
Generant Imatges amb un Ordinador Quàntic

TREBALL DE RECERCA DE BATXILLERAT

IES MIQUEL TARRADELL

Autor:

Tomàs Ockier Poblet

2nd Batxillerat

ockier1@gmail.com

Tutor:

Tomàs Ockier Poblet



Institut Miquel Tarradell

7 de desembre de 2021

Barcelona, Barcelona

Índex

I	Marc Teòric	7
1	Àlgebra lineal	8
1.1	Vectors i espais vectorials	8
1.2	Aplicacions lineals	11
1.1	Tipus d'aplicacions lineals	13
1.3	Producte interior i producte exterior	14
1.1	Producte interior	14
1.1.1	Propietats del producte interior	16
1.2	Vectors ortonormals i ortogonals	16
1.3	Producte exterior	17
1.4	Producte tensorial	18
1.1	Propietats del producte tensorial	21
1.5	Traça	22

ÍNDEX	2
2 Computació quàntica	24
2.1 Estats quàntics i superposicions	24
2.2 Qubits i operacions quàntiques	28
2.1 Representació geomètrica d'un qubit	31
2.2 Operacions per a només un qubit	31
2.3 Circuit quàntics	34
2.4 Operacions per a múltiples qubits	35
2.4.1 Entrellaçament quàntic	36
2.4.2 Operacions controlades	37
2.5 Mesurament quàntic	38
2.6 Matriu de densitat	40
2.1 Matriu de densitat reduïda	42
2.1.1 Mesurament parcial	43
2.7 Ordinadors quàntics	44
3 Intel·ligència artificial	45
3.1 Xarxes neuronals	46
3.2 Descens del gradient	48
3.1 Backpropagation	52
3.3 Generative adversarial networks	54
4 Generació d'imatges amb un ordinador quàntic	57
4.1 Descens del gradient quàntic	58
4.2 Circuits quàntics per xarxes neuronals	58
II Part Experimental	62
5 Plantejament de l'hipòtesi	63

ÍNDIX	3
6 Programació del model	64
6.1 Discriminador	65
6.2 Generador	67
6.3 Creació del model	68
6.4 Execució del model	70
7 Realització del experiment	74
III Conclusions	76
IV Apèndix	78
Appendices	79
A Més àlgebra lineal	80
A.1 Procediment de Gram–Schmidt	80
A.2 Curs ràpid de la notació de Dirac	82
A.3 Més on la traça parcial	82
B Computació Quàntica vs Mecànica Quàntica	83
B.1 Normalitzar	84
C Polarització d'un fotó	86
D Complexitat i algoritmes quàntics	88
D.1 Algoritme de Grover	89
E Codi	90
E.1 Part I	90
E.1 Capítol 3	90
E.1.0.1 Regressió lineal	90
E.2 Part II	91
E.1 Capítol 6	91
E.1.0.1 Codi original per la xarxa neuronal clàssica	91
E.1.0.2 Codi final per el discriminador	94
E.1.0.3 Codi per el generador	98
E.1.0.4 Execució del model	104

Introducció

Desde hace más de un año, me he dedicado a estudiar computación cuántica durante mi tiempo libre. Buscaba investigar un campo relacionado con la mecánica cuántica, pero sin que sea muy complicado, que se pueda entender a un nivel teórico y que me entusiasme.

La Computación Cuántica encaja perfectamente con esos criterios. Es más sencilla que la mecánica cuántica debido a que no está basada en cálculo o ecuaciones diferenciales, se basa en la álgebra lineal, utilizando valores discretos, vectores y matrices. Además si se trabaja a un nivel teórico sencillo, no se tienen en consideración las interpretaciones físicas, lo cual simplifica mucho las cosas. Cuanto más me adentraba, más ganas tenía de seguir.

Mi parte favorita de este campo es el Quantum Machine Learning que consiste en diseñar y aplicar conceptos de Machine Learning a los ordenadores cuánticos, como por ejemplo implementar cuánticamente las famosas Redes Neuronales, que están detrás de la mayoría de inteligencias artificiales que vemos hoy en día [1].

QML es un campo de investigación joven y en crecimiento debido a que sus algoritmos son ideales para implementarlos con los ordenadores cuánticos actuales, los cuales no son muy potentes. Ejemplos de estas implementaciones serían [insertar aplicaciones aquí], etc.

De entre todos los tipos de algoritmos me he centrado en las Redes Neuronales Cuánticas, análogas cuánticas de las Redes Neuronales tan utilizadas hoy en día para hacer gran variedad de tareas. Me he interesado particularmente en ellas debido a que tenía experiencia en el pasado con las RNs clásicas y había visto que existen frameworks de software para trabajar con ellas como TensorFlow Quantum [2] que me podían ayudar.

Para adentrarme en el campo de QML, he tenido que adquirir conocimientos en álgebra lineal, cálculo y física. Dentro de QML en concreto me he dedicado a leer papers que me interesan y en un par de ocasiones intentar implementar los algoritmos detallados en esos papers. Puede parecer algo imposible en principio debido a que no tengo acceso directo a un ordenador cuántico, no obstante

estos no son necesarios debido a que las operaciones cuánticas pueden ser simuladas en un ordenador corriente de escritorio (con ciertas limitaciones). Pero puedo tener acceso a ordenadores cuánticos ya que IBM permite acceder a los suyos mediante IBM Quantum Experience [3], aunque nunca he dado uso de ello debido a que no lo veía necesario.

En este trabajo de investigación me he propuesto implementar mediante código uno de los algoritmos que he visto en un paper, una Red Adversaria Generativa Cuántica (GAN, en inglés) [4] que genera imágenes a partir de un circuito cuántico [5]. Como objetivo tengo verificar una sugerencia que hacen los autores del paper: implementar una función no-lineal en una parte del algoritmo que podría mejorar el rendimiento de este. Mi hipótesis al igual que los autores (aunque ellos lo comentan muy brevemente) es que el algoritmo va a reducir ligeramente el número de interacciones que son necesarias para llegar a su punto óptimo. Es decir, el modelo con la función no-lineal va a necesitar menos operaciones que lo entren conseguir los mismos resultados que el modelo sin la función.

Part I

Marc Teòric

Capítol 1

Àlgebra lineal

Quan vaig començar a buscar informació sobre computació quàntica, en vaig ràpidament donar compte que necessitava molt més coneixement matemàtic, degut a que no entenia gairebé res dels llibres sobre computació quàntica. Arran aquell temps, una serie de vídeos sobre àlgebra lineal en va captar l'atenció, que es justament la branca de les matemàtiques sobre la qual es basa la computació quàntica. Els vídeos son les lliçons que dona el Professor Gilbert Strang al Institut Tecnològic de Massachusetts (MIT en anglès) [6, 7]. Una vegada havia vist gairebé tots els vídeos, ja tenia bastants conceptes apresos.

Aquelles lliçons es van ajudar a entendre les matemàtiques de *Quantum Computation and Quantum Information* [8] i *Quantum Computing: A Gentle Introduction*. A poc a poc, vaig anar aprenent els fonaments matemàtics de la computació quàntica i mecànica quàntica.

En aquesta secció aniré explicant els conceptes bàsics de l'àlgebra lineal, per formar els coneixements en matemàtiques necessaris per poder comprendre aquest treball.

1.1 Vectors i espais vectorials

Els objectes fonamentals de l'àlgebra lineal són els espais vectorials. Un espai vectorial es el conjunt de tots els vectors que tenen les mateixes dimensions. Per

exemple \mathbb{R}^3 seria el espai vectorial de tots els vectors de 3 dimensions, aquests vectors normalment s'utilitzen per representar punts en un espai tridimensional. En computació quàntica un tipus d'espais vectorials en concret són utilitzats: Els espais de Hilbert, en altres paraules, un espai vectorial amb un producte interior [9]. Els espais de Hilbert segueixen un conjunt de productes i compleixen unes certes normes, en aquest capítol presentaré una part d'aquestes normes i productes, la quantitat que és necessària. S'ha de tenir en compte que els espais de Hilbert són molt més complicats que el que es representa en aquest treball, també que d'aquí en endavant, quan mencionï espai vectorial hem referiré a un espai de Hilbert, d'ha no ser que s'especifiqui el contrari.

Els espais vectorial estan definits per les seves bases, un set de vectors $B = \{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$ es una base vàlida per l'espai V , si cada vector $|v\rangle$ en l'espai es pot escriure com $|v\rangle = \sum_i a_i |v_i\rangle$ per $|v_i\rangle \in B$. Els vectors de la base B són linealment independent entre ells.

La notació estàndard pels conceptes de àlgebra lienal en mecànica quàntica es la notació de Dirac, en la qual es representa un vector com $|\psi\rangle$. On ψ es la etiqueta del vector. Un vector $|\psi\rangle$ amb n dimensions també pot ser representat com una matriu columna que te la forma:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix}$$

On els nombres complexos $(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n)$ són els seus elements. Un vector escrit com a $|\psi\rangle$ també s'anomena *ket*.

La adició d'un par de vectors en un espai de Hilbert es definida per ¹:

$$|\psi\rangle + |\varphi\rangle = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}$$

A més a més, hi ha una multiplicació per un escalar² definida per:

$$z|\psi\rangle = z \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\psi_1 \\ \vdots \\ z\psi_n \end{bmatrix}$$

On z es un escalar i $|\psi\rangle$ un vector. Cal que notar que cada element del vector es multiplicar per el escalar.

Degut a que els espais de Hilbert son complexos tenen un conjugat complex definit per escalar com a: Per un escalar complex $z = a + bi$, el seu conjugat z^* es igual a $a - bi$.

Aquesta noció pot ampliar per a vectors i matrius, agafant el conjugat de totes els seus elements:

$$|\psi\rangle^* = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \psi_1^* \\ \vdots \\ \psi_n^* \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} a_{11}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{bmatrix}$$

Amb $|\psi\rangle$ sent un vector de dimensions n , i A sent una matriu de dimensions $m \times n$.

Un altre concepte important es la transposada, representada per el superíndex T que 'rota' un vector o una matriu. Un vector columna amb una dimensió

¹Els vectors d'aquesta definició tenen els seus elements representats per la seva etiqueta i un subscrit e.g. el vector $|\psi\rangle$ te un element qualsevol ψ_1 i el seu primer element es ψ_1 . Aquesta notació es seguirà utilitzant al llarg del treball.

²Un numero qualsevol en \mathbb{R} .

$n \times 1$ es transforma amb un vector fila amb una dimensió $1 \times n$ ³:

$$|\psi\rangle^T = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}^T = [\psi_1 \quad \dots \quad \psi_n]$$

El mateix és cert per les matrius, una matriu $m \times n$ transposada es converteix en una matriu $n \times m$. Per exemple:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

La composició d'un conjugat complex i la transposada s'anomena el conjugat Hermitià, la seva notació es una \dagger superindexada. Per un vector $|\psi\rangle$ el seu conjugat Hermitià $|\psi\rangle^\dagger$ és:

$$|\psi\rangle^\dagger = (|\psi\rangle^*)^T = [\psi_1^* \quad \dots \quad \psi_n^*] = \langle\psi|$$

El conjugat Hermitià compleix que $|\psi\rangle^\dagger = \langle\psi|$ i $\langle\psi|^\dagger = |\psi\rangle$.

El conjugat Hermitià d'un vector columna $|\psi\rangle$ s'anomena *bra* o vector dual. En la notació de Dirac un vector dual s'escriu com $\langle\psi|$.

1.2 Aplicacions lineals

Per poder operar amb vectors i fer operacions amb ells, s'utilitzen les matrius, que també son anomenades aplicacions lineal o transformacions lineals⁴, que són noms que descriuen millor com funcionen aquests objectes. La definició formal d'una aplicació lineal pot ser bastant complicada, per aquesta raó, utilitzaré termes més informals en aquesta secció.

³En realitat els vectors columna son matrius amb dimensió $n, 1$ però he estat ometent el 1. Quan hem refereixo a les dimensions de un vector qualsevol, només diré un numero, no obstant, especificaré si és un vector columna o un vector fila.

Bàsicament, una aplicació lineal transforma un vector en un altre vector, que poden o no ser d'espais diferents [10]. Més formalment, per un vector $|v\rangle$ en un espai V i un vector $|w\rangle$ en un espai W , una transformació lineal A entre els vectors, fa l'acció:

$$A|v\rangle = |w\rangle$$

En altres paraules, l'aplicació transforma un element del espai vectorial V en un vector del espai vectorial W . Les transformacions lineals han de complir les següents propietats:

1. Addició de vectors:

Donats els vectors $|\psi\rangle$ i $|\varphi\rangle$ en un mateix espai vectorial, i un operador lineal A :

$$A(|\psi\rangle + |\varphi\rangle) = A|\psi\rangle + A|\varphi\rangle$$

2. Producte escalar:

Donats els vectors $|\psi\rangle$, l'escalar z i la transformació lineal A , es certs que:

$$A(z|\psi\rangle) = zA|\psi\rangle$$

Aquestes afirmacions han de ser certes per tots els vectors i tots els escalars en els espais on les aplicacions actuen. Cal notar que una aplicació lineal no té perquè ser una matriu necessàriament, per exemple, les derivades i les integrals son aplicacions lineals, això es pot provar fàcilment al veure que compleixen els criteris especificats posteriorment. No obstant, les derivades i les integrals usualment no s'apliquen a vectors, sinó a les funcions, però es possible aplicar-les a vectors ⁵.

Les matrius només són la representació matricial de les aplicacions lineals [11].

⁵No et preocupis, que es clar que les aplicaré a vectors :D.

1.1 Tipus d'aplicacions lineals

En la secció actual, exposaré els tipus bàsics d'aplicacions lineals que són indispensables en la teoria presentada en aquest capítol i la rest del treball.

1. Operador zero

Qualsevol espai vectorial té un vector zero expressat en notació de Dirac com a 0 , degut a que $|0\rangle$ es un altre concepte totalment diferent en CQ i IQ⁶. El vector zero es aquell vector que per qualsevol vector $|\psi\rangle$ i qualsevol escalar z , es compleix que: $|\psi\rangle + 0 = |\psi\rangle$ i $z0 = 0$.

El operador zero també s'escriu com a 0 i es defineix com l'aplicació que transforma qualsevol vector al vector zero: $0|\psi\rangle = 0$.

2. Matriu inversa

Un matriu quadrada⁷ A és invertible si existeix una matriu A^{-1} de manera que $AA^{-1} = A^{-1}A$. $A^{-1} = I$ és la matriu inversa de A . La manera més ràpida de saber si una matriu es invertible es veient si el seu determinant no és zero. En altres paraules, és l'element neutre per la suma i l'element null per la multiplicació.

3. Matriu Identitat

Per a qualsevol espai vectorial V existeix un operador identitat I que es definit com $I|\psi\rangle = |\psi\rangle$, aquest operador no fa cap canvi al vectors als quals opera. Cal notar també que per qualsevol matriu A i la seva inversa és veritat que $AA^{-1} = I$.

4. Matriu Unitari

Un operador unitari es qualsevol operador que no altera la norma dels vectors al quals es aplicat, per tant, una matriu es unitària si $AA^\dagger = I$ Per convertir qualsevol operador en unitari, es divideix les seves entrades entre la norma del operador.

⁶Computació Quàntica i Informació Quàntica.

⁷Una matriu quadrada és una matriu amb dimensions $n \times n$, on $n \in \mathbb{N}$.

5. Matrius Hermitianes

Una matriu Hermitiana compleix que:

$$\langle \psi | (A | \varphi \rangle) = (A^\dagger \langle \psi |) | \varphi \rangle$$

On $|\psi\rangle$ i $|\varphi\rangle$, són dos vectors del espai en el qual actua A . Si apliquem el producte interior a aquesta equació tenim que: $A = A^\dagger$.

1.3 Producte interior i producte exterior

1.1 Producte interior

Un vector dual $\langle \psi |$ i un vector $|\varphi\rangle$ combinats formen el producte interior $\langle \psi | \varphi \rangle$, el qual efectua una operació que agafa els dos vectors com a input i produeix un nombre complex com a output:

$$\langle a | b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n = z$$

Amb $z, a_i, b_i \in \mathbb{C}$. Quan hem refereixo a un producte interior, normalment diré "el producte interior de dos vectors", quan en realitat es una operació entre un vector dual i un vector.

El equivalent d'aquest producte en un espai real de dos dimensions \mathbb{R}^2 és el producte escalar, que s'expressat com a :

$$\langle a | b \rangle = \| |a\rangle \|_2 \cdot \| |b\rangle \|_2 \cos \theta \quad (1.1)$$

Amb $\|\cdot\|_2$ sent la norma ℓ^2 definida com a $\| |\psi\rangle \|_2 = \sqrt{\psi_1^2 + \dots + \psi_n^2}$ amb θ sent l'angle entre els vectors $|a\rangle$ i $|b\rangle$. Com he dit l'equació (1.1) és equivalent al producte interior, no obstant, segons el que he vist, no es usada àmpliament ja que interpretar θ com un angle entre vectors de dimensions altes no té molt

de sentit. En contrast, he vist aquest producte presentat en la seva interpretació geomètrica⁸ com el producte entre un vector fila i un vector columna:

$$\langle a|b\rangle = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Ja he definit la norma ℓ_2 com l'arrel quadrada de la suma dels elements d'un vector al quadrat:

$$\| |a\rangle \|_2 = \sqrt{\sum_i |a_i|^2}$$

No obstant, la definició més comú es basa en el producte interior. Com es pot veure el producte interior de un vector per ell mateix és la suma de les seves entrades al quadrat:

$$\langle a|a\rangle = a_1 a_1 + \cdots + a_n a_n = a_1^2 + \cdots + a_n^2 = \sum_i |a_i|^2$$

Per tant, la norma pot ser definida com l'arrel quadrada del producte interior d'un vector:

$$\| |a\rangle \|_2 = \sqrt{\langle a|a\rangle} \tag{1.2}$$

Quan la norma es aplicada a un vector bidimensional, es pot veure que és la mateixa que la longitud Euclidiana d'aquell vector, això és perquè realment són els mateixos conceptes, tot i això, la norma és el concepte de longitud però generalitzat a vectors de dimensions altes.

Pel que jo entenc algunes propietats de la longitud d'un vector bidimensional no es mantenen amb la norma d'un vector que té més de 2 dimensions. En altres paraules, la norma es comporta en certes maneres com la distància des de l'origen (que és la definició de la longitud), per tant, no són exactament la mateixa. A més d'això, hi ha diferents tipus de normes que s'utilitzen en diversos

⁸Els detalls exactes de l'interpretació geomètrica estan fora del domini d'aquest treball, malgrat que m'agradaria molt parlar sobre el tema.

escenaris. Aquesta es la raó per la qual en refereixo a la norma, com la norma ℓ^2 . A aquesta norma també se li diu norma Euclidiana [12].

1.1.1 Propietats del producte interior

Les propietats bàsiques del producte interior són les següents:

1. És lineal en el segon argument $(z_1 \langle a| + z_2 \langle c|) |b\rangle = z_1 \langle a|b\rangle + z_2 \langle c|b\rangle$
2. Té simetria en el conjugat $\langle a|b\rangle = (\langle b|a\rangle)^*$
3. $\langle a|a\rangle$ es no-negativa i real, excepte en el cas de $\langle a|a\rangle = 0 \Leftrightarrow |a\rangle = 0$

1.2 Vectors ortonormals i ortogonals

A partir del concepte de norma sorgeixen els conceptes de un par de vectors ortonormals i un par de vectors ortogonals⁹. Mirant l'equació (1.2) podem veure que si el producte interior del vector és 1, la norma del mateix vector també és 1. Un vector que té norma 1, és un vector unitari. D'aquesta manera, si el producte interior d'un vector és 1, és un vector unitari.

De vectors que no són zero son ortogonals si el seu producte interior és zero. Si aquests vectors són de bidimensionals, a partir de l'equació (1.1) podem veure que l'angle que fan entre ells és zero i per tant son perpendiculars entre ells:

Per $|a\rangle$ i $|b\rangle \neq 0$:

Si $\langle a|b\rangle = 0$ tenim que: $\| |a\rangle \|_2 \cdot \| |b\rangle \|_2 \cos \theta = 0$

Perquè $|a\rangle$ i $|b\rangle$ no son zero, les seves normes no són zero.

Per tant el terme que falta $\cos \theta$ és igual a zero.

D'aquesta manera, l'angle θ ha de ser $\frac{\pi}{2}$.

⁹Una nota graciosa, la primera vegada que vaig trobar aquest dos conceptes els vaig confondre i pensava que eren la mateixa cosa, això hem va confondre moltíssim i no entenia gairebé res.

No obstant, pensar que la perpendicularitat i la ortogonalitat són els mateixos conceptes es un error, degut a que, el que siguin només es veritat per els vectors bidimensionals. Perquè com en el cas de la norma i la longitud, la ortogonalitat és el concepte de perpendicularitat generalitzat.

Quan barregem els conceptes de vector unitari i vectors ortogonals arribem a la ortonormalitat [9]. Un parell de vectors que no són zero, són ortogonals quan els dos són unitaris i també són ortogonals entre ells:

$$|a\rangle \text{ and } |b\rangle \text{ son ortonormals si: } \begin{cases} \langle a|b\rangle = 0 \\ \langle a|a\rangle = 1 \\ \langle b|b\rangle = 1 \end{cases}$$

Els vectors ortonormals són importants, àmpliament utilitzats tant en computació quàntica com en mecànica quàntica perquè serveixen per crear bases vectorials molt útils.

Una altre cosa que remarcar i no he dit es que al dir un par de vectors, aquest par també pot ser un set de vectors. Si un set té tots els vectors unitaris i ortogonals entre tots ells, és un set de vectors ortonormals. El set de vectors $B = \{|\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle, \dots, |\beta_{n-1}\rangle, |\beta_n\rangle\}$ és ortonormal si $\langle\beta_i|\beta_j\rangle = \delta_{ij} \forall i, j$ [9] on δ_{ij} és el Kronecker delta, definit com: :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

1.3 Producte exterior

El producte exterior és una funció (expressada com $|a\rangle\langle b|$, amb $|a\rangle$ i $|b\rangle$ sent vectors) que agafa dos vectors i produeix un operador lineal com output. Al contrari que el producte interior, no hi ha un producte equiparable en les matemàtiques ensenyades al institut, i és una mira difícil d'entendre perquè agafa dos vectors que poden ser d'un espai diferent com input. És definit com:

Pels vectors $|v\rangle$ i $|v'\rangle$ amb dimensions m i el vector $|w\rangle$ de dimensió n . El producte exterior és l'aplicació lineal A de dimensions $m \times n$ en l'espai $\text{Mat}_{m \times n}$:

$$|v\rangle \langle w| = A \text{ with } A \in \text{Mat}_{m \times n}.$$

Amb la seva acció definida per:

$$(|v\rangle \langle w|) |v'\rangle \equiv |w\rangle \langle v|v'\rangle = \langle v|v'\rangle |w\rangle \quad (1.3)$$

A partir de l'equació (1.3) l'utilitat i significat del producte es bastant complicada d'entendre, per tant exposaré la manera de computar-lo per clarificar com funciona. Per dos vectors $|a\rangle$ i $|b\rangle$ de dimensions m i n respectivament, el seu producte interior es computa multiplicant cada element de $|a\rangle$ per cada element de $|b\rangle$ formant una matriu amb mida $m \times n$:

$$|a\rangle \langle b| = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \cdots & a_m b_n \end{bmatrix}$$

L'utilitat d'aquest producte és mostrara més endavant.

1.4 Producte tensorial

L'últim producte que mencionaré és el tensorial, representat per el símbol \otimes . Aquest producte s'utilitza per crear espais vectorials més grans combinant espais vectorials més petits. La definició formal és bastant complicada, per tant en centraré en explicar la manera amb la qual es computa utilitzant la representació matricial d'aquest producte, anomenada el producte de Kronecker.

Per una $m \times n$ A , i una $p \times q$ matriu B , el seu producte de Kronecker [13] és

la matriu de mida $pm \times qn$:

$$\begin{aligned}
 A \otimes B &= \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Cal tenir en compte que $a_{ij}B$ es una multiplicació escalar per una matriu, amb a_{ij} sent l'escalar i B sent la matriu.

Aquí hi ha un exemple més il·lustratiu amb dues matrius de mida 2×2 , es pot veure que cada element de la primera matriu es multiplica per la segona matriu:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 2 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ 3 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 4 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \times 0 & 1 \times 5 & 2 \times 0 & 2 \times 5 \\ 1 \times 6 & 1 \times 7 & 2 \times 6 & 2 \times 7 \\ 3 \times 0 & 3 \times 5 & 4 \times 0 & 4 \times 5 \\ 3 \times 6 & 3 \times 7 & 4 \times 6 & 4 \times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Una altre notació a tenir en compte és el símbol \otimes , utilitzat per representar el equivalent de la suma (expressada amb \sum), però en comptes de la adició el producte de Kronecker és utilitzat. En altres paraules, \otimes representa el producte de Kronecker de un nombre finit de termes. Per clarificar, aquí hi ha un exemple amb una matriu identitat:

Amb \mathbb{I} com la matriu $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i n com una potencia de 2:

$$\mathbb{I}_n = \overset{\log_2 n}{\otimes} \mathbb{I}$$

Aquí està el cas per $n = 8$:

$$\mathbb{I}_8 = \overset{\log_2 8}{\otimes} \mathbb{I} = \overset{3}{\otimes} \mathbb{I} = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El producte de Kronecker també funciona amb vectors de la mateixa manera, però amb una multiplicació de escalar per vector.

Per els vectors $|\psi\rangle$ i $|\varphi\rangle$ de dimensions n i m respectivament:

$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle = \begin{bmatrix} \psi_1 |\varphi\rangle \\ \psi_2 |\varphi\rangle \\ \vdots \\ \psi_m |\varphi\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \varphi_1 \\ \psi_1 \varphi_2 \\ \vdots \\ \psi_1 \varphi_m \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_n \varphi_1 \\ \psi_n \varphi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \varphi_m \end{bmatrix}$$

S'ha de tenir en compte que el producte de Kronecker també es pot fer entre un vector i una matriu, o viceversa, no obstant, no és molt comú fer-ho.

page 34 of
QC-intro, in-
ner product
for a space
 $V \otimes W$

1.1 Propietats del producte tensorial

Les propietats bàsiques del producte tensorial són les següents [14, 15]:

1. Associativitat:

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$$

$$(zA) \otimes B = A \otimes (zB) = z(A \otimes B)$$

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

$$A \otimes 0 = 0 \otimes A = 0$$

2. No-commutativitat ¹⁰:

$$A \otimes B \neq B \otimes A$$

¹⁰Una cosa guay es que $A \otimes B$ i $B \otimes A$ són permutativament equivalents:
 $\exists P, Q \Rightarrow A \otimes B = P(B \otimes A)Q$ on P i Q són matrius permutatives.

1.5 Traça

La traça d'una matriu és tal sols la suma dels seus elements en la diagonal principal, la diagonal que va d'abaix a dalt i d'esquerra a dreta.

Aquí hi ha una matriu A amb la seva diagonal principal marcada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I la seva traça, representada per $\text{Tr}[A]$ és:

$$\text{Tr}[A] = 1 + 1 + 1 = 3$$

Més formalment, la traça d'una matriu quadrada n -dimensional és:

$$\text{Tr}[A] = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

La traça d'una matriu té les propietats següents:

1. Operador lineal:

Degut a que la traça és un mapa lineal, es compleix que:

$\text{Tr}[A + B] = \text{Tr}[A] + \text{Tr}[B]$ i $\text{Tr}[zA] = z \text{Tr}[A]$, per a totes les matrius quadrades A i B , i tots els escalars z .

2. Traça d'un producte tensorial:

$$\text{Tr}[A \otimes B] = \text{Tr}[A] \text{Tr}[B]$$

3. La transposada té la mateixa traça:

$$\text{Tr}[A] = \text{Tr}[A^T]$$

4. La traça d'un producte és cíclica:

Per una matriu A amb mida $m \times n$ i una matriu B de la mateixa mida:

$$\text{Tr}[AB] = \text{Tr}[BA]$$

Una altre manera molt útil de computar la traça d'un operador és a través del procediment de Gram-Schmidt¹¹ i un producte exterior. Utilitzant Gram-Schmidt per representar el vector unitat $|\psi\rangle$ amb una base ortonormal $|i\rangle$ que inclou $|\psi\rangle$ com el seu primer element, es veritat que:

$$\text{Tr}[A |\psi\rangle \langle\psi|] = \sum_i \langle i| A |\psi\rangle \langle\psi|i\rangle = \langle\psi| A |\psi\rangle$$

¹¹Mirar [A.1](#) per una definició del procediment de Gram-Schmidt.

Capítol 2

Computació quàntica

Després de bastant teoria matemàtica, ha arribat el temps de parlar sobre mecànica quàntica¹, en aquest capítol introduiré alguns conceptes bàsics sobre Informació Quàntica i Computació Quàntica (QI i QC).

Quantum mechanics is a mathematical framework or rather a set of theories used to describe and explain the physical properties of atoms, molecules, and subatomic particles. It is the framework of all quantum physics including quantum information science. The right way of presenting quantum computation is through the formal quantum mechanics postulates because, with them, the statements made in quantum computation do not seem to come from anywhere [16]. However, to not complicate this section more than it is, I will do my best to explain the concepts and math of quantum computing just on their own, without presenting more generalized concepts from quantum mechanics, unless it is totally necessary to do so.

2.1 Estats quàntics i superposicions

Per descriure com evolucionen els sistemes físics a través del temps, es necessita representar els sistemes d'alguna manera. En computació quàntica és

¹No crec que aquesta frase doni molts ànims per continuar.

representen per estats quàntics, els quals són algun tipus de distribucions de probabilitat per els possibles resultats d'una mesura on un sistema quàntic [17].

Imaginat que tens un boli, però que no saps de quin color és, no obstant, saps que pot ser vermell o blau. Per esbrinar de quin color és, pots provar a escriure amb el boli per veure el color de la pinta, o en altres paraules, fer una mesura. Saps que hi ha un 50% de probabilitat de que sigui vermell i un 50% de que sigui blau. En aquesta situació hipotètica tindries el teu sistema quàntic (el boli), una manera de mesurar-lo (escriure alguna cosa) i una llista amb els possibles resultats (50% vermell, 50% blau), només et falta una manera de representar-lo tot matemàticament, el estat quàntic. Per tant, per què no intentem guardar la informació que sabem del boli en un vector?

Si posem cada probabilitat de treure un resultat en un vector tenim que:

$$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

On la primera entrada és la possibilitat de que el boli sigui vermell i la segona entrada de que sigui blau, per fer-ho més senzill aquí està en colors:

$$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Cal remarcar que aquest vector està normalitzat amb la norma ℓ_1 , definida com la suma de les entrades d'un vector², en altres paraules la norma ℓ_1 d'aquest vector és 1.

Llavors, hem d'escollir una operació matemàtica per poder extreure la informació del vector, com que el output ha de ser un número, podem provar a utilitzar un producte interior. Però primer s'ha de representar el vector com una combinació lineal de les seves bases:

$$0.5 |0\rangle + 0.5 |1\rangle = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

²Amb $|a\rangle$ sent un vector, la norma ℓ_1 , denotada per $\|\cdot\|_1$ és $\| |a\rangle \|_1 = \sum_i a_i$.

On $|0\rangle$ és el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, i, $|1\rangle$ és el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Per tant, per trobar la probabilitat, s'agafa el producte interior del vector amb la base corresponent a la probabilitat, com a continuació:

$$\langle 0|v\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5$$

$$\langle 1|v\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5$$

Aquest procediment és bastant senzill, com a un altre exemple, per representar un boli amb 6 colors possibles amb una possibilitat aleatòria d'escriure amb un color del 6 possibles, l'estat d'aquest boli és³:

$$|w\rangle = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.3 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

Ara veure la probabilitat de per exemple treure el color verd, utilitzant la tercera base, la que correspon al color verd:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.3 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix} = 0.1$$

Deixant els bolis a una banda, ara els podem substituir per un sistema físic quàntic, com per exemple un fotó. Els fotons tenen certes propietats que poden ser

³Le posat colors a els elements per claredat.

mesurades, com la seva polarització⁴. Al mirar als fotons com ones en que oscil·len en el camp electromagnètic, la polarització és l'orientació geomètrica de l'ona. La polarització pot ser interpretada com un angle respecte a la direcció de propagació.

posar una
figura aquí

Al definir les bases del estat de polarització com vertical i horitzontal, denotades per els vectors $|\rightarrow\rangle$ i $|\uparrow\rangle$, respectivament. Podem definir un estat de superposició entre les bases, representat com $|\nearrow\rangle$ [18]:

$$|\nearrow\rangle = \alpha |\rightarrow\rangle + \beta |\uparrow\rangle \quad (2.1)$$

On α i β són números complexos. Un estat en superposició es simplement un estat on l'angle de polarització no és 0 ni $\frac{\pi}{2}$. No ens tenim que preocupar de la descripció matemàtica exacte de la polarització dels fotons al parlar de computació quàntica perquè el que importa és l'informació que porten aquests estat, no la física dels sistemes que representen. Aquesta informació s'ha d'agafar mitjançant mesures, com amb els bolis. Aquestes mesures en el cas de la polarització dels fotons seria passar-los per diversos filtres de polarització, els quals deixen passar el fotó o l'absorbeixen, tot això d'una manera probabilística, es a dir, dependent de quin sigui l'estat tenen certa possibilitat de ser absorbits o no.

Per clarificar, el filtre lo que fa es col·lapsar el fotó en els dos possibles estats de polarització, l'estat en el quan el filtre es orientat o l'estat perpendicular a aquest. Si col·lapsa en l'estat del filtre el fotó passa pel el filtre, en cas de col·lapsar en l'altre estat, es absorbit. La manera en la que els fotons col·lapsen és probabilística, si agafen un filtre que està orientat horitzontalment respecte al fotons que li arriben, un fotó orientat en horitzontalment té un 100% de poder passar, mentre que un fotó polaritzat verticalment té un 0% de probabilitat de poder passar. I si un fotó està polaritzat en un angle just entre vertical i horitzontal, es a dir a 45°, tindrà un 50% de possibilitats de passar i un 50% de no poder-hi.

Aquesta és la manera amb la qual els sistemes quàntics es comporten, a través de la probabilitat, on els estats que els representen tenen la informació

⁴Concretament, són una propietat que les ones transversals tenen, el tipus d'ona de les ones electromagnètiques, que són els fotons en realitat.

sobre quines són aquestes possibilitats. No obstant, la polarització dels fotons són un sistema físic concret, quan es parla de computació quàntica és millor treballar amb conceptes més generals per poder expressar tants algoritmes com sigui possible i poder implementar aquests algoritmes en tants ordinadors quàntics com sigui possible. Per saqueta raó, en la branca de la informació quàntica i la computació quàntica es treballa amb qubits, en comptes de diversos sistemes físics.

2.2 Qubits i operacions quàntiques

Ordinadors modern representen informació a través de cadenes de zeros i uns, anomenats bits. Tot, des de imatges a lletres o instruccions electròniques. Per exemple, la lletra t és representada per la cadena de bits 01110100, codificat a través de codi binari. Tot el que fas en un ordinador es codifica i representa en codi binari.

Degut a que estem molt acostumats a codi binari, en el camp de la computació quàntica també s'utilitza, no obstant, en comptes de bits s'utilitzen qubits. Un qubit es l'anàleg d'un bit, en altres paraules, és la unitat mínima d'informació utilitzada pels ordinadors quàntics. En els qubits podem aplicar propietats quàntiques com la superposició o l'entrellaçament⁵. Si un bit pot estar en l'estat 0 o en l'estat 1, un qubit pot estar en una combinació d'aquests estats, en un estat enmig del 0 o el 1. És una combinació lineal dels vectors que representen aquests estats, $|0\rangle$ i $|1\rangle$:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

On α i β són nombres complexos i $|\psi\rangle$ és un vector en un bidimensional espai de Hilbert⁶. Els vectors $|0\rangle$ i $|1\rangle$ són anomenats els vectors de la base computacionals, representats com:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

⁵Ja he parlat de la primera amb la polarització del fotons, del entrellaçament parlaré més endavant.

⁶Un espai vectorial amb un producte interior.

Per tant el vector $|\psi\rangle$ és:

$$|\psi\rangle = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Aquest vector és un estat quàntic vàlid per representar un qubit, anomenat *statevector* o vector d'estat. No obstant, hi ha un important factor a tenir en compte. El vector ha d'estar normalitzat amb la norma ℓ_2 , per tant, els nombres α i β no poden ser qualsevol nombre, necessiten ser els coeficients que formin un vector amb una norma de 1.

$$\| |\psi\rangle \| = 1$$

Llavors:

$$\begin{aligned} \| \psi \| &= \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = 1 \\ \Rightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 &= 1 \end{aligned}$$

Definir un qubit com una 'combinació lineal dels estats fundamentals' no és de molta ajuda, per això, elaboraré més sobre aquesta definició: Una cadena de n -bit pot només representar una única combinació d'uns i zeros, mentres que una cadena de n -qubits representa una combinació de totes les possibles combinacions. En el cas d'un qubit, aquest és una combinació dels possibles estats $|0\rangle$ i $|1\rangle$. Considera un qubit com una barreja dels estats possibles, amb cada coeficient de la combinació lineal sent el nombre que indica quant d'un estat forma part de la barreja.

Definir un qubit com una "combinació lineal dels estats fundamentals" no és de molta ajuda, per això, elaboraré més sobre aquesta definició: Una cadena de n -bit pot només representar una única combinació d'uns i zeros, mentres que una cadena de n -qubits representa una combinació de totes les possibles combinacions. En el cas d'un qubit, aquest és una combinació dels possibles estats $|0\rangle$ i $|1\rangle$. Considera un qubit com una barreja dels estats possibles, amb cada coeficient de la combinació lineal sent el nombre que indica quant d'un estat forma part de la barreja.

Una cosa molt interessant passa quan s'augmenta el nombre qubits, la 'quantitat d'informació' creix exponencialment. Per una cadena de n qubits la quantitat d'informació que té, en altres paraules la quantitat de números que representa és 2^n , on aquests números son els coeficients de la combinació lineal. Això es perquè quan afegeixes un qubit el nombre de combinacions possibles creix exponencialment, per tant es necessiten més coeficients per representar aquestes combinacions noves en la combinació lineal. El qubits necessiten molta més informació per poder representar-los⁷, no com els bits que al ser només una combinació és necessita només saber quina combinació és. No passa res si això no s'entén perfectament, lo important és saber que es necessiten 2^n números complexos⁸ per representar n -qubits i que es necessiten n números binaris per representar n -bits.

Per il·lustrar tot això, 2 qubits es representen amb el *statevector*:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \alpha_1 |00\rangle + \alpha_2 |01\rangle + \alpha_3 |10\rangle + \alpha_4 |11\rangle \\
 &= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Cal remarcar que els vectors de la base computacional serien les columnes d'una matriu identitat amb dimensions $2^n \times 2^n$, on n és el nombre de qubits.

Per poder representar informació amb qubits simplement es codifica aquesta informació en els qubits, això es pot fer per exemple mitjançant codi binari: Els números 0, 1, 2 i 3 són els bits 00, 01, 10 i 11 respectivament, per tant es poden representar amb dos qubits en els estats $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$, respectivament.

⁷Informació que es manifesta amb els coeficients de la combinació lineal

⁸Són complexos degut a que els coeficients de la combinació lineal són números complexos.

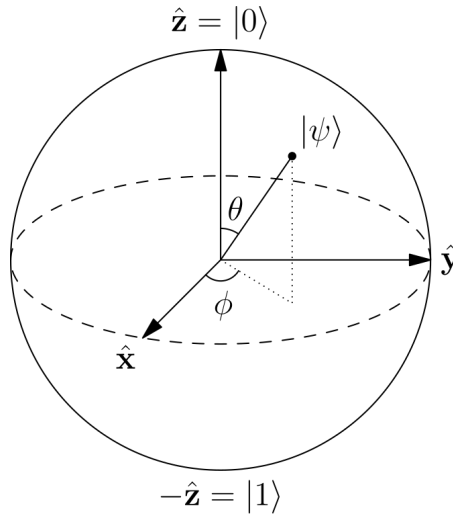


FIGURA 2.1: Esfera de Bloch, on es representa un estat arbitrari $|\psi\rangle$ amb els vectors $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ representat els eixos ortonormals de la esfera.

2.1 Representació geomètrica d'un qubit

Una aspecte que sempre m'agradat del qubits és la seva representació geomètrica, la esfera de Bloch 2.1. Si agafem una esfera unitària⁹ que té els seus pol nord i sur definits per els vectors $|0\rangle$ i $|1\rangle$, respectivament. Cada punt de la seva superfície és un estat quàntic vàlid on les seves bases computacionals són $|0\rangle$ i $|1\rangle$.

2.2 Operacions per a només un qubit

Una vegada es té la informació representada, estaria bé poder operar amb aquella informació, aquest es justament lo que fa que els ordinadors siguin ordinadors, poder operar amb la informació. En computació quàntica els qubits al poder ser representats amb vectors que tenen els seus coeficients són operats per les anomenades portes lògiques quàntiques, que són matrius. Per exemple, si es vol passar de tindre un qubit en l'estat $|0\rangle$ al estat $|1\rangle$, s'utilitza la porta lògica X representada a continuació:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

⁹Una esfera que té radi 1 i que per tant qualsevol punt en la seva superfície correspon a un vector en \mathbb{R}^3 unitari.

Podem veure com fa l'acció al multiplicar la matriu per el vector:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Que en notació de Dirac s'expressaria com:

$$X |0\rangle = |1\rangle$$

D'una manera més general:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \times \alpha & 1 \times \beta \\ 1 \times \alpha & 0 \times \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Es pot veure que aquesta matriu lo que fa és donar la volta als coeficients d'un vector, per tant:

$$X |0\rangle = |1\rangle \text{ i } X |1\rangle = |0\rangle$$

Aquesta porta lògica forma part d'un grup important, les matrius de Pauli. Hi han 3 d'aquestes la X, la Y i la Z, usualment representades per X , Y , Z o per σ_x , σ_y , σ_z . Aquestes matrius són les següents:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Aquestes matrius són molt important en la mecànica quàntica¹⁰ i són utilitzades àmpliament per descompondre i com a portes lògiques quàntiques.

A partir d'elles podem elaborar matrius que facin una rotació de qualsevol

¹⁰Al ser Hermitianes són observables, concretament ho són dels que corresponen al spin d'una partícula amb spin $\frac{1}{2}$ bàsicament estan relacionades amb els operadors del moment angular.

angle en un del eixos de la representació geomètrica d'un qubit 2.1:

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} X = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} Y = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} Z = \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Per exemple la matriu $R_y(\cdot)$ (Eq.2.3) correspon a una rotació en el eix \hat{y} de la esfera de la figura 2.1.

Aquestes operacions poden resultar en superposicions si es fan rotacions amb certs angles. Però hi ha una porta lògica especial per poder fer una rotació que resulta en una superposició uniforme. Es a dir una superposició que tingui les mateixes probabilitats de resultar en $|0\rangle$ o $|1\rangle$ ¹¹. Aquesta és la porta de Hadamard, denotada per H :

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Podem comprovar que és una superposició uniforme al aplicar-la al estat $|0\rangle$:

$$H |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

L'estat resultant és un estat especial que s'escriu com $|+\rangle$ ¹² La probabilitat de que un estat col·lapsi en una determinada base és el coeficient de la seva base elevat al quadrat. Com que l'estat és:

$$|+\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

¹¹Un 50% cada una.

¹²Un altre estat similar és $\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$, quan la matriu H s'aplica al estat $|1\rangle$.

Al elevar al quadrat qualsevol del coeficients es pot veure que dona $\frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Llavors tenim que la probabilitat per obtindre ambos estats és la mateixa, es a dir que si mesurem l'estat $|+\rangle$ hi ha la mateixa probabilitat de que surti $|0\rangle$ o $|1\rangle$. La porta lògica de Hadamard és molt important ja que s'utilitza per crear distribucions uniformes, ja sigui en un qubit o en diversos ¹³.

Altres operacions importants de només un qubit són les portes S i T :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$$

2.3 Circuit quàntics

Aquestes operacions usualment es representen a través de circuits quàntics. Són representacions gràfiques que indiquen de quines operacions s'apliquen a quins qubits i en quin ordre ¹⁴.

La forma de representar una porta H aplica a un qubit és amb el circuit quàntic:

$$|0\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ ---}$$

El qubit es representat per la línia que comença amb $|0\rangle$, amb $|0\rangle$ sent el seu estat inicial. Aquests diagrames es llegeixen d'esquerra a dreta, la mateixa forma en la qual s'apliquen les operacions.

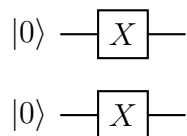
Un qubit en el qual se li aplica una porta H i després una porta X , es representat com:

$$|0\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ --- } \boxed{X} \text{ ---}$$

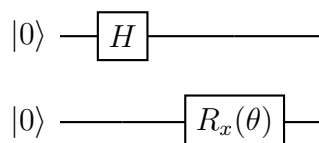
¹³S'aplica aquesta operació a cada qubit del sistema.

¹⁴A mi em semblen semblats a les partitures musicals.

Múltiples qubits son simplement més línies, aquí estan representat dos qubits amb portes X aplicades a cada un:



Amb múltiples qubits també hi han un ordre en el qual les portes s'han d'aplicar, un circuit en el qual es representa que s'aplica una porta Hadamard al primer, al principi, i una rotació¹⁵ en l'eix x en el segon qubit a continuació, seria:



2.4 Operacions per a múltiples qubits

Lo realment interessant es quan s'apliquen portes a diversos qubits, perquè d'aquesta manera és pot arribar a tindre qubits entrellaçats. La porta més útil per entrellaçar qubits és la CNOT o *Controlled NOT*:

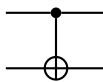
$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

És bàsicament una porta X ¹⁶ que està controlada per un altre qubit, si l'altre qubit és $|1\rangle$ s'aplica la porta X al altre qubit. Però si l'altre qubit està en superposició, per exemple en $|+\rangle$, aquesta superposició es passa també al qubit controlat, i al mesurar el qubit, la probabilitat de que s'apliqui la porta X és la probabilitat de mesurar l'estat $|1\rangle$. Es considera que aquests qubits estan entrellaçats, una mesura a un d'ells afecta a la mesura del altre. El qubit al qual se li aplica la porta X es diu *target* i el qubit sobre el qual depèn el *target* és el *control*.

Aquesta porta representa en un circuit s'escriu com:

¹⁵D'un angle θ .

¹⁶També anomenada porta NOT degut al paral·lisme que es fa amb la porta lògica del ordinadors clàssics NOT [19] que simplement inverteix els bits d'1 a 0 (i viceversa), igual que X que inverteix els qubits $|1\rangle$ a $|0\rangle$ i viceversa.



On el qubit *control* és el primer i on el segon és el *target*, el qubit que té el símbol \oplus ¹⁷.

2.4.1 Entrellaçament quàntic

L'exemple més senzill d'un entrellaçament quàntic en la computació quàntica son els parells de Bell, que es creen al aplicar a dos qubits una porta H al primer i després una porta CNOT als dos creant l'estat:

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |11\rangle$$

Es pot veure que només hi han dos estats possibles $|00\rangle$ i $|11\rangle$ que tenen la mateixa probabilitat associada¹⁸. S'afecten l'un al altre en el sentit que quan es mesura només un dels qubits i dona per exemple $|1\rangle$, al mesurar l'altre també dona $|1\rangle$, d'aquesta manera acabant amb l'estat $|11\rangle$. En altres paraules, la mesura d'una part del sistema determina el resultat d'una mesura en una altre part del sistema.

Matemàticament un sistema quàntic, e.i. un conjunt de qubits, està entrellaçant quan aquest sistema no es pot descriure amb un producte tensorial de les parts. Per exemple estat $|00\rangle$ es pot escriure com $|0\rangle \otimes |0\rangle$, mentre que l'estat $\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$, no. Per tant el primer no és sistema amb qubits entrellaçats i el segon si ho és.

A partir del entrellaçament i la superposició és com els ordinadors quàntics arribem a tenir avantatges en complexitat sobre els ordinadors clàssics, per més informació sobre els avantatges que presenten els algorismes quàntics en certes tasques veure l'apèndix D.

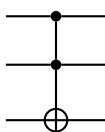
¹⁷A vegades escriure els circuits quàntics sense especificar l'estat inicial degut a que no és necessari.

¹⁸Això es pot veure al elevar al quadrat els coeficients del dos, que donen $\frac{1}{2}$.

2.4.2 Operacions controlades

A part de la porta CNOT existeixen diverses portes quàntiques controlades. Realment és pot controlar qualsevol porta, en altres paraules, si l'estat del qubit *control* és $|0\rangle$, s'aplica qualsevol porta al qubit *target*. Fins i tot podem haver-hi diversos qubits *control* i *target*.

Per exemple existeix la porta Toffoli¹⁹:



Que en la seva forma matricial és:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Aquesta porta aplica una porta X al últim qubit en cas de que els dos primers siguin $|0\rangle$.

Tornant a dos qubits, al veure la matriu per la porta CNOT, es pot apreciar que està composta per una matriu identitat i una porta X ²⁰:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

¹⁹Inventada per Tommaso Toffoli XD

²⁰La matriu identitat es troba a la cantonada superior esquerra, mentre que la porta X es troba al altre extrem.

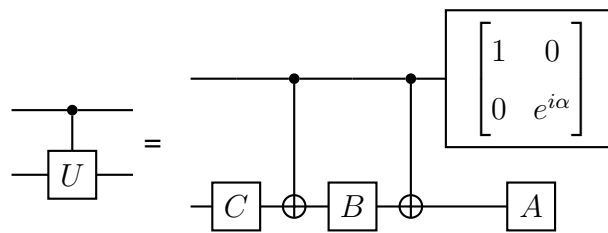
També al veure la porta Z controlada (CZ), es pot apreciar el mateix patró:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Amb la matriu de la porta Z a la cantonada inferior dreta. Aquesta porta en un circuit quàntic es representa de la següent manera:



On obstant, una operació controlada de qualsevol unitària U es forma a través del següent circuit:



On U, α, A, B i C son tals que $U = e^{i\alpha} A X B X C$ i $ABC = I$.

2.3 Mesurament quàntic

Com ja s'ha esmentat a la secció 2.2 al elevar al quadrat el coeficient d'un estat base que forma part d'un estat, s'obté la probabilitat d'obtenir l'estat base quan es mesura.

Aquesta és la forma més simple de poder predir el mesurament d'un estat quàntic. Però hi han més coses a dir que son útils.

Els mesuraments quàntics són un conjunt d'operadors de mesura M_m , la probabilitat del estat m associat a un operador M_m , és:

$$\text{prob}(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle \quad (2.7)$$

On l'estat després de la mesura, és:

$$\frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| M_m^\dagger M_m |\psi\rangle}}$$

Els operadors M_m han de complir que la suma de les seves probabilitats sigui u:

$$1 = \sum_m \text{prob}(m) = \sum_m \langle\psi| M_m^\dagger M_m |\psi\rangle$$

La diferencia entre aquesta manera de fer les mesures i elevar els coeficients al quadrat, és que l'equació 2.3 és una forma més general, on en comptes de mesurar en la base computacional, és pot mesurar en qualsevol base. A més a més, utilitzant aquest mètode no es necessari saber la composició²¹ del estat que vols mesurar.

Per mesurar en la base computacional un *statevector* s'utilitzen operadors de mesura derivats de la base computacional amb productes exteriors. Per crear l'aplicació lineal M_i associat a la base computacional $|i\rangle$ s'agafa el producte exterior de la base:

$$M_i = |i\rangle \langle i|$$

Per tant la probabilitat que la mesura del estat $|\psi\rangle$ resulti en $|0\rangle$, és:

$$\text{prob}(|0\rangle) = \langle\psi|0\rangle \langle 0|^\dagger |0\rangle \langle 0|\psi\rangle$$

Per $|\psi\rangle = |0\rangle$ tenim que²²:

$$\begin{aligned} \text{prob}(|0\rangle) &= \langle 0|0\rangle \langle 0|^\dagger |0\rangle \langle 0|0\rangle \\ &= \langle 0|0\rangle \langle 0|0\rangle \langle 0|0\rangle \\ &= \langle 0|0\rangle \langle 0|0\rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

²¹ Els coeficients del estats base que descomponen el vector.

²² Cal notar que $|0\rangle \langle 0|^\dagger = |0\rangle \langle 0|$ i que $|0\rangle$ és un vector unitari.

El resultat té sentit degut a que si mesurem $|0\rangle$ en la base $|0\rangle$, esperem que el resultat sigui 1.

2.4 Matriu de densitat

Una serie de qubits es pot representar tant per un vector com per una matriu, anomenats *statevector* i *density matrix*, respectivament [8]. En aquesta secció aniré ràpidament sobre el concepte de la matriu de densitat i com les operacions que s'apliquen a un *statevector* poden ser aplicades a una *density matrix*. Després parlaré del mesuraments parcial d'un sistema, un concepte que es important per la part experimental del treball.

Una matriu densitat és la representació matemàtica d'un estat quàntic a partir de d'un matriu, es a dir, d'un operador. Aquesta representació serveix descriure sistemes quàntics que no són completament coneguts. Concretament aquests operadors són conjunts de estats quàntics, per un sistema que es descriu amb el estats $|\psi_i\rangle$ que tenen probabilitats p_i ²³ la matriu densitat del sistema ρ [20]:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

Cal matriu densitat pot ser simplement $|\psi\rangle \langle \psi|$ per un estat qualsevol $|\psi\rangle$, per exemple la matriu que representa $|0\rangle$ és:

$$\rho = |0\rangle \langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'evolució d'un estat ρ que descriu un sistema quàntic, al igual que amb els vectors, s'efectua a partir d'operadors unitaris²⁴, d'aquesta manera tenim que la evolució d'un operador densitat és:

$$\sum_i p_i U |\psi_i\rangle \langle \psi_i| U^\dagger = U \rho U^\dagger$$

²³_i és l'índex que relaciona un estat a un probabilitat.

²⁴Recorda que han de preservar la norma del vector, i en el cas de les matrius la seva traça.

Al igual que es fan mesures en *statevectors*, les podem amb les *density matrices*. Per operadors de mesura M_m , tenim que la probabilitat de tindre l'estat m és:

$$\begin{aligned}\text{prob}(m) &= \langle \psi_i | M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle = \text{tr}(M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle \langle \psi_i |) \\ &= \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)\end{aligned}$$

També tenim que l'estat $|\psi_i\rangle$ després de la mesura m és [20]:

$$|\psi_i\rangle = \frac{M_m |\psi_i\rangle}{\sqrt{\langle \psi_i | M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle}} = \frac{M_m |\psi_i\rangle}{\sqrt{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}} \quad (2.8)$$

La equació 2.8 es pot reescriure en termes d'una matriu de densitat després d'una mesura:

$$\begin{aligned}\rho_m &= \sum_i p_i \frac{M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i| M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)} \\ &= \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}\end{aligned}$$

Perquè això sigui cert els operadors de mesura M_m , ha'n de satisfer:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I$$

Per a tots els estats possibles m .

Per últim s'ha de recordar que les matrius densitat al igual que els vectors d'estat han de tenir certes característiques:

1. La traça de ρ ha d'equivaler 1.
2. ρ ha de ser un operador positiu²⁵.

²⁵Un operador positiu A es aquell que $\langle \psi | A | \psi \rangle \geq 0, \forall |\psi\rangle$.

2.1 Matriu de densitat reduïda

Una aplicació important dels operadors de densitat és la descripció d'estats parcials amb el operador de densitat reduït, i per tant la descripció dels mesuraments parcials.

Al tindre un sistema físic compost de dos sistemes A i B que es descriu per una matriu de densitat ρ^{AB} , la matriu de densitat reduït del sistema A és:

$$\rho^A = \text{tr}_B(\rho^{AB}) \quad (2.9)$$

On tr_B és la traça parcial sobre el sistema B , que es defineix per l'equació següent [21]:

$$\text{tr}_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| \text{tr}(|b_1\rangle\langle b_2|)$$

Amb $|a_1\rangle$ i $\langle a_2|$ sent estats vàlid pel sistema A , i $|b_1\rangle$ i $\langle b_2|$ sent-ho per B . El terme $\text{tr}(|b_1\rangle\langle b_2|)$ s'omet quan els els vectors del producte exterior son iguals i formen un operador de densitat vàlid, el qual la traça ha de donar 1.

No obstant aquesta definició no es pot utilitzar quan no saps com representar la matriu de densitat ρ com a un producte vectorial, en el qual un dels termes és l'estat que es traça afora. En altres paraules, en la equació 2.9 si no es coneix ρ^A i ρ^B per $\rho^{AB} = \rho^A \otimes \rho^B$, aquesta equació no serveix de res.

Degut a això en el llibre de text *Quantum Computing: A Gentle Introduction* [22] els autors defineixen la traça parcial d'una altre manera més general, on només s'ha de saber les bases del sistemes A i B i un operador vàlid per el sistema AB . Per una matriu de densitat ρ^{AB} que representa el sistema $A \otimes B$, la traça parcial de ρ^{AB} sobre B és:

$$\text{tr}_B \rho^{AB} = \sum_i \langle \beta_i | \rho^{AB} | \beta_i \rangle$$

On el conjunt β_i són les bases del sistema B . Les entrades de la matriu $\text{tr}_B \rho^{AB}$ representades en termes de les bases $|\alpha_i\rangle$ i $|\beta_j\rangle$ del sistemes A i B respectiva-

ment, són:

$$(\text{tr } \rho^{AB})_{ij} = \sum_{k=0}^{M-1} \langle a_i | \langle \beta_k | \rho^{AB} | \alpha_j \rangle | \beta_k \rangle$$

Amb la matriu sent:

$$\text{tr } \rho^{AB} = \sum_{i,j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{M-1} \langle a_i | \langle \beta_k | \rho^{AB} | \alpha_j \rangle | \beta_k \rangle \right) | \alpha_i \rangle \langle \alpha_j |$$

On N és la dimensió del sistema A i M és la dimensió del sistema B .

Es pot comprovar que aquestes definicions són correctes degut a que en els dos llibres utilitzen les seves definicions per tractar el mateix cas i obtenen el mateix resultat [23, 24].

2.1.1 Mesurament parcial

Es pot arribar a treure una mesura parcial sobre un sistema de qubits amb la traça parcial i operadors de mesura. En el paper fet per Huang et.al. [5] es descriu un estat ρ després d'un mesurament parcial Π_A sobre un sistema A del estat $|\psi\rangle$ com:

$$\rho = \frac{\text{tr}_A(\Pi_A |\psi\rangle \langle \psi|)}{\text{tr}(\Pi_A \otimes I_{2^{N-N_A}} |\psi\rangle \langle \psi|)}$$

El sistema A està compost per N_A qubits per tant la resta del estat $|\psi\rangle$ té $N - N_A$, on N és el nombre total de qubits del estat $|\psi\rangle$. D'aquesta manera $\Pi_A \otimes I_{2^{N-N_A}}$ té $2^N \times 2^N$ dimensions i pot ser multiplicat per la matriu $|\psi\rangle \langle \psi|$ que té les mateixes dimensions. No obstant sorgeix un problema amb el numerador de l'equació perquè Π_A no té les mateixes dimensions que $|\psi\rangle \langle \psi|$, encara no he pogut utilitzar aquesta equació adequadament. No sé com computar-la. Parlaré d'això més endavant en la part experimental d'aquest treball.

En el mateix paper es planteja la mateixa equació però per l'estat post-mesura expressat en forma de vector d'estat, molt semblat a l'equació 2.8. L'única diferencia es que en l'equació del paper no s'expressa el operador de mesura en la forma $M_m^\dagger M_m$, en canvi el autors ho expressen tan sols com Π_A , més concretament $I_{2^{N-N_A}} \otimes \Pi_A$. Potser la forma plantejada per els autors té en compte

el conjugat hermitià, però no estic segur. L'equació esmentada en l'article és la següent:

$$|\psi_m\rangle = \frac{I_{2^N-2^{N_A}} \otimes \Pi_A |\psi\rangle}{\sqrt{\text{tr}(I_{2^N-2^{N_A}} \otimes \Pi_A |\psi\rangle \langle\psi|)}}$$

Al igual que l'equació per les matrius de densitat parlaré d'aquesta contradicció en la part experimental.

2.5 Ordinadors quàntics

Tota aquesta teoria és aplicada a través de qubits físics que s'ubiquen al ordenadors quàntics. Hi han diversos tipus d'ordinadors quàntics, degut a que els qubits poden ser diversos sistemes. Poden ser fotons, chips de silici superconductors o ions atrapats per imants. No elaboraré més sobre aquest tema degut a que no és el tema central d'aquest treball, m'he centrat molt més en la teoria.

Però si vull generar imatges amb un ordinador quàntic, no necessito un? No, perquè puc simular l'evolució dels estats quàntics amb un ordinador, pensa que tot ser expressat amb àlgebra lineal. No obstant, quan s'intenta simular un sistema quàntic de molt qubits²⁶ un ordinador de sobretaula tardaria molt de temps i realment no és viable. Per més informació sobre algoritmes quàntics i com s'executen en ordinadors i en simuladors, es pot llegir l'apèndix [D](#).

²⁶Més de 50 per exemple.

Capítol 3

Intel·ligència artificial

Segurament has sentit parlar de l'intel·ligència artificial o de les xarxes neuronals, són conceptes que semblen abstractes però jo penso que son bastant intuïtius, intentaré que tú et sentis de la mateixa manera al final d'aquest capítol.

Intel·ligència artificial és un mot una mica ambigu, que és refereix a qualsevol algoritme que entra dintre del camps del *machine learning* o aprenentatge automàtic¹. Aquests algorismes simplement s'alteren a ells mateixos per fer millor la tasca que s'ha li ha designat, no importa quin és el objectiu o com ho aconseguix, lo que importa és si aprèn automàticament. Cal notar que els canvis que s'efectuen sobre si mateixos no han de ser predeterminats, si l'algoritme té una llista de les instruccions que va executant segon la situació no seria ven bé una intel·ligència o un algoritme de *machine learning*.

La manera que tenen aquests algorismes d'alterar-se a si mateixos usualment es canviant els paràmetres de les operacions dels quals estan compostos. Per exemple, en una regressió lineal, s'actualitzen els paràmetres de la recta que representa la tendència de les dades, com es pot veure a la figura reffig:leastquares.

Hi han diversos mètodes per ajustar els paràmetres, el més comú es ajustar-los segons la derivada d'una funció anomenada funció de pèrdua o *loss function*,

¹No obstant, col·loquialment s'utilitza per denominar a qualsevol algoritme o robot que és intel·ligent o sembla que és intel·ligent.

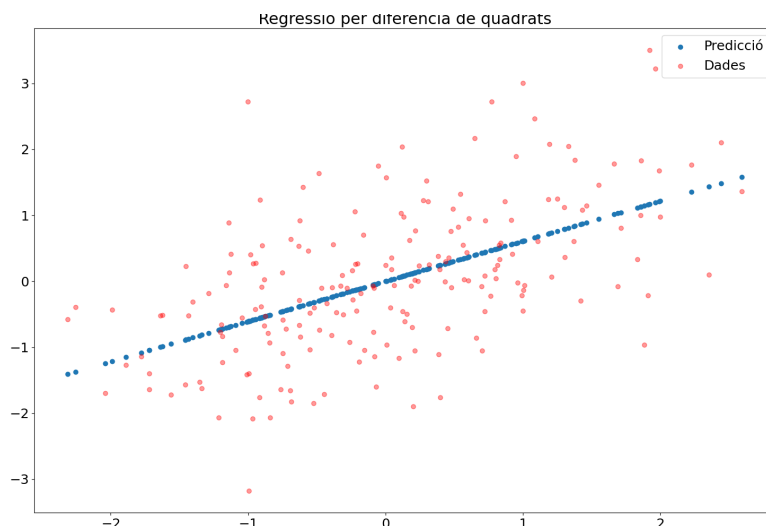


FIGURA 3.1: Exemple d'una regressió lineal de dades generades al atzar. Veure el codi a [E.1.0.1](#).

usualment representada per la lletra \mathcal{L} . Aquesta funció representa els objectius del programa i pot ser minimitzada o maximitzada, per exemple, en una regressió lineal es vol reduir la distància entre els *data points* o dades i la línia que prediu la tendència, Fig. 3.1.

Degut a que es poden realitzar molts tipus de funcions de pèrdua, ja sigui per la forma de la funció en si o per els paràmetres de la funció. Per conseqüència, el programes de *machine learning* són extremadament versàtils, la màxima expressió d'això es pot veure en les xarxes neuronals o *neural networks*. Aquests algoritmes són els més potents, complexos i polivalents. Precisament utilitzo un d'aquests per generar les imatges. Són àmpliament utilitzats pel reconeixement d'imatges, traducció i sintetització de textos, conducció automàtica, algoritmes de recomanació i es clar, generació d'imatges [\[citation\]](#).

3.1 Xarxes neuronals

Aquests tipus d'algoritmes que entren dintre de la categoria de *machine learning* no tenen un nombre que fa recordar a les xarxes de neurones que formen part del nostre sistema nerviós central per casualitat, estan directament inspirades en els nostres cervells. Són uns programes que consisteixen en la connexió de diverses operacions anomenades neurones, que conjuntament formen una xarxa,

la qual s'organitza a partir de capes. Segons la variació del tipus de neurona i la estructura que aquestes formen podem tindre algoritmes destinats a fer diferents tasques. Això juntament amb els diversos tipus de funció de pèrdua contribueix a la versatilitat de les xarxes neuronals. Aquests models d'intel·ligència artificial constitueixen el camp del *deep learning* o aprenentatge profund. S'anomenen d'aquesta forma per referenciar la profunditat d'aquests algoritmes, es a dir el nombre de capes que tenen.

Una neurona consisteix simplement en una suma ponderada, una altra suma i una funció no lineal que s'aplica al resultat. Les neurones tenen com input i output vectors. Per tant, una neurona es pot definir com:

$$\sigma \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i + b \right) = \sigma (w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n + b)$$

Per σ sent una funció no lineal i n sent la mida del vector. Després estan el paràmetres, w_i i b , anomenats *weights* i *bias*. Aquests paràmetres tenen una utilitat pot clara, per això tenim que parlar en termes d'importància. En altres paraules, com afecta cada paràmetre a una part de la xarxa i també com afecta aquest al output de la xarxa. Després de deixar clara l'equació s'ha d'il·lustrar la interconnectivitat que tenen les neurones entre si.

Una neurona pot tindre diversos inputs que venen de diverses neurones, el mateix passa amb els outputs. Depèn de com es connectin entre si o de quina operació addicional fan les neurones, aquestes formen diversos tipus de capes. A partir de les tipus de capes i el nombre d'aquestes es com s'especifica l'arquitectura d'una xarxa neuronal. Tornant a l'utilitat del paràmetres, un *weight* especifica com de forta es la relació entre una neurona en una capa i una altre neurona en una capa veïna. I un *bias* especifica com d'important és una neurona, degut a que aquest número afecta al resultat de la suma de la neurona, fent que aquesta sigui més alta.

Usualment l'arquitectura es divideix en tres parts la capa d'input, les capes ocultes i la capa d'output. La quantitat de neurones que hi han a la capa d'inputs es la que defineix la mida del vector que es dona com input a la xarxa, degut a

que cada element del vector es dona a cada neurona amb la capa. El mateix passa amb la capa d'outputs, cada output de cada neurona de la capa acaba sent un element en el vector que surt de la xarxa. Per tant el número de neurones que té cadascuna d'aquestes dues capes, especifica la mida del vectors d'input i d'output de la xarxa respectivament. Per exemple si es vol donar com input a una xarxa una imatge de 16 per 16 píxels² calen 256 neurones en la capa d'inputs, una per cada pixel.

En canvi, les *hidden layers*, es a dir les capes ocultes, no tenen una mida determinades, el mateix passa amb el nombre d'aquestes que té la xarxa. Depenen de cada cas, la quantitat de neurones que tenen aquestes capes i també el nombre d'aquestes, varia. Això, juntament amb el diversos tipus de capa és el que dona la versatilitat d'aquests algoritmes, com ja he comentat.

Entre els diferents tipus de capes que poden tindre les xarxes neuronals, el més comú i simple d'aquestes és una *fully connected layer*, o una capa completament connectada, veure la figura 3.2. Les neurones que formen aquesta capa estan connectades a totes les neurones de la capa anterior i així mateix a totes les neurones de la capa següent. La forma que tenen aquestes capes de variar es mitjançant la mida que tenen, es a dir, la quantitat de neurones que tenen. També es pot variar la funció d'activació que tenen, que ha de ser una funció no lineal. La més utilitzada és la sigmoide:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

3.2 Descens del gradient

Una vegada he parlat de les xarxes neuronals, he de comentar com aquestes evolucionen al llarg del temps, es a dir com es van actualitzen a si mateixes per complir la tasca que s'ha li's ha encomanat. Ja he comentat que existeix una funció anomenada *loss function*, la qual es deriva per actualitzar els paràmetres

²Una imatge en blanc i negre.

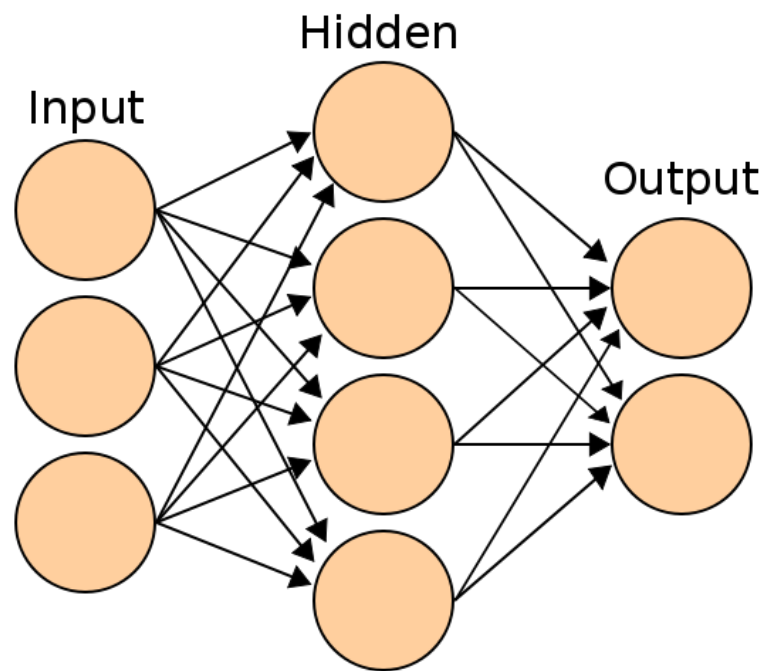


FIGURA 3.2: Usualment les xarxes neuronals es representen d'aquesta forma, amb fletxes i boles. Les boles representarien cada neurona i les fletxes mostren com estan connectades. La *hidden layer* d'aquesta representació es pot veure que és una *fully connected layer* degut a com està connectada a les altres capes, rebent cada neurona el output de cada neurona anterior.

de la xarxa. En aquesta secció parlaré més en profunditat d'aquest mecanisme que s'anomena el descens (o ascens) del gradient.

Es comença amb la funció de pèrdua, que esmenta els objectius de la xarxa. Els punts mínims d'aquesta funció representen els punts òptims de la xarxa, els punts als quals es vol arribar. Per exemple, si es volen classificar imatges de gats i gossos, s'assignen dos etiquetes a les imatges, 1 als gats i 0 als gossos. Utilitzaré com a exemple la funció de pèrdua *binary cross entropy* o *log Loss* per poder il·lustrar com una funció pot representar si una xarxa neuronal està fent el seu treball o no. La funció *binary cross entropy* és la següent:

$$\mathcal{L} = -t \log(y) - (1 - t) \log(1 - y) \quad (3.1)$$

Per t_i sent la etiqueta real que ha de tenir l'imatge i y_i sent la etiqueta que el model dona a l'imatge. Per tant si l'etiqueta real és 1, l'equació acaba sent:

$$\mathcal{L}_1 = -\log(y)$$

I el cas contrari per $t = 0$:

$$\mathcal{L}_0 = -\log(1 - y)$$

Si donen com input l'imatge d'un gat i el programa es dona com output 0.92 tenim que la pèrdua és de:

$$\mathcal{L} = -t \log(y) - (1 - t) \log(1 - y) = -\log(0.92) \simeq 0.0834$$

En canvi, si el programa es dona un output de 0.15 la pèrdua seria:

$$\mathcal{L} = -t \log(y) - (1 - t) \log(1 - y) = -\log(0.15) \simeq 1.897$$

Es pot veure que si l'etiqueta que posa el model s'allunya més de l'etiqueta real la pèrdua és més gran. El mateix es pot veure per les imatges del gossos o en

altres paraules les imatges que haurien de tenir etiqueta zero:

$$\mathcal{L} = -0 \cdot \log(0.89) - (1 - 0) \cdot \log(1 - 0.89) = -\log(1 - 0.89) \simeq 2.207$$

$$\mathcal{L} = -0 \cdot \log(0.08) - (1 - 0) \cdot \log(1 - 0.08) = -\log(1 - 0.08) \simeq 0.0834$$

Per tant quan més pròximes estén les prediccions (els outputs del model) a les etiquetes del programa, menor serà la pèrdua, llavors al minimitzar la funció es trobarà el punt òptim on totes les prediccions seran iguals a les etiquetes.

A aquests punts òptims s'han arribat actualitzant els paràmetres a través de la derivada de la funció, concretament a través del gradient. El gradient d'una funció és un vector on els seus elements són la derivada parcial respecte a cada paràmetre (per aclarir, un element per paràmetre). El gradient d'una funció $f(\theta)$ es representa com $\nabla f(\theta)$, i es pot escriure en forma de vector com:

$$\nabla f(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_{n-1}} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}$$

No fa falta fixar-se en lo que és exactament un gradient, l'únic que importa es que cada paràmetre de la xarxa neuronal³ s'ha d'actualitzar acorde amb la derivada. Això es pot entendre com canviar lleugerament un paràmetre acord amb la direcció. Aquesta direcció es indica per la derivada. L'objecte que s'encarrega d'actualitzar-los, s'anomena optimitzador. L'optimitzador més senzill que hi ha és:

$$\theta_i^t = \theta_i^{t-1} \pm \eta \frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta_i^{t-1}}$$

Aquí s'actualitza un paràmetre θ_i , he posat el superíndex t per expressar que s'actualitza, passant d'un temps $t - 1$ a t . En aquesta equació utilitzo θ per expressar tots els paràmetres del model. En els optimitzadors s'afegeix un número

³Cada *weight* i cada *bias*.

η anomenat *learning rate*. Usualment és un número que petit⁴, aquest paràmetre especifica com de ràpid cabien els paràmetres. El *learning rate* es pot anar ajustant depenen de la situació, del model en el qual s'implementi. Alteracions en aquest pot causar diversos fenòmens tan negatius com positius. Cal notar que en l'optimitzador he utilitzar el signe \pm perquè si és positiu significa que s'està ascendint pel gradient, i si és negatiu s'està descendint. No obstant, usualment s'utilitza el signe negatiu per convenció.

Al fer la derivada de la funció de pèrdua es pot veure immediatament que s'ha d'aplicar la regla de la cadena, ja que s'ha de fer la derivada del output de la xarxa neuronal degut a que depèn del paràmetre. Al ser les xarxes neuronals funcions molt complexes, s'utilitza una tècnica concreta per efectuar la derivada de la xarxa neuronal anomenada *backpropagation*.

3.1 Backpropagation

Al aplicar la regla de la cadena 'de fora cap a dins' s'ha de començar a derivar per l'última capa i acabar per la primera, d'aquí ve el nom *backpropagation* perquè es propaga l'error en direcció contrària. Mentre que quan es dona un input a xarxa, s'anomena forward propagation o *forward pass*.

No entraré en profunditat sobre la *backpropagation* en aquesta secció, només en limitaré a esmentar la manera en la qual es calcula.

L'activació d'una neurona j en l'última capa L de la xarxa es defineix com:

$$a_j^L = \sigma \left(\sum_{k=0}^{n_{L-1}} w_{jk}^L a_k^{L-1} + b_j^L \right)$$

On a_k^{L-1} és l'activació d'una neurona k en la capa anterior $L - 1$, i on el *weight* w_{jk}^L és el paràmetre que expressa en que mesura es connecta la neurona j a la neurona k . Com ja he dit, expressa com de forta és aquesta connexió. Utilitzant aquesta definició ja es poden fer les derivades. La suma es fa al llarg de n_{L-1} que és el nombre de neurones que té la capa $L - 1$.

⁴Entre 0.1 i 0.001 per exemple.

No obstant, convé definir el terme z_j^L per procedir a fer les derivades. Simplement és l'equació d'una neurona però sense la funció d'activació:

$$z_j^L = \sum_{k=0}^{n_L-1} w_{jk}^L a_k^{L-1} + b_j^L$$

L'objectiu és obtenir la derivada de la *loss function* respecte a un *weight* qualsevol i un *bias* qualsevol. Per tant, s'han d'obtenir les següents derivades parcials:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{jk}^L} \text{ i } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_j^L}$$

Començaré amb la derivada del *weight*, a aplicar la regla de cadena obtenim que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{jk}^L} = \frac{\partial z_k^L}{\partial w_{jk}^L} \frac{\partial a_j^L}{\partial z_j^L} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j^L} \quad (3.2)$$

L'última derivada, 'la que està més afora' és simplement la derivada de la funció de pèrdua respecte al output de la xarxa. En el cas de la funció de pèrdua *Squared Error*, és⁵:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j^L} = \frac{\partial}{\partial a_j^L} (a_j^L - y)^2 = 2(a_j^L - y)$$

On y és la predicció desitjada del model. A continuació, la derivada del resultat de la neurona a_j^L respecte a z_j^L , que és la derivada de la funció d'activació.

$$\frac{\partial a_j^L}{\partial z_j^L} = \sigma'(z_j^L)$$

Per últim tenim la derivada de z_j^L respecte al *weight*:

$$\frac{\partial z_j^L}{\partial w_{jk}^L} = a_k^{L-1}$$

La derivada és la neurona anterior, cal recordar que el *weight* lo que fa es establir la connexió entre dues neurones, les neurones j i k .

⁵No aplico la regla de la cadena en aquesta derivació perquè ja es té en compte en l'equació 3.2

Finalment es pot veure que l'equació 3.2 es pot escriure com⁶:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{jk}^L} = \frac{\partial z_k^L}{\partial w_{jk}^L} \frac{\partial a_j^L}{\partial z_j^L} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j^L} = a_k^{L-1} \sigma'(z_j^L) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j^L}$$

No obstant falta un detall, la derivada d'una neurona que passa el seu resultat a diverses neurones. Aquesta derivada és:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j^{L-1}} = \sum_{j=0}^{n_{L-1}} \frac{\partial z_j^L}{\partial a_k^{L-1}} \frac{\partial a_j^L}{\partial z_j^L} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j^L}$$

La suma representa que aquesta neurona té un output que es propaga cap a endavant i afecta a les neurones que estan més endavant.

Amb aquestes derivades ja es pot desenvolupar el vector gradient, en el qual estan totes les derivades de la *loss function* respecte a tots els paràmetres. Concretament, la mitjana d'aquestes derivades, perquè es vol actualitzar els paràmetres per poder minimitzar la pèrdua en totes les dades disponibles. En altres paraules, si es vol que una xarxa reconegui imatges de gats, se li té que ensenyar moltes imatges de gats. Si només se li ensenya una, només aprendrà a reconèixer aquella imatge.

Tota aquesta teoria es veurà implementada en la part pràctica en forma de codi, degut a que m'he vist amb la necessitat de tenir una xarxa neuronal programada des de zero. Usualment s'utilitzen plataformes com *TensorFlow* [25] o *PyTorch* [26].

3.3 Generative adversial networks

Com ja he dit hi han molts tipus de xarxes neuronals, no obstant, en aquest treball només em centraré en un tipus en específic, les xarxes generatives adversatives o *generative adversial networks (GAN)* en anglès.

⁶Deixo l'última derivada $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j^L}$ sense reescriure perquè aquest terme pot variar depenent de la funció de pèrdua que s'utilitza.

Aquestes xarxes, com el seu nom diu, s'utilitzen per generar dades, usualment s'apliquen a imatges. Es troben al darrera de projectes com *This person does not exist* [27, 28], una pàgina web que et genera una cara d'una persona que no existeix, degut a que es una cara generada artificialment a partir d'aquest tipus de models.

Aquests tipus de models van ser introduïts per primera vegada al 2014 per Ian Goodfellow [4], des de llavors s'han convertit en un dels models de *deep learning* més sòlids i utilitzats.

Aquests algoritmes consisteixen en dos models (xarxes) diferents, un generador i un discriminador, amb objectius oposats que s'enfrenen entres si. Per aquesta raó tenen la paraula adversatives en el nom. El generador i discriminador es poden entendre com uns falsificador de bitllets i uns policies que els volen atrapar, respectivament. Els policies es tornen millors al seu treball, podent distingir millor entre els bitllets falsificats i els reals. Els falsificadors responen a això millorant les seves tècniques de falsificació, per tant els policies han de millor encara més. Es un cicle en el qual aquestes forces antagonistes es fan millorar l'una al altra. El mateix passa amb el generador i el discriminador. El discriminadors aprèn a distingir entre les imatges reals i les imatges falses que fabrica el generador, mentre que el generador aprèn a enganyar al discriminador.

Si s'especifiquen bé els objectius de cada model, arribem a *zero sum game*⁷ de teoria de joc. La manera en la que es soluciona es al arribar a un equilibri de Nash [5], on el discriminador no sap diferenciar entre les imatges reals i les falses⁸.

En el paper original [4] s'esmenta un pseudocodi per aquests models, que he representat en l'algoritme 1. En aquest és parla de *minibatch* que és simplement un grup d'imatges o de dades, i de soroll que són dades generades aleatòriament i que es poden com input al generador perquè aquest no generi exactament les mateixes imatges cada vegada. El soroll afegeix variació als outputs del generador, però sempre s'intenta en una petita quantitat.

⁷Un *zero sum game* es simplement un joc entre dos jugadors en que per guanyar un l'altre ha de perdre e.g. joc d'estirar la corda entre dos equips.

⁸Que el discriminador no sàpiga diferenciar no implica arribar a un equilibri de Nash, aquest concepte es definit d'una altra forma.

Algorithm 1 Pseudocodi per una xarxa generativa adversativa

for número de interaccions **do**
 for k pasos **do**
 Treure minibatch de m mostres de soroll $\{z_i, \dots, z_m\}$ de la distribució de soroll $p_g(z)$
 Treure minibatch de m mostres d'exemples $\{x_i, \dots, x_m\}$ de la distribució d'exemples $p_{\text{data}}(x)$
 Actualitzar el discriminador ascendint el seu gradient:

$$\nabla_{\theta} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [\log D(x_i) + \log(1 - D(G(z_i)))]$$

end for
 Treure minibatch de m mostres de soroll $\{z_i, \dots, z_m\}$ de la distribució de soroll $p_g(z)$
 Actualitzar el generador descendent el seu gradient:

$$\nabla_{\theta} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 - D(G(z_i)))$$

end for

En el pseudocodi es pot veure que primer s'actualitza el discriminadors k vegades i després el generador una sola vegada. Això és perquè interessa que el discriminador sàpiga distingir les imatges ràpidament, per poder indicar al generador com generar les imatges. Si el discriminador esmenta que unes imatges de gats són imatges de gossos, el generador fabricarà imatges de gossos, perquè ell aprèn a partir del que indica el discriminador.

També és pot veure com és la funció de pèrdua, que en el paper anomenen *minimax loss function* que és la mateixa que la *Binary Cross Entropy*. Es pot veure que en la BCE, quan t és zero, que seria l'etiqueta per les imatges falses del generador dona $\log(1 - y)$. En el cas contrari, per t igual a un, que expressa que les imatges són reals dona $\log(y)$.

Capítol 4

Generació d'imatges amb un ordinador quàntic

Investigadors al veure el potencial que tenen els ordinadors quàntics i l'intel·ligència artificial, no es van poder resistir a crear un nou camp d'investigació, el *Quantum Machine Learning (QML)*, o aprenentatge automàtic quàntic. Al igual que les xarxes neuronals són les estrelles dintre del *machine learning*, les xarxes neuronals quàntiques ho són dintre del *quantum machine learning*. Des de que es va començar a investigar aquests algoritmes s'han arribat a implementar diversos tipus de xarxes neuronals en algoritmes quàntics. Principalment pel que fa a la generació i classificació d'imatges i dades.

No obstant aquests algoritmes no són completament quàntics, usualment consisteixen en actualitzar els paràmetres d'un circuit quàntic perquè aquest generi les dades. On les actualitzacions dels paràmetres es calculen amb un ordinador clàssic. Això es veure molt clar quan expliqui la part pràctica del treball.

Abans de continuar amb el capítol he de dir que existeixen diversos algoritmes dintre del *quantum machine learning*, no tot en la vida són xarxes neuronals. Per exemple, es pot donar a terme classificació de dades mitjançant *support vector machines*¹ o amb un anàleg de la regressió lineal [31]. No obstant, en aquest capítol em centraré exclusivament en les xarxes neuronals quàntiques.

¹Classificar dades de dimensions petites en espais vectorials molt grans [29, 30].

4.1 Descens del gradient quàntic

De moment tindre en consideració que una xarxa neuronal quàntica és un circuit quàntic parametritzat, és a dir que simplement té paràmetres. Això juntament amb una funció de pèrdua i dades que corresponen a aquesta es suficient per explicar com s'actualitzen els paràmetres.

L'objectiu principal es avaluar la derivada respecte amb un paràmetre. Sorprenentment és dona a terme d'una manera més senzilla que amb una xarxa neuronal clàssica. Simplement s'utilitza la definició de la derivada per avaluar-la. S'altera lleugerament un sol paràmetre i es treu la diferencia entre els dos outputs del circuit quàntic. Aquest mètode per avaluar la derivada s'anomena *parameter shift* [2, 32].

Si un circuit quàntic té paràmetres θ representats per un vector, per un paràmetre θ_i , es defineix un vector de pertubació Δ_i ple de zeros, de igual mida que θ , però que en la posició de θ_i té un 1. A partir del vector de pertubació es pot definir la derivada de la funció de pèrdua $\mathcal{L}(\cdot)$ respecte al paràmetre θ_i :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \mathcal{L}(\theta) = \mathcal{L}(\theta + \frac{\pi}{4} \Delta_i) - \mathcal{L}(\theta - \frac{\pi}{4} \Delta_i)$$

Es pot veure que el vector $\theta \pm \frac{\pi}{4} \Delta_i$ és el vector θ però amb una petita variació en la posició i que es la que correspon al paràmetre θ_i . Amb aquest mètode ja es pot desenvolupar pràcticament qualsevol actualització de paràmetres, aquesta es la part senzilla de les xarxes neuronals quàntiques, la dificultat radica en la forma dels circuits quàntics que les componen.

4.2 Circuits quàntics per xarxes neuronals

L'única certesa sobre aquests circuits es que han de estar parametritzats. Usualment estan compostos per una gran quantitat de portes rotacionals parametritzades, les quals ja he presentat en les equacions 2.2, 2.3 i 2.4.

El problema que esmenten en els articles sobre xarxes neuronals quàntiques es que s'han d'implementar funcions no lineals en els circuits, degut a que la complexitat de les xarxes neuronals radica en aquest tipus de funcions. A primera vista pot semblar una tasca quasi impossible a causa de la naturalesa lineal de la computació quàntica. No obstant, durant els anys s'han desenvolupat diverses tècniques per donar a terme aquesta fita.

A partir d'una combinació de rotacions i portes que entrellacen qubits es pot arribar a implementar una funció semblant a la tangent hiperbòlica² en un circuit quàntic [33]. No obstant, aquest mètode té un gran desavantatge, consisteix en un circuit que s'ha d'anar mesurant i repetint per veure si funciona correctament, els autors parlen de *repeat until success* degut a que s'ha de mesurar un qubit i mirar si dona $|0\rangle$ per assegurar que aquesta funció ha sigut aplicada correctament³.

En un article posterior⁴, en el qual els autors generen distribucions contínues a partir d'una xarxa generativa adversarial quàntica. S'especifica que les no-linearitats presents en l'algoritme no formen part del circuit quàntic, es a dir, funcions que s'implementen clàssicament als resultats dels circuits quàntics o a les dades que s'introdueixen als circuits [34]. Aquesta és una mesura molt simple que possiblement implementaré durant la part experimental.

Al 2019 es va publicar un dels articles que més m'agraden⁵ Cong et al. (2019) [35], en ell els autors presenten una xarxa neuronal convolucional quàntica. No fa falta entrar en detall sobre aquestes xarxes. Però he de dir que es diuen convolucionals perquè s'apliquen convolucions a les imatges que es volen classificar, es multiplica una part de l'imatge per una matriu que s'anomena filtre [36]. Simplement tenen un altre tipus de capes que no són les capes completament connectades. , l'única afirmació dels autors que s'ha de recalcar és que a partir de reduir els graus de llibertat (*degrees of freedom*) en els circuits quàntics,

²La tangent hiperbòlica també s'utilitza com a funció no-lineal en el *deep learning*.

³En cas de que doni $|1\rangle$, s'ha de repetir el procés.

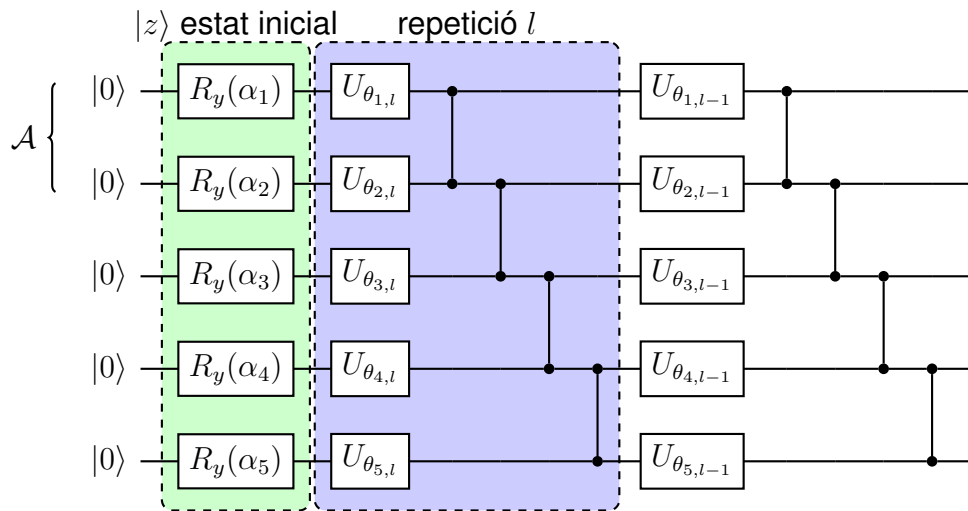
⁴Realitzat en part per un dels autors del mètode anterior

⁵Utilitzen imatges de gats a les figures i és un dels primers articles que vaig llegir d'aquest camp fa més de dos anys. A més a més la xarxa neuronal esmentada en l'article està completament programada en TensorFlow Quantum [2], i això sempre s'agraeix.

sorgeixen no-linearitats. Això es degut als mesuraments parcials que es donen a terme en un moment determinat del algoritme.

Un dels mètodes que m'ha semblat més interessant, és l'implementat en una altra xarxa convolucional quàntica⁶, on al aplicar els filtres que s'utilitzen per la convolució s'implementa una funció no-lienal. Aquest mètode no el puc arribar a comprendre, les equacions que utilitzen són molt complexes i no sembla que arriben a utilitzar un mesurament parcial en cap moment. Simplement els autors expressen una equació i diuen que no és lienal, i no puc arribar a entendre perquè ho és.

Finalment he de parlar del paper que he seguit per realitzar aquest treball, Huang et. al. (2021) [5], en el qual igual que en l'article de Cong et. al. (2019) sobre xarxes convolucionals quàntiques, s'utilitzen mesuraments quàntics per introduir no-linearitats al algoritme. Concretament implementen aquests mesuraments tant en el generador quàntic d'imatges, com en el discriminador. Els circuits quàntics que utilitzen pel generador d'imatges són de la següent forma:



On les portes R_y amb un paràmetre α_i són les dades que s'introdueixen en el circuit, és simplement soroll que crea varietat en els outputs dels circuits, al igual que el soroll que s'utilitza en les GAN (algoritme 1). El circuit consisteix en aquestes portes R_y i la repetició- l amb unitàries i les portes CZ. En aquest cas el

⁶En l'article també utilitzen l'imatge d'un gat com a exemple a les il·lustracions. Es que els gats i els físics tenen una llarga història.

circuit té dues repeticions- l , amb $l = 2$. Al hora de mesurar és fa un mesurament parcial però els autors especifiquen que es fa d'una forma concreta.

Per un estat $|\Psi_\alpha\rangle$ que surt del circuit especificat abans, l'estat $\rho(z)$ després d'una mesura parcial sobre el qubits \mathcal{A} , és:

$$\rho(z) = \frac{\text{tr}_{\mathcal{A}}(\Pi_{\mathcal{A}} |\Psi(z)\rangle \langle \Psi(z)|)}{\text{tr}(\Pi_{\mathcal{A}} \otimes I_{2^{N-N_{\mathcal{A}}}} |\Psi(z)\rangle \langle \Psi(z)|)}$$

Els autors afirmen que aquest estat $\rho(\alpha)$ és una funció no lineal del estat $|z\rangle$ que es defineix per les primeres portes R_y que s'apliquen en el circuit⁷. Això es degut a que tant el denominador com el numerador de l'equació són funcions de $|z\rangle$.

No obstant, en altres treball com per exemple Zoufal et. al. (2019) [37], on es defineix una GAN que a partir de circuits quàntics genera distribucions de probabilitat. Els autors no mencionen la necessitat de tenir funcions no lineals en alguna part del algoritme.

⁷En la figura (-), aquestes operacions estan indicades de color verd.

Part II

Part Experimental

Capítol 5

Plantejament de l'hipòtesi

Al ser l'implementació de les funcions no-lineal un assumpte lleugerament conflictiu entre els diversos models de xarxes neuronals quàntiques havia decidit des de un principi centrar-me en aquest assumpte en concret. Podria haver anat per al altres vies com la generació d'imatges amb color o l'implementació d'un d'una porta X en una part específica del circuit quàntic que genera les imatges, que al posar-la o no, el model generes dos tipus d'imatge a través del mateix circuit. Tanmateix, les dues propostes requerien de desenvolupar nous conceptes, llavors al no tindre el coneixements necessaris per poder desenvolupar-les vaig descartar aquestes opcions.

La pregunta a investigar és la següent:

L'incorporació d'una funció no-lineal en el circuit quàntic del model, a partir d'una mesura parcial, causa que el model arribi més ràpidament al punt òptim?

En altres paraules, volia veure si la mesura parcial repercutia positivament en la eficiència del model, fent que la generació de les imatges desitjades es dones a terme en un menor temps.

Sembla una qüestió senzilla, però la dificultat del experiment radica en crear la xarxa neuronal en si, amb totes les seves parts accessibles per poder fer els canvis que siguin necessaris. L'única manera de fer-ho seria programant el model.

Capítol 6

Programació del model

Posteriorment a començar a programar el model, jo ja sabia que ho havia de realitzar en Python, ja creat petits algorismes abans de començar aquest treball i tenia experiència construint i executant circuits quàntics amb Cirq, una eina desenvolupada per Google. A més a més, sabia de l'existència de TensorFlow Quantum [2], una altra eina desenvolupada per Google destinada a la creació de xarxes neuronals quàntiques i algorismes de *quantum machine learning* en general. També tenia experiència en aquest *framework*. Llavors TensorFlow Quantum va ser la meva primera opció, tenia pensat basar el meu codi en el tutorial de TensorFlow sobre una xarxa convolucional generativa adversarial. Havia de canviar el generador per un circuit quàntic que s'optimitza a partir d'un diferenciador automàtic provinent de TensorFlow Quantum. Els canvis que corresponien al discriminador simplement havien de ser un canvi d'arquitectura, passar d'una xarxa més complexa a una de més simple que només consistia en unes poques capes totalment connectades.

El primer problema que em vaig trobar va ser la creació del *data set* que alimentar a la xarxa discriminativa. A causa de la peculiaritat de les imatges que volia generar¹. Recordo que en va costar arribar a tindre la solució a aquest problema.

¹Usualment les imatges que componen els *datasets* utilitzats en *deep machine learning* són extrems de bancs d'informació amb mides enormes. En el meu cas, havien de ser generades per mi, per tant havia de convertir matrius de Numpy en *datasets* per TensorFlow.

6.1 Discriminador

Una vegada ja tenia fet el *dataset* em vaig posar a fer el model. En el tutorial per una **DCGAN (GAN conolucional)** els dos models eren entrenats per la funció `train_step`. En aquesta es crida a la funció `tf.GradientTape` per guardar el diferenciador automàtic. El problema que vaig dintre amb aquesta funció es que directament no funcionava amb el discriminador, aquest no era optimitzat. Després de intentar solucionar l'error pels meus propis medis, mirant la causa d'aquest i de buscar a forums la solució o causa, em vaig rendir. Ja havia estat uns quants mesos intentant desenvolupant el model amb TensorFlow i TensorFlow Quantum. Havia creat les capes del generador quàntic manualment, també ho havia fet amb el optimitzador. Tenia el model gairebé acabat, però al no poder optimitzar el discriminador em vaig veure obligat a canviar d'estrategia.

Existeixen dos grans *frameworks* per crear i executar circuits quàntics: Cirq [38], desenvolupat per Google i Qiskit [39], creat per IBM. Una vegada vaig decidir no continuar amb Cirq, havia de provar amb Qiskit. La veritat, havia d'haver començar amb Qiskit des de el principi, és més útil (té moltes més característiques), i el més important, té una gran comunitat, per tant, es més fàcil trobar solucions als error que pots tenir i és més fàcil trobar a persones disposades a ajudar-te.

Al igual que Cirq té un *framework* per poder desenvolupar xarxes neuronals, TensorFlow Quantum, Qiskit també té el seu PyTorch [26], no obstant no té una integració tan directa, ja que no estan desenvolupats per el mateix equip, ni la mateixa companyia.

Per tant, al canviar de Cirq a Qiskit, també havia de canviar de TensorFlow a PyTorch, no obstant, no tenia res d'experiencia amb PyTorch, sabia que seria més complicat, i tenia raó. No vaig ni aconseguir crear el *dataset* que contenia les imatges que alimentar al discriminador.

Després d'intetar-lo amb TensorFlow Quantum i amb PyTorch, vaig decidir prescindir de *frameworks* per crear models de *machine learning*, el discriminador,

al ser una xarxa tan simple, la podia crear des de zero. Llavors vaig començar a buscar codi, d'una xarxa neuronal que havia estat feta amb Numpy, una llibreria de Python per fer càlculs amb vectors i matrius que havia fer servir des de que vaig començar amb Python.

Després de provar dues opcions que més o menys m'agradaven², va aparèixer un repositori³ de Michael Nielsen, un dels autors de *Quantum Computation and Quantum Information* [8] que em va salvar.

El repositori tenia codi que estava estructurat d'una forma que m'agradaba i encara més important, que l'entenia. Inclús tènien diverses versions d'una xarxa neuronal, amb un nivell de complexitat diferent. Llavors, a partir del model més simple que havia en el repositori, veure el codi original al apèndix E.1.0.1, vaig començar a desenvolupar el discriminador.

Com es pot veure al codi final per el discriminador, he fet bastants canvis, però ho he canviat l'estructura o el funcionament teòric, la majoria són per tindre més funcionalitat, com per exemple l'enmagatzematge de les dades per poder al final veure-les en gràfic. Però el canvi més important és que inclou les dues formes d'optimitzar el model, amb dues funcions de pèrdua que funcionen de manera diferents però que són el mateix, la *Binary Cross Entropy* i la *MinMax*. Ja he parlat d'aquestes dues funcions en la part teòrica del treball, però a mode de recordatori, amb la primera s'agafa una imatge falsa o una real, i s'altera la funció, mentre que amb la *MinMax* depenent de si es una imatge falsa o una real, s'utilitza una funció diferent. Això en el codi està materialitzat en dues funcions⁴ diferents, `backprop_bce()` i `backprop_minimax()`. No fa falta entrar en detall sobre que va cadascuna de les funcions, degut a que, fan el mateix i no tenen ninguna diferencia en termes de eficàcia o rapidesa. Les vaig fer tan sols per comprovar que no hi hauria ninguna diferencia. El codi final del discriminadors es pot veure al apèndix E.1.0.2. També en el repositori del treball hi ha un altre arxiu anomenat `discriminator.py`, que conté una altre versió en la qual intentava implementar

²Busca codi estructurat d'una forma en concret, que estigui dissenyat amb *Object Oriented Programming*, una forma d'escriure codi en el qual tot s'implementa en un objecte.

³[link del repositori](#)

⁴Funcions de Python.

diverses funcions d'activació en el model, però no ho vaig aconseguir, tanmateix, no em preocupa perquè no es una part vital del treball, no passa res per tindre el discriminador només amb la sigmoide.

6.2 Generador

El desenvolupament de l'altre part del model, el generador, va ser molt diferent. Després de provar a fer-ho amb TensorFlow, sense resultats, no tenia altra opció que fer-ho tot manualment i jo mateix⁵, no obstant, ja tenia experiència en fer pseudo-xarxes neuronals quàntiques. Sabia perfectament el que tenia que fer, i com ho havia de fer. Implementar el mètode de *parameter shift* en els circuits quàntics de l'article en el que vaig basar el treball [5].

Una vegada vaig crear els circuits quàntics amb una funció fins a un punt en el qual sentia que ja estava tot perfecte, em vaig posar amb la optimització.

Penso que és més fàcil de fer que el *backpropagation* en una xarxa neuronal clàssica. Primer de tot cal remarcar que el model s'optimitza a partir d'un *batch*, es a dir, un grup d'imatges, en aquest cas, un grup de dades, extretes del *latent space*. Per tant, s'agafa la mitjana del errors de cada input, i s'actualitzen els paràmetres a partir d'aquesta mitjana. No es mira l'error d'un sol input per optimitzar, s'ha de mirar el de uns quants, s'aquesta manera, l'optimització és més robusta.

El procediment és el següent, s'ha d'agafar els paràmetres a optimitzar, que estaran en la forma d'un vector, escollir un dels paràmetres, i crear el vector de pertubació. Es a dir un vector de la mateixa mida que el vector amb els paràmetres, però amb tot de zeros, menys a la posició del paràmetres que es vol optimitzar.

Llavors es creen dos vectors de paràmetres nous multiplicant $\pm \frac{\pi}{4}$ pel vector de pertubació, i sumant el resultat al vector de paràmetres original. A continuació, es creen dues imatges, cadascuna per a cada grup de paràmetres, una

⁵No em vaig ni plantejar buscar codi per internet perquè pensava que els autors dels paper que vaig llegir, les úniques persones que sabia que podien tindre el codi, no el penjarien.

amb el terme $\pm \frac{\pi}{4}$ positiu i l'altra amb el negatiu. Per últim, es mira la funció de pèrdua per a cada imatge generada i es treu la diferencia entre elles. El resultat es sumat a un vector que té la mateixa mida que el vector de paràmetres. Al començament de l'iteració, aquest vector és zero, però segons es va optimitzat s'ha li van sumant els errors. Això es fa per a cada paràmetre del circuit per un input, i per a cada input dintre del *batch* a optimitzar.

Quan ja s'han calculat tot els errors, s'agafa el vector que els conte que és multiplica pel *learning rate*, i es divideix per el nombre d'imatge del *batch*, d'aquesta manera fent la mitjana aritmètica del errors. El resultat es suma als paràmetres originals, d'aquesta manera completant una iteració.

El pseudocodi per aquest procediment es pot trobar en la figura ??.

En la figura es pot veure que es crida al discriminador perquè posi etiquetes a les dues imatges generades, això es per poder avaluar aquestes etiquetes amb la funció de pèrdua, per després poder agafar la diferencia i d'aquesta manera calcular el gradient. La funció de pèrdua és la part que correspon al generador, ja que la etiqueta que han de tenir aquestes imatges es 1, degut a que es vol que siguin com les imatges reals. El codi per el generador es pot trobar en l'apèndix, [E.1.0.3](#).

6.3 Creació del model

Quan ja es tenen les dues parts del model, s'ha d'ajuntar d'alguna manera. El que jo he fet es posar-ho tot en una classe de Python anomenada `Quantum_GAN`, que conté les funcions per definir el model, executar-lo, guardar les seves dades i per crear els gràfics que serveixen per avaluar l'eficiència del model. No fa falta entrar en detall, sobre aquesta part particular del codi. Només cal mencionar que és el tros de codi que junta tot, tant el discriminador i el generador, coma altres funcions que són necessàries, com per exemple la sigmoide. Aquestes funcions que no estan tant en l'arxiu del generador com el discriminador es troben en `functions.py`.

```

1:  $\nabla = 0$                                 ▷ Creació del vector  $\nabla$  que té la mateixa mida que  $\theta$ 
2: for soroll en batch do
3:   for paràmetre  $\theta_i$  en  $\theta$  do
4:      $\Delta_i = 0$                                 ▷ Creació del vector perturbació d'acord amb el vector  $\theta_i$ 
5:      $\theta_i^+ = \theta + \frac{\pi}{4}\Delta_i$ 
6:      $\theta_i^- = \theta - \frac{\pi}{4}\Delta_i$ 
7:
8:      $Imatge_1 = \text{generador}(\text{soroll}, \theta_i^+)$ 
9:      $Imatge_2 = \text{generador}(\text{soroll}, \theta_i^-)$                                 ▷ Generació de les imatges
10:
11:      $Predicció_1 = \text{discriminador}(Imatge_1)$ 
12:      $Predicció_2 = \text{discriminador}(Imatge_2)$                                 ▷ El discriminador posa una
    etiqueta a cada imatge
13:
14:      $Diferencia_i = \mathcal{L}(Predicció_1) - \mathcal{L}(Predicció_2)$ 
15:
16:      $\nabla_\theta = \nabla_i + Diferencia_i$                                 ▷ On  $\mathcal{L}$  és la funció de pèrdua del generador
17:   end for
18: end for
19:
20: for  $\theta_i$  en  $\theta$  i  $\nabla_i$  en  $\nabla_\theta$  do                                ▷ Per a cada paràmetre i per a cada error
21:    $\theta_i^{t+1} = \theta_i + \frac{\eta}{M}\nabla_i$                                 ▷ Actualització del paràmetre amb la mitjana de l'error
    que correspon a aquest paràmetre
22: end for

```

FIGURA 6.1: **Pseudocodi per una xarxa generativa adversativa.** Em refereixo al input de la xarxa generacional com a soroll, ja que és més acurat d'aquesta manera. El vector ∇ té la mateixa mida que el vector de paràmetres θ , cal notar que també té la mateixa mida els vectors θ_i^\pm , degut a que aquests vectors són θ per amb una alteració al paràmetre θ_i . Les paraules *generador* i *discriminador* denoten els respectius models, per tant, $Imatge_i$ i $Predicció_i$ són els outputs dels models.

Tanmateix s'han de tenir en compte algunes de les funcionalitats d'aquesta classe, com la creació de les gràfiques i com circulen les dades del generador al discriminadors. D'aquesta última qüestió parlaré a continuació.

A la funció de la classe `Quantum_GAN` que s'utilitza per entrenar, `Quantum_GAN.train()` se li dona, entre altres inputs, un dataset amb imatges reals i el soroll que forma part del espai latent per poder entrenar el generador. Aquest dataset el divideix en grups d'imatges (els batch), cada batch conté tant imatges reals, com soroll en la mateixa quantitat.

En una iteració primer s'optimitza el generador, que substitueix el soroll del batch amb les imatges que genera. Llavors es passa el batch al discriminador que s'optimitza tant amb les imatges reals com amb les imatges falses. Aquest és el procés per el qual s'optimitzen els dos model. No obstant, aquesta funció dona a terme altres coses que són necessàries per la creació dels gràfics, per exemple, selecciona una imatge real aleatòria i una de falsa per avaluar la funció de pèrdua en l'iteració, també les etiquetes utilitzades en l'avaluació, s'utilitzen per la creació d'un gràfic que mostra l'evolució dels valors de les etiquetes a través de tota l'optimització.

6.4 Execució del model

No obstant en l'arxiu `qgan.py`, no es troba l'execució del model, només està la definició de la classe `Quantum_GAN`. Això és perquè el codi realment s'executa en l'arxiu `main.py`⁶. Aquest és l'únic arxiu que té codi que realment s'executa, els altres arxius només tenen definicions. Per projectes relativament grans, com aquest, convé tenir un arxiu que fa tot el treball, el qual crida a totes les funcions definides en altres arxius i les executa d'una manera ordenada.

Com es pot veure en l'apèndix, [E.1.0.4](#), aquesta arxiu té molt poc codi. En ell només es crea amb Numpy el dataset, es defineix el discriminar i el generadors, es crea el model amb `Quantum_GAN`, i es crida la funció `Quantum_GAN.train()`

⁶Veure apèndix [E.1.0.4](#)

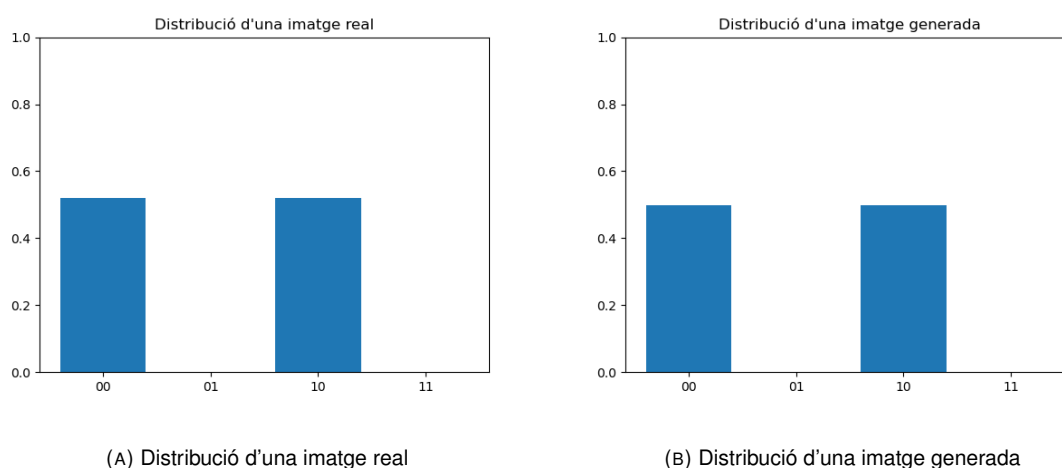


FIGURA 6.2: Comparació d'una imatge generada i una real, quan el model ha assolit la convergència. En el eix Y es pot veure el valor d'un píxel, mentre que en l'eix X estan els píxels.

per optimitzar-lo. Al acabar l'optimització es criden les funcions `Quantum_GAN.plot()`, `Quantum_GAN.create_gif()` i `Quantum_GAN.save()`, les quals donen a terme funcions complementàries com la creació de les gràfiques, la creació d'un GIF que mostra com les imatges van evolucionant al llarg de l'optimització, i l'emmagatzematge de les dades rellevant que s'han creat durant l'optimització.

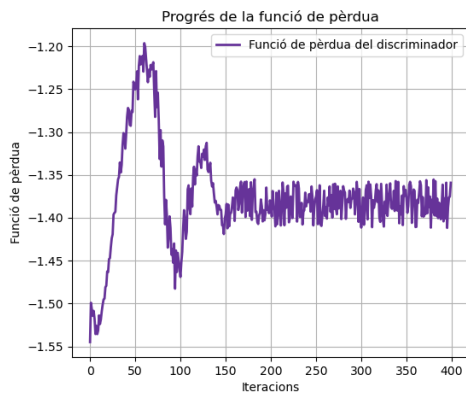
Les imatges que vaig escollir per generar són les mateixes que van generar en l'article en el que em vaig basar. No entraré molt en detall sobre les distribucions concretes que formen les imatges, però per tindre una imatge general sobre com són, es pot veure la figura, .

Si executen el model, amb un mida de batch de 10, tant el *learning rate* del discriminador com del generador a 0.1, i un total de iteracions de 400, hi ha una garantia d'arribar a la convergència desitjada, es dir que, que els dos models arriben al equilibri de Nash i no poden continuar l'optimització. En aquest punt és quan les imatges falses i les reals són iguals.

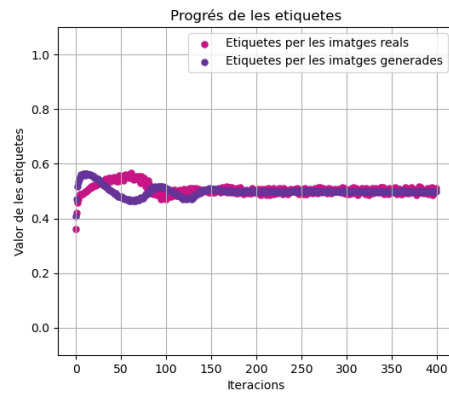
En la figura, 6.3b, es pot veure com les etiquetes pels dos tipus d'imatges van oscil·lant fins a estabilitzar-se. El mateix es pot dir per la funció de pèrdua 6.3a.

Degut a que aquests gràfics són molt semblants als seus anàlegs de les GANs clàssiques i que les distribucions reals i generades són pràcticament iguals, com es pot veure a la figura ???. Considero que el model funciona correctament.

poner la figura don- de se ven como 4 imagenes o algo asi no se ya lo veras en un futuro de- pende de como que- den



(A) Funció de pèrdua per cada iteració. A partir de l'iteració 175, es pot veure com el valor de la funció s'estabilitza en l'interval $(-1.35, -1.4)$, això concorda amb els valors de les etiquetes en les mateixes iteracions, ja que $\log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(1 - \frac{1}{2}\right) \simeq -1.38$.



(B) Etiquetes per les imatges reals i generades per cada iteració. Es pot observar que els valors de les etiquetes per les imatges reals són més inestables que els valors de les generades. Això es perquè les imatges reals tenen una major variació en els valors dels píxels, mentre que en les generades aquest fet no és tan notable. Per tant el discriminador assigna etiquetes amb una major variació.

FIGURA 6.3: En pot veure com per l'iteració 250, el model ja s'ha estabilitzat, ja que les etiquetes i el valor de la funció de pèrdua convergeixen en un valor.

Abans he especificat que al cap de 400 iteracions podem tenir la garantia d'arribar al punt d'equilibri, no obstant, es pot arribar a aquest punt amb menys iteracions, el que vull dir es que amb 400 de segur que s'arriba. Això és perquè, com a tots els model de *machine learning* hi ha una part de sort implicada, si els paràmetres inicials són més semblants als paràmetres desitjats, el model assolirà la convergència més ràpidament. Per més detalls l'execució del model es pot veure l'apèndix XXX. Tanmateix, per més informació sobre la part experimental del treball es pot veure en l'apèndix XXX.1, en aquest capítol he omitit coses interessants com el meu intent de generació d'imatges a color.

Capítol 7

Realització del experiment

Una vegada havia confirmat el correcte funcionament del model, vaig alterar el generador per poder acomodar els dos tipus de circuits quàntics que necessitava, uns amb un sistema ancilla, i uns altres sense.

Un sistema ancilla, són un grup de qubits sobre els quals es donen a terme operacions però que no es mesuren per treure el output del circuit. Aquests qubits es pot veure molt clar en la figura, .

poner figura

Primer de tot he de mencionar que havia de fer alguns canvis al generador per acomodar aquests qubits ancilla.

Segon, cal notar que no he seguit exactament els mateixos passos que en l'article original. En ell tenen aquesta equació [5]:

$$\rho = \frac{\text{tr}_A(\Pi_A |\psi\rangle \langle\psi|)}{\text{tr}(\Pi_A \otimes I_{2^N - 2^{N_A}} |\psi\rangle \langle\psi|)}$$

Com ja he comentat en la secció 2.1.1, no veig com aquesta equació pot tenir sentit, per tant la vaig ometre del meu experiment.

L'alternativa que he fet servir són els mesuraments de Qiskit, al definir el circuit específic quins són els qubits que vull mesurar, que són els qubits que formen part del sistema ancilla. No obstant, no sé exactament que és lo que fa

Qiskit amb el mesurament. Però si empro aquest procediment en altres circuits, quals sé com han de funcionar, aquest mètode fa el que m'espero¹.

L'arxiu que utilitzo per fer els experiments és `experiment.py`. En ell es pot veure com defineixo dos discriminadors² i dos generadors, que es diferencien per els circuits que utilitzen, un amb qubits ancilla i l'altre sense. Aquests model s'agrupen en parelles per definir dos qGANs.

Cal notar que els generadors i els discriminadors³ comencen amb els mateixos paràmetres, per tant en exactament les mateixes condicions, menys els circuits quàntics es clar. També s'utilitza el mateix dataset i altres hiperparàmetres.

¹Parlo del parells de Bell, els circuits quàntics amb entrellaçament més simples que es poden fer.

²Que són iguals en característiques

³Al principi pensava no tenir els mateixos paràmetres inicials pels discriminadors, però al veure les gràfiques de les etiquetes, l'efecte que tenen aquests és molt notable. Es pot veure com a vegades les etiquetes comencen en uns valors de 1 i en altres de 0. [link per veure una imatge amb totes les gràfiques](#)

Part III

Conclusions

Part IV

Apèndix

Appendices

Apèndix A

Més àlgebra lineal

Ja he escrit bastants pàgines sobre àlgebra lineal, però aparentment no eren les suficients perquè estic content amb el treball¹, així que aquí hi ha més àlgebra lineal.

A.1 Procediment de Gram–Schmidt

El procediment de Gram-Schmidt és un mètode utilitzat per produir bases per a espais vectorials[9]. Per un espai V amb producte interior de d dimensions amb el set de vectors $|v_1\rangle, \dots, |v_d\rangle$, podem definir una nova base de vectors ortonormals $\{|u\rangle\}$. El primer element d'aquest set és $|u_1\rangle = |v_1\rangle / \||v_1\rangle\|$, amb el següent element $|v_{k+1}\rangle$ sent:

$$|u_{k+1}\rangle = \frac{|v_{k+1}\rangle - \sum_{i=1}^k \langle u_i | v_{k+1} \rangle |u_i\rangle}{\left\| |v_{k+1}\rangle - \sum_{i=1}^k \langle u_i | v_{k+1} \rangle |u_i\rangle \right\|}$$

Per k en el interval $1 \leq k \leq d-1$.

Si seguim per k en $1 \leq k \leq d-1$, obtenim el set de vectors $|u_1\rangle, \dots, |u_d\rangle$ que es una base vàlida per l'espai ortonormal per l'estai V . Els vectors creats

¹Hi han moltes coses guays i interessants que vull explicar.

han de tindre el mateix span^2 que el dels vectors que originalment eren la base per V :

$$\text{span}(\{|v\rangle\}) = \text{span}(\{|v\rangle\}) = V$$

Cal notar que l'span de del set base és la definició del espai. En altres paraules, cada vector en V pot ser representat per una combinació del vectors base.

La prova de que és una base ortonormal és bastant simple: Podem veure immediatament que els elements de $\{|u\rangle\}$ són vectors unitaris perquè estan normalitzats (els vectors $|v_{k+1}\rangle - \sum_{i=1}^k \langle u_i | v_{k+1} \rangle |u_i\rangle$ estan dividits per la seva norma). També podem veure que són ortogonals els uns als altres mirant que el producte interior entre els doni 0:

Per $k = 1$:

$$|u_2\rangle = \frac{|v_2\rangle - \langle u_1 | v_2 \rangle |u_1\rangle}{\| |v_2\rangle - \langle u_1 | v_2 \rangle |u_1\rangle \|}$$

Per tant el producte interior amb $|v_1\rangle$ és:

$$\begin{aligned} \langle u_1 | u_2 \rangle &= \langle u_1 | \left(\frac{|v_2\rangle - \langle u_1 | v_2 \rangle |u_1\rangle}{\| |v_2\rangle - \langle u_1 | v_2 \rangle |u_1\rangle \|} \right) \\ &= \frac{\langle u_1 | v_2 \rangle - \langle u_1 | v_2 \rangle \langle u_1 | u_1 \rangle}{\| |v_2\rangle - \langle u_1 | v_2 \rangle |u_1\rangle \|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Per inducció podem veure que per $j \leq d$, amb d sent la dimensió del espai vectorial:

$$\begin{aligned} \langle u_j | u_{n+1} \rangle &= \langle u_j | \left(\frac{|v_{n+1}\rangle - \sum_{i=1}^n \langle u_i | v_{n+1} \rangle |u_i\rangle}{\| |v_{n+1}\rangle - \sum_{i=1}^n \langle u_i | v_{n+1} \rangle |u_i\rangle \|} \right) \\ &= \frac{\langle u_j | v_{n+1} \rangle - \sum_{i=1}^n \langle u_i | v_{n+1} \rangle \langle u_j | u_i \rangle}{\| |v_{n+1}\rangle - \sum_{i=1}^n \langle u_i | v_{n+1} \rangle |u_i\rangle \|} \\ &= \frac{\langle u_j | v_{n+1} \rangle - \sum_{i=1}^n \langle u_i | v_{n+1} \rangle \delta_{ij}}{\| |v_{n+1}\rangle - \sum_{i=1}^n \langle u_i | v_{n+1} \rangle |u_i\rangle \|} \\ &= \frac{\langle u_j | v_{n+1} \rangle - \langle u_j | v_{n+1} \rangle}{\| |v_{n+1}\rangle - \sum_{i=1}^n \langle u_i | v_{n+1} \rangle |u_i\rangle \|} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tot això no és veu molt clar al principi però cal recordar que el producte interior de dos vectors ortonormals és zero, i que el producte interior entre el mateix vector

²L'span d'un set de vectors són totes les combinacions lineals possibles amb aquests vectors.

unitari és un.

A.2 Curs ràpid de la notació de Dirac

A la taula següent hi ha un resum de conceptes matemàtics de l'àlgebra lineal importants expressats en la notació de Dirac³ [40]

Notació	Descripció
z	Nombre complex
z^*	Conjugat complex d'un nombre complex z . $(a + bi)^* = (a - bi)$
$ \psi\rangle$	Vector amb una etiqueta ψ . Conegut com <i>ket</i>
$ \psi\rangle^T$	Transposada d'un vector $ \psi\rangle$
$ \psi\rangle^\dagger$	Conjugat Hermitià d'un vector. $ \psi\rangle^\dagger = (\psi\rangle^T)^*$
$\langle\psi $	Vector dual a $ \psi\rangle$. $ \psi\rangle = \langle\psi ^\dagger$ i $\langle\psi = \psi\rangle^\dagger$. Conegut com <i>bra</i>
$\langle\varphi \psi\rangle$	Producte interior dels vectors $\langle\varphi $ i $ \psi\rangle$
$ \varphi\rangle\langle\psi $	Producte exterior del vectors $\langle\varphi $ i $ \psi\rangle$
$ \psi\rangle \otimes \varphi\rangle$	Producte tensorial del vectors $ \varphi\rangle$ i $ \psi\rangle$
0	Vector zero i operador zero
\mathbb{I}_n	Matriu identitat de dimensions $n \times n$
\mathbb{C}_n	Espai vectorial complex de dimensió n
\mathbb{C}_1 o \mathbb{C}	Espai del nombres complexos

A.3 Més on la traça parcial

³La notació utilitzada per un espai vectorial complex i l'espai dels nombres complex no són de la notació de Dirac estàndard, però les poso per explicar el que signifiquen.

Apèndix B

Computació Quàntica vs Mecànica Quàntica

En la introducció havia mencionat que una de les raons per les quals havia començat a aprendre i recercar sobre computació quàntica era perquè era fàcil, en aquest apèndix explicaré exactament a que em refereixo per això amb un exemple pràctic. Dic que és fàcil, perquè si ho és, si es compara la computació quàntica amb la mecànica quàntica. Presentaré un exemple pràctic per il·lustrar-lo.

En mecànica quàntica la manera més usual de representar els estats quàntics, com els orbitals d'un àtom d'hidrogen, és a través de *wavefunctions* o funcions d'ona, no es solen representar mitjançant vectors d'estat. Aquestes funcions d'ona són molt útils i poden representar casos més generals que els vectors d'estat. No obstant, treballar amb elles és molt més complicat degut a que són funcions que depenen del temps, no són vectors. Això implica que s'han d'utilitzar altres operacions per normalitzar les funcions, determinar com evolucionen en el temps o per fer mesures. A continuació faré una comparació entre normalitzar una funció d'ona i un vector d'estat.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

FIGURA B.1: **Equació de Schrödinger**. On \hbar és $h/2\pi$, i V és una funció potencial d'energia.

B.1 Normalitzar

Degut a l'interpretació probabilística dels vectors d'estat i de les funcions d'ona, aquests objectes han de ser normalitzats perquè la suma de la probabilitats del possibles estats de mesura sigui 1.

Per una funció d'ona $\Psi(x, t)$ que representa una partícula, la probabilitat de trobar aquesta partícula en un punt x és $|\Psi(x, t)|^2$. Per tant, la funció d'ona ha de ser normalitzada seguint la fórmula:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (\text{B.1})$$

Degut a que la funció d'ona evoluciona a través del temps d'acord amb l'equació de Schrödinger, veure la figura B.1, qualsevol solució d'aquesta equació ha d'estar també normalitzada. En altres paraules, aquesta equació ha de preservar la normalització de les funcions d'ona [41].

Podem provar que aquesta equació preserva la fórmula B.1, començant per la igualtat trivial:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx$$

Per la regla del producte tenim que ¹:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \frac{\partial}{\partial t} (\Psi \Psi^*) = \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi$$

Ara l'equació de Schrödinger diu que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V\Psi$$

¹A partir d'ara escriuré $\Psi(x, t)$ simplement com Ψ per no fer les equacions tan enrevessades.

després calculant el complex conjugat tenim que

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} V \Psi^*$$

per tant

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \Psi \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \right]$$

finalment podem avaluar l'integral del principi:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

Degut a que $\Psi(x, t)$ ha de convergir a zero quan x va cap a infinit, es veritat que:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 0$$

Es pot veure que l'integral es constant i per tant quan Ψ es normalitzada a $t = 0$, es queda d'aquesta manera per qualsevol t (positiu es clar).

Apèndix C

Polarització d'un fotó

En l'equació 2.1 he excluit el concepte de fase, que determina el tipus de polarització que té un fotó. Hi han 3 tipus:

1. **Linear:** Un fotó té polarització lineal quan els angles de la fase α_x, α_y en els estats base $|x\rangle, |y\rangle$ són iguals:

$$\begin{aligned} |\nearrow\rangle &= \cos(\theta)e^{i\alpha_x} |x\rangle + \cos(\theta)e^{i\alpha_y} |y\rangle \\ &= [\cos(\theta) |x\rangle + \sin(\theta) |y\rangle]e^{i\alpha} \end{aligned}$$

On $\alpha = \alpha_x = \alpha_y$.

2. **Circular:** Quan els angles α_x, α_y son separats per exactament $\frac{\pi}{2}$ i la amplitud per les dos bases és la mateixa:

$$\begin{aligned} |\nearrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta)e^{i\alpha_x} |x\rangle \pm i \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta)e^{i\alpha_y} |y\rangle \\ &= [\cos(\theta)e^{i\alpha_x} |x\rangle \pm i \sin(\theta)e^{i\alpha_y} |y\rangle] \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

On el signe \pm indica la diferencia entre la diferencia entre la polarització circular cap a la dreta o la esquerra, amb $+$ i $-$, respectivament.

3. **El·líptica:** On els angles α_x, α_y son diferents per una quantitat arbitraria¹:

$$|\nearrow\rangle = \cos(\theta)e^{i\alpha_x} |x\rangle + \sin(\theta)e^{i\alpha_y} |y\rangle$$

Aquest és el cas més general.

¹Però que no sigui la quantitat que dona a terme la polarització circular.

Apèndix D

Complexitat i algoritmes quàntics

En ciència de la computació existeix el concepte de *Big-O Notation*, una forma d'expressar lo eficients que són els algoritmes per fer certes tasques, en altres paraules la complexitat dels algoritmes. Bàsicament es una forma de classificar-los segon la rapidesa que tenen en ver la tasca que els correspon, aquesta rapidesa no és mesura en segons, degut a que aquesta mètrica pot variar d'ordinador a ordinador per les diferencies en hardware que aquest poden tindre. En canvi es mesure en nombre d'operacions o temps directament, però sense unitats.

La *Big-O Notation* consisteixes en definir el temps màxim que necessita un algoritme, es denota com $O(\cdot)$ on l'argument usualment depèn de n que és la mida del input al algoritme, per exemple un algoritme de cerca ha de cercar a través de n coses. Com a un exemple més concret tenim que un l'algoritme de cerca de cadenes binaries corre en un temps $O(\log_2 n)$, on n és el nombre de cadenes entre les quals ha de cercar. Recorda que la notació $O(\cdot)$ és el màxim, es a dir es *upper bounded*, això significa que $\log_2 n$ és la quantitat de temps més gran en la que es troba la cadena, també es possible que es trobi-s'hi a la primera comprovació que es va¹, llavors l'algoritme acabaria en un temps $O(1)$. Simplement és una manera de mirar lo eficients que són els algoritmes en relació a la mida del input que tenen.

Amb aquesta notació tenim una manera de comparar la eficiència que tenen els algoritmes quàntics amb la del clàssics que tenen la mateixa funció.

¹Que la primera cadena que es cerca, és la que s'ha de trobar.

D.1 Algoritme de Grover

Al 1996, Lov Grover va presentar un algoritme quàntic per cercar en dades desordenades [42] (e.g. cercar el número de telèfon d'una persona en una llista desordenada). Per aquest problema un algoritme clàssic té una complexitat de $O(N)$ cerques², mentre que l'algoritme de Grover té una complexitat de $O(\sqrt{N})$, sent substancialment més eficient. En les paraules de Grover [42] (adaptades), un ordinador clàssic per tindre un probabilitat de $\frac{1}{2}$ de trobar el número de telèfon d'una persona en una llista desordenada necessita mirar a un mínim de $\frac{N}{2}$ números, mentre que amb el seu s'obté el número de telèfon en només $O(\sqrt{N})$ passos³.

L'algoritme funciona de la següent manera:

²Una cerca és quan es verifica si un element de la llista és l'element que es cerca.

³Per passos entenc que es refereix al nombre de vegades que es mira al oracle, es a dir el nombre que de vegades que es verifica si s'ha trobar el que es cerca.

Apèndix E

Codi

En l'apèndix actual presentaré el codi que he utilitzat al llarg del treball. Està organitzat segons el moment en el qual he referenciat el codi en el text.

IMPORTANT: Si hi ha text en català dintre del codi (n'hi ha en forma de comentaris), no porta accents perquè els paquet que utilitzo per formateixar el codi d'aquesta manera dintre del document no els accepta. Però si es mira el codi en el [repositori del treball](#) es pot veure que si que té accents. No em deixa posar ni accents, ni la ce trencada, ni la ele geminada. L'error diu que no són caràcters que estan en Unicode UTF-8, quan si que estan allà, per fet que és un codi que suposadament està internacionalitzat per tots el llenguatges que s'utilitzen 'moderadament'.

E.1 Part I

E.1 Capítol 3

E.1.0.1 Regressió lienal Codi per efectuar una regressió lineal a dades que es generen al atzar en el mateix arxiu, l'utilitzo per poder generar una gràfic per il·lustrar un exemple de regressió lienal. Aquest tros de codi l'he tret de GitHub¹.

¹Gist realitzat per l'usuari *jimimvp*: [link](#)

```

1  import numpy as np
2  from matplotlib import pyplot as plt
3  import matplotlib
4
5  font = {'family' : 'Helvetica',
6         'size'    : 18}
7
8  matplotlib.rc('font', **font)
9
10 # generate the data
11 np.random.seed(222)
12 X = np.random.normal(0,1, (200, 1))
13 w_target = np.random.normal(0,1, (1,1))
14 # data + white noise
15 y = X@w_target + np.random.normal(0, 1, (200,1))
16
17 # least squares
18 w_estimate = np.linalg.inv(X.T@X)@X.T@y
19 y_estimate = X@w_estimate
20
21 # plot the data
22 plt.figure(figsize=(15,10))
23 plt.scatter(X.flat, y_estimate.flat, label="Predicció")
24 plt.scatter(X.flat, y.flat, color='red', alpha=0.4, label="Dades")
25 plt.tight_layout()
26 plt.title("Regressió per diferencia de quadrats")
27 plt.legend()
28 plt.savefig("least_squares.png")
29 plt.show()

```

LISTING E.1: Regressió lineal

E.2 Part II

E.1 Capítol 6

E.1.0.1 Codi original per la xarxa neuronal clàssica Està extret del [repositori de GitHub de Micheal Nielsen](#), concretament del arxiu `network.py`.

```

1  """
2  network.py
3  ~~~~~
4  A module to implement the stochastic gradient descent learning

```

```

5 algorithm for a feedforward neural network. Gradients are calculated
6 using backpropagation. Note that I have focused on making the code
7 simple, easily readable, and easily modifiable. It is not optimized,
8 and omits many desirable features.
9 """
10
11 ##### Libraries
12 # Standard library
13 import random
14
15 # Third-party libraries
16 import numpy as np
17
18 class Network(object):
19
20     def __init__(self, sizes):
21         """The list 'sizes' contains the number of neurons in the
22            respective layers of the network. For example, if the list
23            was [2, 3, 1] then it would be a three-layer network, with the
24            first layer containing 2 neurons, the second layer 3 neurons,
25            and the third layer 1 neuron. The biases and weights for the
26            network are initialized randomly, using a Gaussian
27            distribution with mean 0, and variance 1. Note that the first
28            layer is assumed to be an input layer, and by convention we
29            won't set any biases for those neurons, since biases are only
30            ever used in computing the outputs from later layers."""
31         self.num_layers = len(sizes)
32         self.sizes = sizes
33         self.biases = [np.random.randn(y, 1) for y in sizes[1:]]
34         self.weights = [np.random.randn(y, x) for x, y in zip(sizes[:-1], sizes
35                                                                [1:])]
36
37     def feedforward(self, a):
38         """Return the output of the network if 'a' is input."""
39         for b, w in zip(self.biases, self.weights):
40             a = sigmoid(np.dot(w, a)+b)
41         return a
42
43     def SGD(self, training_data, epochs, mini_batch_size, eta, test_data=None):
44         """Train the neural network using mini-batch stochastic
45            gradient descent. The 'training_data' is a list of tuples
46            '(x, y)' representing the training inputs and the desired
47            outputs. The other non-optional parameters are
48            self-explanatory. If 'test_data' is provided then the
49            network will be evaluated against the test data after each
50            epoch, and partial progress printed out. This is useful for
51            tracking progress, but slows things down substantially."""

```

```

51     if test_data: n_test = len(test_data)
52     n = len(training_data)
53     for j in xrange(epochs):
54         random.shuffle(training_data)
55         mini_batches = [training_data[k:k+mini_batch_size] for k in xrange(0, n
, mini_batch_size)]
56         for mini_batch in mini_batches:
57             self.update_mini_batch(mini_batch, eta)
58         if test_data:
59             print "Epoch {0}: {1} / {2}".format(j, self.evaluate(test_data),
n_test)
60         else:
61             print "Epoch {0} complete".format(j)
62
63     def update_mini_batch(self, mini_batch, eta):
64         """Update the network's weights and biases by applying
65         gradient descent using backpropagation to a single mini batch.
66         The 'mini_batch' is a list of tuples '(x, y)', and 'eta'
67         is the learning rate."""
68         nabla_b = [np.zeros(b.shape) for b in self.biases]
69         nabla_w = [np.zeros(w.shape) for w in self.weights]
70         for x, y in mini_batch:
71             delta_nabla_b, delta_nabla_w = self.backprop(x, y)
72             nabla_b = [nb+dnb for nb, dnb in zip(nabla_b, delta_nabla_b)]
73             nabla_w = [nw+dnw for nw, dnw in zip(nabla_w, delta_nabla_w)]
74             self.weights = [w-(eta/len(mini_batch))*nw for w, nw in zip(self.weights,
nabla_w)]
75             self.biases = [b-(eta/len(mini_batch))*nb for b, nb in zip(self.biases,
nabla_b)]
76
77     def backprop(self, x, y):
78         """Return a tuple '(nabla_b, nabla_w)' representing the
79         gradient for the cost function C_x. 'nabla_b' and
80         'nabla_w' are layer-by-layer lists of numpy arrays, similar
81         to 'self.biases' and 'self.weights'."""
82
83         nabla_b = [np.zeros(b.shape) for b in self.biases]
84         nabla_w = [np.zeros(w.shape) for w in self.weights]
85         # feedforward
86         activation = x
87         activations = [x] # list to store all the activations, layer by layer
88         zs = [] # list to store all the z vectors, layer by layer
89         for b, w in zip(self.biases, self.weights):
90             z = np.dot(w, activation)+b
91             zs.append(z)
92             activation = sigmoid(z)
93             activations.append(activation)

```



```

94
95     # backward pass
96     delta = self.cost_derivative(activations[-1], y) * sigmoid_prime(zs[-1])
97     nabla_b[-1] = delta
98     nabla_w[-1] = np.dot(delta, activations[-2].transpose())
99     # Note that the variable l in the loop below is used a little
100    # differently to the notation in Chapter 2 of the book. Here,
101    # l = 1 means the last layer of neurons, l = 2 is the
102    # second-last layer, and so on. It's a renumbering of the
103    # scheme in the book, used here to take advantage of the fact
104    # that Python can use negative indices in lists.
105    for l in xrange(2, self.num_layers):
106        z = zs[-l]
107        sp = sigmoid_prime(z)
108        delta = np.dot(self.weights[-l+1].transpose(), delta) * sp
109        nabla_b[-l] = delta
110        nabla_w[-l] = np.dot(delta, activations[-l-1].transpose())
111    return (nabla_b, nabla_w)
112
113    def evaluate(self, test_data):
114        """Return the number of test inputs for which the neural
115        network outputs the correct result. Note that the neural
116        network's output is assumed to be the index of whichever
117        neuron in the final layer has the highest activation."""
118        test_results = [(np.argmax(self.feedforward(x)), y) for (x, y) in test_data
119        ]
120
121        return sum(int(x == y) for (x, y) in test_results)
122
123    def cost_derivative(self, output_activations, y):
124        """Return the vector of partial derivatives \partial C_x /
125        \partial a for the output activations."""
126        return (output_activations - y)
127
128    ##### Miscellaneous functions
129    def sigmoid(z):
130        """The sigmoid function."""
131        return 1.0/(1.0+np.exp(-z))
132
133    def sigmoid_prime(z):
134        """Derivative of the sigmoid function."""
135        return sigmoid(z)*(1-sigmoid(z))

```

LISTING E.2: Codi original per la xarxa neuronal clàssica

E.1.0.2 Codi final per el discriminador Aquest codi es pot trobar al [repositori del treball](#) en l'arxiu `discriminator.py`.

```

1  """DISCRIMINATOR"""
2  import json
3  from typing import Dict, List
4
5  import numpy as np
6
7  from quantumGAN.functions import BCE_derivative, minimax_derivative_fake,
    minimax_derivative_real, sigmoid, sigmoid_prime
8
9
10 def load(filename):
11     f = open(filename, "r")
12     data = json.load(f)
13     f.close()
14     # cost = getattr(sys.modules[__name__], data["cost"])
15     net = ClassicalDiscriminator_that_works(data["sizes"], data["loss"])
16     net.weights = [np.array(w) for w in data["weights"]]
17     net.biases = [np.array(b) for b in data["biases"]]
18     return net
19
20
21 class ClassicalDiscriminator_that_works:
22
23     def __init__(self,
24                 sizes: List[int],
25                 type_loss: str) -> None:
26
27         self.num_layers = len(sizes)
28         self.sizes = sizes
29         self.type_loss = type_loss
30         self.data_loss = {"real": [], "fake": []}
31         self.ret: Dict[str, any] = {"loss": [],
32                                     "label real": [],
33                                     "label fake": [],
34                                     "label fake time": [],
35                                     "label real time": []}
36         self.biases = [np.random.randn(y, ) for y in sizes[1:]]
37         self.weights = [np.random.randn(y, x) for x, y in zip(sizes[:-1], sizes
38                                                                [1:])]
39
40     def feedforward(self, a):
41         """Return the output of the network if 'a' is input."""
42         for b, w in zip(self.biases, self.weights):
43             a = sigmoid(np.dot(w, a) + b)
44
45     def predict(self, x):

```

```

46 # feedforward
47 activation = x
48 zs = [] # list to store all the z vectors, layer by layer
49 for b, w in zip(self.biases, self.weights):
50     z = np.dot(w, activation) + b
51     zs.append(z)
52     activation = sigmoid(z)
53 return activation
54
55 def evaluate(self, test_data):
56
57     test_results = [(np.argmax(self.feedforward(x)), y)
58                     for (x, y) in test_data]
59     return sum(int(x == y) for (x, y) in test_results)
60
61
62 def forwardprop(self, x: np.ndarray):
63     activation = x
64     activations = [x] # list to store all the activations, layer by layer
65     zs = [] # list to store all the z vectors, layer by layer
66     for b, w in zip(self.biases, self.weights):
67         z = np.dot(w, activation) + b
68         zs.append(z)
69         activation = sigmoid(z)
70         activations.append(activation)
71     return activation, activations, zs
72
73 def backprop_bce(self, image, label):
74     """Return a tuple '(nabla_b, nabla_w)' representing the
75     gradient for the cost function C_x. 'nabla_b' and
76     'nabla_w' are layer-by-layer lists of numpy arrays, similar
77     to 'self.biases' and 'self.weights'."""
78     nabla_b = [np.zeros(b.shape) for b in self.biases]
79     nabla_w = [np.zeros(w.shape) for w in self.weights]
80
81     # feedforward and back error calculation depending on type of image
82     activation, activations, zs = self.forwardprop(image)
83     delta = BCE_derivative(activations[-1], label) * sigmoid_prime(zs[-1])
84
85     # backward pass
86     nabla_b[-1] = delta
87     nabla_w[-1] = np.dot(delta, activations[-2].reshape(1, activations[-2].shape[0]))
88
89     for l in range(2, self.num_layers):
90         z = zs[-l]
91         delta = np.dot(self.weights[-l + 1].transpose(), delta) * sigmoid_prime(z)
92         nabla_b[-l] = delta

```

```

93 nabla_w[-1] = np.dot(delta.reshape(delta.shape[0], 1), activations[-1 - 1].reshape
    (1, activations[-1 - 1].shape[0]))
94 return nabla_b, nabla_w, activations[-1]
95
96 def backprop_minimax(self, real_image, fake_image, is_real):
97     """Return a tuple '(nabla_b, nabla_w)' representing the
98     gradient for the cost function C_x. 'nabla_b' and
99     'nabla_w' are layer-by-layer lists of numpy arrays, similar
100 to 'self.biases' and 'self.weights'."""
101 nabla_b = [np.zeros(b.shape) for b in self.biases]
102 nabla_w = [np.zeros(w.shape) for w in self.weights]
103
104 # feedforward and back error calculation depending on type of image
105 activation_real, activations_real, zs_real = self.forwardprop(real_image)
106 activation_fake, activations_fake, zs_fake = self.forwardprop(fake_image)
107
108 if is_real:
109     delta = minimax_derivative_real(activations_real[-1]) * sigmoid_prime(zs_real[-1])
110     activations, zs = activations_real, zs_real
111 else:
112     delta = minimax_derivative_fake(activations_fake[-1]) * sigmoid_prime(zs_fake[-1])
113     activations, zs = activations_fake, zs_fake
114
115 # backward pass
116 nabla_b[-1] = delta
117 nabla_w[-1] = np.dot(delta, activations[-2].reshape(1, activations[-2].shape[0]))
118
119 for l in range(2, self.num_layers):
120     z = zs[-1]
121     delta = np.dot(self.weights[-l + 1].transpose(), delta) * sigmoid_prime(z)
122     nabla_b[-1] = delta
123     nabla_w[-1] = np.dot(delta.reshape(delta.shape[0], 1),
124     activations[-1 - 1].reshape(1, activations[-1 - 1].shape[0]))
125     return nabla_b, nabla_w, activations[-1]
126
127 def train_mini_batch(self, mini_batch, learning_rate):
128     global label_real, label_fake
129     nabla_b = [np.zeros(b.shape) for b in self.biases]
130     nabla_w = [np.zeros(w.shape) for w in self.weights]
131
132     if self.type_loss == "binary cross entropy":
133         for real_image, fake_image in mini_batch:
134             delta_nabla_b, delta_nabla_w, label_real = self.backprop_bce(real_image, np.array
                ([1.]))
135     nabla_b = [nb + dnb for nb, dnb in zip(nabla_b, delta_nabla_b)]
136     nabla_w = [nw + dnw for nw, dnw in zip(nabla_w, delta_nabla_w)]
137

```

```

138 delta_nabla_b, delta_nabla_w, label_fake = self.backprop_bce(fake_image, np.array
    ([0.]))
139 nabla_b = [nb + dnb for nb, dnb in zip(nabla_b, delta_nabla_b)]
140 nabla_w = [nw + dnw for nw, dnw in zip(nabla_w, delta_nabla_w)]
141
142 elif self.type_loss == "minimax":
143     for real_image, fake_image in mini_batch:
144         delta_nabla_b, delta_nabla_w, label_real = self.backprop_minimax(real_image,
            fake_image, True)
145         nabla_b = [nb + dnb for nb, dnb in zip(nabla_b, delta_nabla_b)]
146         nabla_w = [nw + dnw for nw, dnw in zip(nabla_w, delta_nabla_w)]
147
148         delta_nabla_b, delta_nabla_w, label_fake = self.backprop_minimax(real_image,
            fake_image, False)
149         nabla_b = [nb + dnb for nb, dnb in zip(nabla_b, delta_nabla_b)]
150         nabla_w = [nw + dnw for nw, dnw in zip(nabla_w, delta_nabla_w)]
151     else:
152         raise Exception("type of loss function not valid")
153
154 # gradient descent
155 # nabla_w and nabla_b are multiplied by the learning rate
156 # and taken the mean of (dividing by the mini batch size)
157 self.weights = [w - (learning_rate / len(mini_batch)) * nw
158     for w, nw in zip(self.weights, nabla_w)]
159 self.biases = [b - (learning_rate / len(mini_batch)) * nb
160     for b, nb in zip(self.biases, nabla_b)]

```

LISTING E.3: Codi final pel discriminador

E.1.0.3 Codi per el generador Aquest codi es pot trobar al [repositori del treball](#) en l'arxiu `generador.py`.

```

1  """QUANTUM GENERATOR"""
2
3  from typing import Any, Dict, Optional, cast
4
5  import numpy as np
6  import qiskit
7  from qiskit import ClassicalRegister, QuantumRegister
8  from qiskit.circuit import QuantumCircuit
9  from qiskit.circuit.library import TwoLocal
10 from qiskit.providers.aer import AerSimulator
11
12 from quantumGAN.functions import create_entangler_map, create_real_keys,
    minimax_generator
13

```

```

14
15 class QuantumGenerator:
16
17     def __init__(
18         self,
19         shots: int,
20         num_qubits: int,
21         num_qubits_ancilla: int,
22         generator_circuit: Optional[QuantumCircuit] = None,
23         snapshot_dir: Optional[str] = None
24     ) -> None:
25
26         super().__init__()
27         # passar els arguments de la classe a metodes en de classes
28         # d'aquesta manera son accessibles per qualsevol funcio dintre de la classe
29         self.num_qubits_total = num_qubits
30         self.num_qubits_ancilla = num_qubits_ancilla
31         self.generator_circuit = generator_circuit
32         self.snapshot_dir = snapshot_dir
33         self.shots = shots
34         self.discriminator = None
35         self.ret: Dict[str, Any] = {"loss": []}
36         self.simulator = AerSimulator()
37
38     def init_parameters(self):
39         """Inicia els parametres inicial i crea el circuit al qual se li posen els
40         parametres"""
41         # iniciacia dels parametres inicials i dels circuits al qual posar aquests
42         parametres
43         self.generator_circuit = self.construct_circuit(latent_space_noise=None,
44         to_measure=False)
45         # s'ha de crear primer el circuit porque d'aquesta manera es pot saber el
46         nombre de parametres que es necessiten
47         self.parameter_values = np.random.normal(np.pi / 2, .1, self.
48         generator_circuit.num_parameters)
49
50     def construct_circuit(self,
51         latent_space_noise,
52         to_measure: bool):
53         """Crea el circuit quantic des de zero a partir de diversos registres de
54         qubits"""
55         if self.num_qubits_ancilla is 0:
56             qr = QuantumRegister(self.num_qubits_total, 'q')
57             cr = ClassicalRegister(self.num_qubits_total, 'c')
58             qc = QuantumCircuit(qr, cr)
59         else:

```

```

54         qr = QuantumRegister(self.num_qubits_total - self.num_qubits_ancilla, '
q')
55         anc = QuantumRegister(self.num_qubits_ancilla, 'ancilla')
56         cr = ClassicalRegister(self.num_qubits_total - self.num_qubits_ancilla,
'c')
57         qc = QuantumCircuit(anc, qr, cr)
58
59         # creacia de la part del circuit que conte la implantacio dels parametres d
'input. En cas que no es donin aquests parametres es creen automaticament
60         if latent_space_noise is None:
61             randoms = np.random.normal(-np.pi * .01, np.pi * .01, self.
num_qubits_total)
62             init_dist = qiskit.QuantumCircuit(self.num_qubits_total)
63
64             # es col.loca una porta RY en cada qubits i amb un parametre diferent
cadascuna
65             for index in range(self.num_qubits_total):
66                 init_dist.ry(randoms[index], index)
67         else:
68             init_dist = qiskit.QuantumCircuit(self.num_qubits_total)
69
70             for index in range(self.num_qubits_total):
71                 init_dist.ry(latent_space_noise[index], index)
72
73         # la funcio create_entangler_map crea les parelles de qubits a les qual col.
locar les portes CZ
74         # en funcio del nombre de qubits
75         if self.num_qubits_ancilla is 0:
76             entangler_map = create_entangler_map(self.num_qubits_total)
77         else:
78             entangler_map = create_entangler_map(self.num_qubits_total - self.
num_qubits_ancilla)
79
80         # creacio final dels circuits a partir una funcio integrada a Qiskit que va
repetint les operacions
81         # que se li especifiquen
82         ansatz = TwoLocal(int(self.num_qubits_total), 'ry', 'cz', entanglement=
entangler_map, reps=1, insert_barriers=True)
83
84         # aqui s'ajunten el circuit que funciona com a input amb el circuit que
consisteix en la repeticio
85         # de les portes RY i CZ
86         qc = qc.compose(init_dist, front=True)
87         qc = qc.compose(ansatz, front=False)
88
89         if to_measure:
90             qc.measure(qr, cr)

```

```

91
92     return qc
93
94     def set_discriminator(self, discriminator) -> None:
95         self.discriminator = discriminator
96
97     def get_output(
98         self,
99         latent_space_noise,
100         parameters: Optional[np.ndarray] = None
101     ):
102         """Retorna un output del generador quan se li dona un estat d'input i
103         opcionalment uns parametres en especific. Els pixels estan compostos per la
104         probabilitat que un qubit resulti en ket_0 en cada base. Per tant, els pixels
105         de l'imatge estan normalitzats amb la norma l-1."""
106         real_keys_set, real_keys_list = create_real_keys(self.num_qubits_total -
107         self.num_qubits_ancilla)
108
109         # en cas de que no es donin parametres com a input, es treuen els
110         parametres de la variable
111         # self.parameter_values. Es a dir els parametres que es creen
112         automaticament al principi i que es van
113         # actualitzant al mateix temps que el model s'optimitza
114         if parameters is None:
115             parameters = cast(np.ndarray, self.parameter_values)
116
117         qc = self.construct_circuit(latent_space_noise, True)
118
119         parameter_binds = {parameter_id: parameter_value for parameter_id,
120         parameter_value in zip(qc.parameters, parameters)}
121
122         # el metode bind_parametres del circuit quantic
123         qc = qc.bind_parameters(parameter_binds)
124
125         # Simulacio dels circuits mitjancant el simulador Aer de Qiskit. El nivell
126         d'optimitzacio es zero, porque al ser circuits petits i que simulen una vegada,
127         no es necessari. Al optimitzar el proces acaba sent mes lent.
128         result_ideal = qiskit.execute(experiments=qc,
129                                     backend=self.simulator,
130                                     shots=self.shots,
131                                     optimization_level=0).result()
132
133         counts = result_ideal.get_counts()
134
135     try:
136         # creacio de l'imatge resultant
137         pixels = np.array([counts[index] for index in list(real_keys_list)])
138
139

```



```

129     except KeyError:
130         # aquesta excepcio sorgeix quan en el diccionari dels resultats no
131         # estan totes les keys pel fet que qiskit, en cas de que no hi hagi un mesurament
132         # en una base, no inclou aquesta base en el diccionari
133         keys = counts.keys()
134         missing_keys = real_keys_set.difference(keys)
135         # s'utilitza un la resta entre dos sets per poder veure quina es la key
136         # que falta en el diccionari
137         for key_missing in missing_keys:
138             counts[key_missing] = 0
139
140         # una vegada es troba les keys que faltaven es crea l'imatge resultant
141         pixels = np.array([counts[index] for index in list(real_keys_list)])
142
143     pixels = pixels / self.shots
144     return pixels
145
146 def get_output_pixels(
147     self,
148     latent_space_noise,
149     params: Optional[np.ndarray] = None
150 ):
151     """Retorna un output del generador quan se li dona un estat d'input i
152     opcionalment uns parametres en especific. Cada pixel es la probabilitat de que
153     un qubits resulti en l'estat ket_0, per tant, els valors cada pixel (que son
154     independents entre si) es troba en l'interval (0, 1) """
155     qc = QuantumCircuit(self.num_qubits_total)
156
157     init_dist = qiskit.QuantumCircuit(self.num_qubits_total)
158     assert latent_space_noise.shape[0] == self.num_qubits_total
159
160     for num_qubit in range(self.num_qubits_total):
161         init_dist.ry(latent_space_noise[num_qubit], num_qubit)
162
163     if params is None:
164         params = cast(np.ndarray, self.parameter_values)
165
166     qc.assign_parameters(params)
167
168     # comptes de simular els valors que donara cada qubits, es simula l'estat
169     # final del circuit i d'aquest s'extreuen els valors que es mesuraran per a cada
170     # qubit
171     state_vector = qiskit.quantum_info.Statevector.from_instruction(qc)
172     pixels = []
173     for qubit in range(self.num_qubits_total):
174         # per treure la probabilitat s'utilitza una funcio implementada en
175         # Qiskit

```

```

167         pixels.append(state_vector.proBABILITIES([qubit])[0])
168
169         # creacio de l'imatge resultada a partir de la llista que conte el valor
170         per a cada pixel
171         generated_samples = np.array(pixels)
172         generated_samples.flatten()
173
174         return generated_samples
175
176     def train_mini_batch(self, mini_batch, learning_rate):
177         """Optimitzacio del generador per una batch d'imatges. Retorna una batch de
178         les imatges generades amb unes imatges reals que poder donar com a input al
179         generador. """
180         nabla_theta = np.zeros_like(self.parameter_values.shape)
181         new_images = []
182
183         for _, noise in mini_batch:
184             for index, _ in enumerate(self.parameter_values):
185                 perturbation_vector = np.zeros_like(self.parameter_values)
186                 perturbation_vector[index] = 1
187
188                 # Creacio dels parametres per generar les dues imatges
189                 pos_params = self.parameter_values + (np.pi / 4) *
190                 perturbation_vector
191                 neg_params = self.parameter_values - (np.pi / 4) *
192                 perturbation_vector
193
194                 pos_result = self.get_output(noise, parameters=pos_params) #
195                 Generacio imatges
196                 neg_result = self.get_output(noise, parameters=neg_params)
197
198                 pos_result = self.discriminator.predict(pos_result) # Assignacio
199                 de les etiquetes
200                 neg_result = self.discriminator.predict(neg_result)
201
202                 # Diferencia entre les avaluacions de la funcio de perdua entre les
203                 dues etiquetes
204                 gradient = minimax_generator(pos_result) - minimax_generator(
205                 neg_result)
206                 nabla_theta[index] += gradient # Afegir derivada d'un parametre al
207                 gradient
208                 new_images.append(self.get_output(noise))
209
210         for index, _ in enumerate(self.parameter_values):
211             # Actualitzacio dels parametres a traves del gradient
212             self.parameter_values[index] += (learning_rate / len(mini_batch)) *
213             nabla_theta[index]

```

```

203
204     # Creacio de la batch d'imatges a retornar
205     mini_batch = [(datapoint[0], fake_image) for datapoint, fake_image in zip(
        mini_batch, new_images)]
206     return mini_batch

```

LISTING E.4: Codi final pel generador

E.1.0.4 Execució del model Aquest codi es pot trobar al [repositori del treball](#) en l'arxiu `main.py`.

```

1 import numpy as np
2
3 from quantumGAN.discriminator import ClassicalDiscriminator
4 from quantumGAN.qgan import Quantum_GAN
5 from quantumGAN.quantum_generator import QuantumGenerator
6
7 num_qubits: int = 3
8
9 # Set number of training epochs
10 num_epochs = 150
11 # Batch size
12 batch_size = 10
13
14 train_data = []
15 for _ in range(800):
16     x2 = np.random.uniform(.55, .46, (2,))
17     fake_datapoint = np.random.uniform(-np.pi * .01, np.pi * .01, (num_qubits,))
18     real_datapoint = np.array([x2[0], 0, x2[0], 0])
19     train_data.append((real_datapoint, fake_datapoint))
20
21 discriminator = ClassicalDiscriminator(sizes=[4, 16, 8, 1],
22                                       type_loss="minimax")
23 generator = QuantumGenerator(num_qubits=num_qubits,
24                             generator_circuit=None,
25                             num_qubits_ancilla=1,
26                             shots=4096)
27
28 quantum_gan = Quantum_GAN(generator, discriminator)
29 print(quantum_gan)
30 print(num_epochs)
31 quantum_gan.generator.get_output(fake_datapoint[0], None)
32 quantum_gan.train(num_epochs, train_data, batch_size, .1, .1, True)
33
34 quantum_gan.plot()
35 quantum_gan.create_gif()

```

```
36 quantum_gan.save()
```

LISTING E.5: Codi final pel generador

Bibliografia

- [1] Maria Schuld, Ilya Sinayskiy, and Francesco Petruccione. The quest for a quantum neural network. *Quantum Information Processing*, 13:2567–2586, 2014. [Online; accedit en 19/09/2021: [Link](#)].
- [2] Michael Broughton, Guillaume Verdon, Trevor McCourt, Antonio J. Martinez, Jae Hyeon Yoo, Sergei V. Isakov, Philip Massey, Ramin Halavati, Murphy Yuezhen Niu, Alexander Zlokapa, Evan Peters, Owen Lockwood, Andrea Skolik, Sofiene Jerbi, Vedran Dunjko, Martin Leib, Michael Streif, David Von Dollen, Hongxiang Chen, Shuxiang Cao, Roeland Wiersema, Hsin-Yuan Huang, Jarrod R. McClean, Ryan Babbush, Sergio Boixo, Dave Bacon, Alan K. Ho, Hartmut Neven, and Masoud Mohseni. TensorFlow Quantum: A software framework for quantum machine learning. 2021. [Online; accedit en 19/09/2021: [Link](#)].
- [3] IBM quantum, 2021. [Online; accedit en 19/09/2021: [Link](#)].
- [4] Ian J. Goodfellow, Jean Pouget-Abadie, Mehdi Mirza, Bing Xu, David Warde-Farley, Sherjil Ozair, Aaron Courville, and Yoshua Bengio. Generative adversarial networks. 2014. [Online; accedit en 19/09/2021: [Link](#)].
- [5] He-Liang Huang, Yuxuan Du, Ming Gong, Youwei Zhao, Yulin Wu, Chaoyue Wang, Shaowei Li, Futian Liang, Jin Lin, Yu Xu, and et al. Experimental quantum generative adversarial networks for image generation. *Physical Review Applied*, 16(2), 2021. [Online; accedit en 19/09/2021: [Link](#)].
- [6] Gilbert Strang. Linear Algebra MIT OCW, 2011. [Online; accedit en 19/09/2021: [Link](#)].

- [7] Gilbert Strang. Matrix methods in data analysis, signal processing, and machine learning mit ocw, 2018. [Online; accedit en 19/09/2021: [Link](#)].
- [8] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [9] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, chapter 2, page 66. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [10] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right*, chapter 3, pages 37–58. Springer, 2 edition, 1997.
- [11] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right*, chapter 3, pages 48–52. Springer, 2 edition, 1997.
- [12] Wolfram MathWorld. L2-Norm, 2021. [Online; accedit en 19/09/2021: [Link](#)].
- [13] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, chapter 2, page 74. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [14] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, chapter 2, page 73. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [15] Wikipedia. Tensor product, 2021. [Online; accedit en 19/09/2021: [Link](#)].
- [16] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, chapter 2, pages 80–96. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [17] Asher Peres. *Quantum Theory: Concepts and Methods*, chapter 2, pages 24–29. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [18] Eleanor Rieffel and Wolfgang Polak. *Quantum Computing: A Gentle Introduction*, chapter 2, pages 12–13. MIT Press, 1 edition, 2011.

- [19] Wikipedia. Inverter (logic gate), 2021. [Online; accedit en 04/10/2021: [Link](#)].
- [20] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, chapter 2, page 99. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [21] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, chapter 2, page 105. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [22] Eleanor Rieffel and Wolfgang Polak. *Quantum Computing: A Gentle Introduction*. MIT Press, 1 edition, 2011.
- [23] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, chapter 2, pages 105–106. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [24] Eleanor Rieffel and Wolfgang Polak. *Quantum Computing: A Gentle Introduction*, chapter 10, pages 212–213. MIT Press, 1 edition, 2011.
- [25] Martín Abadi, Ashish Agarwal, Paul Barham, Eugene Brevdo, Zhifeng Chen, Craig Citro, Greg S. Corrado, Andy Davis, Jeffrey Dean, Matthieu Devin, Sanjay Ghemawat, Ian Goodfellow, Andrew Harp, Geoffrey Irving, Michael Isard, Yangqing Jia, Rafal Jozefowicz, Lukasz Kaiser, Manjunath Kudlur, Josh Levenberg, Dandelion Mané, Rajat Monga, Sherry Moore, Derek Murray, Chris Olah, Mike Schuster, Jonathon Shlens, Benoit Steiner, Ilya Sutskever, Kunal Talwar, Paul Tucker, Vincent Vanhoucke, Vijay Vasudevan, Fernanda Viégas, Oriol Vinyals, Pete Warden, Martin Wattenberg, Martin Wicke, Yuan Yu, and Xiaoqiang Zheng. TensorFlow: Large-scale machine learning on heterogeneous systems, 2015. Software disponible a [tensorflow.org](https://www.tensorflow.org).
- [26] Adam Paszke, Sam Gross, Francisco Massa, Adam Lerer, James Bradbury, Gregory Chanan, Trevor Killeen, Zeming Lin, Natalia Gimelshein, Luca Antiga, Alban Desmaison, Andreas Kopf, Edward Yang, Zachary De-

- Vito, Martin Raison, Alykhan Tejani, Sasank Chilamkurthy, Benoit Steiner, Lu Fang, Junjie Bai, and Soumith Chintala. Pytorch: An imperative style, high-performance deep learning library. In *Advances in Neural Information Processing Systems 32*, pages 8024–8035. Curran Associates, Inc., 2019.
- [27] Tero Karras, Samuli Laine, Miika Aittala, Janne Hellsten, Jaakko Lehtinen, and Timo Aila. Analyzing and improving the image quality of stylegan. 2020. [Online; accedit en 26/10/2021: [Link](#)].
- [28] lucidrains. This person does not exist, 2021. [Online; accedit en 26/10/2021: [Link](#)].
- [29] Vojtěch Havlíček, Antonio D. Córcoles, Kristan Temme, Aram W. Harrow, Abhinav Kandala, Jerry M. Chow, and Jay M. Gambetta. Supervised learning with quantum-enhanced feature spaces. *Nature*, 567(7747):209–212, 2019.
- [30] Maria Schuld and Nathan Killoran. Quantum machine learning in feature hilbert spaces. *Physical Review Letters*, 122(4), 2019.
- [31] Maria Schuld, Ilya Sinayskiy, and Francesco Petruccione. Prediction by linear regression on a quantum computer. *Physical Review A*, 94(2), 2016.
- [32] Aram W. Harrow and John C. Napp. Low-depth gradient measurements can improve convergence in variational hybrid quantum-classical algorithms. *Physical Review Letters*, 126(14), Apr 2021.
- [33] Yudong Cao, Gian Giacomo Guerreschi, and Alán Aspuru-Guzik. Quantum neuron: an elementary building block for machine learning on quantum computers. 2017. [Online; accedit en 6/11/2021: [Link](#)].
- [34] Jonathan Romero and Alan Aspuru-Guzik. Variational quantum generators: Generative adversarial quantum machine learning for continuous distributions. 2019. [Online; accedit en 6/11/2021: [Link](#)].
- [35] Iris Cong, Soonwon Choi, and Mikhail D. Lukin. Quantum convolutional neural networks. *Nature Physics*, 15(12):1273–1278, Aug 2019.

- [36] Saad Albawi, Tareq Abed Mohammed, and Saad Al-Zawi. Understanding of a convolutional neural network. In *2017 International Conference on Engineering and Technology (ICET)*, pages 1–6, 2017.
- [37] Christa Zoufal, Aurélien Lucchi, and Stefan Woerner. Quantum generative adversarial networks for learning and loading random distributions. *npj Quantum Information*, 5(103), 2019. [Online; accedit en 01/11/2021: [Link](#)].
- [38] Cirq Developers. Cirq, August 2021. See full list of authors on Github: <https://github.com/quantumlib/Cirq/graphs/contributors>.
- [39] MD SAJID ANIS, Héctor Abraham, AduOffei, Rochisha Agarwal, Gabriele Agliardi, Merav Aharoni, Ismail Yunus Akhalwaya, Gadi Aleksandrowicz, Thomas Alexander, Matthew Amy, Sashwat Anagolum, Eli Arbel, Abraham Asfaw, Anish Athalye, Artur Avkhadiiev, Carlos Azaustre, PRATHAMESH Bhole, Abhik Banerjee, Santanu Banerjee, Will Bang, Aman Bansal, Panagiotis Barkoutsos, Ashish Barnawal, George Barron, George S. Barron, Luciano Bello, Yael Ben-Haim, M. Chandler Bennett, Daniel Bevenius, Dhruv Bhatnagar, Arjun Bhowmik, Paolo Bianchini, Lev S. Bishop, Carsten Blank, Sorin Bolos, Soham Bopardikar, Samuel Bosch, Sebastian Brandhofer, Brandon, Sergey Bravyi, Nick Bronn, Bryce-Fuller, David Bucher, Artemiy Burov, Fran Cabrera, Padraic Calpin, Lauren Capelluto, Jorge Carballo, Ginés Carascas, Adam Carriker, Ivan Carvalho, Adrian Chen, Chun-Fu Chen, Edward Chen, Jielun (Chris) Chen, Richard Chen, Franck Chevallier, Kartik Chinda, Rathish Cholarajan, Jerry M. Chow, Spencer Churchill, CisterMoke, Chiriac. Qiskit: An open-source framework for quantum computing, 2021.
- [40] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, chapter 2, page 62. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [41] David J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*, chapter 1, pages 11–12. Prentice Hall, 1995.

- [42] Lov K Grover. A fast quantum mechanical algorithm for database search. *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 212–219, 1996. [Online; accedit en 05/10/2021: [Link](#)].