

기계공학실험1

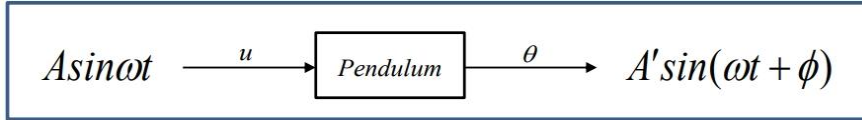
제어 1주차 - 주파수 응답의 이해

금요일 3조(12:00)

20191820 김형준

1. 실험 이론

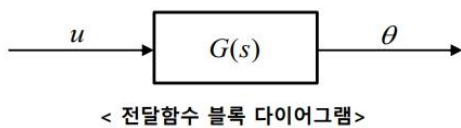
1-1 주파수 응답 특성



주파수 응답 특성은 선형 시스템에서 sinusoidal 입력(u)에서의 그에 대한 출력(y)의 진폭과 위상차의 관계를 의미한다. 정현파 입력이 선형 시스템에 입력되면($u = A \sin \omega t$), 그에 대한 정상상태 응답은 진폭(A')과 위상차(ϕ)를 가지는 입력과 같은 주파수의 정현파 출력을 나타낸다($y = A' \sin(\omega t + \phi)$). 따라서 입력의 주파수가 바뀔 경우, 시스템의 정상상태 출력은 크기와 위상만이 바뀌게 된다.

선형 시스템의 전달함수가 $G(s)$ 라 하면, 크기(Magnitude) $M = \frac{A'}{A} = |G(j\omega)|$, 위상(Phase) $\phi = \angle G(j\omega)$ 로 주어진다. 크기와 위상 응답이 주파수(ω)에 의존하는 관계를 Bode 선도, Nyquist 선도 등으로 표현할 수 있다.

1-2 전달함수



전달함수(Transfer Function)은 선형 특성을 갖는 대상의 입력과 출력사이의 관계를 나타내는 함수이다. 입출력 관계가 복소주파수 영역(s-domain)에서 보기 쉽게 대수적 비율로 표현된 함수이다.

일반적으로 $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$ 와 같이 선형시불변시스템(LTI)의 입출력 성질을 비로 표현하며, 전달함수의 라플라스 역변환을 통해 시스템의 미분방정식을 구할 수 있다.

시스템의 미분방정식에서 제어계의 모든 초기조건을 0으로 한 상태에서 라플라스 변환을 통해 구할 수 있다. 또한, 보드 선도의 정보를 이용하여 입출력 신호의 전달함수를 실험적으로 구할 수 있다.

1-3 보드 선도

보드 선도(Bode plot)은 시스템의 주파수 응답 특성을 그리는 표준 형식 중 하나로써, 정현파 입력의 주파수에 대한 시스템 전달함수의 크기와 위상을 주파수 영역에서 나타낸 그래프이다.

보드 선도는 주파수에 따른 입출력의 진폭비를 데시벨(dB) scale로 나타낸 크기 그래프(Magnitude Plot)와, 주파수에 따른 위상 차이를 나타낸 위상 그래프(Phase Plot)로 구성된다. 보드 선도에서는 가로축을 주파수의 로그스케일로($\log_{10} \omega$), 세로축을 크기 그래프에서는 $20 \log_{10} |G(j\omega)|$ 을 (dB 단위), 위상 그래프에서는 $\angle G(j\omega)$ 를 나타낸다(degree 단위).

보드 선도는 각각의 극점, 영점의 응답으로부터 전체 응답 크기와 위상을 쉽게 알 수 있으며, 각 부분별 응답 크기를 대수적으로 더하거나 뺄 수 있어 계산이 편리하다. 또한, 고차의 $G(j\omega)$ 에 대한 선도에 단순히 분할된 항을 도해적으로 더함으로써 손으로 쉽게 그릴 수 있다는 장점이 있다.

1-4 선형 시스템과 비선형 시스템

선형 시스템(linear system)은 입력과 출력의 관계가 선형인 시스템을 의미한다. 선형 시스템은 중첩의 원리를 만족하는데, 이는 여러 입력 신호가 합쳐질 때의 결과가 개별 입력 신호에 대한 결과들이 합쳐진 것과 같은 것을 의미한다. 이를 통해 선형 시스템에서는 각각의 응답을 다른 응답과 분리시켜 그 영향을 하나하나 독립적으로 해석하고, 나중에 이들을 선형 결합시켜 동일한 결과를 보일 수 있다.

비선형 시스템은 중첩의 원리를 만족하지 않은 시스템을 의미한다. 입출력 신호 관계가 선형성 조건을 만족하지 않으며, 복수의 독립된 평형점을 가질 수 있다. 제한 순환, 분기, 혼돈 등의 특징을 가지며, 특정한 상황에서만 해법이 존재하거나, 해법이 존재하지 않을 수 있다. 이런 경우, 비선형 시스템의 특정 구간에 대해 선형화하여 선형 시스템의 해법을 적용함으로써 해결한다. 이상적인 경우와 다르게, 실제 시스템은 마찰, 외란, 이력특성 등으로 인해 대부분 비선형 시스템에 해당한다.

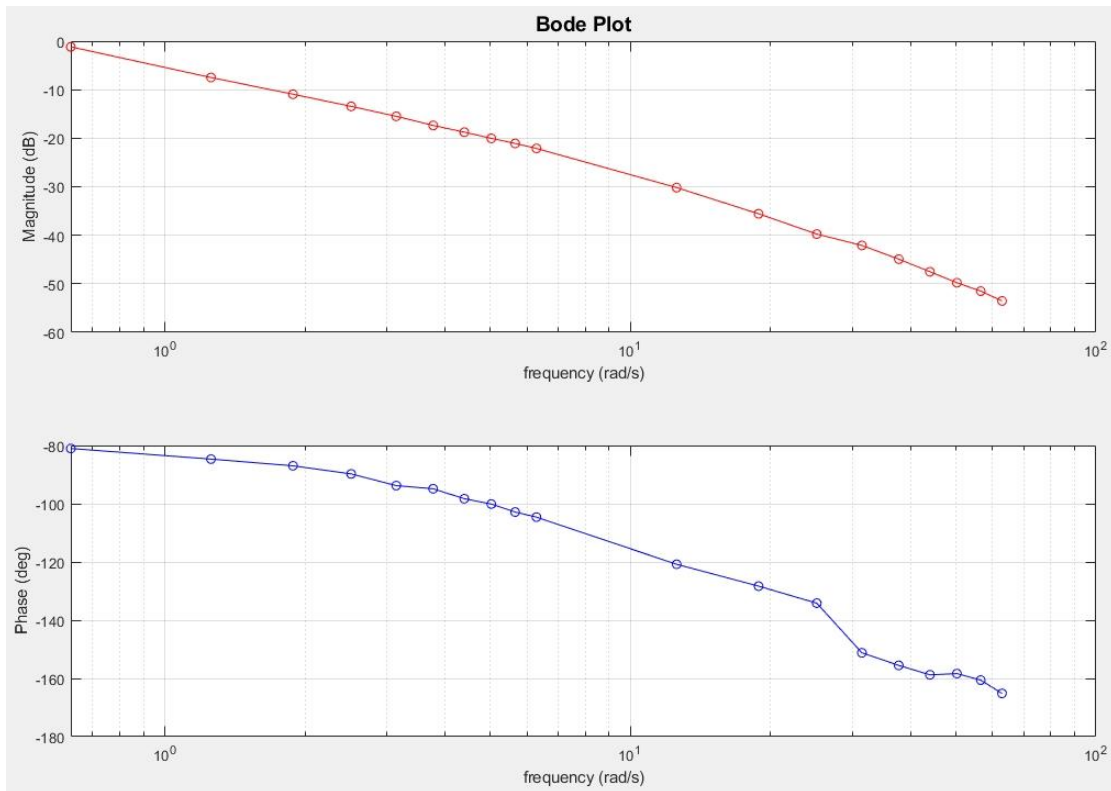
2. 실험 방법

모터의 Sinusoidal한 입력(u)에 대해 출력데이터를 주파수(0.1~0.9Hz, 1Hz~10Hz)에 대해서 각각 얻는다.

입출력 데이터를 이용하여 모터시스템의 전달함수 및 운동방정식을 구한다.

3. 실험 결과

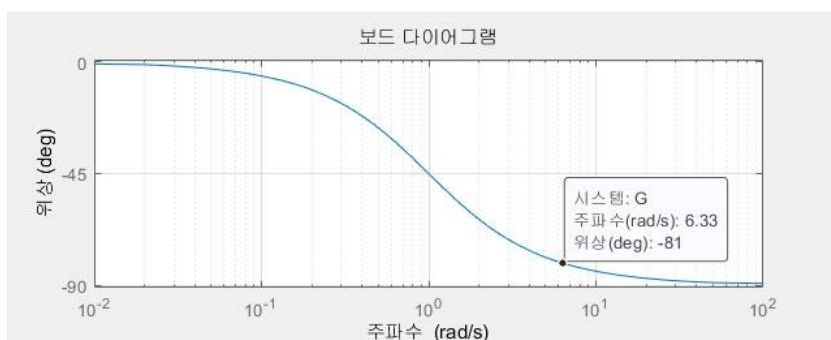
3-1. 얻은 입출력 데이터 (총 19개)로 모터시스템의 보드선도 그리기



3-2. 보드선도를 토대로 전달함수 구하기

위 보드 선도에서, 크기(Magnitude) 그래프를 보면, 주파수가 $10^0[\text{rad/s}]$ 부터 $10^1[\text{rad/s}]$ 까지 증가할 때, 크기가 -4.91dB에서 -26.88dB로 대략적으로 20dB 정도 감소한 것(-20dB/dec)을 확인할 수 있다. 또한, 주파수가 $3 \times 10^1[\text{rad/s}]$ 부터 $6 \times 10^1[\text{rad/s}]$ 까지 증가할 때, -41.56dB에서 -52.63dB로 11.07dB 감소했는데, 이는 $40 \times (\log_{10} 6 - \log_{10} 3) = 12.04$ 와 유사한 수치이므로 $3 \times 10^1[\text{rad/s}]$ 이상의 주파수에서는 -40dB/dec 인 것을 확인할 수 있다. 따라서 이 시스템은 zero를 가지지 않고, pole을 2개 갖는 2차 시스템이며, 시스템의 전달함수를 $G(s) = \frac{c}{(s+a)(s+b)}$ 로 나타낼 수 있다. ($a < b$ 라 가정)

b의 값을 구하기 위해 위상(Phase) 그래프에서 위상이 -135° 가 되는 지점을 찾으면, frequency= $29.99[\text{rad/s}]$ 이고, 이 지점의 크기는 -39.873dB이다. 따라서, $b = 29.99$ 가 된다. ($s=bi$ 일 때 분모항($s+a$)의 효과로 위상에 -90° 가 더해지고, 분모항($s+b$)의 효과로 위상에 -45° 가 더해지므로 위상이 -135° 일 때 $s=bi$ 임)



a의 값을 구하기 위해 위상(Phase) 그래프를 보면, frequency= $0.628[\text{rad/s}] = 0.1[\text{Hz}]$ 일 때 위상이 -81° 인 것을 확인할 수 있다. 왼쪽 보드 선도와 같이($G(s) = \frac{1}{s+1}$), 1차 분모항($s+a$)에서 위상이 -45° 일 때와 -81° 일 때의 주파수의 비율은 1:6.33이므로 위상이 -45° 일때의 주파수

(=a)는 위상이 -81° 일 때의 주파수의 $\frac{1}{6.33}$ 배이다. 따라서, $a = 0.628 \times \frac{1}{6.33} = 0.0993$ 이 된다.

마지막으로, c의 값을 구하기 위해, 주파수가 $29.99 \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$ 일 때($s=bi$), $\text{Magnitude} = -39.873 \text{ dB} = 0.010147 = |G(bi)|$ 를 사용하면 $\text{Magnitude} = |G(i\omega)| = \frac{c}{\sqrt{(ab-\omega^2)^2 + ((a+b)\omega)^2}}$ 에서, $c = |G(bi)| \sqrt{(ab-b^2)^2 + ((a+b)b)^2} = 12.91$ 이 된다.

최종적으로, 이 시스템의 전달함수는 $G(s) = \frac{12.91}{(s+0.0993)(s+29.99)}$ 가 된다.

```
1 clear all; close all; clc;
2 frequency = [0.6283 1.2566 1.8850 2.5133 3.1415 3.7699 4.3982];
3 magnitudedb = [-1.1749 -7.4925 -10.9352 -13.4398 -15.4872 -17.1749];
4 phase = [-81.036 -84.672 -86.976 -89.76 -93.78 -94.8672 -96.036];
5 magnitude=10.^(magnitudedb/20);
6
7 % Using squeeze function to remove dimensions of length 1
8 gain = squeeze(magnitude);
9 ph = squeeze(phase);
10 w = squeeze(frequency);
11
12 response = gain .* exp(1i * ph * pi / 180); % To calculate
13 sys = frd(response, w); % To create a frequency response data
14 gfr = idfrd(sys); % To create an identified FRD model gfr
15 Options = tfestOptions; % Set up options for system identification
16 tf = tfest(gfr, 2, 0, Options); % Estimate a transfer function
17 tf2=zpkr(tf)
18
```

이는 왼쪽의 MATLAB 코드로 전달함수를 추정한 결과(tf2)와 유사한 것을 확인 할 수 있다. (tfest함수를 사용해 실험데이터에 피팅되는 전달함수를 추정함)

3-3. 전달함수를 이용하여 모터시스템의 운동방정식 구하기

위에서 구한 전달함수 $G(s) = \frac{12.91}{(s+0.0993)(s+29.99)}$ 를 사용하여, 시스템의 운동방정식을 구하면, $G(s) = \frac{c}{(s+a)(s+b)} = \frac{\theta(s)}{U(s)}$ 에서

$$cU(s) = (s^2 + (a+b)s + ab)\theta(s) \text{이다.}$$

Inverse laplace transform을 위 식에 적용하면,

$c \cdot u(t) = \ddot{\theta}(t) + (a+b)\dot{\theta}(t) + ab \cdot \theta(t)$ 가 되고, 양변을 c로 나누고 $a = 0.0993, b = 29.99, c = 12.91$ 를 각각 대입하면,

$0.0775\ddot{\theta}(t) + 2.331\dot{\theta}(t) + 0.2306\theta(t) = u(t)$ 가 된다. (모터시스템의 운동방정식, $u(t) = A \sin \omega t$)

4. 결과 분석 및 고찰

4-1. 실제 시스템이 비선형 시스템인 이유를 서술하시오

실제 시스템에서는 이상적인 경우와 달리, 쿨롱 마찰(Coulomb friction)이 존재하므로 비선형이 된다.

쿨롱 마찰력은 $\mu mg \cdot \text{sgn}(\dot{x})$ (비선형)을 운동방정식에 추가하기 때문에 실제 시스템을 비선형으로 만든다.

($\text{sgn}(\dot{x})$ 는 속도가 양수일 때 \dot{x} , 속도가 음수일 때 $-\dot{x}$ 가 됨)

또한, 모터가 공기속에서 움직이므로 실제 시스템에서는 공기에 의한 항력(drag force)를 받게 된다.

이 항력은 $\frac{C\rho A}{2} \text{sgn}(\dot{x})\dot{x}^2$ 로 나타낼 수 있는데, 속도의 제곱에 비례하는 비선형 항이므로 실제 시스템을 비선형으로 만든다.

이 외에도 모터를 이루고 있는 물질에 의한 이력감쇠(hysteretic damping)나, 외란에 의한 노이즈(외부 진동 등)가 존재하기 때문에 실제 시스템은 비선형 시스템이 될 수 밖에 없다.

4-2. 저주파 (0.1~0.2hz)에서 사인파로 예상되는 응답이 정확하게 나타나지 않는 이유를 서술하시오

모터를 낮은 주파수로 가진시킬 수록 한 주기가 점점 더 길어지게 되는데, 주기가 길어질수록 한 주기에 노이즈에 영향을 받는 시간이 늘어나므로 응답이 왜곡될 가능성이 점점 증가하게 된다. 특히, 응답이 사인파의 마루 또는 골에 가까워질 때의 회전속도는 0에 가깝는데, 주기가 긴 경우 해당 구간에서 외란의 영향으로 인해 속도가 0으로 가지 않고, 충분한 시간 동안 다른 값으로 변할 수 있기 때문에 사인파의 응답이 정확하게 나타나지 않을 수 있다. 또한, 실험장치의 제어가능 주파수 범위가 정해져 있기 때문에, 가진주파수가 너무 낮으면 제대로 제어가 되지 않을 수도 있다. 예를 들어, 주파수가 너무 낮은 경우, 입력 전류가 매우 낮은 구간도 길어져 해당 구간에서 서서히 회전이 시작되어야 하지만 모터의 정지마찰력 때문에 긴 시간 동안 회전이 일어나지 않아 사인파 입력에 대한 응답이 일부 구형파에 가까운 모습으로 나타날 수 있다.

4-3. 전달함수를 구했을 때 활용 방안을 서술하시오

원하는 목표(냉난방기의 온도 조절 등)를 달성하기 위해 피드백 제어 시스템을 설계할 때 시스템(Plant)의 전달함수를 구하여 사용할 컨트롤러의 종류(PID 제어 등)와. 컨트롤러의 제어 계수를 적절하게 선택할 수 있다.

또한, 전달함수를 사용해 시스템의 안정성과 응답 특성 등을 파악할 수 있고, 특정 입력에 대한 출력을 예측할 수 있다. 구한 전달 함수로 전체 주파수에 대한 보드 선도를 그려, 주파수에 대한 시스템의 응답 특성을 파악하고, 시스템의 구성요소를 변경해 특정 주파수 영역에서만 응답을 감쇠 시키는 등의 필터를 설계할 수 있다.