Seminario Universitario - 2025

FACULTAD REGIONAL SAN RAFAEL

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Ecuaciones Algebraicas

Soporte Teórico

UNA ECUACIÓN es una igualdad entre dos expresiones que se denominan miembros de la misma.

Una ecuación que sólo se verifique para ciertos valores de las letras (o incógnitas) recibe el nombre de ***ecuación condicional*** o, simplemente, ***ecuación.***

Una ecuación que se verifique para todos los valores permitidos de sus letras (o incógnitas) recibe el nombre de ***identidad***. Valores permitidos son aquellos para los que ***están definidos*** los miembros de la ecuación.

Ejemplo 1

$$x+2 = 5$$

se verifica sólo para **x=3.**

es una ecuación condicional o simplemente ecuación.

Con el *Mathematica,* teniendo en cuenta que el signo *igual* para el *Mathematica* es **==**, y etiquetando como **e1** a la ecuación

```
e1 = x + 2 == 5
```

$x+2=5$

Con el comando **Solve** resolvemos

```
Solve[e1, x]
```

$\{\{x \to 3\}\}$

Ejemplo 2

$$x^2 - 1 = (x+1)\ (x-1)$$

se verifica para todos los valores de la incógnita **x**

es una identidad.

Con el *Mathematica*

```
e2 = x^2 - 1 == (x + 1) (x - 1)
```

$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$

```
Solve[e2, x]
```

$\{\{\}\}$

LAS SOLUCIONES de una ecuación son los valores de las incógnitas que transforman la ecuación en una *identidad*, es decir, se igualan ambos miembros.

Las soluciones satisfacen a la ecuación.

Resolver una ecuación es hallar todas sus soluciones.

Ejemplo 3

$$5\ x + 1 = -\ 9$$

x = - 2 es una **raíz**, o solución de la ecuación

ya que sustituyendo **x = - 2**, en la ecuación, se obtiene

5 (-2) + 1 = - 9,

es decir, los dos miembros se hacen iguales y la ecuación se convierte en una **identidad.**

Con el *Mathematica*

Planteamos la ecuación que etiquetamos como **e3**

```
e3 = 5 x + 1 == -9
```

$5 x + 1 == -9$

Resolvemos respecto a la variable o incógnita **x**

```
s = Solve[e3, x]
```

$\{\{x \to -2\}\}$

Reemplazamos la solución **x=-2** en la ecuación **e3**

```
e3 /. s
```

{True}

Operaciones aplicadas en la transformación de ecuaciones

a) Si se suman miembro a miembro varias igualdades, se obtiene otra igualdad.

Ejemplo 4

En la igualdad **x - 5 = 3,**

podemos sumar **5** a ambos miembros,

con lo que resulta **x - 5 + 5 = 3 + 5** simplificando **x = 8**

Con el *Mathematica* etiquetando como **e4** a la ecuación

```
e4 = x - 5 == 3
```

$x - 5 == 3$

```
Solve[e4, x]
```

$\{\{x \to 8\}\}$

Verificación

```
e4 /. x → 8
```

True

b) Si se restan miembro a miembro varias igualdades se obtiene otra igualdad.

Ejemplo 5

En la igualdad **x + 4 = 6**

podemos restar **4** a ambos miembros,

con lo que se obtiene **x + 4 - 4 = 6 - 4**

o sea **x = 2**

NOTA. Como consecuencia de a) y b) se deduce que para ***trasponer*** un término de una ecuación de un miembro a otro no hay más que cambiarlo de signo.

Ejemplo 6

Si **3 x - 5 = 2 x + 2,**

tendremos **3 x - 2 x = 2 + 5,**

o bien **x = 7**

c) Si se multiplican miembro a miembro varias igualdades se obtiene otra igualdad.

Ejemplo 7

Si se multiplican por **3** los dos miembros de la igualdad

$$\frac{1}{3}x - 2 = 4$$

se obtiene $$3*(\frac{1}{3}x - 2) = 3*4$$

o sea $$x - 6 = 12$$

por las propiedades anteriores $$x = 12 + 6$$

$$x = 18$$

Con el *Mathematica*

```
e7 = 1/3 x - 2 == 4
```

$$\frac{x}{3} - 2 = 4$$

```
Solve[e7, x]
```

$\{\{x \to 18\}\}$

Verificación

```
e7 /. x → 18
```

True

d) Si se dividen miembro a miembro varias igualdades se obtiene otra igualdad, ***siempre que no se divida por cero.***

Ejemplo 8

Si se dividen los dos miembros de la igualdad $-5\,x = 25$

por **(-5)**, se obtiene $\frac{-5\,x}{-5} = \frac{25}{-5}$

o sea $x = -5$

e) Si se elevan al mismo exponente los dos miembros de una igualdad se obtiene otra igualdad.

Ejemplo 9

Si $T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{L}{g}}$,

tendremos $T^2 = \left(2\,\pi\,\sqrt{\frac{L}{g}}\right)^2$

$T^2 = 4\,\pi^2\left(\sqrt{\frac{L}{g}}\right)^2$

f) Si se extrae la raíz enésima de los dos miembros de una igualdad se obtiene otra igualdad.

Ejemplo 10

Si $r^3 = \frac{3\,V}{4\,\pi}$,

resulta $r = \sqrt[3]{\frac{3\,V}{4\,\pi}}$

g) Los recíprocos de los miembros de una igualdad dan lugar a otra igualdad, siempre que no tenga lugar la ***división por cero.***

Ejemplo 11

Si $\frac{1}{x} = \frac{1}{4}$,

tendremos $x = 4$

Ecuaciones Equivalentes

Dos o más ecuaciones son equivalentes si sus ***soluciones*** son las mismas.

Ejemplos 12

a) Las ecuaciones $\mathbf{x - 2 = 0}$ y $\mathbf{2\,x = 4}$

tienen la solución común $\mathbf{x = 2}$,

por lo tanto, son **equivalentes.**

b) Sin embargo, las ecuaciones $\mathbf{x - 2 = 0}$ y $\mathbf{x^2 - 4 = 0}$

no son equivalentes, ya que la segunda ecuación tiene además, la solución

$$\mathbf{x = -2}$$

Las operaciones anteriores aplicadas a la transformación de ecuaciones no dan lugar, en todos los casos, a **ecuaciones equivalentes** a las primeras. La aplicación de estas operaciones puede conducir a **ecuaciones derivadas** que tengan distintas soluciones que la ecuación original.

Si se llega a una ecuación con más soluciones que la original, las soluciones nuevas se denominan ***extrañas*** y la ecuación derivada se llama ***redundante*** con respecto a la original. Si se llega a una ecuación con menos soluciones que la original, la ecuación derivada recibe el nombre de ***defectiva*** con respecto a la original.

Las operaciones a) y b) siempre conducen a **ecuaciones equivalentes**. Sin embargo, c) y e) pueden dar lugar a **ecuaciones redundantes** y soluciones extrañas y d) y f) a **ecuaciones defectivas.**

Ecuaciones de segundo grado con una variable

Modelo

La forma más general de una ecuación de segundo grado con un una incógnita o variable es del tipo

$$a * t^2 + b * t + c = 0 \qquad (1)$$

donde **a, b** y **c** son constantes y **t** es la ***variable o incógnita***

Con el *Mathematica,* etiquetando como **e1**, resulta

```
Clear[e1]
```

```
e1 = a * t^2 + b * t + c == 0
```

$$a t^2 + b t + c = 0$$

Solución

Teniendo en cuenta las *propiedades de ecuaciones equivalentes,* debemos llegar a la ecuación equivalente:

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 a c}}{2 a} \qquad \textbf{(2)}$$

Con el *Mathematica*

```
Solve[e1, t]
```

$$\left\{\left\{t \to \frac{-\sqrt{b^2 - 4 a c} - b}{2 a}\right\}, \left\{t \to \frac{\sqrt{b^2 - 4 a c} - b}{2 a}\right\}\right\}$$

■ Operaciones aplicadas en la transformación de ecuaciones

Veamos como obtenemos **(2)** de **(1)**

1) Si se restan miembro a miembro varias igualdades se obtiene otra igualdad; restamos “**-c**” a ambos miembros, etiquetando como **e2** a la ecuación equivalente

```
e2 = a * t^2 + b * t + c - c == 0 - c
```

$$a t^2 + b t = -c$$

2) Si se dividen miembro a miembro varias igualdades se obtiene otra igualdad, siempre que no se divida por cero; dividimos ambos miembros por “**a**” siendo “**a**” distinto de cero, caso contrario no sería una *ecuación de*

2do. grado, etiquetando como **e3** a la ecuación equivalente.

```
e3 = (b t + a t^2) / a == -c / a
```

$$\frac{a\,t^2 + b\,t}{a} = -\frac{c}{a}$$

Descomponemos denominadores en el primer miembro y etiquetamos como **e5**

```
e5 = ExpandAll[e3[[1]]] == e3[[2]]
```

$$\frac{b\,t}{a} + t^2 = -\frac{c}{a}$$

Sumamos a ambos miembros " $\left(\frac{b}{2.\,a}\right)^2$", y etiquetamos como **e6**

$$\mathbf{e6} = t^2 + \frac{b\,t}{a} + (b\,/\,(2 * a))^2 == -\frac{c}{a} + (b\,/\,(2 * a))^2$$

$$\frac{b^2}{4\,a^2} + \frac{b\,t}{a} + t^2 = \frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{c}{a}$$

Sacamos común denominador y factoreamos el numerador del primer miembro; sacamos común denominador en el segundo miembro; etiquetamos como **e7**

```
e7 = Factor[e6[[1]]] == Simplify[e6[[2]]]
```

$$\frac{(2\,a\,t + b)^2}{4\,a^2} = \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}$$

Multiplicamos ambos miembros por "$\mathbf{4\,a^2}$" y etiquetamos como **e8**

$$\mathbf{e8} = \frac{(b + 2\,a\,t)^2}{4\,a^2} * 4\,a^2 == \frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2} * 4\,a^2$$

$$(2\,a\,t + b)^2 = b^2 - 4\,a\,c$$

Si se extrae la raíz enésima de los dos miembros de una igualdad se obtiene otra igualdad; en este caso, raíz cuadrada; etiquetamos como **e9**

```
e9 = (b + 2 a t) == ± √(b^2 - 4 a c)
```

$$2\,a\,t + b = \pm\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}$$

restamos "**b**" a ambos miembros y etiquetamos como **e10**

```
e10 = b + 2 a t - b == ± √(b^2 - 4 a c) - b
```

$$2\,a\,t = \pm\sqrt{b^2 - 4\,a\,c} - b$$

Dividimos ambos miembros por "**2.a**" y etiquetamos como **e11**

```
e11 = (b + 2 a t - b) / (2 * a) == (-b ± √(b^2 - 4 a c)) / (2 * a)
```

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$$

Propiedades de las raíces o soluciones de la ecuación de 2do. grado con una incógnita

Si llamamos como **t1** y **t2** a las raíces o soluciones de la ecuación de 2do. grado **(1)**

```
t1 = (-b + √(b^2 - 4 a c)) / (2 a);
t2 = (-b - √(b^2 - 4 a c)) / (2 a);
```

y sumamos ambas raíces, resulta

```
t1 + t2 // Simplify
```

$$-\frac{b}{a}$$

y si ahora las multiplicamos

```
t1 * t2 // Simplify
```

$$\frac{c}{a}$$