Seminario Universitario 2025

Clase 1 - Teoría

MODELOS LINEALES - Sistemas de ecuaciones con dos variables

1. Introducción

Un ***sistema de dos o más ecuaciones*** que contienen las mismas variables se llama ***sistema de ecuaciones.***

El ***conjunto solución*** de un sistema se compone de todos los pares ordenados que hacen ciertas a todas las ecuaciones del sistema.

Ejemplo

La **solución** del siguiente sistema es el **par ordenado {4,7}**

x + y = 11

3 x - y = 5

Verificación

Reemplazamos los valores de **x** e **y** en el sistema

4 + 7 = 11

3*4 - 7 = 5

Si un sistema sólo tiene una solución, se dice de ésta que es la ***única solución.***

Con el *Mathematica*

Etiquetamos como **e1** y **e2, r**espectivamente, a cada una de las ecuaciones que conforman al sistema

```
e1 = x + y == 11;
e2 = 3 x - y == 5;
```

Como **sistema** identificamos al conjunto de ambas ecuaciones **{e1,e2}**

```
sistema = {e1, e2}
```

```
{x + y == 11, 3 x - y == 5}
```

Resolvemos respecto a las variables **{x,y}**, que simbolizan a las variables (incógnitas) del sistema

```
Solve[sistema, {x, y}]
```

```
{{x → 4, y → 7}}
```

Efectivamente, los valores de **x** e **y** coinciden con los propuestos

Verificación con el Mathematica

```
sistema /. {x → 4, y → 7}
```

```
{True, True}
```

Interpretación Gráfica

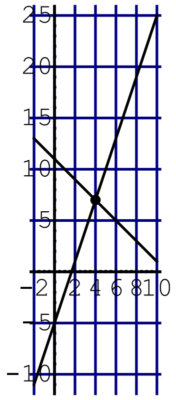
> Una forma de encontrar soluciones de un sistema es representar gráficamente a las ecuaciones y buscar puntos de intersección.

Como las ecuaciones de nuestro sistema están expresadas en forma implícita, recurrimos al archivo **`ImplicitPlot`** que figura en el paquete **"Graphics"**

```
Needs["Graphics`ImplicitPlot`"]
```

Procedemos a graficar, en primera instancia, en un intervalo de la variable **x** tentativo, por ejemplo **{x,-2,10}**

```
ImplicitPlot[sistema, {x, -2, 10},
        Prolog → {PointSize[.08], Point[{4, 7}]},
        GridLines → Automatic];
```



Las gráficas de ***dos ecuaciones lineales*** pueden ser dos rectas que se ***intersecan*** (solución única). También pueden ser dos rectas ***paralelas*** (no hay solución) o una ***misma recta*** (una cantidad de soluciones no determinadas).

2. Solución de Sistemas de Ecuaciones.

Es posible que la representación gráfica no sea un **método eficaz y preciso** para resolver un sistema de ecuaciones de dos variables; aunque debemos reconocer que es **orientativo**. Intentaremos otros métodos más **eficientes.**

Método de Sustitución

El método de sustitución es una **técnica** muy útil para resolver sistemas en los que una variable tiene coeficiente igual a 1 (no necesariamente).

Por ejemplo, supongamos el siguiente sistema

(1) $x + y = 11$

(2) $3x - y = 5$

Despejamos una de las incógnitas, de cualquiera de las dos ecuaciones; por ejemplo **y** de la primera (1); expresado en un vocabulario más matemático: resolvemos la primera ecuación para **y**, pues el coeficiente del término correspondiente es **1**

(3) $y = 11 - x$

ahora podemos sustituir (origen del nombre del método) **11-x** en vez de **y** en la segunda ecuación, o sea sustituimos (3) en (2):

(2) $3x - y = 5$

(4) $3x - (11 - x) = 5$

resulta **una ecuación con una variable.**

Aquí está la importancia del método de sustitución. Como en todos los problemas que se presentan en Ingeniería, debemos siempre intentar transformar lo ***complicado*** en algo ***más simple***, y preferentemente que tenga ***antecedentes de haberlo resuelto***.

> En nuestro problema, hemos transformado un ***sistema*** de dos ecuaciones con dos variables, en ***una ecuación*** con una variable.

En (4) reducimos términos semejantes

$$3x - 11 + x = 5$$

$$4x = 5 + 11$$

$$x = 16/4$$

$$x = 4$$

Podemos ahora, sustituir **4** en vez de **x** en **(3)** y resolver para **y**

$$(3) \qquad y = 11 - x$$

$$y = 11 - 4$$

$$y = 7$$

> El resultado es el par ordenado **{4, 7}.**
>
> Este par ordenado satisface ambas ecuaciones, de modo que es la **SOLUCIÓN DEL SISTEMA.**

Con el *Mathematica*

Recordemos nuestro sistema

```
sistema
```

```
{x + y == 11, 3 x - y == 5}
```

Resolvemos la primera ecuación **e1** para la variable **y**

```
s1 = Solve[e1, y]
```

```
{{y → 11 - x}}
```

identificamos la segunda parte de **s1**

```
s1[[1, 1, 2]]
```

```
11 - x
```

sustituimos esta expresión en la segunda ecuación **e2**, etiquetando como **e21** a la nueva ecuación en la variable **x**

```
e21 = e2 /. y → s1[[1, 1, 2]]
```

```
4 x - 11 == 5
```

resolvemos para la variable **x**

```
s2 = Solve[e21, x]
```

```
{{x → 4}}
```

identificamos la segunda parte de **s2**

```
s2[[1, 1, 2]]
```

```
4
```

sustituimos en la primera ecuación **e1**, etiquetando como **e11** a la nueva ecuación en la variable **y**

```
e11 = e1 /. x → s2[[1, 1, 2]]
```

```
y + 4 == 11
```

resolvemos para la variable **y**

```
Solve[e11, y]
```

```
{{y → 7}}
```

Hemos creado un ***algoritmo*** para resolver problemas de SISTEMA DE ECUACIONES CON DOS VARIABLES; paso mencionado cuando establecimos pautas a tener en cuenta en la solución de problemas de Ingeniería.

Combinaciones Lineales - Método de Eliminación

Cuando todas las variables tienen coeficientes distintos de 1, podemos utilizar las propiedades de adición y multiplicación para encontrar una combinación de las ecuaciones lineales que elimine una variable.

A este método se lo llama **MÉTODO DE COMBINACIONES LINEALES.**

Ejemplo 1

Utiliza combinaciones lineales para resolver el siguiente sistema.

(1) $3x - 4y = -1$

(2) $-3x + 2y = 5$

La primera ecuación (1) dice que **3x-4y** y **-1** son **expresiones equivalentes**. Podemos utilizar la **propiedad aditiva** para sumar la misma cantidad a ambos miembros de la segunda ecuación (2).

$$-3x + 2y + (3x - 4y) = 5 + (-1)$$

Cuando hacemos esto, en realidad hemos sumado un múltiplo de la primera ecuación a un múltiplo de la segunda ecuación. En general es más fácil sumar ecuaciones agrupándolas en una columna.

(1) $3x - 4y = -1$

(2) $-3x + 2y = 5$

______________________ sumando

$$-2y = 4$$

$$y = -2$$

Después, sustituimos **-2** en vez de **y** en cualquiera de las ecuaciones originales. Por ejemplo en (1)

$$3x - 4(-2) = -1$$

$$3x + 8 = -1$$

$$3x = -9$$

$$x = -3$$

Una sustitución mostrará que **{-3,-2}** satisface ambas ecuaciones. La **solución del sistema** es **{-3,-2}.**

En este método se trata de obtener una ecuación con una sola variable, o ***eliminar*** una de las variables, por esto también se lo conoce como **MÉTODO DE ELIMINACIÓN (reducción por suma o resta).**

Observa que un término de una ecuación **(3x)** y un término de la otra **(-3x)** eran **inversos aditivos** entre sí, por lo que su suma era **0**. Esto nos permitió eliminar la variable **x.**

Para que dos términos sean ***inversos aditivos*** uno del otro, quizás sea necesario ***multiplicar*** una ecuación por una *constante.*

Ejemplo 2

Utiliza combinaciones lineales para resolver el siguiente sistema.

(1) $3x + 3y = 15$

(2) $2x + 6y = 22$

Si sumamos las ecuaciones, **no se eliminará** ninguna variable. No obstante, podríamos eliminar la variable **y** si el término **3y** de la primera ecuación (1) fuese **-6y.** Por consiguiente, multiplicamos ambos miembros de la primera ecuación por **-2** y después sumamos.

(1)*(-2)	(-2)*(3 x + 3 y) = -2*(15)	→	-6 x - 6 y = -30
(2)	2 x + 6 y = 22	→	2 x + 6 y = 22

______________________ sumamos

- 4 x = -8

x = 2

Después, sustituye **2** en vez de **x** en cualquiera de las ecuaciones originales, por ejemplo en (2).

(2) 2 x + 6 y = 22

2*(2) + 6 y = 22

4 + 6 y = 22

6 y = 18

y = 3

Una sustitución mostrará que **{2,3}** satisface ambas ecuaciones. **La solución del sistema es {2,3}.**

> A menudo necesitamos utilizar combinaciones lineales de ***ambas ecuaciones*** a fin de hacer que dos términos sean inversos aditivos uno del otro.

Ejemplo 3

Utiliza combinaciones lineales para resolver el siguiente sistema.

(1) 5 x + 4 y = 11

(2) 3 x - 5 y = -23

Pasos necesarios para resolver problemas por medio de combinaciones lineales.

1. Escribe ambas ecuaciones en la forma **A x + B y = C.**

2. Elimina todos los decimales y todas las fracciones.

3. Elige una variable para eliminarla.

4. Haz que los términos de la variable seleccionada sean inversos aditivos, multiplicando una o ambas ecuaciones por algún número.

5. Elimina la variable mediante la suma de las ecuaciones.

6. Sustituye a fin de resolver para la otra variable.

3. Solución de Problemas: Empleo de un sistema de dos ecuaciones como modelos.

Problema 1

Una solución A contiene 2% de alcohol y otra solución B 6% de alcohol. El propietario de una estación de servicio quiere mezclar las dos soluciones para obtener 60 litros de una solución que contenga 3.2% de alcohol. ¿Cuántos litros de cada solución necesita utilizar el propietario?

ENTIENDE el problema

Pregunta: ¿Cuántos litros de cada solución se necesitan

para que la mezcla tenga un 3.2% de alcohol?

Datos: La solución A tiene 2% de alcohol.

La solución B tiene 6% de alcohol.

Se necesitan 60 litros de la mezcla.

Elabora y lleva a cabo un **PLAN**

Organiza la información en una ***tabla.***

	Cantidad de la solución	**Porcentaje de alcohol**	**Cantidad de alcohol en la solución**
A	**x litros**	**2%**	**2% x ó 0.02 x**
B	**y litros**	**6%**	**6% y ó 0.06 y**
Mezcla	**60 litros**	**3.2%**	**0.032*60 ó 1.92**

litros

Modelación

Si sumamos **x** e **y** en la primera columna, obtenemos **60**, el volumen total de la solución. Esto nos proporciona una ecuación, **(1) x + y = 60.**

En cada caso multiplicamos la cantidad por el porcentaje de alcohol para encontrar la cantidad de alcohol en cada solución y en la mezcla. Si sumamos las cantidades en la cuarta columna, obtenemos **1.92**

Esto nos proporciona una segunda ecuación, **(2) 0.02 x + 0,06 y = 1.92.**

Ahora tenemos un sistema de ecuaciones.

(1) x + y = 60.

(2) 0.02 x + 0,06 y = 1.92.

A los efectos de trabajar más cómodos, eliminamos los decimales de la segunda .ecuación.

(1) x + y = 60. → **x + y = 60**

(2) 100*(0.02 x + 0,06 y) = 100*(1.92). → **2 x + 6 y = 192**

Con el *Mathematica*

Etiquetamos las ecuaciones **(1)** y **(2)** como **e1** y **e2** respectivamente.

```
e1 = x + y == 60;
e2 = 2 x + 6 y == 192;
```

Identificamos como **sis** al sistema conformado por las ecuaciones **e1** y **e2.**

```
sis = {e1, e2}
```

$\{x + y == 60,\ 2\,x + 6\,y == 192\}$

Resolvemos para las variables **x** e **y**

```
Solve[sis, {x, y}]
```

$\{\{x \to 42,\ y \to 18\}\}$

La **solución** del sistema es **{42,18}**

Presentación clara de la respuesta

Comprobación

Número total de litros de la mezcla

x litros + y litros = 42 litros + 18 litros = 60 litros.

Cantidad total del alcohol

2%*42 litros + 6%*18 litros = 0.02*42 litros + 0.06*18 litros = 1.92 litros

Porcentaje de alcohol en la mezcla

1.92 / 60 = 0.032, ó 3.2%

El propietario debería utilizar 42 litros de la solución al 2% y 18 litros de la solución al 6%.

Esto es razonable pues se necesita más de la **solución A** que de la **solución B.** (3.2% es más próximo a 2% que a 6%).

Sistemas de ecuaciones de tres variables

4. Solución de Sistemas de Ecuaciones de tres variables.

Una solución de ***una ecuación*** lineal de tres variables es una ***terna ordenada*** **(x,y,z)** que la hace cierta.

Por ejemplo, **(5,-4,3)** es una solución de la ecuación

$$x + y + z = 4$$

Una solución de un ***sistema de ecuaciones*** de tres variables es una ***terna ordenada*** **(x,y,z)** que hace ciertas a ***todas*** las ecuaciones del sistema.

Ejemplo

Podemos mostrar que la **terna (2,-1,3)** es **solución** del siguiente sistema, si sustituimos en las tres ecuaciones los valores de **x** por **2, y** por **-1** y **z** por **3.**

(1) $x + y + z = 4;$

(2) $x - 2y - z = 1;$

(3) 2 x - y - 2 z = -1;

5. Método Gráfico

La ***gráfica*** de una ecuación lineal en dos variables es ***una línea recta***. De modo que si un sistema de ecuaciones de dos variables tiene ***solución única****,* se trata de un ***punto común*** a las dos rectas que representan al sistema.

La gráfica de una ecuación lineal con tres variables es un ***plano***. De este modo, si un sistema de ecuaciones de tres variables tiene una ***solución única***, se trata de un ***punto común*** a todos los planos.

Con el *Mathematica*

Etiquetamos a las ecuaciones como **e1, e2** y **e3** respectivamente

```
e1 = x + y + z == 4;
e2 = x - 2 y - z == 1;
e3 = 2 x - y - 2 z == -1;
```

Explicitamos en la variable z de cada una de las ecuaciones y las identificamos como **p1[x,y]**, **p2[x,y]** y **p3[x,y]** respectivamente

```
s1 = Solve[e1, z]
```

$\{\{z \to -x - y + 4\}\}$

```
p1[x_, y_] = s1[[1, 1, 2]]
```

$-x - y + 4$

```
s2 = Solve[e2, z]
```

$\{\{z \to x - 2\, y - 1\}\}$

```
p2[x_, y_] = s2[[1, 1, 2]]
```

$x - 2y - 1$

```
s3 = Solve[e3, z]
```

$\left\{\left\{z \to \frac{1}{2}(2x - y + 1)\right\}\right\}$

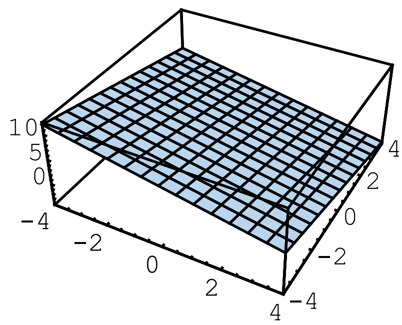
```
p3[x_, y_] = s3[[1, 1, 2]]
```

$\frac{1}{2}(2x - y + 1)$

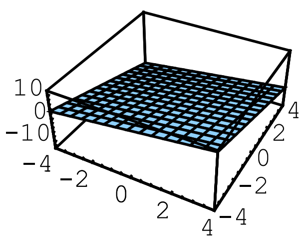
Interpretación Gráfica

Identificamos como **g1**, **g2** y **g3** a cada uno de los planos que resultan como gráfico.

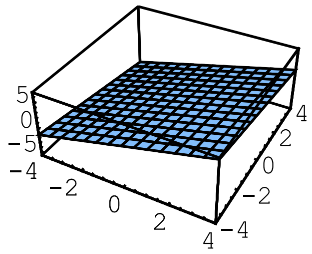
```
g1 = Plot3D[p1[x, y], {x, -4, 4}, {y, -4, 4}];
```




```
g2 = Plot3D[p2[x, y], {x, -4, 4}, {y, -4, 4}];
```

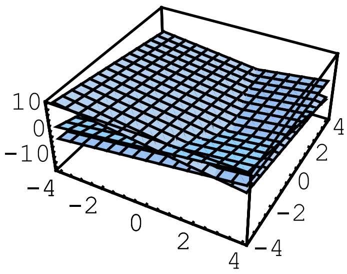



```
g3 = Plot3D[p3[x, y], {x, -4, 4}, {y, -4, 4}];
```



Mostramos en un solo gráfico, resultando

```
Show[g1, g2, g3];
```



Los métodos gráficos para resolver ecuaciones lineales de tres variables son poco satisfactorios porque se necesita de un sistema de coordenadas en tres dimensiones.

6. Algoritmo de triangulación para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Los métodos analíticos por combinaciones lineales y sustituciones son efectivos para resolver sistemas de ecuaciones. No obstante conviene interpretar el siguiente ***algoritmo de triangulación*** para resolver sistemas de tres ecuaciones. Cabe aclarar que se le puede extender con suma facilidad a sistemas de más de tres ecuaciones.

Para un sistema de tres ecuaciones de tres variables, nuestra meta es obtener un sistema de ecuaciones equivalente con la siguiente forma triangular.

$$\begin{aligned} A\,x + B\,y + C\,z &= D \\ E\,y + F\,z &= G \\ H\,z &= J \end{aligned}$$

1. Utiliza combinaciones lineales para eliminar los términos en **x** de la segunda y tercera ecuación.

2. Utiliza combinaciones lineales para eliminar el término en **y** de la tercera ecuación.

Ahora el sistema tendrá una **forma triangular.**

3. Resuelve la tercera ecuación para **z,** sustituye **z** en la segunda ecuación para encontrar **y**, y después sustituye **y** y **z** en la primera ecuación para encontrar **x.**

Ejemplo

$2x - 4y + 7z = 24$ (1)

$4x + 2y - 3z = 4$ (2)

$3x + 3y - z = 4$ (3)

Comenzamos por multiplicar **(3)** por **2** para hacer de cada coeficiente de **x** un múltiplo del primero.

$2x - 4y + 7z = 24$ (1)

$4x + 2y - 3z = 4$ (2)

$6x + 6y - 2z = 8$ 2*(3)=(4)

Después multiplicamos **(1)** por **-2** y sumamos el resultado a **(2)** para eliminar el coeficiente de **x** en **(2).**

$2x - 4y + 7z = 24$ (1)

$10y - 17z = -44$ -2*(1) + (2)=(5)

$6x + 6y - 2z = 8$ (4)

También multiplicamos **(1)** por **-3** y sumamos el resultado a **(4).**

$2x - 4y + 7z = 24$ (1)

$10y - 17z = -44$ (5)

$18y - 23z = -64$ -3*(1)+(3)=(6)

Ahora multiplicamos la nueva ecuación **(6)** por **-5** para que el coeficiente de **y** sea un múltiplo del coeficiente de **y** en la nueva ecuación **(5).**

$2x - 4y + 7z = 24$ (1)

$10y - 17z = -44$ (5)

$-90y + 115z = 320$ -5*(6)=(7)

Después multiplicamos (5) por 9 y sumamos el resultado a (7)

$2x - 4y + 7z = 24$ (1)

$10y - 17z = -44$ (5)

$-38z = -76$ 9*(5)+(7)=(8)

Hemos logrado la forma triangular propuesta.

Ahora podemos resolver **(8)** para **z**

-38 z = - 76

z = 2

Después sustituimos **2** en vez de **z** en (**5),** y resolvemos para **y**

10 y -17*(2) = - 44

10 y - 34 = - 44

y = - 1

Finalmente sustituimos **-1** en vez de **y** y **2** en vez de **z** en **(1)**

2 x - 4*(-1) + 7*(2) = 24

2 x + 4 + 14 = 24

x = 3

La solución es (3,-1,2)

Si por un momento nos transformamos en usuarios **no inteligentes**, y solamente pensamos que una computadora hace todo lo que un Ingeniero debería hacer, nos sorprendemos porque para qué tanto lío, si solamente necesitamos identificar las ecuaciones de nuestro sistema y simplemente aplicar el comando **Solve** para obtener la solución.

```
e1 = 2 x − 4 y + 7 z == 24;
e2 = 4 x + 2 y − 3 z == 4;
e3 = 3 x + 3 y − z == 4;
```

Etiquetamos al sistema como **sis**

```
sis = {e1, e2, e3}
```

$\{2\,x-4\,y+7\,z==24,\ 4\,x+2\,y-3\,z==4,\ 3\,x+3\,y-z==4\}$

Aplicamos el comando **Solve** para resolver el sistema

```
Solve[sis, {x, y, z}]
```

$\{\{x\to 3,\ y\to -1,\ z\to 2\}\}$

Seguramente en nuestro trabajo profesional como Ingenieros de tiempos modernos, interactuaremos permanentemente con una computadora, y por lo tanto, procederemos así. Pero no debemos dejar de pensar que uno de los principios de los Ingenieros, es preguntarse permanentemente el **PORQUÉ**, y precisamente ésta ha sido la intención de desarrollar, paso a paso, y a mano, un sistema como ejemplo.

7. Solución de problemas: Empleo de un sistema de tres ecuaciones.

Algunos problemas se pueden resolver traduciéndolos primero a un sistema de tres ecuaciones. De este modo, el sistema de tres ecuaciones se convierte en un **modelo matemático** del problema.

DIRECTRICES PARA RESOLVER PROBLEMAS

ENTIENDE el problema.

Elabora y lleva a cabo un **PLAN.**

Encuentra la **RESPUESTA Y COMPRUÉBALA.**

Ejemplo

En una fábrica hay tres máquinas, A,B, y C. Cuando las tres están trabajando, producen 222 prendas por día. Si A y B trabajan, pero C no, producen 159 prendas por día. Si B y C trabajan, pero A no, producen 147 prendas por día. ¿Cuál es la producción diaria de cada máquina?.

Utilicemos **x, y,** y **z** para denotar el número de prendas producidas en un día por las máquinas A, B, y C, respectivamente.

Hay tres proposiciones

Cuando las tres máquinas trabajan, producen **222 prendas** por día.

$x + y + z = 222$ (1)

Cuando A y B trabajan producen **159 prendas** por día.

$x + y = 159$ (2)

Cuando B y C trabajan, producen **147 prendas** por día.

$y + z = 147$ (3)

Ahora tenemos un sistema de tres ecuaciones

$x + y + z = 222$ (1)

$x + y = 159$ (2)

$y + z = 147$ (3)

resolvemos con el Mathematica

```
e1 = x + y + z == 222;
e2 = x + y == 159;
e3 = y + z == 147;
```

```
sis = {e1, e2, e3}
```

$\{x+y+z==222,\ x+y==159,\ y+z==147\}$

```
Solve[sis, {x, y, z}]
```

$\{\{x\to 75,\ y\to 84,\ z\to 63\}\}$

PRESENTACIÓN CLARA DE LA RESPUESTA

A produce **75 prendas** por día, **B** produce **84 prendas** por día y **C** produce **63 prendas** por día.

8. Sistemas compatibles (consistentes) y sistemas incompatibles (inconsistentes).

Algunos sistemas de ecuaciones **no tienen solución.** Otros sistemas pueden tener **más de una solución.**

Si un sistema de ecuaciones tiene al menos ***una solución***, decimos que es ***compatible (consistente)***. Si un sistema ***no tiene solución***, decimos que es ***incompatible (inconsistente)***.

Ejemplo

Determina si el siguiente sistema es compatible o incompatible.

x - 3 y = 1; (1)

- 2 x + 6 y = 5; (2)

Intentamos encontrar una solución. Multiplicamos **(1)** por **2** y sumamos el resultado a **(2)**

x - 3 y = 1; (1)

2*(x - 3 y) + (- 2 x + 6 y) =2*1 + 5; 2*(1)+(2)=(3)

x - 3 y = 1; (1)

2 x - 6 y - 2 x + 6 y = 7; (3)

de modo que resulta el siguiente **sistema equivalente:**

x - 3 y = 1; (1)

0 = 7 (3)

La ecuación **(3)** dice que **0*x+0*y=7**. No hay números **x** e **y** para los que esto sea cierto, de modo que **no hay solución**. El **sistema es incompatible.**

Interpretación Gráfica

Etiquetamos como **e1** y **e2** las ecuaciones, e identificamos como **sis** al sistema conformado por **e1** y **e2**

```
e1 = x - 3 y == 1;
e2 = -2 x + 6 y == 5;
```

```
sis = {e1, e2}
```

$\{x - 3\,y == 1,\ 6\,y - 2\,x == 5\}$

Si explicitamos respecto a la variable **y** de cada una de las ecuaciones, resultan las formas **pendiente-ordenada al origen** de las ecuaciones originales

```
s1 = Solve[e1, y] // ExpandAll
```

$\left\{\left\{y \to \frac{x}{3} - \frac{1}{3}\right\}\right\}$

```
s2 = Solve[e2, y] // ExpandAll
```

$\left\{\left\{y \to \frac{x}{3} + \frac{5}{6}\right\}\right\}$

Ya se observa que ambas ecuaciones, cuyas imágenes gráficas son rectas, tienen la **misma pendiente "1/3".**

Etiquetamos como **r1[x] y r2[x]** a las segundas partes de las formas explícitas de las ecuaciones **e1** y **e2**

```
r1[x_] = s1[[1, 1, 2]] // ExpandAll
```

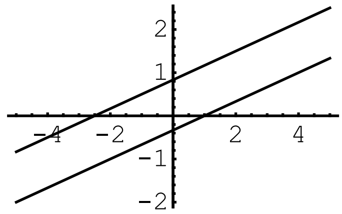
$\frac{x}{3} - \frac{1}{3}$

```
r2[x_] = s2[[1, 1, 2]] // ExpandAll
```

$$\frac{x}{3}+\frac{5}{6}$$

Graficamos

```
Plot[{r1[x], r2[x]}, {x, -5, 5}];
```



Podemos ver que las rectas **son paralelas**. No tienen **punto de intersección,** de modo que el **sistema es incompatible.**

Con el *Mathematica*

Recordemos nuestro sistema

```
sis
```

$\{x-3\,y==1,\ 6\,y-2\,x==5\}$

```
Solve[sis, {x, y}]
```

{}

Como respuesta, el *Mathematica* nos indica al **conjunto vacío,** lo que se interpreta como que **no existen** valores de **x** e **y** que satisfagan, simultáneamente, a las dos ecuaciones **e1** y **e2.**

8.1 Sistemas compatibles e indeterminados (dependientes).

Si un sistema de ecuaciones lineales ***tiene una cantidad no determinada*** de soluciones, decimos que el sistema es ***compatible*** (tiene solución) e ***indeterminado*** (cantidad no determinada de soluciones).

Ejemplo

Determina si el siguiente sistema es **compatible e indeterminado.**

2 x + 3 y = 1; (1)

4 x + 6 y = 2; (2)

Multiplicamos **(1)** por **-2** y sumamos el resultado a **(2)**

2 x + 3 y = 1; (1)

-2*(2 x + 3 y) + (4 x + 6 y) = -2*1 + 2; -2*(1)+(2)=(3)

de modo que resulta el **sistema equivalente**

2 x + 3 y = 1; (1)

-4 x - 6 y + 4 x + 6 y = 0 (3)

operando algebraicamente resulta

2 x + 3 y = 1; (1)

0 = 0 (3)

La ecuación **(3)** dice que **0*x+0*y=0**. Esto es verdad para todos los números **x** e **y.** El **sistema es compatible e indeterminado.**

Interpretación Gráfica

Etiquetamos como **e1** y **e2** las ecuaciones, e identificamos como **sis** al sistema conformado por **e1** y **e2**

```
e1 = 2 x + 3 y == 1;
e2 = 4 x + 6 y == 2;
```

```
sis = {e1, e2}
```

$\{2\,x+3\,y==1,\,4\,x+6\,y==2\}$

Si explicitamos respecto a la variable **y** cada una de las ecuaciones, resultan las formas **pendiente-ordenada al origen** de las ecuaciones originales

```
s1 = Solve[e1, y] // ExpandAll
```

$$\left\{\left\{y\to\frac{1}{3}-\frac{2\,x}{3}\right\}\right\}$$

```
s2 = Solve[e2, y] // ExpandAll
```

$$\left\{\left\{y \to \frac{1}{3} - \frac{2x}{3}\right\}\right\}$$

Ya se observa que ambas ecuaciones tienen la **misma pendiente "1/3",** y la **misma ordenada al origen**, o sea, se trata de dos **ecuaciones iguales.**

Etiquetamos como **r1[x] y r2[x]** a las segundas partes de las formas explícitas de las ecuaciones **e1** y **e2**

```
r1[x_] = s1⟦1, 1, 2⟧
```

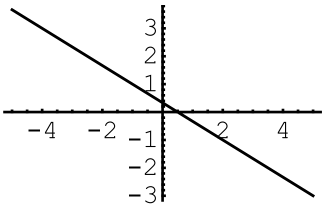
$$\frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$$

```
r2[x_] = s2⟦1, 1, 2⟧
```

$$\frac{1}{3} - \frac{2x}{3}$$

Graficamos

```
Plot[{r1[x], r2[x]}, {x, -5, 5}];
```



Podemos ver que las rectas **son coincidentes**. Tienen una cantidad no determinada de **puntos de intersección**, de modo que el **sistema es compatible e indeterminado.**

Con el *Mathematica*

Recordemos nuestro sistema

```
sis
```

$$\{2\,x + 3\,y == 1,\ 4\,x + 6\,y == 2\}$$

```
Solve[sis, {x, y}]
```

$$\left\{\left\{x \to \frac{1}{2} - \frac{3\,y}{2}\right\}\right\}$$

Como respuesta, el *Mathematica* nos indica una **ecuación lineal en dos variables,** lo que se interpreta como que **existen infinidad** de valores de **x** e **y** que simultáneamente satisfacen a las dos ecuaciones **e1** y **e2.**

Explicitando la solución del sistema respecto a la variable **y,** a los efectos de relacionar la ecuación, con algunas de las formas conocidas (forma explícita)

```
s3 = Solve[sis, y] // ExpandAll
```

$$\left\{\left\{y \to \frac{1}{3} - \frac{2\,x}{3}\right\}\right\}$$

se pueden obtener algunas de las infinidad de soluciones asignando valores a una de las variables, por ejemplo **x,** y calculando de acuerdo a las operaciones a que está sometida **x,** los valores que le corresponden a la otra variable **y.**

Por ejemplo, cuando **x=1**

```
s3 /. x → 1
```

$$\left\{\left\{y \to -\frac{1}{3}\right\}\right\}$$

resulta **y=1/3.** De modo que el par ordenado **(1,-1/3)** es una **solución del sistema.**

Podemos aprovechar las bondades del comando **Table** para calcular un número importante de soluciones del sistema. A título de ejemplo, en el intervalo **[-3,3],** y asignando a **x** todos los **valores enteros** que pertenecen a dicho intervalo, resulta

```
Table[{x, s3⟦1, 1, 2⟧}, {x, -3, 3}]
```

$$\begin{pmatrix} -3 & \frac{7}{3} \\ -2 & \frac{5}{3} \\ -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \\ 2 & -1 \\ 3 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$