변경해 실험 데이터에 맞는 가진주파수 값을 입력함

문제 b)

Matlab의 두 벡터의 상호상관(cross-correlation)을 구하는 함수(xcorr)를 사용하여 base와 mass의 가속도 데이터($\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$)간의 상관관계를 구한 다음, 상관관계가 최대값이 되는 지점의 시간을 구하여 지연시간을 구할 수 있다. 위상차는 다음과 같은 비례식을 사용해 지연시간으로부터 구할 수 있다.

$$360°: T = \phi : \mathrm{D}$$

$$(\mathrm{D}: \text{지연시간}, \mathrm{T}: \text{주기}, \phi: \text{위상차})$$

이를 Matlab 코드로 나타내면 다음과 같다.

```
1   clc;close all;clear all;
2
3   userpath('C:\Users\Ninfia\Documents\MATLAB\기공실') % 실험 데이터 파일 위치 입력
4   DataX = xlsread('forced05A.csv'); % ch3 (X''(t) 데이터 입력)
5   DataY = xlsread('forced05B.csv'); % ch4 (Y''(t) 데이터 입력)
6   Xn = DataX(:,3);
7   Yn = DataY(:,3);
8   FXn = DataX(:,4);
9   FYn = DataY(:,4);
10
11  [c,lags] = xcorr(FXn,FYn); %calc cross-correlation
12  max_index = find(abs(c) == max(abs(c)));
13  max_lags = lags(max_index);
14  max_c = c(max_index);
15
16  f = 8; % 가진 주파수 [Hz]
17  Tx = size(Xn);
18  Tx = Tx(1);
19  dTx = (Xn(Tx)-Xn(1))/Tx;
20  dA = max_lags*360*f*dTx;
21
22  plot(lags,c);
23  fprintf("phase difference = %f",dA);
24
25  strmax=['maximum cross-correlation = ',num2str(max_c),', lags = ',num2str(max_lags)];
26  text (-15000,max_c,strmax,'VerticalAlignment','cap');
27
```

[문제 b에서 사용된 Matlab 코드]

※ 4, 5번 줄의 forced05A, forced05B를 변경해 실험 데이터 파일을 선택하고, 16번 줄의 가진주파수(f)를 각각 4, 5, 6, 7, 8로 변경해 실험 데이터에 맞는 가진주파수 값을 입력함

위 코드의 12번째 줄에서 correlation의 값이 최대가 되는 지점의 index를 찾아서 max_index에 저장하며, 13번째 줄에서 correlation의 값이 최대가 되는 지점의 지연시간(=max_lags, index 단위)을 구한다. 이때, 실험 데이터는 1초당 25000번 측정했으므로 index 한 칸당 시간 간격(Δt)은 $\frac{1}{25000}[s] = 4 \times 10^{-5}[s]$이다.

따라서 지연시간 $\mathrm{D} = \mathrm{max_lags} \times \Delta\mathrm{t}$이고, 비례식과 지연시간을 사용해 위상차를 구하면,

$$\phi = 360° \times D \div T$$

이때, 가진주파수 f는 주기의 역수이므로, 위상차는

$$\phi = 360° \times D \times f = 360° \times \max\_lags \times \Delta\mathrm{t} \times f$$

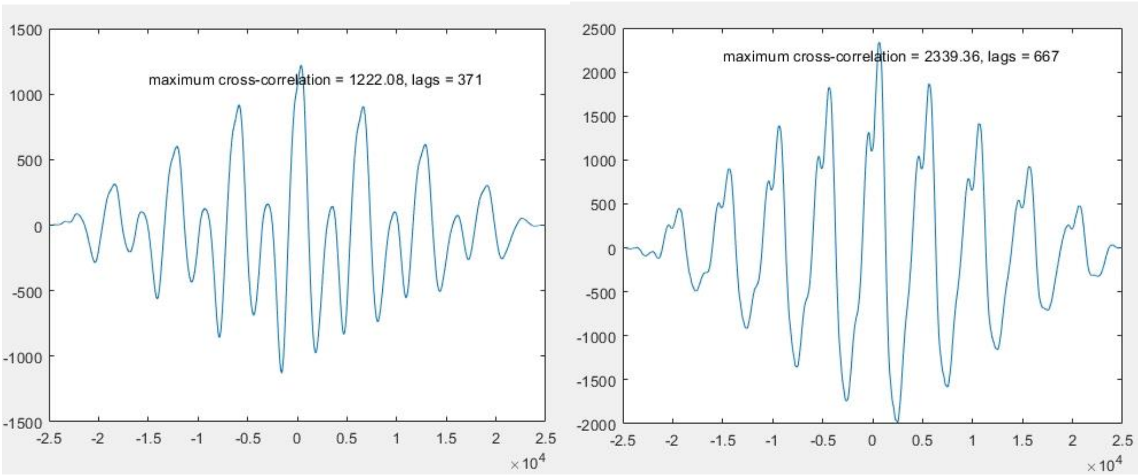
이다.

20번째 줄에서 위 공식을 코드로 나타내어 위상차(=dA)를 구하고 있다.

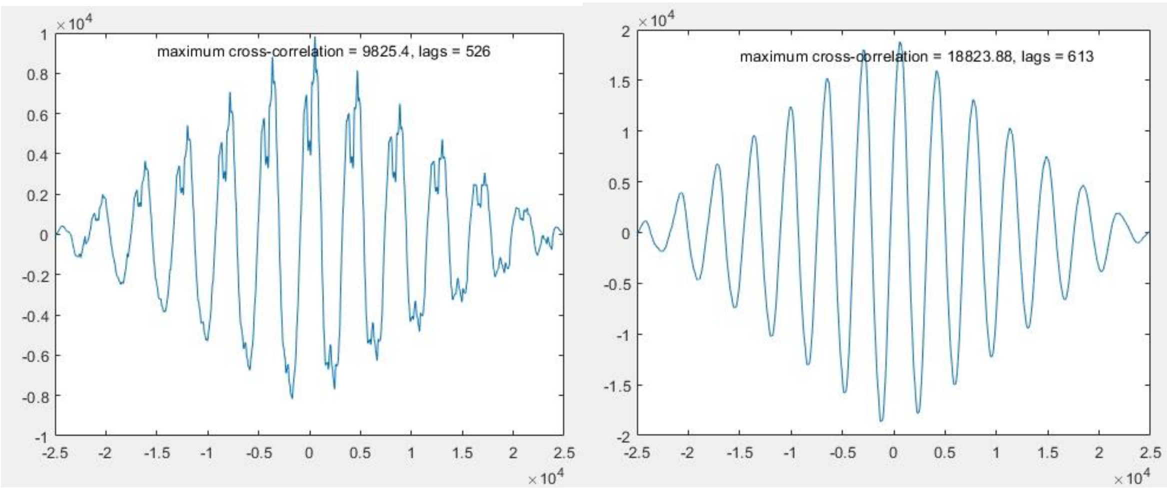
위의 Matlab 코드로 구한 각각의 실험데이터의 위상차를 표로 나타내면 다음과 같다.

	실험1	실험2	실험3	실험4	실험5
f [Hz]	4	5	6	7	8
ϕ [deg]	21.3687	48.0221	45.4446	61.7879	294.57

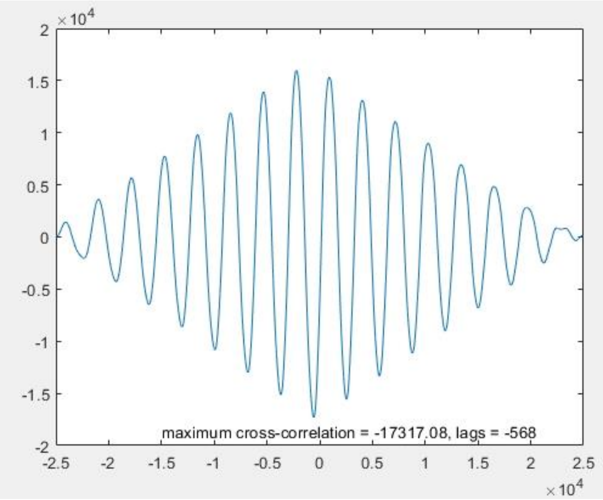
아래는 xcorr함수를 사용해 지연시간(index 단위) vs Correlation의 그래프다.



[실험 1(왼쪽, f=4Hz), 실험 2(오른쪽, f=5Hz)의 지연시간별 상관관계 그래프]



[실험 3(왼쪽, f=6Hz), 실험 4(오른쪽, f=7Hz)의 지연시간별 상관관계 그래프]



[실험 5(f=8Hz) 지연시간별 상관관계 그래프]

문제 c)

위에서 구한 값들을 사용해 $\omega, X, Y, X/Y, \phi$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

Frequency [Hz]	4	5	6	7	8
ω [Hz]	25.1327	31.4159	37.6991	43.9823	50.2655
X	4.5861×10^{-6}	3.2637×10^{-6}	4.5734×10^{-6}	8.9493×10^{-6}	6.3261×10^{-6}
Y	4.1984×10^{-6}	4.1197×10^{-6}	9.2403×10^{-6}	2.8914×10^{-6}	2.0140×10^{-6}
X/Y	1.09233	0.79222	0.49494	3.09519	3.14112
ϕ [deg]	21.3687	48.0221	45.4446	61.7879	294.57

문제 d)

문제 c)의 표에서 위상차를 보면, 4~7Hz에서는 위상차가 90도 미만인데, 8Hz에서는 위상차가 90도를 넘어간다. 따라서 7~8Hz 사이에 위상차가 90도가 되는 공진주파수가 있음을 예측할 수 있다.

선형보간법을 사용해 7Hz와 8Hz 사이에 위상차가 90도가 되는 공진주파수 f를 구하면,

$$90 = \frac{294.57 - 61.7879}{8 - 7}(f - 7) + 61.7879$$

$$f = \frac{90 - 61.7879}{\frac{294.57 - 61.7879}{8 - 7}} + 7 = 7.1212 \approx 7.1\ [\mathrm{Hz}]$$

이다.

문제 e)

문제 d와 같은 방식으로, f=7.1 [Hz]일 때의 X/Y값을 선형 보간법으로 구하면,

$$X/_{Y} = \frac{3.14112 - 3.09519}{8 - 7}(7.1 - 7) + 3.09519 = 3.09978$$

이다.

이때, 아래의 주어진 수식을 사용해 공진 주파수(r=1)일 때의 ζ값을 구하면,

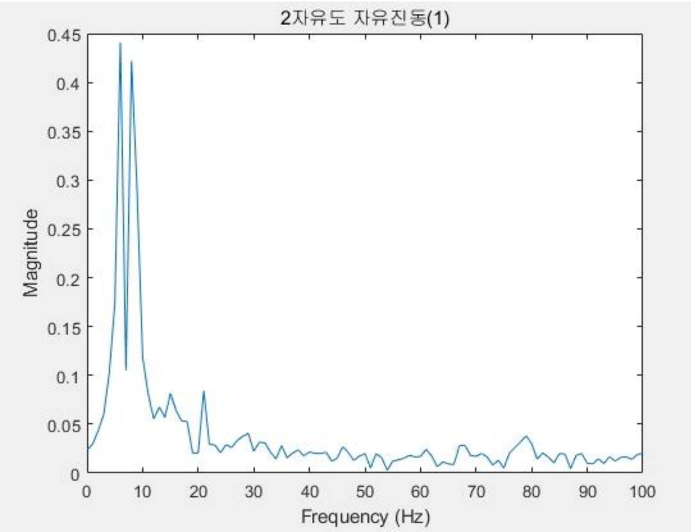
$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

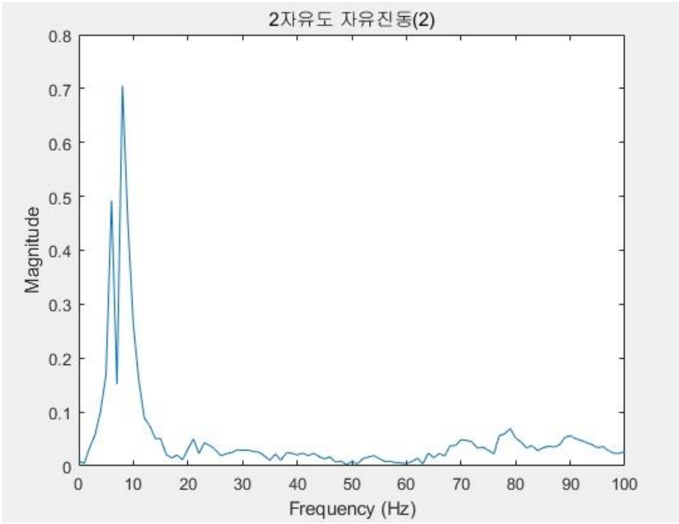
$$\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}} = \left[\frac{1 + (2\zeta)^2}{(2\zeta)^2}\right]^{\frac{1}{2}} \text{에서}$$

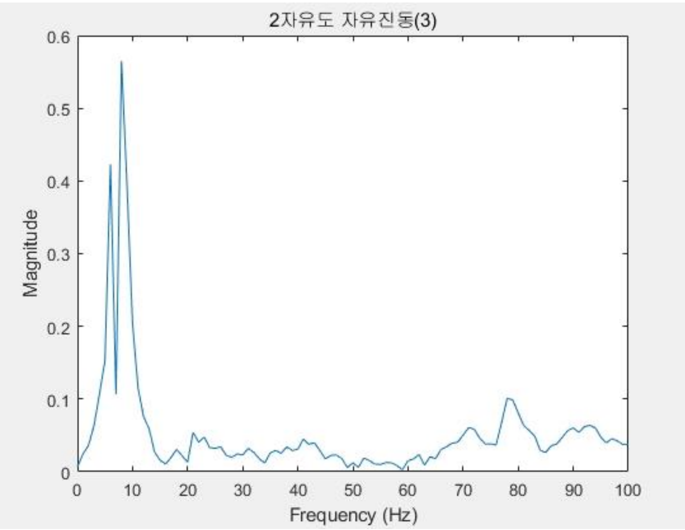
$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{4((\frac{\mathrm{X}}{\mathrm{Y}})^2 - 1)}} = \sqrt{\frac{1}{4((3.09978)^2 - 1)}} = 0.17041$$

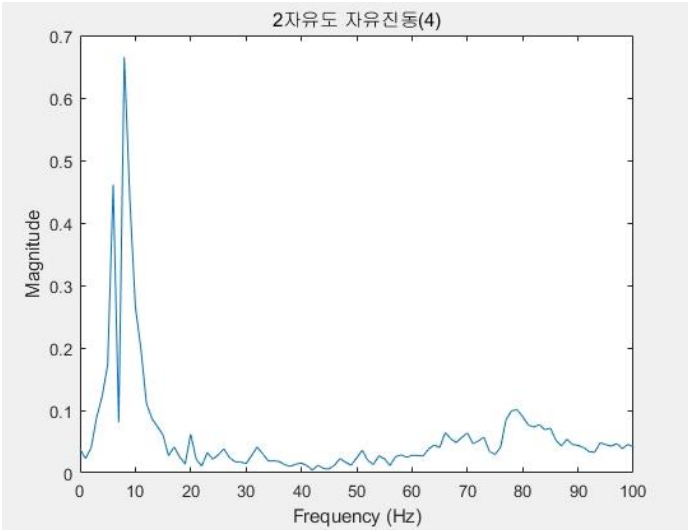
이다.

3. 2자유도의 자유진동









실험값으로 주어진 데이터들을 각각 FFT를 사용하여 time domain에서 frequency domain으로 변환하면 위와 같다. 각각의 그래프에서 모두 고유주파수 $f_1 = 6\,[Hz]$와 $f_2 = 8\,[Hz]$ 가 측정되었다. 따라서 이 2자유도 시스템은 고유진동수 $w_{n,1} = 6 * 2\pi = 37.70\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right] = 6\,[\mathrm{Hz}]$ 와 $w_{n,2} = 8 * 2\pi = 50.27\left[\frac{rad}{s}\right] = 8\,[Hz]$를 갖는다.

2자유도 시스템(Two degree of freedom system)은 2개의 자유도(2-DOF)를 가진 시스템으로, Coupling된 2개의 연립 미분 방정식(운동방정식)으로 표현된다.

2자유도 시스템은 2개의 고유진동수를 가지며, 각각에 대응되는 2개의 정규 모드가 있고 이들 간에 중첩이 존재한다. 2자유도 시스템의 운동방정식은 연립 방정식들을 묶어 행렬형

식으로도 나타낼 수 있다. 이때, 시스템 행렬의 특성방정식의 해가 고유진동수가 된다.

계의 운동은 고유 모드들의 조합에 의해 구성되고, 모드 형상(Mode Shape)의 특성을 갖는다. 모드 형상은 각각의 고유진동수에 대응하며 진동하는 변형 형상을 의미하며, 2개의 질량 (또는 자유도) 사이의 상대 운동을 나타낸다.

예시로 이 2자유도 시스템에서 운동방정식을 구하면, (흡진기(m_s)에 붙은 스프링 상수가 k_s, 가진기에서 가해지는 변위를 y(t) = Ysinωt, Small motion을 가정함)

흡진기에서,

$$\sum F = m_s \ddot{x_s}(t)$$
$$m_s \ddot{x_s}(t) = k_s(b\theta - x_s)$$
$$m_s \ddot{x_s}(t) + k_s x_s - k_s b\theta = 0$$

이고,

보에서, ($I_0 = ML^2$)

$$\sum M_0 = I_0 \ddot{\theta}(t)$$
$$I_0 \ddot{\theta}(t) = \mathrm{LKy(t)} - \mathrm{K}L^2\theta - b m_s \ddot{x_s}(t)$$
$$I_0 \ddot{\theta}(t) + b m_s \ddot{x_s}(t) + \mathrm{K}L^2\theta = \mathrm{LKy(t)}$$
$$I_0 \ddot{\theta}(t) - b k_s x_s + k_s b^2\theta + \mathrm{K}L^2\theta = LKYsin\omega\mathrm{t}$$

이다.

두 식을 행렬로 묶으면,

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & I_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x_s} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_s b \\ -k_s b & k_s b^2 + KL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_s \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ KLYsin\omega\mathrm{t} \end{bmatrix}$$

이 된다.