# Seminario Universitario 2025

por

*Ing. Horacio Paulino Pessano*

FACULTAD REGIONAL SAN RAFAEL.

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

# MODELOS LINEALES

## 1. Introducción.

En ocasiones dos cantidades se relacionan por medio de una ***ecuación o fórmula*** con dos variables.

***Ejemplos***

a) La ecuación $k = C + 273$

proporciona la relación entre las escalas de temperatura Kelvin (k) y Celcius (C).

b) La ecuación $L = 2\pi r$

relaciona la longitud (L) de una circunferencia con su radio (r).

c) La fórmula $S = \pi r^2$

relaciona la superficie (S) de un círculo con su radio (r).

## 2. Reconocimiento de *ecuaciones lineales* con dos variables.

Una ***ecuación es lineal*** si en ella no hay productos de variables (incógnitas); las variables sólo figuran elevadas a la primera potencia, y no hay variables en ningún denominador.

***Ejemplos***

¿Cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales?

(a) $x\ y = 1$ (b) $3\ r + 4 = 2\ s$ (c) $2\ x^3 = \frac{y}{5}$

(c) $p = \frac{3}{q}$ (e) $\frac{2}{3}\ x - 4\ y = y$ (f) $\sqrt{3}\ x = 5$

UNA VARIABLE es un **símbolo** al que se le puede asignar un conjunto de valores.

UNA CONSTANTE es un **símbolo** al que sólo se le puede asignar un valor.

Para representar las variables se emplean las letras finales del alfabeto: **x, y, z, u, v, w.**

Para representar las constantes se emplean las primeras letras del alfabeto: **a, b, c.**

## 3. Ecuación lineal con dos variables (o incógnitas).

Son de la forma:

$$a * x + b * y + c = 0$$

en donde **"a, b, c"** son constantes.

**"a, b"** se llaman ***coeficientes*** y deben ser distintos de cero.

**"c"** se denomina ***término independiente.***

Todo par de valores **(x,y)** que satisfaga a la ecuación, recibe el nombre de ***solución.***

***Ejemplo***

$$y = 3\ x + 1$$

el par de valores **(x=1,y=4)** es una solución, ya que si reemplazamos

4 = 3*1 + 1

4 = 3 + 1

**verifica la igualdad.**

¿Cuántos pares de valores **(x,y)** son soluciones?.

### *Con el Mathematica*

```
TableForm[Table[{x, y = 3 x + 1}, {x, 1, 5}],
        TableHeadings -> {None, {"x", "y"}}]
```

| x | y |
|---|---|
| 1 | 4 |
| 2 | 7 |
| 3 | 10 |
| 4 | 13 |
| 5 | 16 |

```
? TableHeadings
```

TableHeadings is an option for TableForm and MatrixForm which gives the labels to be printed for entries in each dimension of a table or matrix. More…

¿Y si hablamos de números enteros?

```
Table[{x, y = 3 x + 1}, {x, -3, 3}]
```

$$\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ -2 & -5 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

¿Y si se trata de números racionales?

```
Table[{x, y = 3 x + 1}, {x, -2, 2, 1 / 2}]
```

$$\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ -1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 4 \\ \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

¿Cuántos pares **(x,y)** pensamos que son solución de la ecuación?.

¿Cómo nos imaginamos todos los pares **(x,y)** solución?.

***Pareciera que las posibilidades son interminables.***

## 3.1 Representación gráfica de ecuaciones lineales con dos variables.

Con frecuencia, las gráficas ***ilustran*** las variaciones en las cantidades.

Por lo general, tales ayudas visuales permiten apreciar el comportamiento de las cantidades con más facilidad que una larga tabla de valores numéricos.

Analicemos cómo representar geométricamente una ecuación lineal con dos variables con una gráfica en un plano coordenado.

A continuación la gráfica puede servir para descubrir propiedades de las cantidades que no eran evidentes en la simple ecuación.

La gráfica de cualquier ecuación lineal con dos variables es una ***línea recta.***

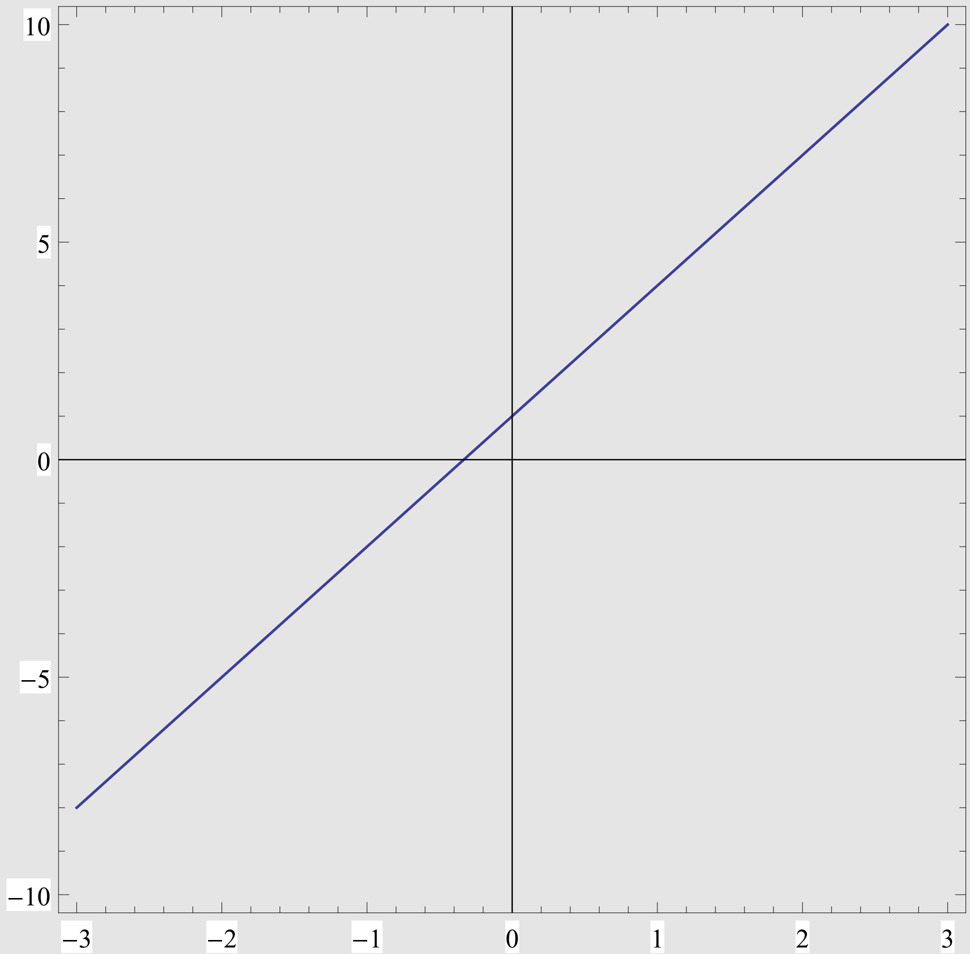
### *Ejemplo*

Retomemos la ecuación

$$\mathbf{y = 3\,x + 1}$$

### *Con el Mathematica*

```
g1 = ContourPlot[y == 3 x + 1, {x, -3, 3}, {y, -10, 10},
       Axes → True]
```




El gráfico de la línea recta nos estaría anunciando que en el **intervalo de los números reales [-3,3]** existe una cantidad ilimitada de pares ordenados **(x,y)**, que pertenecen a dicha recta, y que satisfacen a la ecuación planteada.

Veamos algunos de ellos. Por ejemplo, pares ordenados, que sean soluciones de la ecuación, y que pertenezcan al **conjunto de los números enteros.**

Como estrategia, podemos recurrir, a generar una **tabla.**

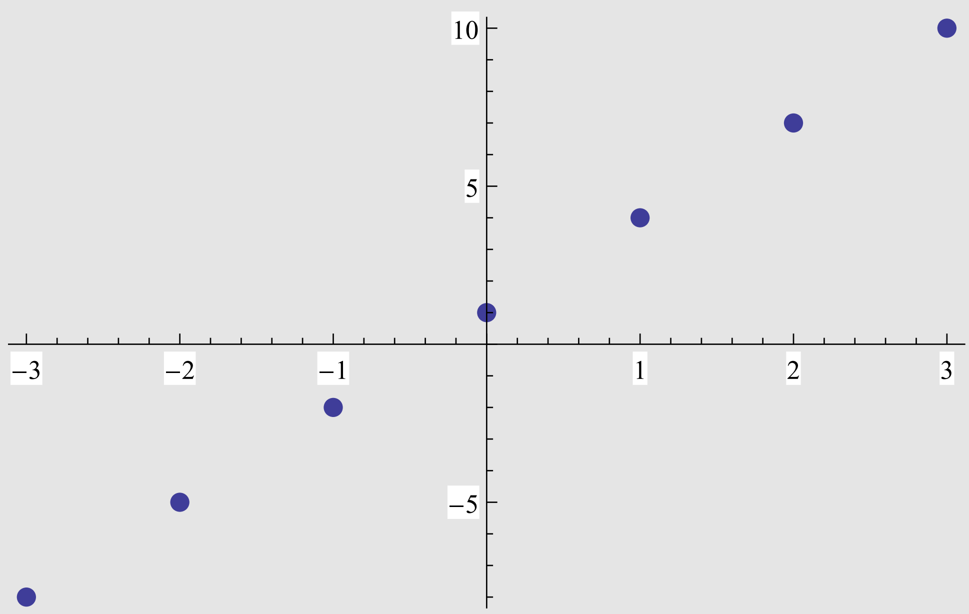
```
tabla = Table[{x, y = 3 x + 1}, {x, -3, 3}]
```

$$\begin{pmatrix} -3 & -8 \\ -2 & -5 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Esta salida de la tabla, nos estaría indicando, que el conjunto de pares ordenados **(x,y)**, analíticamente, son soluciones de la ecuación, y gráficamente, corresponden a las coordenadas de puntos que pertenecen a la línea recta.

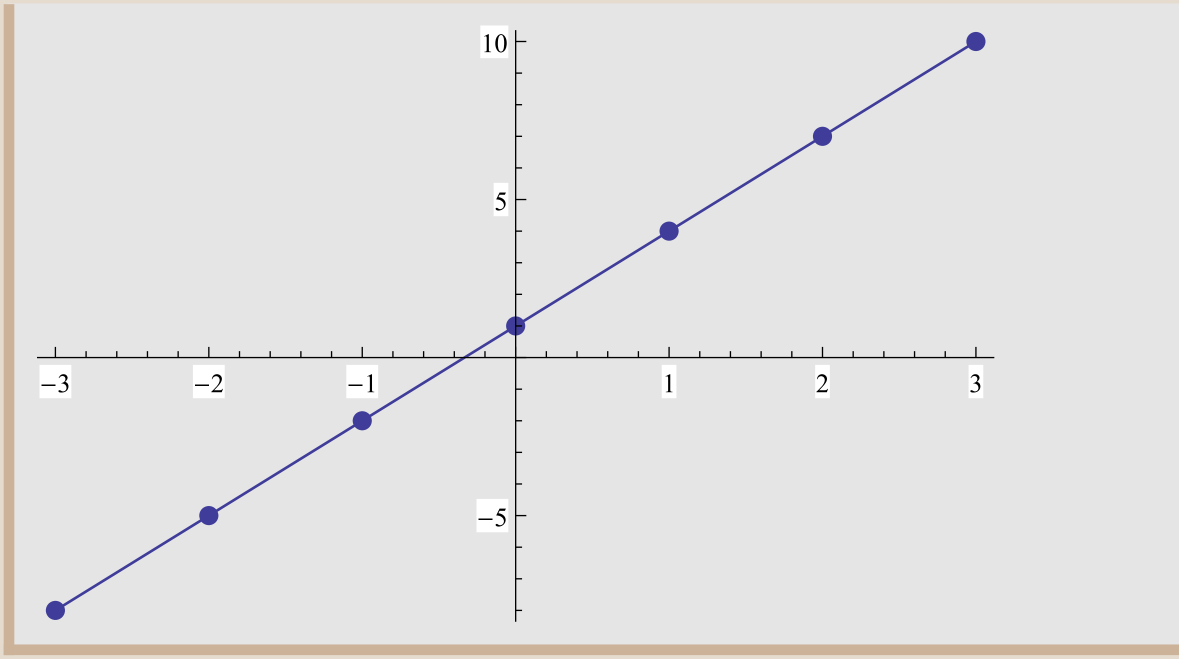
Como el gráfico de la recta ya lo tenemos, recordemos que lo habíamos etiquetado como **g1**, graficamos, ahora, los pares ordenados, etiquetando como **g2**.

```
g2 = ListPlot[tabla, PlotStyle -> PointSize[.02]]
```




Superponemos ambos gráficos, **g1** y **g2**, a los efectos de corroborar lo expresado.

```
Show[g2, g1]
```




## 4. COORDENADAS EN EL PLANO

Difícil nos resultará en ingeniería que no tengamos que enfrentarnos con alguna ***clase de exposición gráfica*** de datos. Al hojear un libro, una revista informativa, folletos de equipamiento, seguramente nos encontramos con ***ilustraciones gráficas*,** que de alguna manera, a través de una interpretación adecuada, resultarán de una gran utilidad respecto a conclusiones vinculadas con la temática que se trate.

Nuestro propósito es ***vincular*** lo que estamos observando gráficamente con **EXPRESIONES MATEMÁTICAS** que nos garanticen que precisamente gobiernan la ***posición*** de todos aquellos puntos que conforman la ***imagen observada.***

Dicho de otra manera; podemos formular **MODELOS MATEMÁTICOS** que al momento de su interpretación gráfica resulten ***líneas*** cuyas formas respondan a nuestro requerimiento.

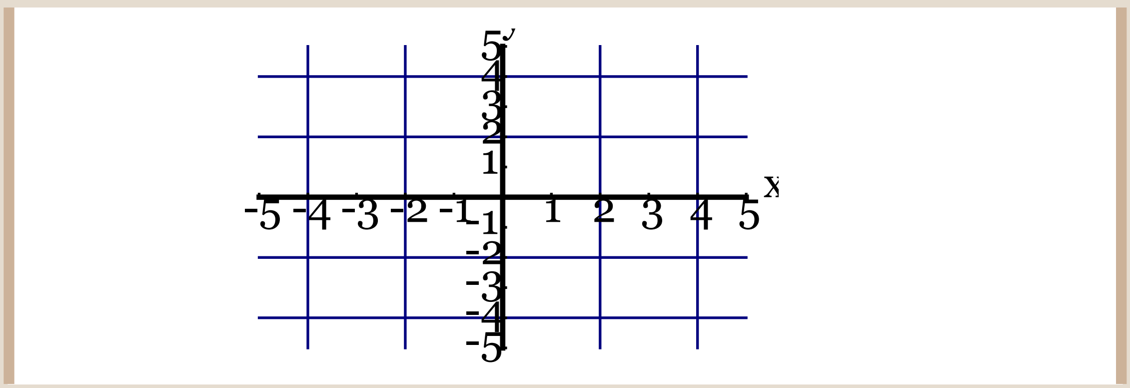
En el siglo XVII, Fermat y Descartes, al realizar la unión del álgebra y la geometría, modificaron radicalmente el aspecto de las matemáticas. Esta unión, que hoy llamamos **GEOMETRÍA ANALÍTICA,** proporcionó las herramientas que necesitaban los científicos del siglo XVII para **cuantificar** su trabajo.

La Geometría Analítica se origina al asignar coordenadas numéricas a todos los puntos de un plano. Estas coordenadas permiten representar gráficamente ***ecuaciones algebraicas*** de dos variables como ***"rectas" y "curvas".*** Hacen posible también calcular ángulos y distancias, y escribir las ecuaciones de las coordenadas que representan las trayectorias a lo largo de las cuales se mueven objetos. Como casi todo el cálculo puede presentarse en términos geométricos, y dado que la mayoría de las aplicaciones del cálculo se refieren a movimientos y cambios, el marco natural para estudiar el cálculo y sus aplicaciones es el plano coordenado de la geometría analítica.

En honor a la verdad, de éstos dos francesitos, Fermat y Descartes, el primero llevó las de perder. Pierre de Fermat fue un abogado que hizo de las matemáticas un pasatiempo. En 1629 escribió una nota en la que, en efecto, hizo uso de ***coordenadas*** para describir puntos y curvas. René Descartes (Cartesius) fue un filósofo que pensaba que las matemáticas podían descubrir los secretos del universo. Publicó su ***"Géométrie"*** en 1637. Es un libro famoso y aunque destaca el papel del álgebra en la resolución de problemas geométricos, uno encuentra sólo una insinuación de ***coordenadas***. En virtud de haber tenido la primera y más explícita idea, Fermat debiera obtener el crédito principal. Pero la historia es una amigo veleidoso; las coordenadas son conocidas como ***cartesianas***, en honor a René Descartes.

## 4.1 Sistema de coordenadas cartesianas

Introducimos un ***sistema de coordenadas rectangulares*** *o* ***cartesianas*** en un plano por medio de dos rectas perpendiculares llamadas ***ejes coordenados***, que se cortan en el ***origen O***. La recta horizontal recibe el nombre de ***eje x*** y la vertical el de ***eje y***; se indican con **x** e **y**, respectivamente. Con lo anterior, se trata de un ***plano coordenado*** o ***plano xy***. Los ejes coordenados lo dividen en cuatro partes llamadas **primero, segundo, tercero** y **cuarto cuadrantes**. Los puntos de los ejes no pertenecen a cuadrante alguno.




A cada punto **P** de un plano **xy** se le puede asignar un par ordenado **(a,b)**; **a** es la **coordenada x** (o **abscisa**) de **P** y **b**, la **coordenada y** (u **ordenada**). Decimos que **P** tiene **coordenadas (a,b)** y nos referimos al **punto (a,b)** o al punto **P(a,b)**. A la inversa, todo par ordenado **(a,b)** determina al punto **P** con **coordenadas a** y **b.**

# 5. La línea recta

Habíamos dicho que la gráfica de cualquier **ecuación lineal** con dos variables es una ***línea recta.***

Dado que dos puntos determinan una línea recta, podemos representar gráficamente una ecuación lineal encontrando dos puntos que pertenezcan a su gráfica. Después, trazamos una línea que pase por dichos puntos.

A menudo, los puntos más fáciles de encontrar son aquellos en los que la gráfica intersecta los ejes de coordenadas.

**Definición**

La **ordenada al origen** (intersección en y) de una gráfica es la ordenada del punto en el que la gráfica interseca al **eje y.** La **abscisa al origen** (intersección en x) es la abscisa del punto en el que la gráfica interseca al **eje x.**

Para encontrar la ordenada al origen, hacemos (x=0) y resolvemos para (y). Para encontrar la abscisa al origen, hacemos (y=0) y resolvemos para (x).

### *Ejemplo*

Representar gráficamente **4 x + 5 y = 20**

Primero encontramos las intersecciones.

Para encontrar la ordenada al origen, hacemos **x=0** y resolvemos para **y**

$$5y = 20$$

$$y = 4$$

determinamos que la ordenada al origen es **y=4**. Por ello uno de los puntos es **P1={0,4}.**

Para encontrar la abscisa al origen, hacemos **y=0** y resolvemos para **x**

$$4x = 20$$

$$x = 5$$

determinamos que la abscisa al origen es **x=5**, por lo que el otro punto es **P2={5,0}.**

**Con el *Mathematica***

```
Clear[x, y]
```

```
e = 4 x + 5 y == 20
```

$$4x + 5y = 20$$

```
e /. x -> 0
```

$5\,y = 20$

```
Solve[e /. x -> 0, y]
```

$\{\{y \to 4\}\}$

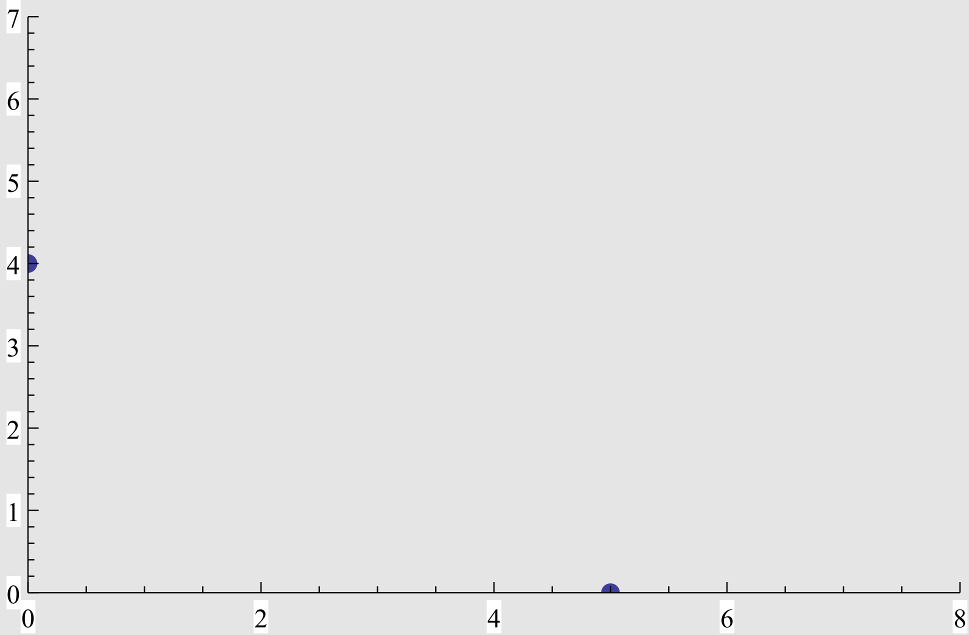
```
e /. y -> 0
```

$4\,x = 20$

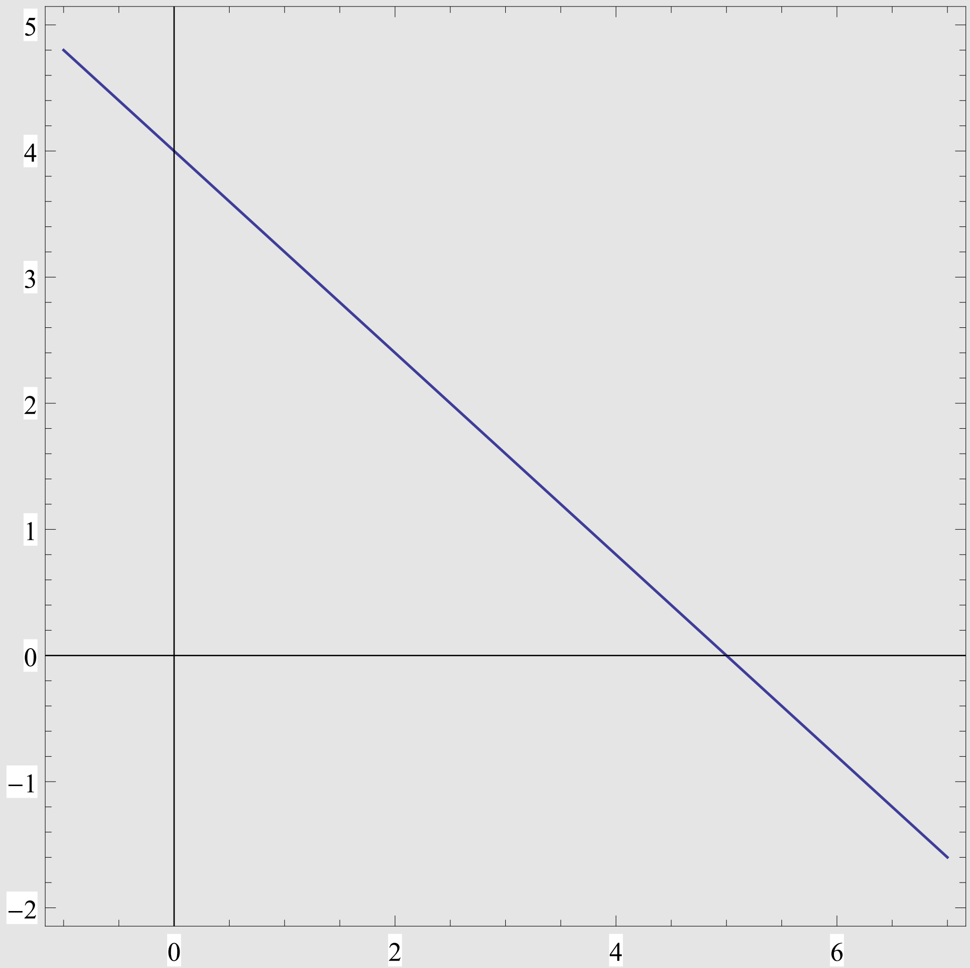
```
Solve[e /. y -> 0, x]
```

$\{\{x \to 5\}\}$

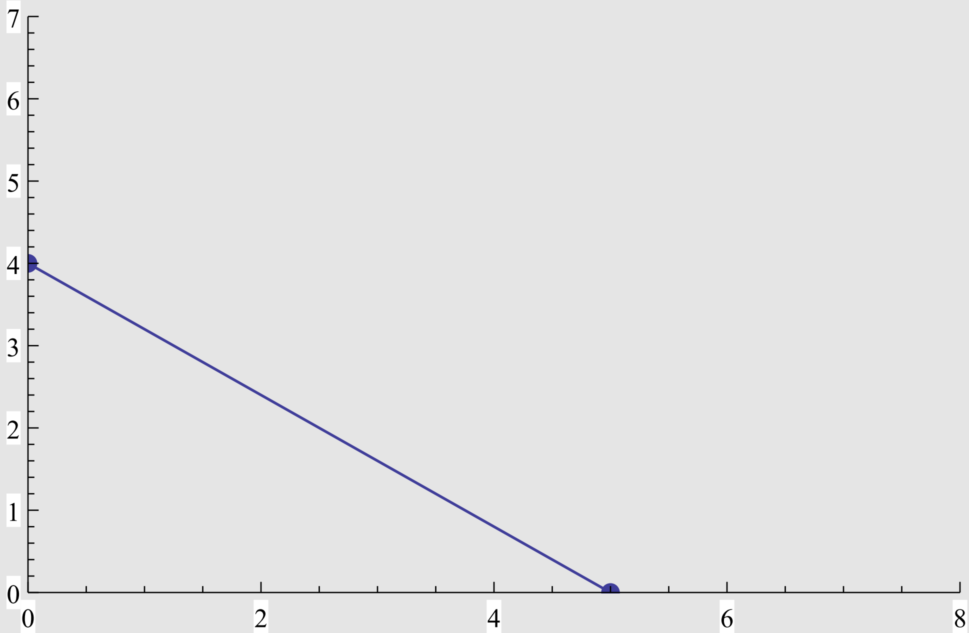
```
P1 = {0, 4};
P2 = {5, 0};
g1 = ListPlot[{P1, P2}, PlotStyle -> PointSize[.02],
              PlotRange → {{0, 8}, {0, 7}}]
```



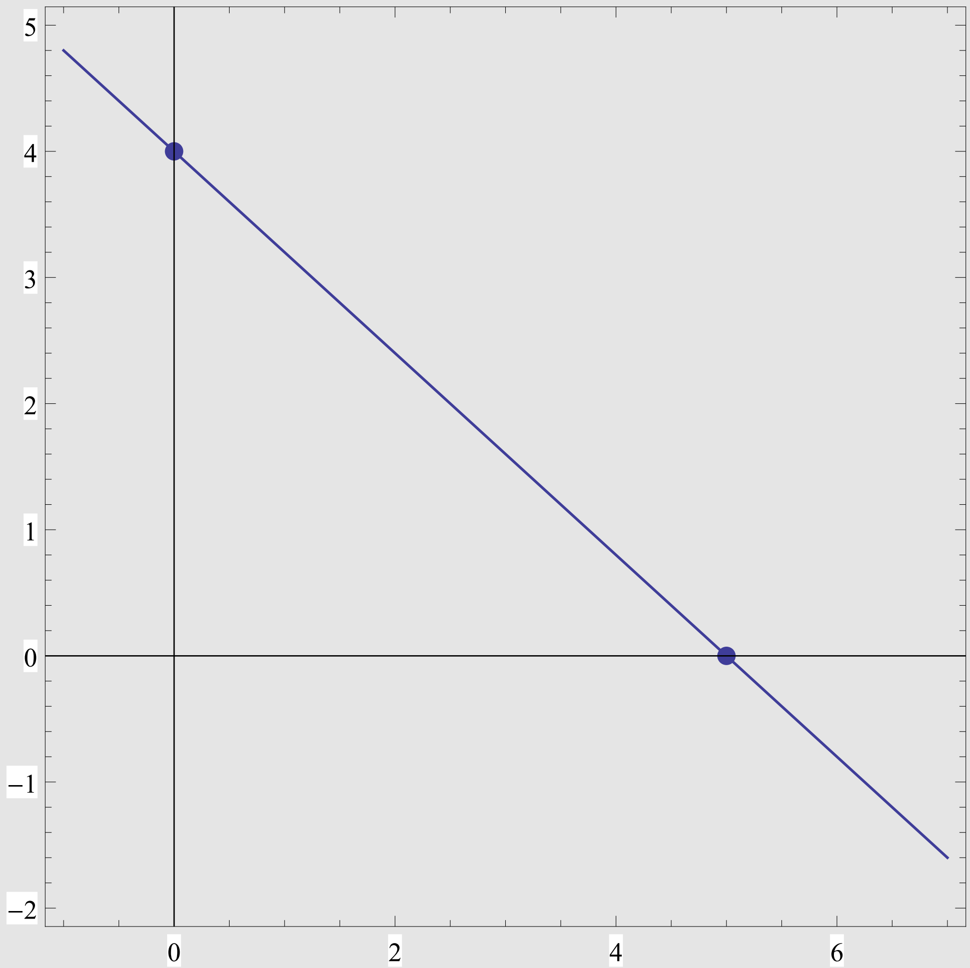
```
g2 = ContourPlot[4 x + 5 y == 20, {x, -1, 7}, {y, -2, 5},
        Axes → True]
```



```
Show[g1, g2]
```



```
Show[g2, g1]
```




La gráfica de una ecuación de la forma **y=m*x** pasa por el origen. De modo que la abscisa y ordenada al origen se dan en el mismo punto **(0,0).** Para trazar la gráfica se necesitará otro punto.

## *Ejemplo*

Representa gráficamente **y = 2 x**

**Con el *Mathematica***

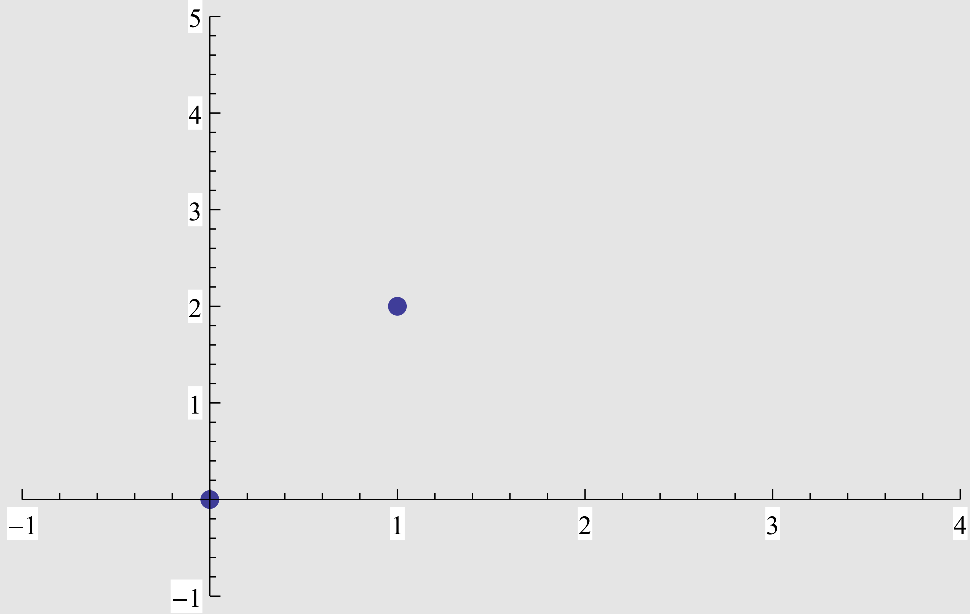
```
e = y == 2 x;
```

```
e /. x -> 1
```

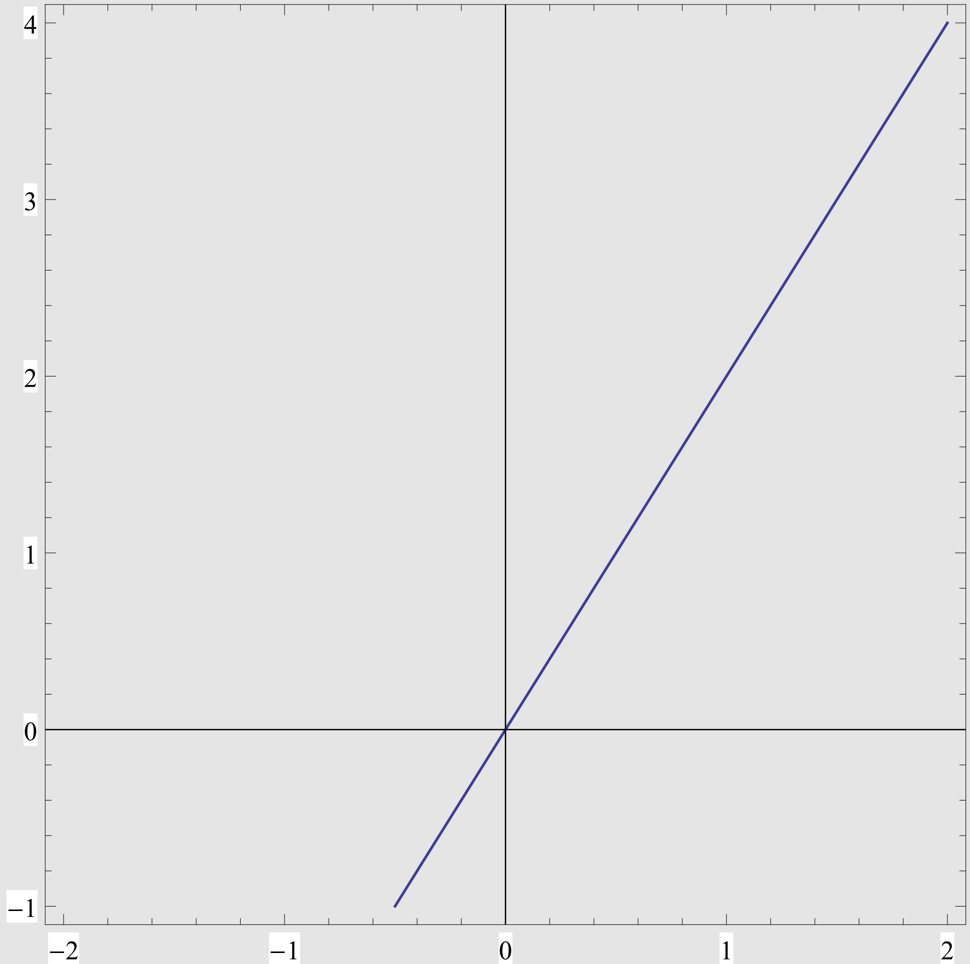
$y = 2$

Gráficamente

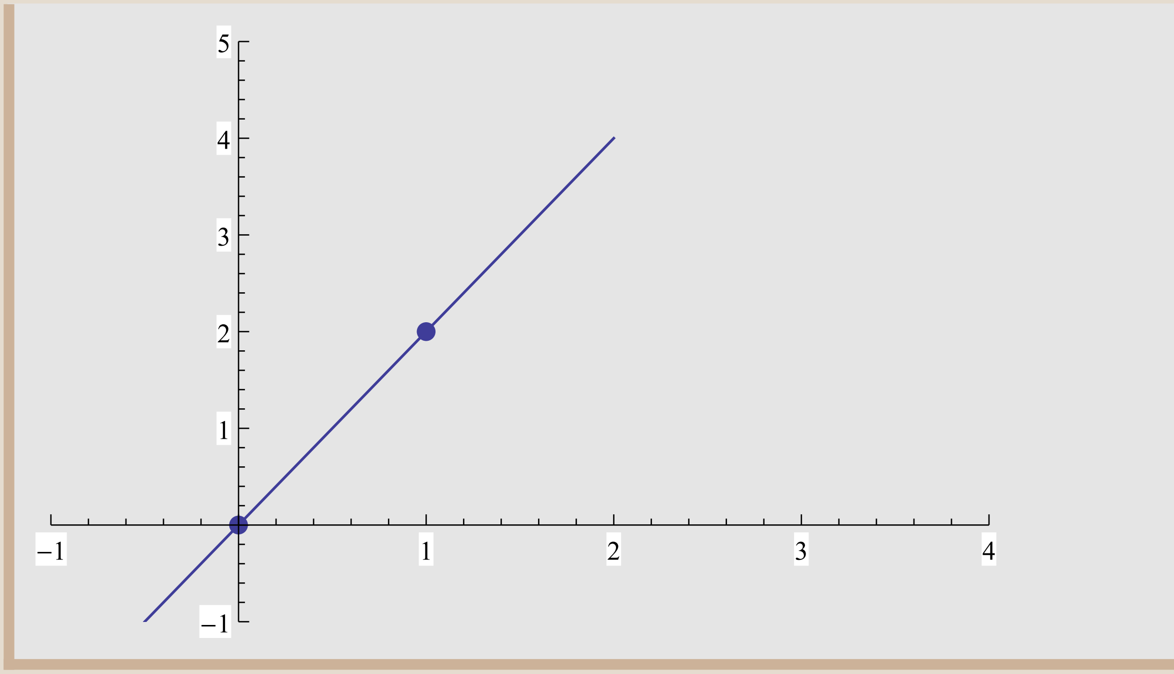
```
P1 = {0, 0};
P2 = {1, 2};
g1 = ListPlot[{P1, P2}, PlotStyle -> PointSize[.02],
        PlotRange → {{−1, 4}, {−1, 5}}]
```



```
g2 = ContourPlot[Evaluate[e], {x, -2, 2}, {y, -1, 4},
        Axes → True]
```



```
Show[g1, g2]
```




Hemos vista que la gráfica de **y = m*x**

es una línea recta que pasa por el origen. Observemos lo que sucede si sumamos un número **(b)** al segundo miembro de la ecuación para obtener

**y = m*x+ b**

Observemos lo que sucede si sumamos un número **(b)** al segundo miembro de la ecuación para obtener

**y = m*x + b**

### *Ejemplo*

Representar gráficamente **y =2 x - 3**

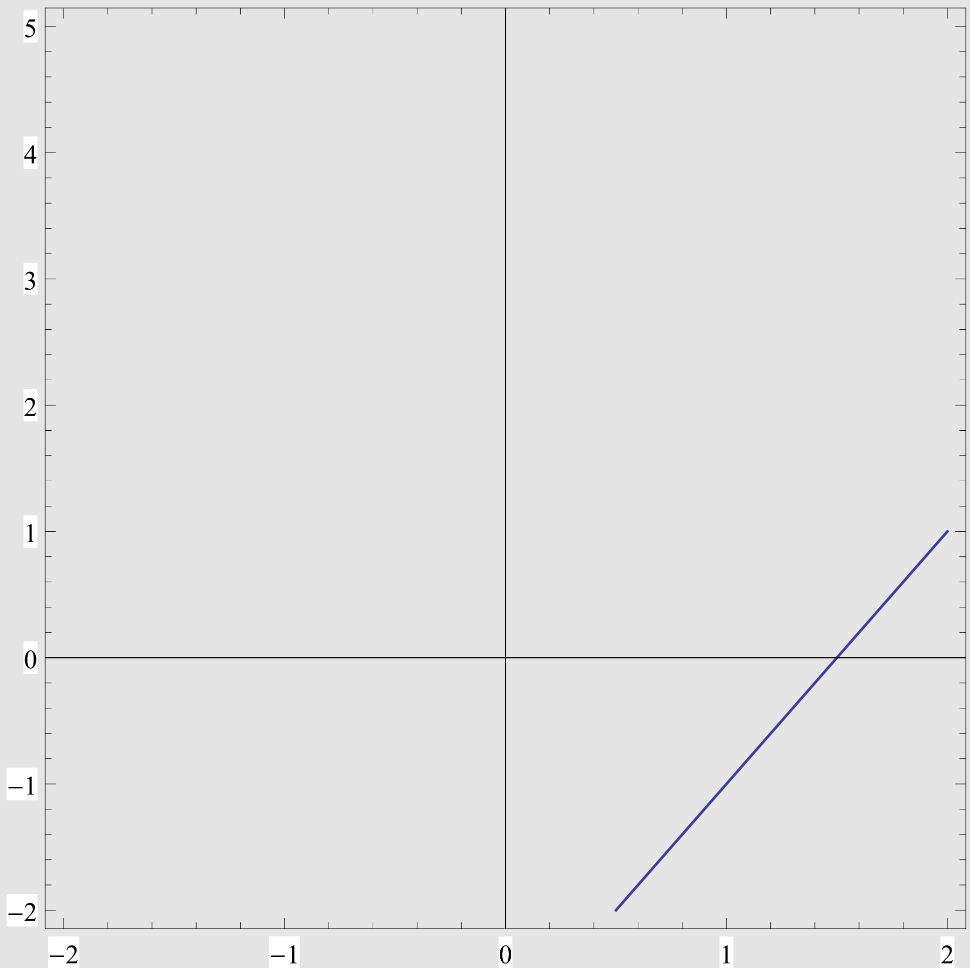
y comparar con la gráfica de **y = 2 x.**

**Con el *Mathematica***

```
e1 = y == 2 x - 3
```

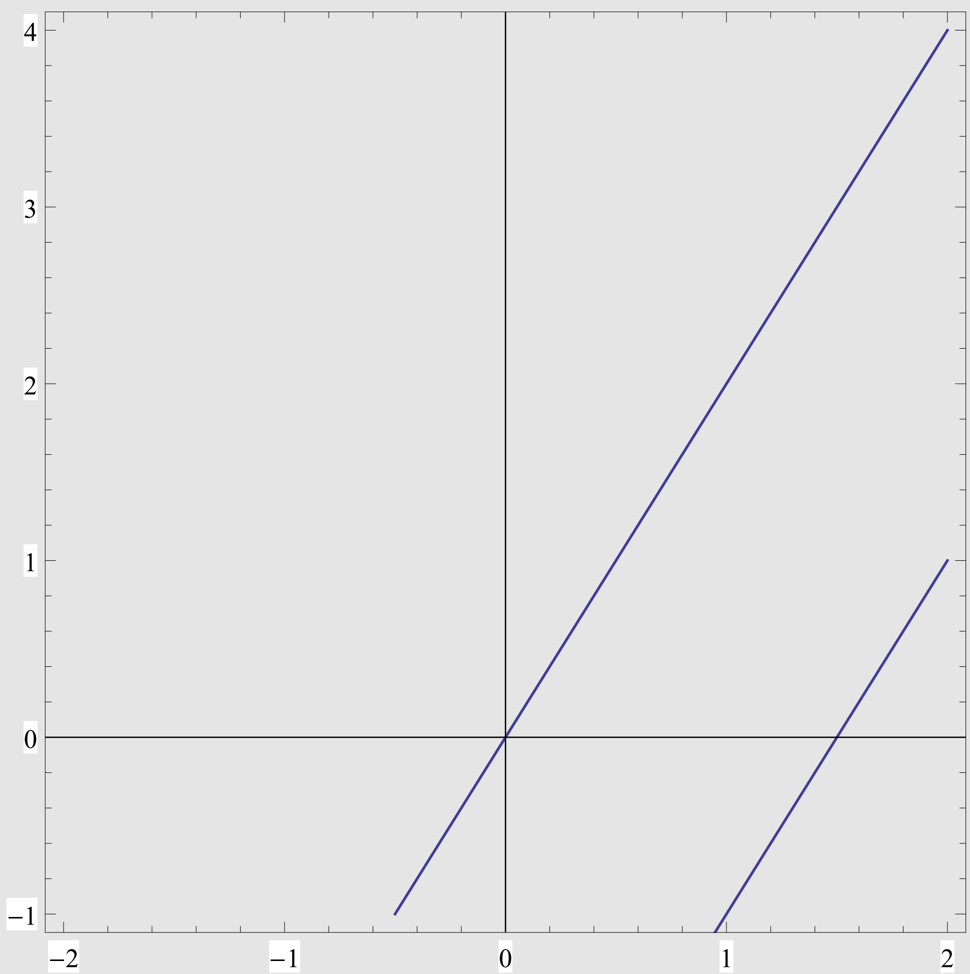
$y = 2x - 3$

```
g3 = ContourPlot[Evaluate[e1], {x, -2, 2}, {y, -2, 5},
        Axes → True]
```



Comparamos **y= 2x**, que anteriormente habíamos etiquetado como **g2.**

```
Show[g2, g3]
```




La gráfica de **y = 2 x - 3**

es una línea recta desplazada **(3)** unidades hacia abajo a partir de la gráfica de
**y = 2 x.**

**Teorema**

La gráfica de una ecuación de la forma **y = m*x**

es una línea recta que pasa por el origen.

La gráfica de **y = m*x + b**

es una línea recta paralela a **y = m*x** que tiene como ordenada al origen al número **b.**

## 5.1 Rectas paralelas a los ejes

Consideremos la ecuación **y = 4** o **y = 0*x + 4.**

Sin importar que número escojamos para **x,** el valor de **y** siempre es **4**.

Así, **(x,4)** ***es una solución*** independientemente del valor seleccionado para **x.**

**Teorema**

Para constantes **a** y **b**, la gráfica de una ecuación de la forma **y = b** es una línea ***paralela al eje x*** cuya ordenada al origen es **b**. La gráfica de una ecuación de la forma **x = a** es una línea ***paralela al eje y*** cuya abscisa al origen es **a.**

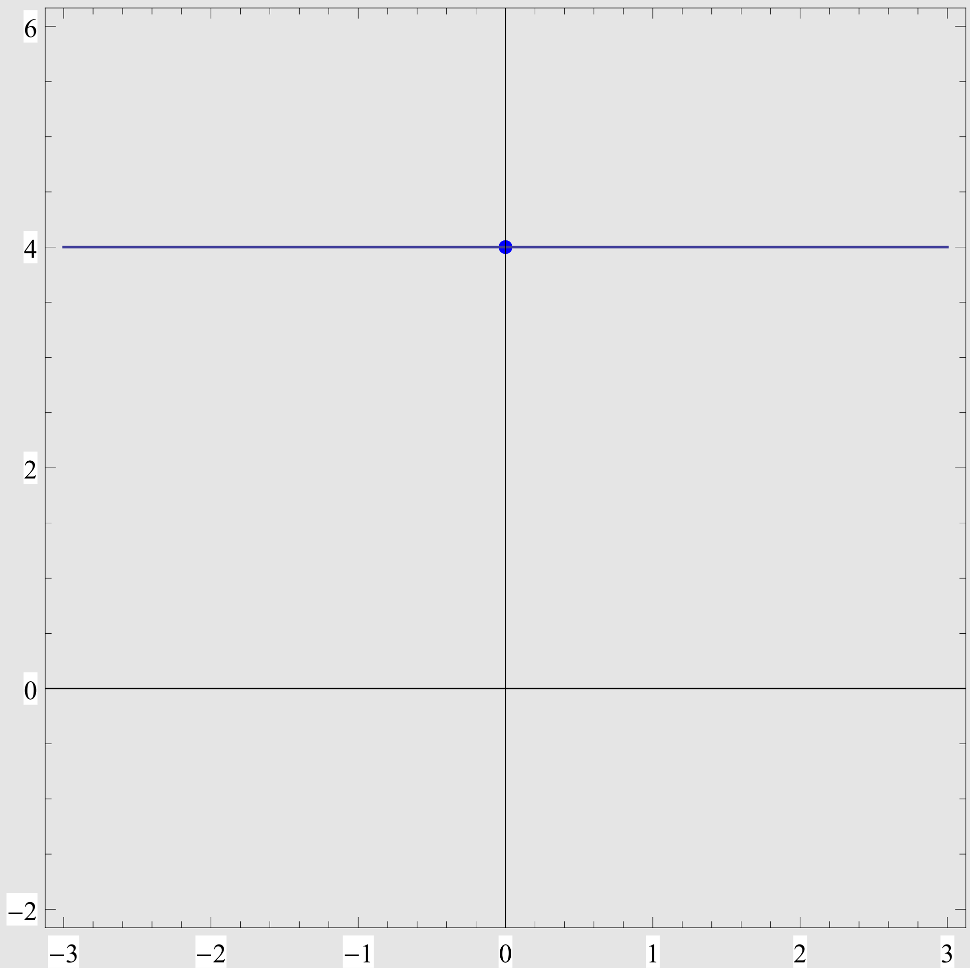
### *Ejemplos*

a) Representar gráficamente **y = 4**

Cualquier par ordenado **(x,4)** es una solución. Así, la recta es ***paralela al eje x***, y la **ordenada al origen** es **4.**

**Con el *Mathematica***

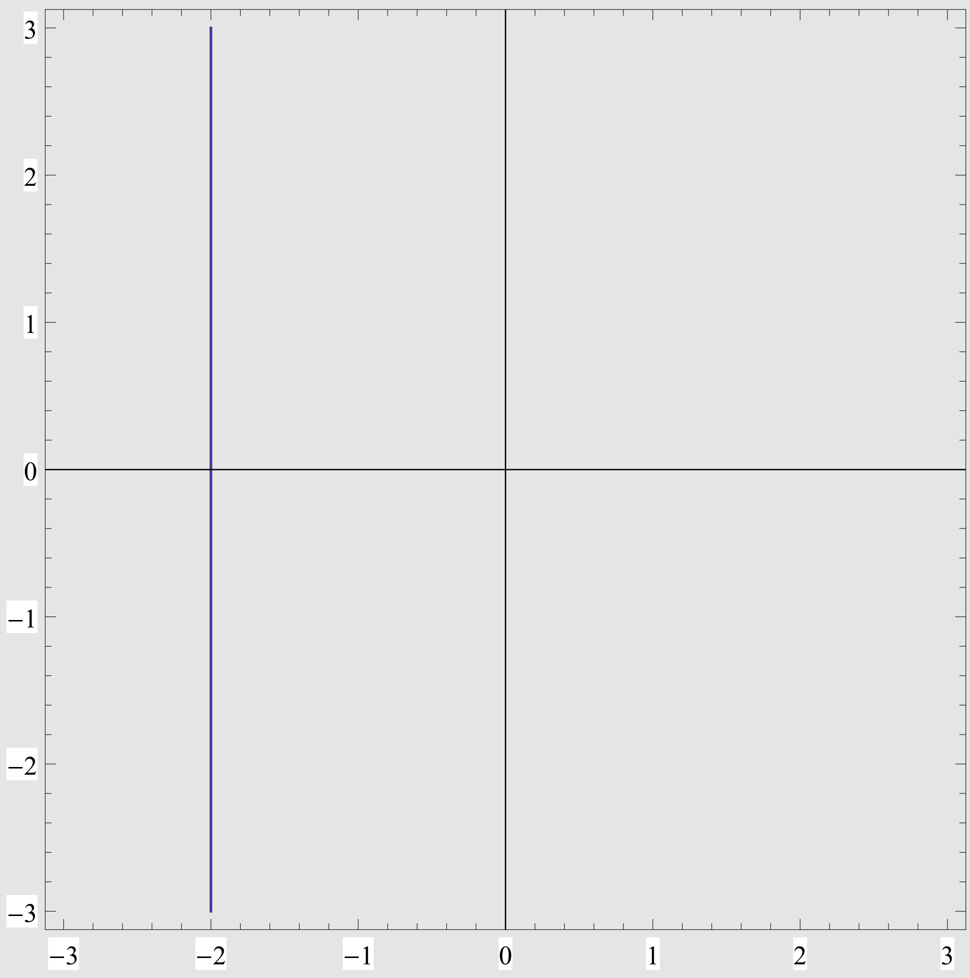
```
ContourPlot[y == 4, {x, -3, 3}, {y, -2, 6},
            Prolog -> {PointSize[.015], Point[{0, 4}]},
      Axes → True]
```




b) Representar gráficamente **x = - 2**

Cualquier par ordenado **(-2,y)** es una solución. Así, la recta es ***paralela al eje y***, y la **abscisa al origen** es **-2.**

```
ContourPlot[x == −2, {x, −3, 3}, {y, −3, 3},
                    Prolog −> {PointSize[.03], Point[{0, 4}]},
                    AxesOrigin → {0, 0},
            Axes → True]
```




**Directrices para la representación gráfica de ecuaciones lineales**

**1.** Si falta alguna de las variables, resolver para la otra. La gráfica será una línea recta paralela a uno de los ejes.

**2.** Si no falta ninguna variable, encuentra las intersecciones con los ejes. Utilizarlas para trazar la gráfica.

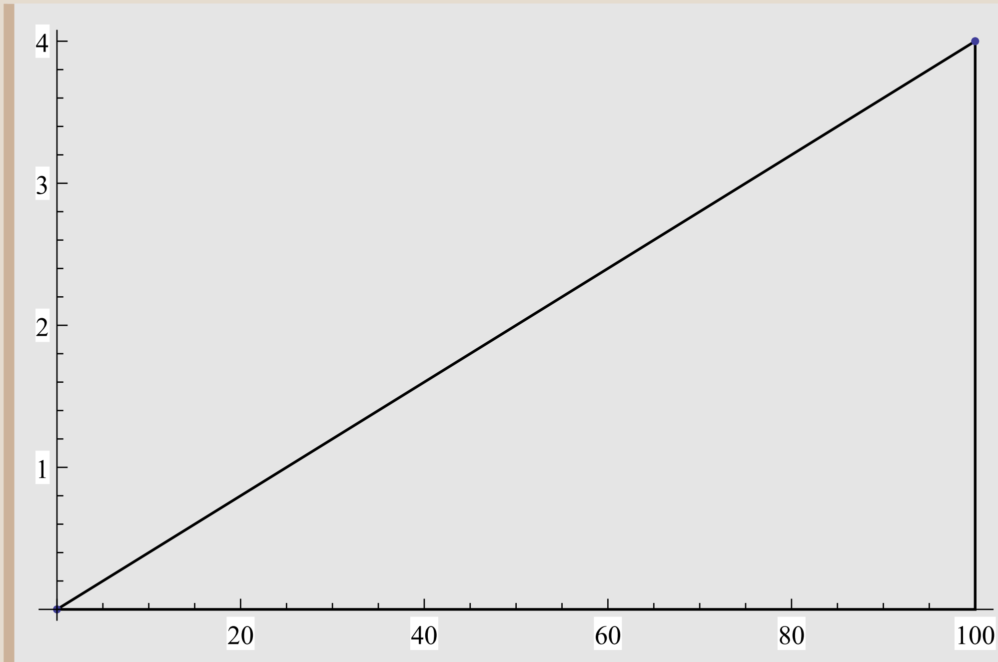
**3.** Si los puntos de intersección con los ejes son muy próximos entre sí o son el mismo punto, escoger otro punto que diste del origen.

## 5.2 Pendiente

Los ingenieros calculan la pendiente de la base de una carretera hallando la razón entre la distancia que ASCIENDE o DESCIENDE y el RECORRIDO HORIZONTAL. Esta razón se llama "grado" del camino. Los grados suelen expresarse como porcentajes.

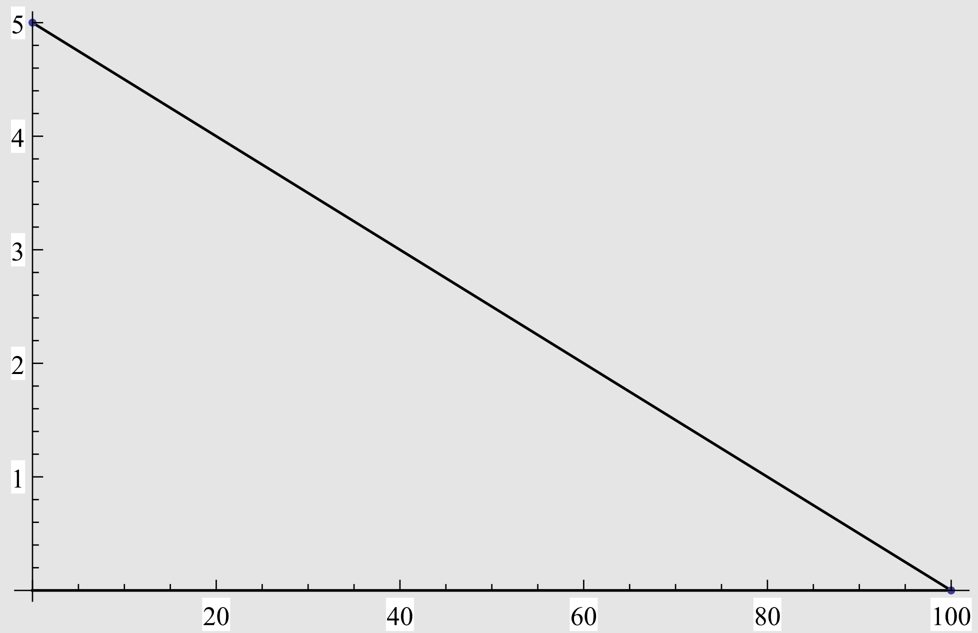
***Ejemplo*** ***Grado 4%***

```
g1 = ListPlot[{{0, 0}, {100, 4}},
        Prolog → Line[{{0, 0}, {100, 0}, {100, 4}, {0, 0}}]]
```




***Ejemplo*** ***Grado -5%***

```
g2 = ListPlot[{{0, 5}, {100, 0}},
        Prolog -> Line[{{0, 5}, {100, 0}, {0, 0}}]]
```




Los grados en las zonas costeras no suelen **superar el 2%**. En las montañas, pueden alcanzar **valores hasta el 4%.** Normalmente, los grados de las **vías rápidas son inferiores al 5%.**

En GEOMETRÍA ANALÍTICA también definimos la pendiente de una recta como la razón entre el **alza, elevación** o **descenso** y el **avance,** pero no expresamos estas razones como porcentajes.

**Pendiente =** $\dfrac{\textbf{elevación o desnivel}}{\textbf{avance o corrimiento}}$

## 5.3 Determinación de la pendiente de una recta

Supóngase que **r** es una recta **no vertical** en el plano cartesiano **xy.**

Si **P1={x1,y1}** y **P2={x2,y2}** son dos puntos distintos de **r**, entonces la **pendiente** (m) de la recta se define como el **número** asociado a **r** que resulta del cociente

$$\frac{y2-y1}{x2-x1}$$

**Definición**

La pendiente **m** de una recta es el cambio en **y** dividido por el cambio en **x**

$$m = \frac{y2-y1}{x2-x1}$$

donde **(x1,y1)** y **(x2,y2)** son las coordenadas de dos puntos cualesquiera de la recta, y **x2** distinto de **x1.**

La ***pendiente*** de una recta puede ser **positiva, negativa** o **cero**. Si una recta tiene **pendiente positiva**, entonces las **ordenadas** de sus puntos **aumentan** cuando las **abscisas aumentan.** Si una recta tiene **pendiente negativa**, las **ordenadas disminuyen** cuando las **abscisas aumentan.** Si una **recta es horizontal,** entonces (**y2-y1)=0** y por lo tanto su **pendiente es cero.** La pendiente de una **recta vertical** es **indefinida,** puesto que "m" no tiene sentido cuando **(x2 - x1) = 0.**

## *Ejemplos*

```
P1 = {x1, y1};
P2 = {x2, y2};
```

```
m = (y2 - y1) / (x2 - x1);
```

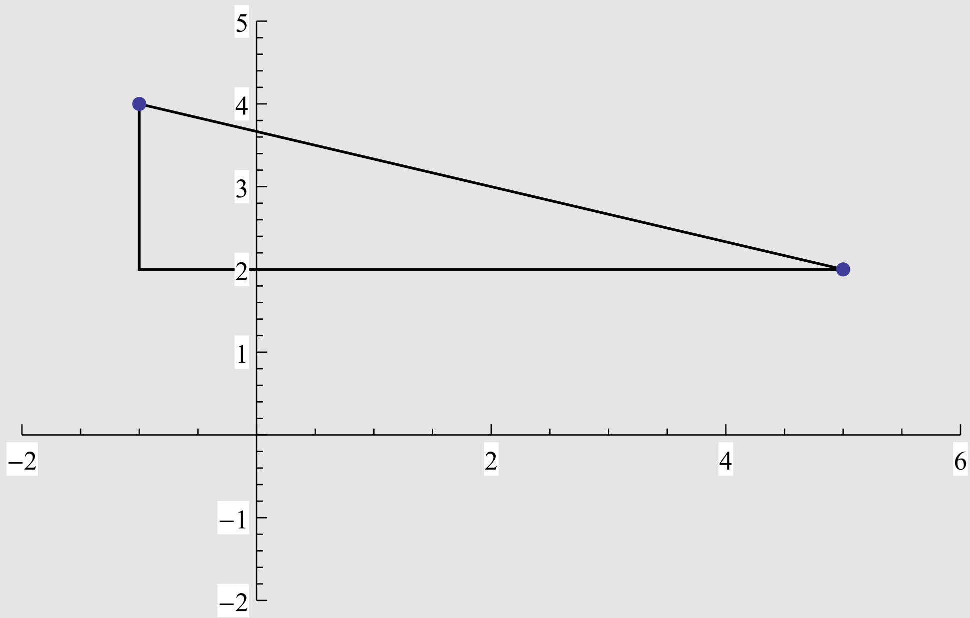
```
x1 = 5; y1 = 2;
x2 = -1; y2 = 4;
```

```
m
```

$$-\frac{1}{3}$$

Gráficamente

```
ListPlot[{P1, P2},
        PlotStyle -> PointSize[0.015],
         Prolog -> Line[{P1, {-1, 2}, P2, P1}],
         PlotRange -> {{-2, 6}, {-2, 5}}]
```




La pendiente de una recta es **única** en el sentido de que cualquier par de sus puntos determina el mismo cociente **m.** Esto puede demostrarse porque son iguales las razones entre los lados correspondientes de **triángulos semejantes.**

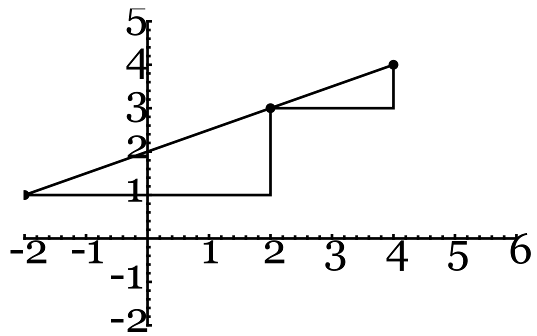
```
Clear[x1, x2, y1, y2]
```

```
P1 = {x1, y1}; P2 = {x2, y2};
```

```
x1 = -2; y1 = 1;
x2 = 2; y2 = 3;
```

Gráficamente

```
ListPlot[{P1, P2, {4, 4}},
          PlotStyle -> PointSize[0.02],
         Prolog -> Line[{P1, {2, 1}, P2, {4, 3}, {4, 4}, P1}],
         PlotRange -> {{-2, 6}, {-2, 5}}];
```




## 5.4 Ecuación punto-pendiente de una recta

Para escribir la ecuación de una recta que ***no sea vertical***, basta conocer su ***pendiente*** y las ***coordenadas*** de un punto que pertenezca a ella.

Si **P={x,y}** es **cualquier** otro punto de **r** (punto genérico), entonces **x** es distinto de **x1**, y podemos escribir la pendiente de **r** como

**m = (y-y1) / (x-x1)**

**Teorema**

Una recta que pasa por el punto **P1={x1,y1}** con pendiente **m** tiene por ecuación

**m = (y-y1) / (x-x1)**

o bien la **ecuación equivalente** que resulta de multiplicar ambos miembros por **(x-x1)**

**y - y1 = m*(x-x1)**

Esta ecuación de la recta "r" se llama **ECUACIÓN PUNTO - PENDIENTE**

### *Ejemplo*

a) Encontrar una ecuación de la recta que pasa por el punto **P1 ={-2,3}** con pendiente **m=4.**

**(y - y1) = m (x - x1)**

sustituyendo **(y - 3) = 4 [x - (-2)]**

**(y - 3) = 4 x + 8**

simplificando **y = 4 x + 11**

**Con el *Mathematica***

```
Clear[x1, x2, y1, y2, m]
```

```
y - y1 == m * (x - x1);
```

Si etiquetamos como **r** a esta ecuación:

```
r = %
```

```
y - y1 == m (x - x1)
```

para el caso particular que

```
m = 4;
```

y el punto **P1={x1,y1}** es tal que

```
P1 = {x1, y1};
```

```
x1 = -2; y1 = 3;
```

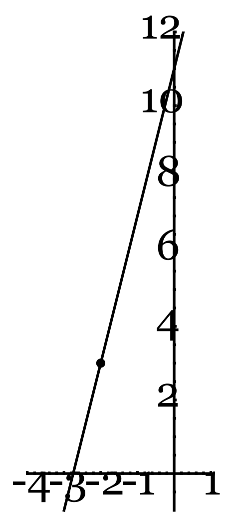
la recta **r** resulta

```
r
```

```
-3 + y == 4 (2 + x)
```

Gráficamente

```
ImplicitPlot[r, {x, -3, 1},
            PlotRange → {{-4, 1}, {-1, 12}},
             Prolog -> {PointSize[0.05], Point[P1]}];
```




Observar que la recta "r" pasa por el punto "P1" y su pendiente "m=2".

## 5.5 Ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados.

Dado dos puntos, podemos encontrar una ecuación de la recta (no vertical) que pasa por ellos.

Si calculamos la ***pendiente*** de la recta dividiendo el ***cambio en "y"*** por el ***cambio en "x"***, y sustituimos este valor por "m" en la ecuación ***punto-pendiente,*** obtenemos la ecuación de una ***recta que pasa por dos puntos dados.***

Si **P1={x1,y1}** y **P2={x2,y2}** son puntos diferentes de una recta **"r"** no vertical, entonces la **pendiente "m"** de la recta es

$$(1) \qquad m = \frac{y2-y1}{x2-x1}$$

como además **"r"** pasa por uno de los puntos, por ejemplo **"P1"**, debe satisfacer la ecuación:

$$(2) \qquad y - y1 = m*(x - x1)$$

reemplazando (1) en (2), resulta

$$y - y1 = \frac{y2-y1}{x2-x1}(x - x1)$$

ecuación que se la llama **FORMA DE DOS PUNTOS DE LA RECTA.**

**Con el *Mathematica***

```
Clear[x1, x2, y1, y2]
```

```
m = (y2 − y1) / (x2 − x1);
```

como además **"r"** pasa por uno de los puntos, por ejemplo **"P1",** debe satisfacer la ecuación

```
r = y − y1 == m * (x − x1)
```

$$y - \text{y1} == \frac{(x - \text{x1})(\text{y2} - \text{y1})}{\text{x2} - \text{x1}}$$

**Teorema**

La ecuación de cualquier recta no vertical que pasa por los puntos **P1={x1,y1}** y **P2={x2,y2}** se calcula con la fórmula

$$\mathbf{y - y1 = \frac{y2-y1}{x2-x1}\,(x - x1)}$$

## *Ejemplos*

a) Encuentra una ecuación de la recta que pasa por los puntos **P1={-2,3}** y **P2={1,-2}.**

Primero encontramos la **pendiente** y después sustituimos en la fórmula de los dos puntos. Tomamos **{-2,3}** como **{x1,y1}** y **{1,-2}** como **{x2,y2}.**

$$m = \frac{y2-y1}{x2-x1}; \qquad m = \frac{-2-3}{1-(-2)}; \qquad m = -\frac{5}{3};$$

$$y - y1 = m\,(x - x1);$$

$$y - 3 = -\frac{5}{3}[x - (-2)];$$

$$y - 3 = -\frac{5}{3}x - \frac{10}{3};$$

$$y = -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}$$

Podríamos haber tomado **{1,-2}** como **P1** y {**-2,3}** como **P2 y** haber obtenido la **misma ecuación.**

**Con el *Mathematica***

Borramos las asignaciones previas de las nomenclaturas que vamos a utilizar:

```
Clear[y, x1, x2, y1, y2, m]
```

Etiquetamos como **(r)** a la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos **P1={x1,y1}** y **P2={x2,y2}** cuya pendiente es **(m)**

```
r = y - y1 == m (x - x1);
```

recordamos que la **pendiente (m)** está dada por:

```
m = (y2 - y1) / (x2 - x1);
```

teniendo en cuenta que los puntos **P1** y **P2** tienen como **coordenadas**:

```
P1 = {x1, y1};
P2 = {x2, y2};
x1 = -2;
y1 = 3;
x2 = 1;
y2 = -2;
```

la **pendiente** y la **recta** resultan:

```
{m, r}
```

$$\left\{-\frac{5}{3},\ -3 + y == -\frac{5}{3}\ (2 + x)\right\}$$

Intentaremos otro modo de graficar, despejando la variable **y**

```
s = Solve[r, y] // ExpandAll
```

$$\left\{\left\{y \to -\frac{1}{3} - \frac{5\,x}{3}\right\}\right\}$$

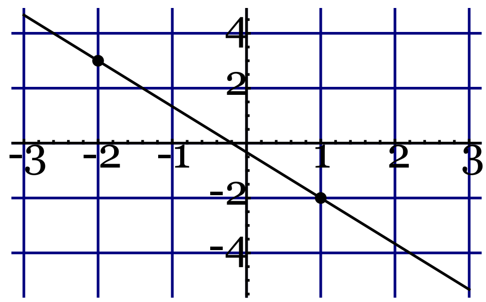
etiquetamos como **(r1)** a esta nueva forma de la ecuación de la recta **(r)**

```
r1 = s[[1, 1, 2]]
```

$$-\frac{1}{3}-\frac{5x}{3}$$

Utilizamos este nuevo comando **Plot** con sus opciones gráficas:

```
Plot[r1, {x, -3, 3},
    Prolog -> {PointSize[.025], Point[P1], Point[P2]},
    GridLines -> Automatic];
```




## 5.6 Ecuación pendiente-ordenada al origen de una recta.

Si conocemos la ***pendiente*** y la ***ordenada al origen*** de una recta, podemos encontrar una ecuación para ella.

Supongamos que una recta tiene **pendiente m** y **ordenada al origen b (**corresponde a un punto **P1={x1,y1}={0,b}**).

A partir de la **ecuación punto-pendiente** tenemos que:

**y - y1 = m (x - x1);** **(y - b) = m (x - 0);**

**y - b = m x;** **y = m x + b**

**Teorema**

Una recta no vertical con pendiente **m** y **ordenada al origen b** tiene por ecuación:

**y = m x + b**

***Ejemplo***

Supongamos que una recta tiene **pendiente 1** y **ordenada al origen -2**. A partir de la ecuación punto-pendiente tenemos que

```
r = y - (-2) == 1 (x - 0)
```

$y + 2 == x$

```
s1 = ExpandAll[Solve[r, y]]
```

$\{\{y \to x - 2\}\}$

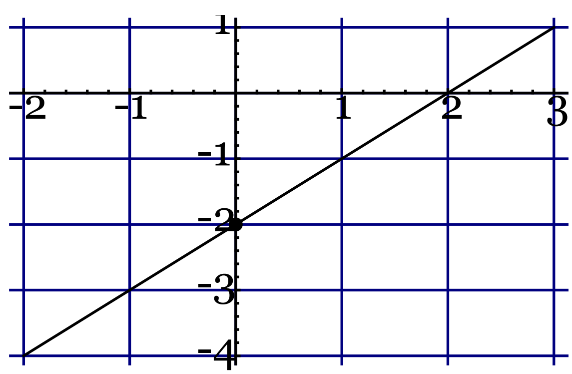
Esta es la ecuación ***pendiente-ordenada al origen*** de la recta.

Gráficamente

```
r1 = s1[[1, 1, 2]]
```

$x - 2$

```
Plot[r1, {x, -2, 3},
        GridLines -> Automatic,
        Prolog -> {PointSize[.025], Point[{0, -2}]}];
```




A partir de cualquier ecuación de una recta no vertical, podemos encontrar la ecuación pendiente-ordenada al origen despejando la variable **y**.

## *Problema*

Encuentra la pendiente y la ordenada al origen de la recta cuya ecuación es

$$-2x + 3y - 6 = 0$$

**Inténtalo a mano**

**Con el *Mathematica***

```
r = -2 x + 3 y - 6 == 0;
```

```
s = Solve[r, y] // ExpandAll
```

$$\left\{\left\{y \to \frac{2x}{3} + 2\right\}\right\}$$

```
r1 = s[[1, 1, 2]]
```

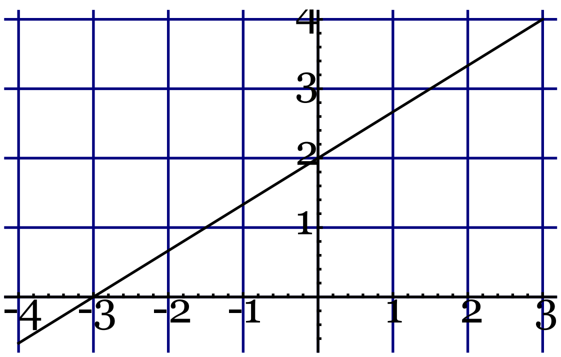
$$\frac{2x}{3} + 2$$

La pendiente resulta **m = 2/3;**

y la ordenada al origen **b = 2**

***Interpretación Gráfica***

```
Plot[r1, {x, -4, 3},
        GridLines -> Automatic];
```




Para las ***rectas verticales***, no hay ecuación pendiente-ordenada al origen en virtud de que éstas no tienen pendiente.

## 5.7 Trazo de la gráfica utilizando la forma *pendiente-ordenada al origen.*

### *Ejemplo*

Representar gráficamente **5 y - 20 = - 3 x.**

Al resolver para **y** encontramos la forma **pendiente-ordenada al origen**

```
r = 5 y - 20 == -3 x;
```

```
s = ExpandAll[Solve[r, y]]
```

$$\left\{\left\{y \to 4 - \frac{3\,x}{5}\right\}\right\}$$

```
r1 = s[[1, 1, 2]]
```

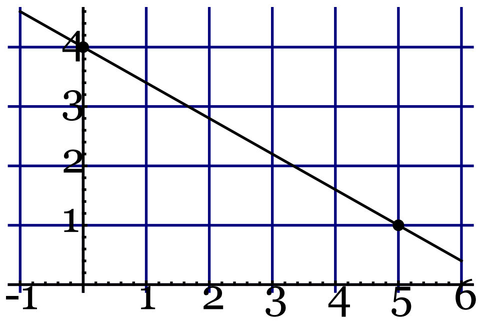
$$4 - \frac{3\,x}{5}$$

Así, la ordenada al origen **b = 4**

y la pendiente **m = -3/5.**

Marcamos **{0,4}** y después encontramos otro punto moviéndonos **5 unidades** a la derecha y **tres unidades** hacia abajo. El punto tiene coordenadas **{5,1}**. Después, trazamos la recta.

```
Plot[r1, {x, -1, 6},
        Prolog -> {PointSize[.025], Point[{0, 4}], Point[{5, 1}]},
        GridLines -> Automatic];
```




## 5.8 Forma estándar de la ecuación.

Cualquier ecuación lineal con dos variables se puede escribir de modo que el miembro de la derecha sea cero. A ésta se la llama forma *estándar de la ecuación lineal.*

**Definición**

La forma estándar de una ecuación lineal es:

$$A\,x + B\,y + C = 0,$$

donde ni **A** ni **B** son cero (simultáneamente)

En la forma estándar, **A, B,** y **C** representan ***constantes.***

Podemos cambiar la ***forma estándar*** de una ecuación lineal a la ***forma pendiente ordenada al origen*** despejando la variable "y".

**Teorema**

La pendiente de una recta cuya ecuación es

$$A\,x + B\,y + C = 0$$

es $\quad$ $m = -A/B$

si $\quad$ $B \neq 0$.

### *Ejemplo*

Encontrar la forma estándar y la pendiente de la ecuación

$$8\,x = 10 + 5\,y$$

utilizando el principio de la adición, sumando **(- 10 - 5 y)** a ambos miembros

$$8\,x + (-5\,y) + (-10) = 0 \qquad \text{(forma estándar).}$$

Esta ecuación es de la forma **A x + B y + C = 0,**

donde **A = 8, B = - 5, C = - 10.**

La pendiente es $m = -\dfrac{A}{B} = -\dfrac{8}{-5} = \dfrac{8}{5}$

## 6. Rectas paralelas y rectas perpendiculares

Cuando representamos gráficamente un par de ecuaciones lineales con dos variables en el mismo sistema de coordenadas cartesianas, hay tres posibilidades:

**a)** Las ecuaciones tienen la misma gráfica.

**b)** Las gráficas se intersecan exactamente en un punto.

**c)** Las gráficas son rectas paralelas.

### *Ejemplos*

**a)** Determinar las gráficas de

$$y = -3x + 5, \qquad 4y = -12x + 20$$

Para encontrar las ecuaciones en **forma pendiente-ordenada al origen** debemos despejar la variable **y.**

### *Con el Mathematica*

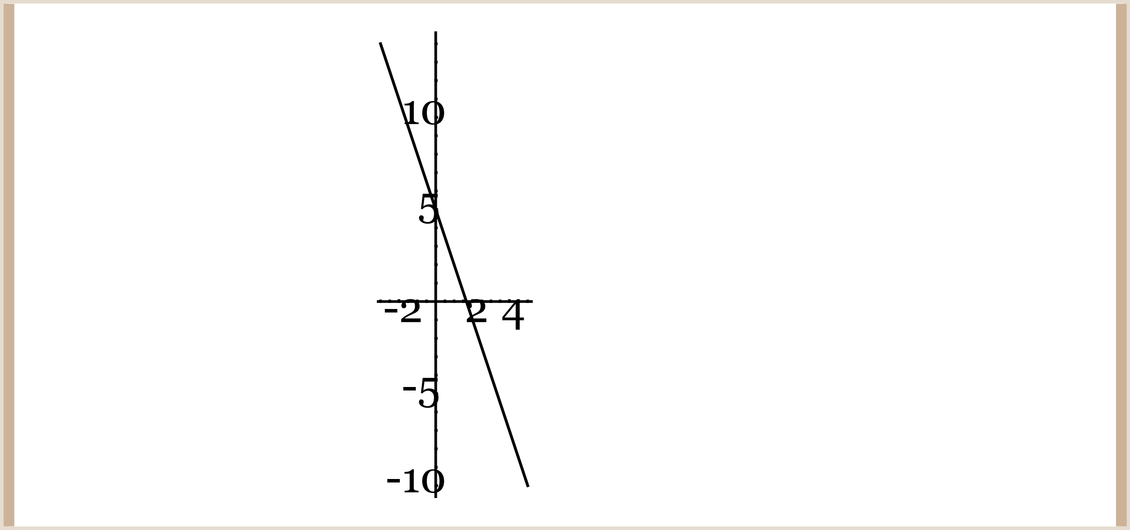
```
r1 = y == -3 x + 5;
r2 = 4 y == -12 x + 20;
```

```
Solve[r2, y]
```

$$\left\{\left\{y \to \frac{1}{4}(20 - 12x)\right\}\right\}$$

Las dos ecuaciones son la **misma.** Esto indica que sus gráficas se componen de una **misma recta.**

```
ImplicitPlot[{r1, r2}, {x, -3, 5}];
```




**b)** Determinar las gráficas de

$$y - 3x = 1, \qquad -2y = 3x + 2$$

Primero encontramos la **forma pendiente-ordenada al origen** de cada ecuación.

```
r1 = y - 3 x == 1;
r2 = -2 y == 3 x + 2;
```

```
Solve[r1, y]
```

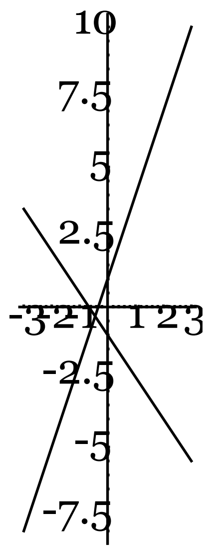
$\{\{y \to 3x + 1\}\}$

```
Solve[r2, y] // ExpandAll
```

$\left\{\left\{y \to -\frac{3x}{2} - 1\right\}\right\}$

Las pendientes son **distintas.** Por consiguiente, las rectas **no son paralelas.**

```
ImplicitPlot[{r1, r2}, {x, -3, 3}];
```




**c)** Determinar las gráficas de

3 x - y = - 5,                    y - 3 x = - 2

Resolviendo para "y" cada ecuación.

```
r1 = 3 x − y == −5;
r2 = y − 3 x == −2;
```

```
Solve[r1, y]
```

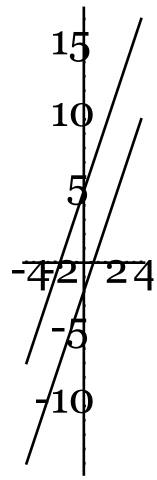
$\{\{y \to 3x + 5\}\}$

```
Solve[r2, y]
```

$\{\{y \to 3x - 2\}\}$

Las pendientes son **iguales**, y las ordenadas al origen son **diferentes**. Por lo tanto, las rectas son **paralelas.**

```
ImplicitPlot[{r1, r2}, {x, −4, 4}];
```




## 6.1 Rectas paralelas

**Teorema**

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la **misma** pendiente y **diferentes** ordenadas al origen.

## 6.2 Ecuaciones de rectas paralelas

***Ejemplo***

Escribir la ecuación de la recta que pasa por el punto **P1={-2,-4}** y es paralela a la recta **(r1):**
**2 y +8 x = 6.**

Primero encontramos la ecuación en la **forma pendiente-ordenada al origen**.

```
Clear[r1, x, y]
```

```
r1 = 2 y + 8 x == 6;
```

```
Solve[r1, y] // ExpandAll
```

```
{{y → 3 − 4 x}}
```

Podemos ver que la recta paralela debe tener pendiente: **m1 = - 4.**

Después encontramos la **ecuación punto-pendiente** de la recta **(r2)** con pendiente **m2 = - 4** que pasa por el punto **P1={-2,-4}.**

```
Clear[x1, y1, m]
```

```
r2 = y − y1 == m (x − x1);
```

```
x1 = −2;
y1 = −4;
m = −4;
```

```
r2
```

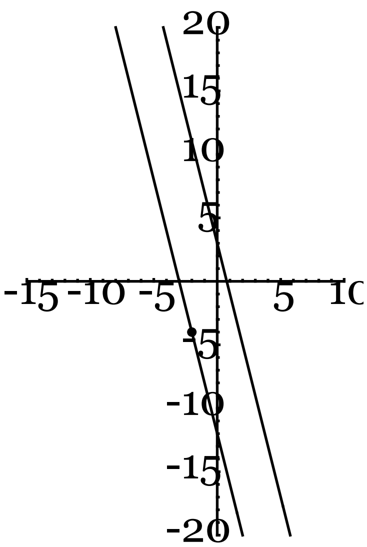
```
y + 4 == −4 (x + 2)
```

```
Solve[r2, y] // ExpandAll
```

```
{{y → −4 x − 12}}
```

Las ecuaciones de las rectas (r1) y **(r2)** tienen la **misma pendiente** y **distintas ordenadas al origen**. Por lo tanto, **sus gráficas son paralelas.**

```
ImplicitPlot[{r1, r2}, {x, −15, 10},
    PlotRange → {{−15, 10}, {−20, 20}},
    Prolog −> {PointSize[.03], Point[{−2, −4}]}];
```




## 6.3 Rectas perpendiculares

**Si dos rectas se intersecan en ángulos rectos, son perpendiculares**

**Teorema**

Dos rectas no verticales son perpendiculares si y sólo si el **producto** de sus **pendientes** es **-1**

***Ejemplo***

Determinar si las gráficas de las rectas

**5 y = 4 x + 10,     4 y = - 5 x + 4**

son perpendiculares..

Primero encontramos las ecuaciones en la **forma pendiente-ordenada al origen** resolviendo para **"y"**

```
r1 = 5 y == 4 x + 10;
r2 = 4 y == -5 x + 4;
```

```
Solve[r1, y] // ExpandAll
```

$$\left\{\left\{y \to \frac{4x}{5} + 2\right\}\right\}$$

**Solve[r2, *y*] // ExpandAll**

$$\left\{\left\{y \to 1 - \frac{5x}{4}\right\}\right\}$$

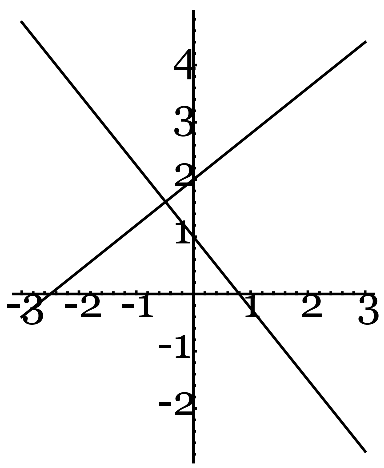
El producto de las pendientes es **-1**; es decir,

**4 / 5 * (−5 / 4) == −1**

True

Las rectas **son perpendiculares.**

**ImplicitPlot[{r1, r2}, {*x*, −3, 3}];**




## 6.4 Ecuaciones de rectas perpendiculares

***Ejemplo***

Escribir una ecuación de la recta **(r1)** perpendicular a **(r2): 4 y - x = 20** y que pasa por el punto **P1={2,-3}.**

Encontramos la ecuación en **forma de pendiente-ordenada al origen** para **(r2)**

```
r2 = 4 y - x == 20;
```

```
Solve[r2, y] // ExpandAll
```

$$\left\{\left\{y \to \frac{x}{4} + 5\right\}\right\}$$

Sabemos que la pendiente de la recta perpendicular debe ser **m1=- 4,** pues **1/4*(- 4) = -1**. Después determinamos la ecuación en **forma punto-pendiente** para **(r1)**

```
P1 = {x1, y1};
m1 = -4;
x1 = 2;
y1 = -3;
```

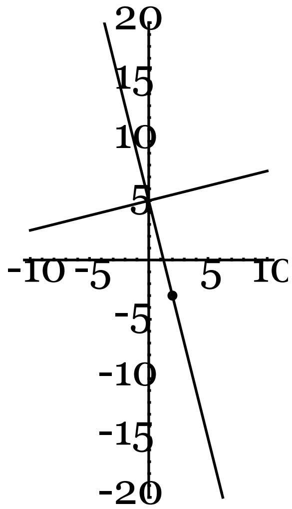
```
r1 = y - y1 == m1 * (x - x1)
```

$$y + 3 == -4\,(x - 2)$$

```
Solve[r1, y]
```

$$\{\{y \to -4\,(x - 2) - 3\}\}$$

```
ImplicitPlot[{r1, r2}, {x, -10, 10},
            PlotRange → {-20, 20},
          Prolog -> {PointSize[.04], Point[{2, -3}]}];
```


20
15
10
5
-10 -5
5
10
-5
-10
-15
-20