Módulo 4

Clase 1 - Teoría

De la primera parte de este módulo se evidencia que es conveniente hacer una revisión conceptual de **Expresiones Algebraicas,** y en particular de **Expresiones Algebraicas Enteras o Polinomios,** para continuar con el estudio minucioso de **ecuaciones polinómicas.**

4-1 Expresión Algebraica

Comenzamos por ponernos de acuerdo en adoptar un **vocabulario apropiado.**

Cuando se quiere indicar un número no conocido **(x)**, una cantidad **(g=gravedad)** o la medida de una magnitud de forma general **(v=velocidad)**, se utilizan letras.

EXPRESIÓN MATEMÁTICA es una ***combinación*** de números y de letras que representan números cualesquiera.

Se llama **EXPRESIÓN ALGEBRAICA** a un ***conjunto de números y letras***. Las letras sólo pueden estar sometidas a las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación, y cumplen las mismas reglas que los números.

Ejemplos

$$4x^4 + 8y^2 - 7xy; \qquad 3a^5b^2; \qquad \frac{4xy + 4z - 1}{a^2 - b^2}$$

son expresiones algebraicas

Nota: conviene tener presente que el signo de multiplicación no suele ponerse entre las letras .

Valor numérico de una expresión

Cuando sustituimos las letras por números en una expresión algebraica, al resultado numérico que se obtiene se le llama **valor numérico** de una expresión .

Variables

Se comprende fácilmente que una expresión algebraica puede tomar infinidad de valores numéricos , dependiendo de los valores que le asignemos a las letras, por esta razón a las letras que aparecen en una expresión se les llama **variables .**

El valor numérico de la primera de las expresiones algebraicas de los ejemplos anteriores, cuando a las variables **x** e **y** se le asignan los valores **2** y **- 1** respectivamente, resulta ser **86**

$$4\,x^4 + 8\,y^2 - 7\,x\,y\ /.\ \{x \to 2,\ y \to -1\}$$

86

El valor numérico de la segunda de las expresiones algebraicas de los ejemplos, cuando a las variables **a** y **b** se le asignan los valores **25** y **4/5** respectivamente, resulta

$$3\,a^5\,b^2\ /.\ \{a \to 25,\ b \to 4/5\}$$

18 750 000

Interpreta como se ha procedido con la tercera de las expresiones algebraicas

$$\frac{4\,x\,y + 4\,z - 1}{a^2 - b^2}\ /.\ \{x \to 18,\ y \to 5/6,\ z \to -32,\ a \to 27,\ b \to 16/7\}$$

$$-\frac{3381}{35\,465}$$

Que importante la PC.

TÉRMINO. Es una expresión que solo contiene ***productos y cocientes*** de números y de letras.

Así, $\mathbf{4\,x^4}$; $\mathbf{-7\,xy}$; $\mathbf{8\,y^2}$, son términos de la primera expresión algebraica escrita arriba.

Sin embargo, $\mathbf{3\,x^5 + 5\,yx}$ es una expresión algebraica que consta de dos términos

MONOMIO. Es una expresión algebraica de un ***solo término.***

Ejemplo

$3\,x^4\,y^2$; $\quad 2\,x\,y\,z^2$; $\quad \frac{3\,x^4}{y}$ $\quad$ son monomios

A causa de esta definición, los monomios se denominan con frecuencia ***términos*** simplemente.

BINOMIO. Es una expresión algebraica de ***dos términos.***

Ejemplo

$x + 3y$; **$4x^2 - 7y$** son binomios

TRINOMIOS. Es una expresión algebraica de ***tres términos.***

Ejemplo

$x + y + 1$; **$3x - 2 + 5y$;** **$4x^2 + 2x - \frac{5y}{z}$** son trinomios

MULTINOMIO. Es una expresión algebraica de ***más de un término.***

Ejemplo

$6y + 7z$; **$3x^2 - \frac{6y}{x^2} + 1$** son multinomios

COEFICIENTE. Cualquier ***factor*** de un término se llama coeficiente de dicho término.

Ejemplo

En el término **$3x^2y^5$**, **$3x^2$** es el coeficiente de **y^5**, **$3y^5$** es el coeficiente de **x^2**, y **3** es el coeficiente de **x^2y^5**.

COEFICIENTE NUMÉRICO. Si un término es el producto de un número por una o varias letras, ***dicho número*** es el coeficiente numérico (o simplemente coeficiente) del término.

Ejemplo

En el término **$-3x^4y^2$**, el coeficiente numérico o coeficiente es **-3.**

TÉRMINOS SEMEJANTES. Son aquellos que sólo se diferencian en su *coeficiente numérico,* es decir su parte literal es la misma.

Ejemplo

	$2xy$	y	**$-3xy$**	son términos semejantes;
	$2x^3y^4z$	y	**$-5x^3y^4z$**	son asimismo términos semejantes;
sin embargo,	**$-3x^2z$**	y	**$5x^3z$**	no son términos semejantes

Se pueden reducir dos o más términos semejantes a uno solo.

Ejemplo

$5x^2y^3 + 2x^2y^3 - x^2y^3$ se pueden reducir a

$6x^2y^3$

UN TÉRMINO ES RACIONAL y **ENTERO**, con respecto a ciertas letras (que representan a números cualesquiera), si está formado por:

a) ***Potencias enteras y positivas*** de letras multiplicadas por un factor numérico.

b) ***Un número.***

Ejemplo

Los términos $3x^2$; $-5x^3y^4$; 6;-2y; $\sqrt{5}x^2y^4$, son racionales y enteros con respecto a las letras que figuran en ellos.

Sin embargo,

$7\sqrt{x}$ no es racional con respecto a **x**,

$\frac{2}{x}$ no es entero con respecto a **x.**

4-2 Polinomios

POLINOMIO: Es un ***monomio, o un multinomio***, en el que cada término es ***racional y entero*** con respecto a las ***letras.***

Ejemplo

$7x^2 - 8y + 3z$, $\frac{2x^4}{3} - \sqrt{5}\,yx - 8$, $7x^3$, son polinomios.

Sin embargo,

$x^2 - \frac{7}{y}$, $5\sqrt{x} + 1$, no son polinomios.

Consideramos las expresiones **algebraicas enteras o polinomios**, en particular los polinomios en **una sola variable o indeterminada** debido a que son las que, por ahora, nos resultan útiles.

Expresiones como las siguientes son polinomios con una variable.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Resulta de una gran utilidad adoptar el signo sumatoria, identificado por la letra griega sigma mayúscula (Σ), a los efectos de abreviar una suma extensa de términos. Para nuestro caso anterior, resulta

$$P(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_{n-i}\, x^{n-i}.$$

GRADO DE UN MONOMIO: Está dado por la ***cantidad de letras*** que conforman la parte literal del término. Se obtiene ***sumando los exponentes*** de la parte literal del término.

Observación

Recordemos, por ejemplo, que $x^3 = x * x * x$

de modo que x^3 es una abreviatura de tres letras, que en particular, son iguales.

Ejemplo

El grado de $5\,x^2\,y^5\,z$ es $2 + 5 + 1 = 8$

El grado de **una constante,** como por ejemplo: $3;\ 0;\ \sqrt{7};\ -\pi,$ es cero.

GRADO DE UN POLINOMIO: Es el correspondiente al ***término de mayor grado*** cuyo coeficiente sea distinto de cero.

Ejemplo

Los grados de los términos del polinomio: $-5\,x^6 + 3\,y^2\,x^3 + 8$

son: **6, 5** y **0**, respectivamente; por consiguiente, el grado del polinomio es **6.**

SÍMBOLOS DE AGRUPAMIENTO: Son los ***paréntesis*** ( ), los ***corchetes*** [ ] o las ***llaves*** { }; se emplean para indicar que los términos encerrados en ellos se consideran como una sola cantidad.

Ejemplo

La suma de las dos expresiones algebraicas,

$7\,x^2 - 2\,x + 4$ y $3\,x - 7$,

se puede representar por

$$(7\,x^2 - 2\,x + 4) + (3\,x - 7),$$

Su diferencia por

$$(7\,x^2 - 2\,x + 4) - (3\,x - 7),$$

y su producto por

$$(7\,x^2 - 2\,x + 4)*(3\,x - 7).$$

Observación

Con el *Mathematica* sólo se utilizan los **paréntesis** para indicar agrupamiento. Los **corchetes** y las **llaves** tienen otro significado.

SUPRESIÓN DE LOS SIMBOLOS DE AGRUPAMIENTO

Está regido por las normas siguientes:

1) Si un **signo +** precede al símbolo de agrupamiento, dicho símbolo se puede suprimir **sin modificar** los términos que contiene.

2) Si un **signo -** precede al símbolo de agrupamiento, dicho símbolo se puede suprimir **cambiando el signo** de cada uno de los términos que contiene.

3) Si en una expresión figura más de un símbolo de agrupamiento, para suprimirlos **se comienza por los interiores**.

4-3 Operaciones con Polinomios

Adición de polinomios

La **suma de dos polinomios** se puede encontrar escribiendo un **signo de suma** entre ellos y **sumando** los **términos semejantes.**

Ejemplo

Suma $-3x^3 + 2x - 4$ con $4x^3 + 3x^2 + 2$

$$(-3x^3 + 2x - 4) + (4x^3 + 3x^2 + 2)$$

$$= x^3 + 3x^2 + 2x - 2$$

A menudo es muy útil escribir los polinomios en columnas (uno debajo del otro), escribiendo los términos semejantes en la misma columna y dejando espacios vacíos en aquellos lugares en los que falte algún término de ese tipo.

$$\begin{array}{rrrrr} & -3x^3 & & +2x & -4 \\ + & 4x^3 & +3x^2 & & +2 \\ \hline & x^3 & +3x^2 & +2x & -2 \end{array}$$

Con el *Mathematica*

Simplemente etiquetamos como **p1** y **p2** (o cualquier otra etiqueta), respectivamente, a los polinomios que debemos sumar

```
p1 = -3 x^3 + 2 x - 4;
p2 = 4 x^3 + 3 x^2 + 2;
```

Ordenamos la operación que queremos efectuar, en este caso, la suma

```
p1 + p2
```

$x^3 + 3x^2 + 2x - 2$

Respuesta que concuerda con la obtenida manualmente.

Inversos aditivos

La suma de un polinomio y su inverso aditivo es el **polinomio nulo.** El inverso aditivo de un polinomio se puede encontrar reemplazando cada término por su inverso aditivo.

Ejemplo

Encuentra el inverso aditivo de $\mathbf{7x^2 - 6x + 2}$

Etiquetamos como **p1** al polinomio dado

```
p1 = 7 x^2 - 6 x + 2
```

$7x^2 - 6x + 2$

El **inverso aditivo** se puede escribir como

```
-p1
```

$-7x^2 + 6x - 2$

Se verifica que la suma de un polinomio y su inverso aditivo es un **polinomio nulo.**

```
p1 + (-p1)
```

```
0
```

Sustracción de polinomios

Para restar un polinomio de otro, **sumamos su inverso aditivo.** Cambiamos el signo de cada término del polinomio que será restado y después sumamos.

Ejemplo

Resta: **p1 - p2**

etiquetando como: **p1** $= -9x^5 - x^3 + 2x^2 + 4$ y **p2** $= 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 3x^2$

```
p1 = -9 x^5 - x^3 + 2 x^2 + 4;
p2 = 2 x^5 - x^4 + 4 x^3 - 3 x^2;
```

```
p1 + (-p2)
```

$-11x^5 + x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 4$

o simplemente

```
p1 - p2
```

$-11x^5 + x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 4$

Multiplicación de polinomios

La multiplicación de polinomios se basa en la **propiedad distributiva.** Para multiplicar dos polinomios, multiplicamos cada término de uno de ellos por todos los términos del otro y después sumamos los términos semejantes.

Ejemplo

Multiplica: $x^2 - 3x + 9$ y **3 - x**

Etiquetamos como **p1** y **p2** respectivamente a los polinomios dados

```
p1 = -3 x + 9 + x^2;
p2 = 3 - x;
```

El producto resulta

```
p1 * p2
```

$(3 - x)\left(x^2 - 3\,x + 9\right)$

Aplicamos la propiedad distributiva

```
p1 * p2 // Expand
```

$-x^3 + 6\,x^2 - 18\,x + 27$

O bien

```
Expand[p1 * p2]
```

$-x^3 + 6\,x^2 - 18\,x + 27$

Productos especiales

Productos de interés práctico

Se exponen a continuación algunos de los productos que con mayor frecuencia se presentan en el **cálculo algebraico** y con los que debemos procurar familiarizarnos todo lo posible. La comprobación de dichos resultados se puede realizar efectuando las multiplicaciones correspondientes.

I.

```
a * (c + d) // Expand
```

$a\,c + a\,d$

II.

```
(a + b) * (a - b) // Expand
```

$a^2 - b^2$

Multiplicación de sumas y diferencias

El producto de la suma y la diferencia de dos términos es el cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

III.

```
(a + b) * (a + b) // Expand
```

$a^2 + 2\, b\, a + b^2$

o bien

```
(a + b)^2 // Expand
```

$a^2 + 2\, b\, a + b^2$

IV.

```
(a - b) * (a - b) // Expand
```

$a^2 - 2\, b\, a + b^2$

o bien

```
(a - b)^2 // Expand
```

$a^2 - 2\, b\, a + b^2$

Desarrollo de un binomio al cuadrado

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\, b\, a + b^2$$

El cuadrado de un binomio es el cuadrado del primer término, más el doble producto de los dos términos, más el cuadrado del segundo término.

Recordemos que $(a-b)^2 = (a+(-b))^2$

Verifica que $(-a+b)^2 = (a-b)^2$

y que $(-a-b)^2 = (a+b)^2$

V.

```
(x + a) * (x + b) // Expand
```

$x^2 + a\,x + b\,x + a\,b$

escrito de otra forma

```
Collect[x^2 + a x + b x + a b, x]
```

$x^2 + (a+b)\,x + a\,b$

VI.

```
(a * x + b) * (c * x + d) // Expand
```

$a\,c\,x^2 + b\,c\,x + a\,d\,x + b\,d$

escrito de otra forma

```
Collect[a c x^2 + b c x + a d x + b d, x]
```

$a\,c\,x^2 + (b\,c + a\,d)\,x + b\,d$

VII.

```
(a + b) * (c + d) // Expand
```

$a\,c + b\,c + a\,d + b\,d$

Otros productos muy utilizados son

VIII.

```
(a + b) * (a + b) * (a + b) // Expand
```

$a^3 + 3\, b\, a^2 + 3\, b^2\, a + b^3$

o bien

```
(a + b)^3 // Expand
```

$a^3 + 3\, b\, a^2 + 3\, b^2\, a + b^3$

IX.

```
(a - b) * (a - b) * (a - b) // Expand
```

$a^3 - 3\, b\, a^2 + 3\, b^2\, a - b^3$

escrito de otra forma

```
(a - b)^3 // Expand
```

$a^3 - 3\, b\, a^2 + 3\, b^2\, a - b^3$

Desarrollo de un binomio al cubo

$$(a + b)^3 = a^3 + 3\, b\, a^2 + 3\, b^2\, a + b^3$$

El cubo de un binomio es el cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el primer término por el cuadrado del segundo término, más el cubo del segundo término.

Verifica que $(a - b)^3 = a^3 - 3\, b\, a^2 + 3\, b^2\, a - b^3$

Desarrolla $(- a - b)^3$

$(- a + b)^3$

X.

```
(a - b) * (a^2 + a * b + b^2) // Expand
```

$a^3 - b^3$

XI.

```
(a + b) * (a ^ 2 - a * b + b ^ 2) // Expand
```

$a^3 + b^3$

XII.

```
(a + b + c) * (a + b + c) // Expand
```

$a^2 + 2\,b\,a + 2\,c\,a + b^2 + c^2 + 2\,b\,c$

o bien

```
(a + b + c) ^ 2 // Expand
```

$a^2 + 2\,b\,a + 2\,c\,a + b^2 + c^2 + 2\,b\,c$

4-5 Factorización de Polinomios

La factorización es lo contrario de la multiplicación. **Factorizar** una expresión significa escribirla como un producto equivalente a ella. Cuando factorices un polinomio, primero busca los **factores comunes.**

Términos con factores comunes

Ejemplo

Extrae un factor común de $\mathbf{4\,y^2 - 8}$

```
p1 = 4 y^2 - 8
```

$4\,y^2 - 8$

```
p1 // Factor
```

$4(y^2 - 2)$

En algunos casos hay más de un factor común

Ejemplo

```
p1 = 5 x^4 - 20 x^3
```

$5x^4 - 20x^3$

```
Factor[p1]
```

$5(x - 4)x^3$

En general tratamos de extraer todos los factores comunes. Cuando así lo hacemos decimos que hemos factorizado el **máximo factor común.**

Factorización de trinomios cuadrados

A los cuadrados de los binomios también se los llama **trinomios cuadrados perfectos** o simplemente **trinomios cuadrados.** Tienen la forma:

$\boldsymbol{a^2 + 2\,b\,a + b^2}$ o $\boldsymbol{a^2 - 2\,b\,a + b^2}$

Algunos ejemplos

$\boldsymbol{x^2 + 6\,x + 9}$ éste es el cuadrado de **x + 3**

$\boldsymbol{y^2 - 22\,y + 121}$ éste es el cuadrado **y - 11**

En primer lugar debemos ser capaces de **reconocer** un trinomio cuadrado.

Identificación de trinomios cuadrados

$$\boldsymbol{a^2 + 2\,b\,a + b^2}$$

Para que un trinomio sea un trinomio cuadrado, se deben cumplir tres condiciones.

1. Dos de los términos deben ser cuadrados $\boldsymbol{a^2}$ y $\boldsymbol{b^2}$.

2. No debe haber signos negativos antes de $\boldsymbol{a^2}$ o $\boldsymbol{b^2}$.

3. Si multiplicamos a y b (las raíces cuadradas de a^2 y b^2) y multiplicamos el resultado por 2, lo que se obtiene es el término restante **2*a*b**, o su inverso aditivo, **-2*a*b.**

Para factorizar trinomios cuadrados, utilizamos las siguientes identidades

Factorización de trinomios cuadrados

$$a^2 + 2\,b\,a + b^2 = (a+b)^2$$
$$a^2 - 2\,b\,a + b^2 = (a-b)^2$$

Ejemplo 1

Factoriza como un trinomio cuadrado, de ser posible.

```
p1 = x^2 - 10 x + 25
```

$x^2 - 10\,x + 25$

```
p1 // Factor
```

$(x-5)^2$

Ejemplo 2

```
p2 = 16 y^2 + 49 + 56 y
```

$16\,y^2 + 56\,y + 49$

```
Factor[p2]
```

$(4\,y+7)^2$

Ejemplo 3

```
p3 = -20 x * y + 4 y^2 + 25 x^2
```

$25\,x^2 - 20\,y\,x + 4\,y^2$

```
Factor[p3]
```

$(5\,x - 2\,y)^2$

Ejemplo 4

```
p4 = 36 y^2 + 42 y + 49
```

$36\,y^2 + 42\,y + 49$

```
Factor[p4]
```

$36\,y^2 + 42\,y + 49$

No es un trinomio cuadrado, pues **2*a*b** es **2*(6y)*7**, o sea **84y** distinto a **42y.**

Diferencias de cuadrados

Para factorizar una diferencia de dos cuadrados, invertimos el procedimiento efectuado para multiplicar una suma y diferencia de los mismos términos.

Factorización de una diferencia de cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$

Para factorizar una diferencia de dos cuadrados, escribe la raíz cuadrada del primer término *más* la raíz cuadrada del segundo, multiplicado todo esto por la raíz cuadrada del primer término *menos* la raíz cuadrada del segundo.

Ejemplo

Factoriza $x^2 - 9$

```
p1 = x^2 - 9
```

$x^2 - 9$

```
Factor[p1]
```

$(x - 3)(x + 3)$

Ejemplo

```
p2 = 25 y^6 - 49 x^2
```

$25 y^6 - 49 x^2$

```
Factor[p2]
```

$-(7 x - 5 y^3)(5 y^3 + 7 x)$

Una diferencia de dos cuadrados puede tener más de dos términos.

Ejemplo

Factoriza $x^2 + 6 x - 25 y^2 + 9 = (x^2 + 6 x + 9) - 25 y^2$

$$=(x + 3)^2 - (5 y)^2$$

Tenemos ahora una **diferencia de dos cuadrados**, uno de los cuales es un **binomio al cuadrado**. Al factorizar, obtenemos

(x+3+5y)*(x+3-5y).

Verificamos con el Mathematica

```
p = x^2 + 6 x + 9 - 25 y^2
```

$x^2 + 6 x - 25 y^2 + 9$

```
Factor[p]
```

$(x - 5\,y + 3)\,(x + 5\,y + 3)$

Factorización por agrupamiento

En ocasiones una expresión de **cuatro o más términos** se puede agrupar de tal modo que se pueden encontrar algunos factores comunes. De éstos, algunos pueden, a su vez, ser binomios.

Ejemplo 1

$$y^2 + 4\,y + 3\,y + 12 = (4\,y + 12) + (y^2 + 3\,y)$$

$$= y\,(y + 3) + 4\,(y + 3)$$

$$= (y + 3)\,(y + 4)$$

Verificamos con el *Mathematica*.

```
p1 = y^2 + 3 y + 4 y + 12;
```

```
Factor[p1]
```

$(y + 3)\,(y + 4)$

Ejemplo 2

Factorizar $4\,x^2 + 20\,x - 3\,x - 15$

Intentarlos sin PC

```
p2 = 4 x^2 - 3 x + 20 x - 15;
```

```
Factor[p2]
```

$(x + 5)\,(4\,x - 3)$

Ejemplo 3

Factorizar $a x^2 - b x^2 + a y - b y$

Intentarlos sin PC

```
p3 = a * x^2 + a * y - b * x^2 - b * y;
```

```
Factor[p3]
```

$(a - b)(x^2 + y)$

Más acerca de la factorización

Investiga

Calcula y compara

I. $(4 + 5)(4^2 - 4*5 + 5^2)$ y $4^3 + 5^3$

```
p1 = (4 + 5) (4^2 - 4 * 5 + 5^2)
```

189

```
p2 = 4^3 + 5^3
```

189

Se concluye que son dos **expresiones numéricas iguales**, pero **escritas de distinta forma.**

Análogamente

II. $(3 x + 2)((3 x)^2 - 2(3 x) + 2^2)$ y $(3 x)^3 + 2^3$

```
p3 = (3 x + 2) ((3 x)^2 - (3 x) * 2 + (2)^2)
```

$(3 x + 2)(9 x^2 - 6 x + 4)$

```
p4 = (3 x) ^3 + 2^3
```

$27 x^3 + 8$

Intentamos averiguar si son **dos expresiones equivalentes.**

```
p3 == p4
```

$(3 x + 2) (9 x^2 - 6 x + 4) == 27 x^3 + 8$

Seguramente la respuesta no es la que esperábamos. La máquina no entiende que nosotros pretendemos que desarrolle el primer miembro de la igualdad, por lo cual debemos pedírselo expresamente mediante el comando **Expand.**

```
Expand[p3] == p4
```

True

III. $(7 - 3) (7^2 + 7 \times 3 + 3^2)$ y $7^3 - 3^3$

```
(7 - 3) (7^2 + 7 * 3 + 3^2)
```

316

```
7^3 - 3^3
```

316

IV. $(2 y - 9) ((2 y)^2 + 9 (2 y) + 9^2)$ y $(2 y)^3 - 9^3$

```
p5 = (2 y - 9) ((2 y) ^2 + (2 y) * 9 + (9) ^2)
```

$(2 y - 9) (4 y^2 + 18 y + 81)$

```
p6 = (2 y) ^3 - 9^3
```

$8 y^3 - 729$

```
Expand[p5] == p6
```

True

Factorización de una suma o diferencia de dos cubos

Factorización de una suma o diferencia de dos cubos

$$a^3 + b^3 = (a + b)\left(a^2 - b\,a + b^2\right)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + b\,a + b^2\right)$$

Ejemplo 1

```
p1 = x^3 + 125;
```

```
Factor[p1]
```

$(x + 5)\left(x^2 - 5\,x + 25\right)$

Ejemplo 2

```
p2 = x^3 - 27 y^3;
```

```
Factor[p2]
```

$(x - 3\,y)\left(x^2 + 3\,y\,x + 9\,y^2\right)$

Factorización de trinomios de la forma: $x^2 + p\,x + q$

Ejemplo 1

Considera el siguiente producto

$$(x+3)\,(x+5) = x^2 + 5\,x + 3\,x + 15$$
$$= x^2 + 8\,x + 15$$
$$= x^2 + (3+5)\,x + 3 * 5$$

Observa que el coeficiente **8** es la suma de **3** y **5**, y que el término constante **15** es el producto de **3** y **5.**

En general,

$$(a+x)\,(b+x) = x^2 + (a+b)\,x + a\,b.$$

Para factorizar podemos invertir los miembros de la identidad.

$$x^2 + (a+b)\,x + a\,b = (a+x)\,(b+x)$$

Es decir que la factorización de trinomios de la forma

$$x^2 + p\,x + q$$

en productos binomiales de la forma

(x + a) (x + b)

es posible en la medida que puedan calcularse **a** y **b.**

Una alternativa, ya que se trata del cálculo de dos valores, es pensar en plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Esta propuesta es válida, ya que como mencionamos, **a** y **b** (si bien son incógnitas) están exigidos a cumplir con:

a + b = p

y **a*b = q**

resultando efectivamente un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas; recordemos que **p** y **q** son conocidos.

Ejemplo 2

Factorizar $x^2 - 3\,x - 10$

```
p = x^2 - 3 x - 10;
```

Planteamos el polinomio dado **p** en su forma factoreada, etiquetándolo como **p1**

```
p1 = (x + a) (x + b)
```

$$(a+x)\,(b+x)$$

Planteamos el sistema de ecuaciones respecto al condicionamiento que deben satisfacer **a** y **b,** etiquetando como **e1** y **e2** a cada una de ellas

```
e1 = a + b == -3;
e2 = a * b == -10;
```

Conformamos el sistema

```
sis = {e1, e2}
```

$\{a + b == -3,\ a\,b == -10\}$

Resolvemos respecto a las incógnitas **a** y **b**, etiquetando como **s1** al conjunto solución.

```
s1 = Solve[sis, {a, b}]
```

$\{\{a \to -5,\ b \to 2\},\ \{a \to 2,\ b \to -5\}\}$

Reemplazamos en el polinomio planteado en su forma factoreada **p1**

```
p1 /. s1
```

$\{(x - 5)\,(x + 2),\ (x - 5)\,(x + 2)\}$

Resultando dos posibilidades, que, si las analizamos detenidamente, concluimos que se trata de una única posibilidad.

Verificamos con el *Mathematica*.

```
Factor[p]
```

$(x - 5)\,(x + 2)$

Factorización de trinomios de la forma: $a\,x^2 + b\,x + c$

Aquí la cosa se complica un poco por el hecho de que el coeficiente **a** del término cuadrático, es distinto de uno; pero no obstante, es interesante que investiguemos.

Nuestra propuesta es la transformación del trinomio

$$a\,x^2 + b\,x + c$$

en su forma factoreada, que podemos, en general, plantearla como

$$(p\,x + q)\,(r\,x + s)$$

observando que ahora son cuatro las incógnitas a calcular: **p, q, r** y **s.**

Comparando a los polinomios en sus dos formas se concluye que son tres los condicionamientos que pueden establecerse:

p*r = a

q*s = c

p*s + q*r = b

Dijimos que la cosa se complicaba un poco, y aquí está la razón: si analizamos cuidadosamente las ecuaciones planteadas, concluimos que podemos formar un sistema de tres ecuaciones, pero con cuatro incógnitas. Y ésta es precisamente la complicación, ya que hasta ahora hemos resuelto sistemas de ecuaciones, que tienen la particularidad, de que el número de ecuaciones es el mismo que el de incógnitas. Esto nos conduce a que el sistema, si bien es **compatible**, es además **indeterminado;** traducido, tiene solución, pero no única.

Así, en forma genérica parece todo muy engorroso, pero cuando se trabaja en particular con un problema específico, todo se aclara considerablemente.

Ejemplo

Factorizar $10\,x^2 + 23\,x + 12$

Etiquetamos como **p** a nuestro polinomio a factorizar

```
p = 10 x^2 + 23 x + 12;
```

y como **p1** a la forma factoreada, que la planteamos como

```
p1 = (a x + b) (c x + d)
```

$(b + a\,x)\,(d + c\,x)$

Nuestro problema es encontrar **a, b, c,** y **d**, para lo cual si comparamos **p** y **p1,** podemos establecer como ecuaciones los condicionamientos siguientes

```
e1 = a * c == 10;
e2 = b * d == 12;
e3 = a * d + b * c == 23;
```

Si formamos un sistema, es aquí donde queda claro que se trata de un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas.

```
sis = {e1, e2, e3}
```

$\{a\,c == 10,\ b\,d == 12,\ b\,c + a\,d == 23\}$

Resolvemos respecto a tres de sus incógnitas, por ejemplo, **a, b,** y **c**, etiquetando como **s1** al conjunto solución

```
s1 = Solve[sis, {a, b, c}]
```

$$\left\{\left\{a \to \frac{8}{d},\ b \to \frac{12}{d},\ c \to \frac{5\,d}{4}\right\},\ \left\{a \to \frac{15}{d},\ b \to \frac{12}{d},\ c \to \frac{2\,d}{3}\right\}\right\}$$

Si observamos la respuesta, los valores de **a, b,** y **c**, están en función de la incógnita **d**. De modo que la solución no es única, ya que podemos atribuir, ocurrentemente, distintos valores a **d**. Todo ello podemos visualizarlo mejor si construimos una tabla.

```
Table[{d, s1}, {d, 1, 5}]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & \left\{\left\{a \to 8,\ b \to 12,\ c \to \frac{5}{4}\right\},\ \left\{a \to 15,\ b \to 12,\ c \to \frac{2}{3}\right\}\right\} \\ 2 & \left\{\left\{a \to 4,\ b \to 6,\ c \to \frac{5}{2}\right\},\ \left\{a \to \frac{15}{2},\ b \to 6,\ c \to \frac{4}{3}\right\}\right\} \\ 3 & \left\{\left\{a \to \frac{8}{3},\ b \to 4,\ c \to \frac{15}{4}\right\},\ \{a \to 5,\ b \to 4,\ c \to 2\}\right\} \\ 4 & \left\{\{a \to 2,\ b \to 3,\ c \to 5\},\ \left\{a \to \frac{15}{4},\ b \to 3,\ c \to \frac{8}{3}\right\}\right\} \\ 5 & \left\{\left\{a \to \frac{8}{5},\ b \to \frac{12}{5},\ c \to \frac{25}{4}\right\},\ \left\{a \to 3,\ b \to \frac{12}{5},\ c \to \frac{10}{3}\right\}\right\} \end{pmatrix}$$

Si tomamos cualquiera de las posibilidades, por ejemplo, la primera y la última, y reemplazamos los valores de **a, b, c** y **d** en el polinomio en su forma factoreada, etiquetado anteriormente como **p1,** y designamos como **p2** y **p3** respectivamente, resulta

```
p2 = p1 /. {d → 1, a → 8, b → 12, c → 5 / 4}
```

$$\left(\frac{5\,x}{4} + 1\right)(8\,x + 12)$$

```
p3 = p1 /. {d → 5, a → 3, b → 12 / 5, c → 10 / 3}
```

$$\left(3\,x + \frac{12}{5}\right)\left(\frac{10\,x}{3} + 5\right)$$

Si ahora procedemos en forma inversa, es decir, desarrollamos cada uno de ellos

```
{p2, p3} // Expand
```

$$\{10\,x^2+23\,x+12,\ 10\,x^2+23\,x+12\}$$

comprobamos que efectivamente, ambas alternativas son válidas, ya que obtenemos nuevamente nuestro polinomio original **p**

```
p
```

$$10\,x^2+23\,x+12$$

Si trabajamos con el *Mathematica* seguramente su proceder por defecto, deberá estar contemplado en algunas de nuestras alternativas enumeradas en la tabla

```
Factor[p]
```

$$(2\,x+3)\,(5\,x+4)$$

El *Mathematica* adopta, de todas las posibilidades, las que corresponden a valores de **a, b, c** y **d** pertenecientes al conjunto de los números enteros.

Si observamos nuestra tabla, verificamos que se trata de la alternativa que resulta de asignar a la incógnita **d** el valor **4,** ya que entonces resulta

4,{a→2,b→3,c→5}

Recordemos nuestro planteo del polinomio **p** en su forma factoreada

```
p1
```

$$(b+a\,x)\,(d+c\,x)$$

corrobora efectivamente que es la opción que maneja el *Mathematica*.

4-6 Factorización: Una estrategia general

Directrices para la factorización

A. Siempre busca en primer lugar un factor común.

B. Considera el número de términos.

Dos términos

Trata de factorizar como una diferencia de dos cuadrados, o como una suma o diferencia de dos cubos.

Tres términos

¿Es un trinomio cuadrado? Si lo es, factorízalo como el cuadrado de un binomio.

Si no, prueba los factores de los términos.

Mas de tres términos

1. Trata de agrupar.

2. Intenta nuevamente las diferencias de cuadrados.

C. Factoriza completamente. Asegúrate de que cada factor restante sea primo.