Módulo 4

Clase 1 - Teoría

Ecuaciones Polinómicas

4-7 Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Una **ecuación de segundo grado** en una variable (o incógnita) **x** es de la forma

$$a x^2 + b x + c = 0,$$

siendo **a, b** y **c** constantes y **a≠ 0.**

Si **a** no fuera distinto de cero, la ecuación sería de **primer grado.**

Ejemplos

$$x^2 - 6x + 5 = 0; \qquad 3x^2 + x - 6 = 0; \qquad 4x^2 - 5 = 0.$$

son ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Las dos últimas ecuaciones se pueden dividir por **3** y **4,** respectivamente, obteniéndose

$$x^2 + \frac{x}{3} - 2 = 0; \qquad x^2 - \frac{5}{4} = 0,$$

siendo en ambos casos el coeficiente de x^2 igual a **1.**

Una **ecuación cuadrática pura** es aquella que carece de término en **x;** por ejemplo,

$$5x^2 - 1 = 0.$$

> RESOLVER UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO $a x^2 + b x + c = 0$ es hallar los valores de **x** que la satisfagan. Estos valores reciben el nombre de **soluciones o raíces** de la ecuación dada.

Ejemplo

$x^2 - 5x + 6 = 0$ se satisface para **x=2** y **x=3**. Por lo tanto, **x=2** y **x=3** son las ***soluciones o raíces*** de la citada ecuación.

4-8 Métodos de resolución de la Ecuaciones de Segundo Grado.

Ecuaciones cuadráticas puras.

Son del tipo $\mathbf{ax^2 + c = 0}$.

Trabajando con ecuaciones equivalentes, tendremos

$$a x^2 = -c \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Ejemplo 1

$$2 x^2 - 18 = 0.$$

Trasponiendo términos $2 x^2 = 18 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad x = \pm \sqrt{9} = \pm 3$

Las soluciones son **x1 = 3** y **x2 = - 3**

Ejemplo 2

$$(x + 3)^2 = 5.$$

Operando $x + 3 = \pm \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad x = -3 \pm \sqrt{5}$

Las soluciones son $\mathbf{x1 = -3 - \sqrt{5}}$ y $\mathbf{x2 = -3 + \sqrt{5}}$

Teorema del factor cero

si **p** y **q** son expresiones algebraicas, entonces

p*q = 0 si y sólo si

p = 0 o bien **q = 0.**

El teorema del factor cero se puede ampliar a cualquier número de expresiones algebraicas, esto es,

p*q*r = 0 si y sólo si **p = 0,** **q = 0** o bien **r = 0.**

Se deduce que si $\mathbf{ax^2 + bx + c}$ se puede escribir como producto de dos polinomios de primer grado, entonces es posible encontrar soluciones igualando a cero cada factor. Esta técnica se llama **método de factorización.**

Solución de una ecuación por factorización

Ejemplo 1

Resuelve la ecuación $3x^2 = 10 - x$.

Para usar el método de factorización, ***es esencial que sólo aparezca el número cero en un miembro de la ecuación***. Por lo tanto, procedemos como sigue

$$3x^2 + x - 10 = 0$$

Utilizaremos el *Mathematica* para factorizar el primer miembro de la ecuación.

```
e1 = 3 x^2 + x - 10 == 0
```

$3x^2 + x - 10 == 0$

Factorizamos el primer miembro de **e1**

```
Factor[e1[[1]]]
```

$(x + 2)(3x - 5)$

Por el **teorema del factor cero**

$$x + 2 = 0, \qquad 3x - 5 = 0$$

despejamos **x** de ambas ecuaciones lineales

$$x = -2, \qquad x = \frac{5}{3}$$

En consecuencia, las soluciones de la ecuación dada son

$$-2 \quad \text{y} \quad \frac{5}{3}.$$

Ejemplo 2

Resuelve la ecuación $x^2 + 16 = 8x$

Nuevamente recordamos que para usar el método de factorización, ***es esencial que sólo aparezca el número cero en un miembro de la ecuación***. Por lo tanto, procedemos como sigue

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

Para factorizar el primer miembro de la ecuación, usamos el *Mathematica*.

```
e2 = x^2 - 8 x + 16 == 0
```

$x^2 - 8x + 16 == 0$

Factorizamos el primer miembro de **e2**

```
Factor[e2[[1]]]
```

$(x - 4)^2$

Recordemos que el cuadrado puede expresarse como

$$(x - 4)(x - 4) = 0$$

Por el **teorema del factor cero**

$$x - 4 = 0, \qquad x - 4 = 0$$

despejamos **x** de ambas ecuaciones lineales

$$x = 4, \quad x = 4.$$

En consecuencia, las soluciones de la ecuación dada son

4 y **4.**

x=4 recibe el nombre de ***raíz doble*** *o r**aíz de multiplicidad 2*** *d*e la ecuación.

Completar el cuadrado

El trinomio $x^2 + 6x + 9$ es el cuadrado de un binomio, pues

```
x^2 + 6 x + 9 == Expand[(x + 3)^2]
```

True

Dados los dos primeros términos de un trinomio (términos cuadrático y lineal en **x**), podemos encontrar el tercer término que hará de él un trinomio cuadrado perfecto.

Este proceso se conoce como **completar cuadrado.**

Este método es de real importancia en el manejo algebraico de CÓNICAS, tratado en Geometría Analítica.

A fin de completar el cuadrado para

$$x^2 + k\,x \quad o \quad x^2 - k\,x,$$

se suma $\left(\frac{k}{2}\right)^2$; esto es, ***se suma el cuadrado de la mitad del coeficiente de "x".***

(1) $\quad x^2 + k\,x + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{k}{2}\right)^2$

(2) $\quad x^2 - k\,x + \left(\frac{k}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2$

Ejemplo 1

Completa la siguiente expresión para que se transforme en el cuadrado de un binomio

$$x^2 + 12\,x$$

¿Qué debemos añadir a $x^2 + 12\,x$ para convertirlo en un trinomio cuadrado?

Tomamos la mitad del coeficiente de **x** (12) y lo elevamos al cuadrado

$$x^2 + 12\,x + \left(\frac{12}{2}\right)^2 = (x + 6)^2$$

Verificamos con el *Mathematica*.

```
x^2 + 12 x + (12 / 2) ^2 == Expand[ (x + 6) ^2]
```

```
True
```

Ejemplo 2

Completa las siguientes expresiones para que se transformen en el cuadrado de un binomio

a) $x^2 + 3\,x$; $\qquad$ b) $x^2 - 3\,x$

¿Qué debemos añadir a $x^2 \pm 3x$ para convertirlo en un trinomio cuadrado?

Tomamos la mitad del coeficiente de **x** (3) y lo elevamos al cuadrado

Observarás que se puede despreciar el signo del coeficiente de **x.**

a) $x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2;$

b) $x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2;$

Verificamos

```
x^2 + 3 x + (3 / 2) ^2 == Expand[ (x + 3 / 2) ^2]
```

True

```
x^2 - 3 x + (3 / 2) ^2 == Expand[ (x - 3 / 2) ^2]
```

True

Solución de una ecuación cuadrática completando cuadrados.

Podemos resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $a x^2 + b x + c = 0$ completando cuadrados

Ejemplo 1

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

ecuación equivalente a

$$x^2 - 5x + 3 - 3 = 0 - 3$$

$$x^2 - 5x = -3$$

a su vez equivalente a

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -3 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -3 + \frac{25}{4}$$

también equivalente a

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \quad \Rightarrow \quad x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{\frac{13}{4}} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son

$$\frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{13}\right) \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{13}\right)$$

Verificamos con el *Mathematica*.

```
e = x^2 - 5 x + 3 == 0
```

$x^2 - 5x + 3 == 0$

```
Solve[e, x]
```

$\left\{\left\{x \to \frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{13}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{13}\right)\right\}\right\}$

En muchos casos, el coeficiente principal de una ecuación cuadrática no es **1**, pero podemos utilizar el principio de la multiplicación para convertirlo en **1.**

Ejemplo 2

Resuelve completando cuadrado $\quad 4x^2 + 12x - 7 = 0$

Multiplicamos ambos miembros de la igualdad por **1/4**, resultando la ecuación equivalente

$$x^2 + 3x - \frac{7}{4} = 0$$

Procedemos como en el ejemplo anterior

$$x^2 + 3x = \frac{7}{4}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + x^2 + 3x = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + x^2 + 3x = \frac{7}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=4 \quad \Rightarrow \quad x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{3}{2}\pm 2$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son

$$x=-\frac{3}{2}-2=-\frac{7}{2} \text{ y } \qquad x=-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}$$

Verificamos con el *Mathematica*.

```
e = 4 x^2 + 12 x - 7 == 0
```

$4x^2+12x-7==0$

```
Solve[e, x]
```

$\left\{\left\{x\to-\frac{7}{2}\right\},\left\{x\to\frac{1}{2}\right\}\right\}$

Fórmula cuadrática

Se puede resolver una ecuación cuadrática (**a≠ 1**)

$$a x^2+b x+c=0$$

teniendo en cuenta el ejemplo anterior.

$$a x^2+b x+c=0$$

Multiplicamos ambos miembros de la igualdad por $\frac{1}{a}$, resultando la ecuación equivalente

$$\frac{a x^2}{a}+\frac{b x}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$$

$$x^2+\frac{b x}{a}+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b x}{a}+\frac{c}{a}-\frac{c}{a}=0-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b x}{a}=-\frac{c}{a}$$

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + x^2 + \frac{bx}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

$$\left(\frac{b}{2a} + x\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(\frac{b}{2a} + x\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{2a} + x = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son

$$x = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \frac{b}{2a} \qquad \text{y} \qquad x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Fórmula cuadrática

Si **a≠0**, las raíces de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

están dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Verificamos con el *Mathematica*.

```
e = a * x^2 + b * x + c == 0
```

$$a x^2 + b x + c == 0$$

```
Solve[e, x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}, \left\{x \to \frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}\right\}\right\}$$

El número $b^2 - 4ac$ bajo el signo del radical de la fórmula cuadrática se llama **discriminante** de la ecuación cuadrática, y suele simbolizarse con la letra mayúscula delta **(Δ).** El discriminante sirve para determinar la **naturaleza de las raíces** de la ecuación, como en la tabla adjunta.

Valor del discriminante $\Delta = b^2 - 4\,ac$	**Naturaleza de las raíces de** $a\,x^2 + b\,x + c = 0$
ValorPositivo	Dos raíces reales *y* diferentes
Cero	Una raíz de multiplicidad 2
Valor negativo	No existe raíz real

Uso de la fórmula cuadrática

Algunas ecuaciones cuadráticas no se pueden resolver mediante la factorización. Sin embargo, la fórmula cuadrática proporciona las soluciones de cualquier ecuación cuadrática.

Ejemplo

Resuelve la ecuación $\quad 4\,x^2 + x - 3 = 0$

Sean **a = 4, b = 1** y **c = - 3**

en la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 * 4 * (-3)}}{2 * 4}$$

$$x = \frac{1}{8}\left(-1 \pm \sqrt{49}\right)$$

$$x = \frac{1}{8}(-1 \pm 7)$$

Por lo tanto las soluciones son

$$x1 = \frac{1}{8}(-1-7) = -1 \qquad \text{y} \qquad x2 = \frac{1}{8}(-1+7) = \frac{3}{4}$$

Este ejemplo acepta la factorización

Verificación con el *Mathematica*.

Etiquetamos como **e** a la ecuación

```
e = 4 x^2 + x - 3 == 0
```

$4\,x^2 + x - 3 == 0$

Resolvemos respecto a la variable **x.**

```
Solve[e, x]
```

$$\left\{\{x \to -1\}, \left\{x \to \frac{3}{4}\right\}\right\}$$

Ejemplo

Resuelve la ecuación **2 x (3 - x) = 3**

Para aplicar la fórmula cuadrática debemos escribir la ecuación en la forma

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0$$

Inténtalo

Nosotros aplicaremos directamente el *Mathematica*.

```
e = 2 x (3 - x) == 3
```

$$2\,(3 - x)\,x == 3$$

```
Solve[e, x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{2}\left(3 + \sqrt{3}\right)\right\}\right\}$$

Aproximación de soluciones

Para encontrar **aproximaciones racionales a las soluciones exactas** dadas por la fórmula se puede utilizar una **calculadora o computador.**

Por defecto, con el *Mathematica* resulta

```
Solve[e, x] // N
```

$\{\{x \to 0.633975\}, \{x \to 2.36603\}\}$

Suma y productos de soluciones

Para la ecuación	$a\,x^2 + b\,x + c = 0$,
la suma de las raíces es	**- b/a,**
y el producto de las raíces es	**c /a.**

Observa que si expresamos $a\,x^2 + b\,x + c = 0$

en la forma equivalente $x^2 + \frac{b\,x}{a} + \frac{c}{a} = 0$

entonces la suma de las raíces es el **inverso aditivo** del coeficiente del término en **x,** y el producto de las raíces es el **término constante.**

Justificación con el *Mathematica*.

Planteamos y etiquetamos como **e** una ecuación general de segundo grado en una variable

```
e = a x^2 + b x + c == 0
```

$a\,x^2 + b\,x + c == 0$

Recordemos que el *Mathematica* es un soft que tiene la particularidad de operar simbólicamente, de modo que nos permite encontrar las raíces de la ecuación, sin la necesidad de conocer los coeficientes **a, b** y **c.**

Resolvemos respecto a la variable **x.**

```
s = Solve[e, x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\right\}, \left\{x \to \frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c} - b}{2\,a}\right\}\right\}$$

Etiquetamos como **x1** y **x2** a las raíces de la ecuación

```
x1 = s[[1, 1, 2]]
```

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

```
x2 = s[[2, 1, 2]]
```

$$\frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}$$

Si sumamos las raíces, resulta

```
x1 + x2
```

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}-b}{2a}$$

Simplificamos

```
x1 + x2 // Simplify
```

$$-\frac{b}{a}$$

Se verifica la primera propiedad de las raíces de una ecuación de segundo grado en una variable.

x1 + x2 = - b/a

Trabajemos con la segunda condición, para lo cual multiplicamos las raíces

```
x1 * x2
```

$$\frac{\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(\sqrt{b^2-4ac}-b\right)}{4a^2}$$

Operamos observando que el numerador es una diferencia de cuadrados, y simplificamos

```
x1 * x2 // Simplify
```

$$\frac{c}{a}$$

Se verifica la segunda propiedad de las raíces de una ecuación de segundo grado en una variable.

x1 * x2 = c/a

Podemos encontrar la **suma** y el **producto** de las raíces sin resolver la ecuación.

Ejemplo 1

Encuentra la suma y el producto de las raíces de

$$2x^2 = 6x + 5$$

Sean **x1** y **x2** las raíces.

Como $2x^2 - 6x - 5 = 0$,

tenemos que **a = 2**, **b = - 6**, y **c = - 5**

$$x1 + x2 = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-6}{2}\right) = 3; \qquad x1 * x2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{2}$$

Ejemplo 2

Encuentra una ecuación cuadrática para la que la suma de las raíces sea $-\frac{4}{5}$, y el producto de las raíces sea $\frac{2}{3}$.

Como lo que se pretende es encontrar una ecuación cuadrática, planteamos la más general, o sea

```
e = a * x^2 + b * x + c == 0
```

$$a x^2 + b x + c == 0$$

Nuestro desafío es determinar los valores de **a**, **b** y **c** .

De acuerdo a la lectura del problema, y teniendo en cuenta las propiedades de las raíces, suma y producto de las mismas, pueden plantearse las siguientes ecuaciones, etiquetadas como **e1** y **e2** respectivamente, para, posteriormente conformar un sistema.

```
e1 = -b / a == -4 / 5;
e2 = c / a == 2 / 3;
```

etiquetamos al sistema como **sis.**

```
sis = {e1, e2}
```

$$\left\{-\frac{b}{a} == -\frac{4}{5}, \frac{c}{a} == \frac{2}{3}\right\}$$

Observemos que se trata de un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, de modo, que de tener solución (compatible), el sistema es indeterminado (podemos encontrar tantas soluciones como nos propongamos).

Podemos resolver respecto a dos de los valores incógnitas, por ejemplo, **b** y **c**

```
s = Solve[sis, {b, c}]
```

$$\left\{\left\{b \to \frac{4\,a}{5}, c \to \frac{2\,a}{3}\right\}\right\}$$

Los valores de **b** y **c** dependen de los valores que se le asignen a **a,** de modo que una de las soluciones resulta, cuando al valor de **a**, le asignamos un valor determinado, por ejemplo **1.**

```
s1 = s /. a -> 1
```

$$\left\{\left\{b \to \frac{4}{5}, c \to \frac{2}{3}\right\}\right\}$$

Si sustituimos en la ecuación **e** estos valores, resulta la ecuación

```
e /. s1 /. a -> 1
```

$$\left\{x^2 + \frac{4\,x}{5} + \frac{2}{3} == 0\right\}$$

que, si la etiquetamos como **e1**

$$\mathbf{e1} = x^2 + \frac{4x}{5} + \frac{2}{3} == 0$$

$$x^2 + \frac{4x}{5} + \frac{2}{3} == 0$$

y la resolvemos respecto a la variable **x**

```
s2 = Solve[e1, x]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{15}\left(-6 - i\sqrt{114}\right)\right\}, \left\{x \to \frac{1}{15}\left(-6 + i\sqrt{114}\right)\right\}\right\}$$

resultan dos raíces, que etiquetamos como **x1** y **x2** respectivamente

```
x1 = s2[[1, 1, 2]]
```

$$\frac{1}{15}\left(-6 - i\sqrt{114}\right)$$

```
x2 = s2[[2, 1, 2]]
```

$$\frac{1}{15}\left(-6 + i\sqrt{114}\right)$$

A los efectos de verificar si cumplen con el requerimiento del problema, procedemos a su suma y producto

```
x1 + x2 // Simplify
```

$$-\frac{4}{5}$$

```
x1 * x2 // Simplify
```

$$\frac{2}{3}$$

Resultados que concuerdan con lo establecido en el problema.

Otra alternativa más directa

En la forma general

$$a x^2 + b x + c = 0$$

dividimos ambos miembros por **a**, que para que la ecuación sea cuadrática en la variable **x**, necesariamente debe ser distinto de cero.

$$x^2 + \frac{b x}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

También podemos escribirla como

$$x^2 - \left(-\frac{b x}{a}\right) + \frac{c}{a} = 0$$

En el problema propuesto recordemos que la suma de la raíces, **x1 + x2 = - b / a ,** es igual a **- 4 / 5** , y su producto, **x1*x2 = c / a**, vale **2 / 3**; de modo que podemos plantear la ecuación, que etiquetaremos como **e3**

```
e3 = x^2 + 4 / 5 x + 2 / 3 == 0
```

$$x^2 + \frac{4 x}{5} + \frac{2}{3} == 0$$

Ecuación que es igual a la obtenida **e1.**

Escritura de la ecuación a partir de sus raíces

Podemos utilizar el principio de la igualdad de un producto con **0 (teorema del factor cero)** para escribir una ecuación cuadrática cuyas soluciones sean conocidas.

Ejemplo

Escribe una ecuación cuadrática cuyas raíces sean **3** y $\mathbf{\frac{2}{5}}$.

$$x = 3 \qquad \text{o} \qquad x = -\frac{2}{5}$$

como ecuaciones equivalentes, podemos escribir

$$x - 3 = 0 \qquad \text{o} \qquad x + \frac{2}{5} = 0$$

Por el teorema del factor cero

$$(x - 3)\left(x + \frac{2}{5}\right) = 0$$

aplicamos la propiedad distributiva

$$x^2 + \frac{2x}{5} - 3x - \frac{6}{5} = 0$$

reducimos términos semejantes

$$x^2 - \frac{13x}{5} - \frac{6}{5} = 0$$

multiplicamos ambos miembros de la ecuación por **5**

$$5x^2 - 13x - 6 = 0$$

Verificamos con el *Mathematica*.

```
e = 5 x^2 - 13 x - 6 == 0
```

$$5x^2 - 13x - 6 == 0$$

Resolvemos respecto a la variable **x.**

```
Solve[e, x]
```

$$\left\{\left\{x \to -\frac{2}{5}\right\}, \{x \to 3\}\right\}$$

Cuando las expresiones incluyen radicales, a menudo es más fácil utilizar las propiedades de la suma y del producto.

Ejemplo

Encuentra la ecuación cuadrática cuyas raíces son

$$2 + \sqrt{5} \qquad \text{y} \qquad 2 - \sqrt{5}.$$

Etiquetemos a las raíces como

$$x1 = 2 + \sqrt{5} \quad \text{y} \quad x2 = 2 - \sqrt{5}$$

Por las propiedades de la suma y el producto de las raíces de una ecuación cuadrática, resulta:

$$x1 + x2 = (2 + \sqrt{5}) + (2 - \sqrt{5})$$

$$= 4$$

$$x1 * x2 = (2 + \sqrt{5}) * (2 - \sqrt{5})$$

$$= 2^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2$$

$$= 4 - 5$$

$$= -1$$

Recordando que la ecuación cuadrática la podemos escribir como:

$$x^2 - \left(-\frac{b\,x}{a}\right) + \frac{c}{a} = 0$$

simplemente reemplazando obtenemos la ecuación requerida.

$$x^2 - 4\,x - 1 = 0$$

Verificamos con el *Mathematica*.

```
e = x^2 - 4 x - 1 == 0
```

$x^2 - 4\,x - 1 == 0$

Resolvemos respecto a la variable **x.**

```
Solve[e, x]
```

$\{\{x \to 2 - \sqrt{5}\}, \{x \to 2 + \sqrt{5}\}\}$

Conjunto solución que coincide con la propuesta del problema.