
Generant Imatges amb un Ordinador Quàntic

TREBALL DE RECERCA DE BATXILLERAT

IES MIQUEL TARRADELL

Autor:

Tomàs Ockier Poblet
2n Batxillerat
ockier1@gmail.com

Tutor:

Montserrat Parcet Bertran



Institut Miquel Tarradell

8 de gener de 2022
Barcelona, Barcelona

Índex

I	Marc Teòric	9
1	Àlgebra lineal	10
1.1	Vectors i espais vectorials	10
1.2	Aplicacions lineals	13
1.1	Tipus d'aplicacions lineals	14
1.3	Producte interior i producte exterior	16
1.1	Producte interior	16
1.1.1	Propietats del producte interior	17
1.2	Vectors ortonormals i ortogonals	18
1.3	Producte exterior	19
1.4	Producte tensorial	20
1.1	Propietats del producte tensorial	22
1.5	Traça	23
2	Computació quàntica	25
2.1	Estats quàntics i superposicions	25
2.2	Qubits i operacions quàntiques	29
2.1	Representació geomètrica d'un qubit	32
2.2	Operacions per a només un qubit	32
2.3	Circuit quàntics	35
2.4	Operacions per a múltiples qubits	36
2.4.1	Entrellaçament quàntic	37
2.4.2	Operacions controlades	38
2.3	Mesurament quàntic	40
2.4	Matriu de densitat	41
2.1	Matriu de densitat reduïda	43
2.1.1	Mesurament parcial	45
2.5	Ordinadors quàntics	45

<i>ÍNDEX</i>	2
3 Intel·ligència artificial	47
3.1 Xarxes neuronals	48
3.2 Descens del gradient	51
3.1 Backpropagation	54
3.3 Generative adversarial networks	56
4 Generació d'imatges amb un ordinador quàntic	59
4.1 Descens del gradient quàntic	60
4.2 Circuits quàntics per xarxes neuronals	61
 II Part Experimental	 64
5 Plantejament de l'hipòtesi	65
6 Programació del model	66
6.1 Discriminador	67
6.2 Generador	69
6.3 Creació del model	70
6.4 Execució del model	72
7 Realització del experiment	76
7.1 Anàlisi dels resultats	77
 III Conclusions	 80
 IV Apèndixs	 87
A Que podria fer en un futur?	88
B Més àlgebra lineal	90
B.1 Procediment de Gram–Schmidt	90
B.2 Curs ràpid de la notació de Dirac	91

<i>ÍNDEX</i>	3
C Computació Quàntica vs Mecànica Quàntica	92
C.1 Normalitzar	93
D Polarització d'un fotó	95
E Complexitat i algoritmes quàntics	97
E.1 Algoritme de Grover	98
E.2 Algoritme de Shor	99
E.3 Ordinadors quàntics actuals	101
F Codi	103
F.1 Part I	103
F.1 Capítol 3	103
F.1.0.1 Regressió lineal	103
F.2 Part II	104
F.1 Capítol 6	104
F.1.0.1 Codi original per la xarxa neuronal clàssica	104
F.1.0.2 Codi final per el discriminador	108
F.1.0.3 Codi per el generador	111
F.1.0.4 Definició del model	117
F.1.0.5 Execució del model	123
F.1.0.6 Funcions extres	124
F.2 Capítol 7	129
F.2.0.1 Multiprocessament	129

Abstract

Quantum Machine Learning is one of the most promising applications of Quantum Computing. In this work, I present a Quantum Generative Adversarial Network (qGAN) for generating gray-scale bar images. Through the Fréchet Distance score, I evaluate the effectiveness of a partial measurement on the simulated quantum circuit that generates the images. This score shows that the measurement improves qGAN performance by avoiding an oscillation on the resemblance between the generated and the real images, that is, an alternation of good and poor quality generated images that occurs through optimization of the qGAN.

El Aprendizaje Automático Cuántico es una de las aplicaciones más prometedoras de la Computación Cuántica. En este trabajo, presento una Red Generacional Adversaria Cuántica (qGAN en inglés) para generar imágenes de barras en una escala de grises. A través de la puntuación de la Distance de Fréchet, evalúo la efectividad de una medida parcial en el circuito cuántico que genera las imágenes. Esta puntuación muestra que esta medida mejora el rendimiento de la qGAN al evitar una oscilación en el parecido entre las imágenes generadas y las reales, es decir, una alternancia entre imágenes generadas de buena y mala calidad que se da a cabo a través de toda la optimización de la qGAN.

Nota al tribunal

Aquest document ha estat pensat per llegir-lo en un PDF, tot el text que està marcat en blau és hipertext que apunta a un enllaç web o a una altra part del treball. No obstant això, tots els documents referenciats no són accessibles immediatament, però si es vol accedir a un d'ell només, fa falta preguntar-me. Si el lector vol accedir als enllaços web ho pot fer a partir del PDF, que el trobarà a: <https://github.com/tomiock/qGAN>

També vull demanar disculpes perquè hi ha algunes paraules que estan escrites en anglès al llarg del treball. Tot el que hi ha en aquest document ho he après en anglès (com es pot veure en tots els recursos de la bibliografia) i a vegades m'és molt difícil traduir el nombre dels conceptes que he après. A més a més aquest document està redactat en \LaTeX una espècie de llenguatge de programació que s'utilitza per redactar documents que continguin expressions matemàtiques complexes, per aquesta raó hi ha paraules soltes en anglès en la bibliografia i altres llocs. Un altre error que no puc corregir és que els nombres que s'assignen a les seccions es repeteixen, això es pot veure molt clarament en l'índex.

Introducció

Des de fa més de dos anys, m'he dedicat a estudiar computació quàntica durant el meu temps lliure. Buscava investigar un camp relacionat amb la mecànica quàntica, però sense que sigui molt complicat, u camp que pugui entendre a un nivell teòric i que m'entusiasmi.

La Computació Quàntica encaixa perfectament amb aquests criteris. És més senzilla que la mecànica quàntica pel fet que no està basada en càlcul o equacions diferencials; en canvi, es basa en l'àlgebra lineal, utilitzant valors discrets, vectors i matrius. A més a més, si es treballa a un nivell teòric senzill, no s'han de tenir en consideració les interpretacions físiques, aquest factor simplifica molt les coses.

La meva part favorita d'aquest camp és el *Quantum Machine Learning* (QML) que consisteix a dissenyar i aplicar conceptes de *Machine Learning* als ordinadors quàntics, com per exemple implementar en circuits quàntics les famoses xarxes neuronals, que estan darrere de la majoria d'intel·ligències artificials que veiem avui dia [1].

QML és un camp de recerca jove i en creixement, ja que els algorismes d'aquest camp són ideals per a implementar-los amb els ordinadors quàntics actuals, els quals no són molt potents.

D'entre tots els tipus d'algorismes que existeixen dintre de QML m'he centrat en les xarxes neuronals quàntiques, anàlogues quàntiques de les xarxes neuronals tan utilitzades avui dia per a fer una gran varietat de tasques. M'he interessat particularment en elles pel fet que tenia experiència en el passat amb les xarxes neuronals clàssiques i havia vist que existeixen *frameworks* de programació per a treballar amb elles com TensorFlow Quàntum [2] que em podien ajudar.

Per a endinsar-me en el camp de QML, vaig haver d'adquirir coneixements en àlgebra lineal, càlcul i física. Una vegada havia vist aquests conceptes em vaig dedicar a llegir papers que m'interessaven i en un parell d'ocasions fins i tot vaig intentar implementar aquests algorismes en Python. Pot semblar una cosa impossible, ja que, no tinc accés directe a un ordinador quàntic, no obstant

això, aquests no són necessaris perquè les operacions quàntiques poden ser simulades en un ordinador corrent d'escriptori. Però puc tenir accés a ordinadors quàntics, ja que IBM permet accedir als seus mitjançant *IBM Quantum Experience* [3], encara que mai he donat ús d'això degut a que no ho veia necessari.

En aquest treball de recerca m'he proposat implementar mitjançant codi un dels algorismes que he vist en un paper, una Xarxa Adversària Generativa Cuàntica (GAN, en anglès) [4] que genera imatges a partir d'un circuit quàntic [5].

Com a pregunta a investigar m'he proposat verificar la utilitat d'una funció no lienal que implementen els autors en els circuits quàntics que generen les imatges. Segons els autors aquesta funció millora el rendiment del model, és a dir, que les imatges són generades amb una major eficiència.

Part I

Marc Teòric

Capítol 1

Àlgebra lineal

Quan vaig començar a buscar informació sobre computació quàntica, en vaig ràpidament donar compte que necessitava més coneixements matemàtics, com que no entenia gairebé res dels llibres sobre computació quàntica. Vaig tindre que la sort que durant aquell temps em van captar l'atenció una sèrie de vídeos sobre àlgebra lineal, que és justament la branca de les matemàtiques sobre la qual es basa la computació quàntica. Aquests vídeos són les lliçons que dona el professor Gilbert Strang a l'Institut Tecnològic de Massachusetts (MIT en anglès) [6, 7]. Una vegada havia vist gairebé tots els vídeos, ja tenia bastants conceptes apresos.

Aquelles lliçons em van ajudar a entendre les matemàtiques de *Quantum Computation and Quantum Information* [8] i *Quantum Computing: A Gentle Introduction*. A poc a poc, vaig anar aprenent els fonaments matemàtics de la computació quàntica i mecànica quàntica.

En aquesta secció aniré explicant els conceptes bàsics de l'àlgebra lineal amb la finalitat de formar els coneixements en matemàtiques necessaris per poder comprendre aquest treball.

1.1 Vectors i espais vectorials

Els objectes fonamentals de l'àlgebra lineal són els espais vectorials. Un espai vectorial és el conjunt de tots els vectors amb les mateixes dimensions i amb

certes propietats en comú. Per exemple \mathbb{R}^3 seria l'espai vectorial de tots els vectors de 3 dimensions els quals normalment s'utilitzen per representar punts en un espai tridimensional. En computació quàntica es fan servir uns espais vectorials anomenats espais de Hilbert, que són aquells en els que hi ha definit un producte interior [9]. En els espais de Hilbert es defineixen un conjunt d'operacions amb certes propietats, les quals explicaré a continuació. S'ha de tenir en compte que els espais de Hilbert són molt més complicats que el que es representa en aquest treball, i que d'aquí en endavant, quan mencioní espai vectorial, em referiré a un espai de Hilbert.

Els espais vectorials estan definits per les seves bases, i.e. un conjunt de vectors independents $B = \{|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle\}$. Posat d'una altra manera: el conjunt B és una base pel l'espai V , si cada vector $|v\rangle$ en l'espai es pot escriure com $|v\rangle = \sum_i a_i |v_i\rangle$ per $|v_i\rangle \in B$.

La notació estàndard per l'àlgebra lineal en mecànica quàntica és la notació de Dirac, en la qual es representa un vector com $|\psi\rangle$. On ψ és la etiqueta del vector. Un vector $|\psi\rangle$ amb n dimensions també pot ser representat com una matriu columna que té la forma:

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix}$$

Pels seus elements $\{z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n\} \in \mathbb{C}$. Els vectors escrits com $|\psi\rangle$ s'anomenen *ket*.

En els espais de Hilbert es defineix una addició de vectors¹:

$$|\psi\rangle + |\varphi\rangle = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix}$$

I una multiplicació escalar:

$$z|\psi\rangle = z \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z\psi_1 \\ \vdots \\ z\psi_n \end{bmatrix}$$

On z és un escalar, i $|\psi\rangle$ i $|\varphi\rangle$ són vectors

A més a més, hi ha definit un conjugat complex: Per $z = a + bi$, el seu conjugat z^* és igual a $a - bi$.

Aquesta noció es pot ampliar també a les matrius:

$$|\psi\rangle^* = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \psi_1^* \\ \vdots \\ \psi_n^* \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} a_{11}^* & \cdots & a_{1n}^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}^* & \cdots & a_{mn}^* \end{bmatrix}$$

Amb $|\psi\rangle$ sent un vector de dimensions n , i A sent una matriu de dimensions $m \times n$.

Un altre concepte important és la transposada, representada pel superíndex T que «rota» un vector o una matriu. Un vector columna amb una dimensió $n \times 1$

¹ Els vectors d'aquesta definició tenen els seus elements representats per la seva etiqueta i un subíndex e.g. el vector $|\psi\rangle$ té un element qualsevol ψ_i i el seu primer element es ψ_1 . Aquesta notació es seguirà utilitzant al llarg del treball.

es transforma a un vector fila amb una dimensió $1 \times n$ ²:

$$|\psi\rangle^T = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{bmatrix}^T = [\psi_1 \quad \dots \quad \psi_n]$$

El mateix és cert per les matrius, una matriu $m \times n$ transposada es converteix en una matriu $n \times m$:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

La composició d'un conjugat complex i la transposada s'anomena el conjugat Hermitià, la seva notació és una \dagger superindexada. Per un vector $|\psi\rangle$ el seu conjugat Hermitià $|\psi\rangle^\dagger$ és:

$$|\psi\rangle^\dagger = (|\psi\rangle^*)^T = [\psi_1^* \quad \dots \quad \psi_n^*] = \langle\psi|$$

El conjugat Hermitià compleix que $|\psi\rangle^\dagger = \langle\psi|$ i $\langle\psi|^\dagger = |\psi\rangle$.

El conjugat Hermitià d'un vector columna $|\psi\rangle$ s'anomena *bra* o vector dual. En la notació de Dirac un vector dual s'escriu com $\langle\psi|$.

1.2 Aplicacions lineals

Per poder operar amb vectors i fer operacions amb ells, s'utilitzen les matrius, que també son anomenades aplicacions lineal o transformacions lineals; noms que descriuen millor com funcionen aquests objectes. La definició formal d'una aplicació lineal pot ser bastant complicada, per aquesta raó, faré servir termes més informals en aquesta secció.

²En realitat els vectors columna son matrius amb dimensió $n, 1$, però he estat ometent el 1. Quan em refereixo a les dimensions d'un vector qualsevol, només diré un nombre, no obstant això, especificaré si és un vector columna o un vector fila.

Bàsicament, una aplicació lineal transforma un vector en un altre vector, que poden o no ser d'espais diferents [10]. Més formalment, per un vector $|v\rangle$ en un espai V i un vector $|w\rangle$ en un espai W , una aplicació lineal A entre els vectors, fa l'acció:

$$A|v\rangle = |w\rangle$$

En altres paraules, aquesta aplicació transforma un element del espai vectorial V en un element de l'espai vectorial W . Les aplicacions lineals han de complir les següents propietats:

1. Addició de vectors:

Donats els vectors $|\psi\rangle$ i $|\varphi\rangle$ en un mateix espai vectorial, i una aplicació lineal A :

$$A(|\psi\rangle + |\varphi\rangle) = A|\psi\rangle + A|\varphi\rangle$$

2. Producte escalar:

Donats els vectors $|\psi\rangle$, l'escalar z i la transformació lineal A , es certs que:

$$A(z|\psi\rangle) = zA|\psi\rangle$$

Aquestes afirmacions han de ser certes per tots els vectors i tots els escalars en els espais on les aplicacions actuen. Cal notar que una aplicació lineal no té perquè ser una matriu necessàriament, per exemple, les derivades i les integrals son aplicacions lineals. Això es pot provar fàcilment al veure que compleixen els criteris especificats posteriorment. Tanmateix, les derivades i les integrals usualment no s'apliquen a vectors, sinó a les funcions, però és possible aplicar-les a vectors.

Les matrius serien la representació matricial de les aplicacions lineals [11].

1.1 Tipus d'aplicacions lineals

En la secció actual, exposaré els tipus bàsics d'aplicacions lineals que són indispensables en la teoria presentada en aquest capítol i la resta del treball.

1. Operador zero

Qualsevol espai vectorial té un vector zero expressat en notació de Dirac com a 0 , pel fet que $|0\rangle$ és un altre concepte totalment diferent en CQ i IQ³. Es aquell vector que per qualsevol vector $|\psi\rangle$ i qualsevol escalar z , es compleix que:

- (a) És l'element neutre: $|\psi\rangle + 0 = |\psi\rangle$
- (b) I l'element nul pel producte escalar: $z0 = 0$.
- (c) L'operador zero també s'escriu com a 0 .

2. Matriu inversa

Una matriu quadrada⁴ A és invertible si existeix una matriu A^{-1} de manera que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, on A^{-1} seria la matriu inversa de A . La manera més ràpida de saber si una matriu és invertible és verificant si el seu determinant no és zero.

3. Matriu Identitat

Per a qualsevol espai vectorial V existeix una matriu I que és definida a partir de $I|\psi\rangle = |\psi\rangle$, aquesta matriu no fa cap canvi als vectors als quals opera, ni tampoc a les matrius amb les quals es multiplica.

4. Matrius Hermitianes

Una matriu Hermitiana compleix que:

$$\langle\psi|(A|\varphi\rangle) = (A^\dagger\langle\psi|)|\varphi\rangle$$

On $|\psi\rangle$ i $|\varphi\rangle$, són dos vectors de l'espai en el qual actua A . Si apliquem el producte interior a aquesta equació tenim que: $A = A^\dagger$.

5. Matriu Unitària

Un matriu unitari és qualsevol matriu que no altera la norma⁵ o longitud dels

³Computació Quàntica i Informació Quàntica.

⁴Una matriu quadrada és una matriu amb dimensions $n \times n$, on $n \in \mathbb{N}$.

⁵El concepte generalitzat de la longitud d'un vector. Usualment, parlaré de la norma ℓ_2 , esmentada com $\|\cdot\|_2$, i definida com a $\| |\psi\rangle \| = \sqrt{\psi_1^2 + \dots + \psi_n^2}$.

vectors als quals és aplicada, per tant, una matriu és unitària si $AA^\dagger = I$. Per convertir qualsevol matriu en unitària, es divideixen els seus components entre la longitud o norma del vector de la mateixa matriu.

1.3 Producte interior i producte exterior

1.1 Producte interior

Un vector dual $\langle a|$ i un vector $|b\rangle$ combinats formen el producte interior $\langle a|b\rangle$, el qual efectua una operació que agafa els dos vectors com a input i produeix un nombre complex com a output:

$$\langle a|b\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n = z$$

Amb $z, a_i, b_i \in \mathbb{C}$. Cal notar que els vectors $|a\rangle$ i $|b\rangle$ han de tenir la mateixa mida.

Aquest producte per dos vectors en \mathbb{R}^2 també es pot escriure com a:

$$\langle a|b\rangle = \| |a\rangle \|_2 \| |b\rangle \|_2 \cos \theta \quad (1.1)$$

Amb $\|\cdot\|_2$ sent la norma ℓ^2 i θ sent l'angle entre els vectors $|a\rangle$ i $|b\rangle$. Com he dit l'equació (1.1) és equivalent al producte interior, no obstant això, segons el que he vist no és usada àmpliament, ja que interpretar θ com un angle entre vectors de dimensions altes no té molt de sentit.

Usualment, aquest producte presentat en la seva interpretació geomètrica⁶ com el producte entre un vector fila i un vector columna:

$$\langle a|b\rangle = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

⁶Els detalls exactes de la interpretació geomètrica es troben fora del domini d'aquest treball, malgrat que m'agradaria molt parlar sobre el tema.

Ja he definit la norma ℓ_2 com l'arrel quadrada de la suma dels elements d'un vector al quadrat:

$$\| |a\rangle \|_2 = \sqrt{\sum_i |a_i|^2}$$

Tanmateix, la definició més comuna es basa en el producte interior. Com es pot veure el producte interior d'un vector per ell mateix és la suma dels seus components al quadrat:

$$\langle a|a\rangle = a_1a_1 + \dots + a_na_n = a_1^2 + \dots + a_n^2 = \sum_i |a_i|^2$$

Per tant, la norma pot ser definida com l'arrel quadrada del producte interior d'un vector:

$$\| |a\rangle \|_2 = \sqrt{\langle a|a\rangle} \quad (1.2)$$

Quan la norma és aplicada a un vector bidimensional, es pot veure que és el mateix que la longitud Euclidiana d'aquell vector, això és perquè realment són els mateixos conceptes, tot i això, la norma és el concepte de longitud però generalitzat a vectors de dimensions altes.

Segons el que he vist, algunes propietats de la longitud d'un vector bidimensional no es mantenen amb la norma d'un vector que té més de 2 dimensions. En altres paraules, la norma es comporta en certes maneres com la distància des de l'origen (que és la definició de la longitud), però són exactament el mateix. A més d'això, hi ha diferents tipus de normes que s'utilitzen en diversos escenaris. Aquesta és la raó per la qual em refereixo a la norma; com la norma ℓ^2 . A aquesta norma també se li diu norma Euclidiana [12].

1.1.1 Propietats del producte interior

Les propietats bàsiques del producte interior són les següents:

1. És lineal en el segon argument $(z_1 \langle a| + z_2 \langle c|) |b\rangle = z_1 \langle a|b\rangle + z_2 \langle c|b\rangle$
2. Té simetria en el conjugat $\langle a|b\rangle = (\langle b|a\rangle)^*$
3. $\langle a|a\rangle$ és no-negatiu i real, excepte en el cas de $\langle a|a\rangle = 0 \Leftrightarrow |a\rangle = 0$

1.2 Vectors ortonormals i ortogonals

A partir del concepte de norma sorgeixen els conceptes d'un parell de vectors ortonormals i un parell de vectors ortogonals. Mirant l'equació (1.2), podem veure que si el producte interior del vector és 1, la norma del mateix vector també és 1. Un vector que té norma 1, és un vector unitari.

Dos vectors diferents de zero són ortogonals si el seu producte interior és zero. Si aquests vectors són bidimensionals, a partir de l'equació (1.1) podem veure que el cosinus de l'angle que fan entre ells és zero, són perpendiculars entre ells:

Per $|a\rangle$ i $|b\rangle \neq 0$:

$$\text{Si } \langle a|b\rangle = 0 \text{ tenim que: } \| |a\rangle \|_2 \cdot \| |b\rangle \|_2 \cos \theta = 0$$

Perquè $|a\rangle$ i $|b\rangle$ no són zero, les seves normes tampoc ho són.

Per tant el terme que falta $\cos \theta$ ha de ser igual a zero.

D'aquesta manera, l'angle θ ha de ser $\frac{\pi}{2}$.

No obstant això, pensar que la perpendicularitat i l'ortogonalitat són els mateixos conceptes és un error, això només és veritat pels vectors bidimensionals. Perquè com en el cas de la norma i la longitud, l'ortogonalitat és el concepte de perpendicularitat però generalitzat.

Quan barregem els conceptes de vector unitari i vectors ortogonals arribem a l'ortonormalitat [9]. Un parell de vectors que no són zero, són ortonormals quan els dos vectors són unitaris i també són ortogonals entre ells:

$$|a\rangle \text{ i } |b\rangle \text{ són ortonormals si: } \begin{cases} \langle a|b\rangle = 0 \\ \langle a|a\rangle = 1 \\ \langle b|b\rangle = 1 \end{cases}$$

Els vectors ortonormals són importants. Són àmpliament utilitzats tant en computació quàntica com en mecànica quàntica perquè serveixen per crear bases vectorials que resulten molt útils.

Una altra cosa que remarcar és que al dir un parell de vectors, aquest parell també pot ser un conjunt de vectors. Si un conjunt està compost de vectors unitaris, i aquests són ortogonals entre ells, és un conjunt de vectors ortonormals. El conjunt de vectors $B = \{|\beta_1\rangle, |\beta_2\rangle, \dots, |\beta_{n-1}\rangle, |\beta_n\rangle\}$ és ortonormal si $\langle\beta_i|\beta_j\rangle = \delta_{ij} \forall i, j$ [9] on δ_{ij} és el Kronecker delta, definit com:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

1.3 Producte exterior

El producte exterior és una funció (expressada com $|a\rangle\langle b|$, amb $|a\rangle$ i $|b\rangle$ sent vectors) que agafa dos vectors i produeix un operador lineal com output. Al contrari que el producte interior, no hi ha un producte equiparable en les matemàtiques ensenyades al institut, i és una mira difícil d'entendre perquè agafa dos vectors que poden ser d'un espai diferent com input. És definit com:

Pels vectors $|v\rangle$ i $|v'\rangle$ amb dimensions m i el vector $|w\rangle$ de dimensions n . El producte exterior és l'aplicació lineal A de dimensions $m \times n$ en l'espai $\text{Mat}_{m \times n}$:

$$|v\rangle\langle w| = A \text{ with } A \in \text{Mat}_{m \times n}.$$

Amb la seva acció definida per:

$$(|v\rangle\langle w|)|v'\rangle \equiv |w\rangle\langle v|v'\rangle = \langle v|v'\rangle|w\rangle \quad (1.3)$$

A partir de l'equació (1.3) la utilitat i significat del producte són bastant complicats d'entendre, per tant, exposaré la manera de computar-lo per clarificar com

funciona. Per dos vectors $|a\rangle$ i $|b\rangle$ de dimensions m i n respectivament, el seu producte interior es computa multiplicant cada element de $|a\rangle$ per cada element de $|b\rangle$ formant una matriu amb mida $m \times n$:

$$|a\rangle \langle b| = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & a_m b_2 & \cdots & a_m b_n \end{bmatrix}$$

La utilitat d'aquest producte es mostrarà més endavant.

1.4 Producte tensorial

L'últim producte que mencionaré és el tensorial, representat pel símbol \otimes . Aquest producte s'utilitza per crear espais vectorials més grans combinant espais vectorials més petits. La definició formal és bastant complicada, per tant, en centraré a explicar la manera amb la qual es computa fent ús de la representació matricial d'aquest producte, anomenada el producte de Kronecker.

Per una matriu $m \times n$, A , i una $p \times q$ matriu B , el seu producte de Kronecker

[13] és la matriu de mida $pm \times qn$:

$$\begin{aligned}
 A \otimes B &= \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1q} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \cdots & a_{11}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pq} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \cdots & a_{m1}b_{1q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \cdots & a_{mn}b_{1q} \\ a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \cdots & a_{m1}b_{2q} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \cdots & a_{mn}b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \cdots & a_{m1}b_{pq} & \cdots & \cdots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \cdots & a_{mn}b_{pq} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Cal tenir en compte que $a_{ij}B$ és una multiplicació escalar per una matriu, amb a_{ij} sent l'escalar i B sent la matriu.

Aquí hi ha un exemple més il·lustratiu amb dues matrius de mida 2×2 , es pot veure que cada element de la primera matriu és multiplicat per la segona matriu:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 2 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \\ 3 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} & 4 \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \times 0 & 1 \times 5 & 2 \times 0 & 2 \times 5 \\ 1 \times 6 & 1 \times 7 & 2 \times 6 & 2 \times 7 \\ 3 \times 0 & 3 \times 5 & 4 \times 0 & 4 \times 5 \\ 3 \times 6 & 3 \times 7 & 4 \times 6 & 4 \times 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

El producte de Kronecker també funciona de la mateixa manera amb vectors:

Pels vectors $|\psi\rangle$ i $|\varphi\rangle$ de dimensions n i m respectivament:

$$|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle = \begin{bmatrix} \psi_1 |\varphi\rangle \\ \psi_2 |\varphi\rangle \\ \vdots \\ \psi_m |\varphi\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \varphi_1 \\ \psi_1 \varphi_2 \\ \vdots \\ \psi_1 \varphi_m \\ \vdots \\ \vdots \\ \psi_n \varphi_1 \\ \psi_n \varphi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \varphi_m \end{bmatrix}$$

S'ha de tenir en compte que el producte de Kronecker també es pot fer entre un vector i una matriu, o viceversa, no obstant això, no és molt comú fer-ho.

1.1 Propietats del producte tensorial

Les propietats bàsiques del producte tensorial són les següents [14, 15]:

1. Associativitat:

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$$

$$(zA) \otimes B = A \otimes (zB) = z(A \otimes B)$$

$$(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$$

$$A \otimes 0 = 0 \otimes A = 0$$

2. No-commutativitat ⁷:

$$A \otimes B \neq B \otimes A$$

⁷Una cosa a notar és que $A \otimes B$ i $B \otimes A$ són permutativament equivalents:
 $\exists P, Q \Rightarrow A \otimes B = P(B \otimes A)Q$ on P i Q són matrius permutatives.

1.5 Traça

La traça d'una matriu és tal sols la suma dels seus elements en la diagonal principal, la diagonal que va de dalt a baix i d'esquerra a dreta. Cal notar que la matriu ha de ser quadrada.

Aquí hi ha una matriu A amb la seva diagonal principal marcada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

I la seva traça, representada per $\text{Tr}[A]$ és:

$$\text{Tr}[A] = 1 + 1 + 1 = 3$$

Més formalment, la traça d'una matriu quadrada n -dimensional és:

$$\text{Tr}[A] = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

La traça d'una matriu té les propietats següents:

1. És una aplicació lineal:

Degut a que la traça és un aplicació lineal, es compleix que:

$\text{Tr}[A + B] = \text{Tr}[A] + \text{Tr}[B]$ i $\text{Tr}[zA] = z \text{Tr}[A]$, per a totes les matrius quadrades A i B , i tots els escalars z .

2. Traça d'un producte tensorial:

$$\text{Tr}[A \otimes B] = \text{Tr}[A] \text{Tr}[B]$$

3. La transposada té la mateixa traça:

$$\text{Tr}[A] = \text{Tr}[A^T]$$

4. La traça d'un producte és cíclica:

Per una matriu A amb mida $m \times n$ i una matriu B de la mateixa mida:

$$\text{Tr}[AB] = \text{Tr}[BA]$$

Una altra manera molt útil d'avaluar la traça d'un operador és a través del procediment de Gram-Schmidt⁸ i el producte exterior. Utilitzant Gram-Schmidt per representar el vector unitat $|\psi\rangle$ en una base ortonormal $|i\rangle$ que inclou $|\psi\rangle$ com el seu primer element, es compleix que:

$$\text{Tr}[A |\psi\rangle \langle\psi|] = \sum_i \langle i| A |\psi\rangle \langle\psi|i\rangle = \langle\psi| A |\psi\rangle$$

⁸Mirar [B.1](#) per una definició del procediment de Gram-Schmidt el qual s'utilitza per poder generar bases ortonormals a partir d'un conjunt de vectors.

Capítol 2

Computació quàntica

Després de la teoria matemàtica, ha arribat el moment de parlar sobre mecànica quàntica; en aquest capítol introduiré alguns conceptes bàsics sobre Informació Quàntica i Computació Quàntica (IQ i CQ).

La mecànica quàntica és un marc matemàtic o conjunt de teories utilitzades per poder explicar les propietats físiques dels àtoms, molècules i partícules sub-atòmiques. És un marc que engloba tota la física quàntica, incloent-hi la teoria d'informació quàntica. La manera correcta de definir la computació quàntica és a través dels postulats de la mecànica quàntica, perquè amb aquests, les afirmacions que es fan en computació quàntica no semblen venir d'enlloc [16]. No obstant això, per no complicar més aquesta secció, faré el millor possible per poder explicar els conceptes de la computació quàntica sense entrar en els conceptes més generals de la mecànica quàntica, a no ser que sigui estrictament necessari.

2.1 Estats quàntics i superposicions

Per descriure com evolucionen els sistemes físics a través del temps, es necessita representar els sistemes d'alguna manera. En computació quàntica els sistemes es representen per estats quàntics, els quals són un tipus de distribucions de probabilitat que representen els possibles resultats d'una mesura on un sistema quàntic [17].

Imaginat que tens un boli, però que no saps de quin color és, tanmateix, saps que pot ser vermell o blau. Per esbrinar de quin color és, pots provar d'escriure amb el boli per veure el color de la tinta, o en altres paraules, fer una mesura del sistema. Saps que hi ha un 50% de probabilitat que sigui vermell i un 50% que sigui blau. En aquesta situació hipotètica tindries el teu sistema quàntic (el boli), una manera de mesurar-lo (escriure alguna cosa) i una llista amb els possibles resultats (50% vermell, 50% blau), només et falta una manera de representar-lo tot matemàticament, l'estat quàntic. Per tant, per què no intentem guardar la informació que sabem del boli en un vector?

Si posem cada probabilitat de treure un resultat en un vector, tenim que:

$$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

On la primera entrada és la possibilitat que el boli sigui vermell i la segona entrada que sigui blau, per fer-ho més senzill aquí està en colors:

$$\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Cal remarcar que aquest vector està normalitzat amb la norma ℓ_1 , definida com la suma dels components d'un vector¹, en altres paraules la norma ℓ_1 d'aquest vector és 1.

Ara hem d'escollir una operació matemàtica per poder extreure la informació del vector, com que l'output ha de ser un nombre, podem provar d'utilitzar un producte interior. Però primer s'ha de representar el vector com una combinació lineal de les seves bases:

$$0.5 |0\rangle + 0.5 |1\rangle = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

¹Amb $|a\rangle$ sent un vector, la norma ℓ_1 , denotada per $\|\cdot\|_1$ és $\| |a\rangle \|_1 = \sum_i a_i$.

On $|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Llavors, per trobar la probabilitat, s'agafa el producte interior del vector amb la base corresponent a la probabilitat, com a continuació:

$$\langle 0|v\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5$$

$$\langle 1|v\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = 0.5$$

Aquest procediment és bastant senzill com es pot veure. Per tindre un exemple una mica més complicat, per representar un boli amb 6 colors possibles amb una possibilitat aleatòria d'escriure amb un color dels 6 possibles, l'estat d'aquest boli podria ser²:

$$|w\rangle = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.3 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix}$$

Ara per poder veure la probabilitat de per exemple que el boli sigui de color verd, podem utilitzar la tercera base del vector, la qual correspon al color verd:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.3 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.05 \end{bmatrix} = 0.1$$

Deixant els bolis a una banda, els podem substituir per un sistema físic quàntic, com per exemple un fotó. Els fotons tenen certes propietats que poden ser me-

²L'he posat colors als elements per claredat.

surades, com la seva polarització³. Al mirar als fotons com ones que oscil·len en els camps electromagnètics, la polarització és l'orientació geomètrica de l'ona. La polarització pot ser interpretada com un angle respecte a la direcció de propagació.

Al definir les bases de l'estat de polarització com vertical i horitzontal, denotades pels vectors $|\rightarrow\rangle$ i $|\uparrow\rangle$, respectivament. Podem definir un estat de superposició entre les bases, representat com $|\nearrow\rangle$ [18]:

$$|\nearrow\rangle = \alpha |\rightarrow\rangle + \beta |\uparrow\rangle \quad (2.1)$$

On α i β són números complexos. Un estat en superposició és simplement un estat on l'angle de polarització no és 0 ni $\frac{\pi}{2}$. No ens hem de preocupar de la descripció matemàtica exacta de la polarització dels fotons al parlar de computació quàntica perquè el que importa és la informació que porten aquests estats, no la física dels sistemes que representen.

Aquesta informació s'ha d'agafar mitjançant mesures, com amb els bolis. Aquestes mesures en el cas de la polarització dels fotons seria passar els fotons per diversos filtres de polarització, els quals deixen passar el fotó o l'absorbeixen, tot això d'una manera probabilística, és a dir, depenent de quin sigui l'estat tenen certa possibilitat de ser absorbits o no.

Per clarificar, el filtre el que fa és col·lapsar el fotó en els dos possibles estats de polarització, l'estat en el qual el filtre és orientat o l'estat perpendicular a aquest. Si col·lapsa en l'estat del filtre el fotó passa pel filtre, en cas de col·lapsar en l'altre estat, el fotó és absorbit. La manera en la qual els fotons col·lapsen és probabilística, si agafem un filtre que està orientat horitzontalment respecte als fotons que li arriben, un fotó orientat horitzontalment té un 100% de possibilitats de poder passar, mentre que un fotó polaritzat verticalment té un 0% de probabilitat de poder passar. I si un fotó està polaritzat en un angle just entre vertical i

³Concretament, són una propietat que les ones transversals tenen, el tipus d'ona de les ones electromagnètiques, que són els fotons en realitat.

horitzontal, és a dir a $\frac{\pi}{4}$, tindrà un 50% de possibilitats de passar i un 50% de no poder-hi.

Aquesta és la manera amb la qual els sistemes quàntics es comporten, a través de la probabilitat. Els estats que els representen simplement tenen la informació sobre quines són aquestes possibilitats. No obstant això, la polarització dels fotons són un sistema físic concret, quan es parla de computació quàntica és millor treballar amb conceptes més generals per poder expressar tants algoritmes com sigui possible i poder implementar aquests algoritmes en tants ordinadors quàntics com sigui possible. Per aquesta raó, en la branca de la informació quàntica i la computació quàntica es treballa amb qubits, en comptes de diversos sistemes físics.

2.2 Qubits i operacions quàntiques

Els ordinadors moderns representen la informació a través de cadenes de zeros i uns, anomenades bits; des d'imatges a lletres o instruccions electròniques. Per exemple, la lletra t és representada per la cadena de bits 01110100, codificada a través de codi binari. Tot el que fas en un ordinador es codifica i representa en codi binari.

Gràcies al fet que estem molt acostumats al codi binari, en el camp de la computació quàntica també s'utilitza, no obstant això, en comptes de bits s'utilitzen qubits. Un qubit és l'anàleg d'un bit, en altres paraules, és la unitat mínima d'informació utilitzada pels ordinadors quàntics. En els qubits podem aplicar propietats quàntiques com la superposició o l'entrellaçament⁴. Si un bit pot estar en l'estat 0 o en l'estat 1, un qubit pot estar en una combinació d'aquests estats, en un estat enmig del 1 i del 0. Un qubit és una combinació lineal dels vectors que representen aquests estats, $|0\rangle$ i $|1\rangle$:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

⁴Ja he parlat de la primera amb la polarització dels fotons, de l'entrellaçament parlaré més endavant.

On α i β són nombres complexos i $|\psi\rangle$ és un vector en un espai de Hilbert bidimensional.

Els vectors $|0\rangle$ i $|1\rangle$ són anomenats els vectors de la base computacionals, representats com:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Per tant el vector $|\psi\rangle$ és:

$$|\psi\rangle = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Aquest vector és un estat quàntic vàlid per representar un qubit, anomenat *statevector* o vector d'estat. No obstant això, hi ha un important factor a tenir en compte. El vector ha d'estar normalitzat amb la norma ℓ_2 , per tant, els nombres α i β no poden ser nombres qualsevols, necessiten ser els coeficients que formin un vector amb una norma de 1:

$$\| |\psi\rangle \| = 1$$

Llavors:

$$\begin{aligned} \| \psi \| &= \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = 1 \\ \Rightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 &= 1 \end{aligned}$$

Definir un qubit com una «combinació lineal dels estats fonamentals» no és de molta ajuda, per això, elaboraré més sobre aquesta definició: Una cadena de n -bit només pot representar una única combinació d'uns i zeros, mentre que una cadena de n -qubits representa una combinació concreta de totes les possibles combinacions. En el cas d'un qubit, aquest és una combinació del possible estats $|0\rangle$ i $|1\rangle$. Considera un qubit com una barreja dels estats possibles, amb cada coeficient de la combinació lineal sent el nombre que indica quant d'un estat forma part de la barreja.

Una cosa molt interessant passa quan s'augmenta el nombre qubits, la «quantitat d'informació» creix exponencialment. Per una cadena de n qubits la «quantitat d'informació» que té, en altres paraules la quantitat de nombres que representa és 2^n , on aquests nombres són els coeficients que corresponen a les combinacions lineals. Això és perquè quan afegeixes un qubit el nombre de combinacions possibles creix exponencialment, per tant, es necessiten més coeficients per representar aquestes combinacions noves en la combinació lineal. El qubits necessiten molta més informació per poder representar-los⁵, no com els bits que al ser només una combinació es necessita només saber quina combinació és. No passa res si això no s'entén perfectament, el que és important és saber que es necessiten 2^n nombres complexos⁶ per representar n -qubits i que es necessiten n números binaris per representar n -bits.

Per il·lustrar tot això, 2 qubits es representen amb el *statevector*:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle &= \alpha_1 |00\rangle + \alpha_2 |01\rangle + \alpha_3 |10\rangle + \alpha_4 |11\rangle \\
 &= \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Cal remarcar que els vectors de la base computacional serien les columnes d'una matriu identitat amb dimensions $2^n \times 2^n$, on n és el nombre de qubits. Per il·lustrar tot això, 2 qubits es representen amb el *statevector*:

Per poder representar informació amb qubits simplement es codifica aquesta informació en els qubits, això es pot fer per exemple mitjançant codi binari: Els números 0, 1, 2 i 3 són els bits 00, 01, 10 i 11 respectivament, per tant, es poden representar amb dos qubits en els estats $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$, respectivament.

⁵Informació que es manifesta amb els coeficients de la combinació lineal

⁶Són complexos, ja que els coeficients de la combinació lineal són nombres complexos.

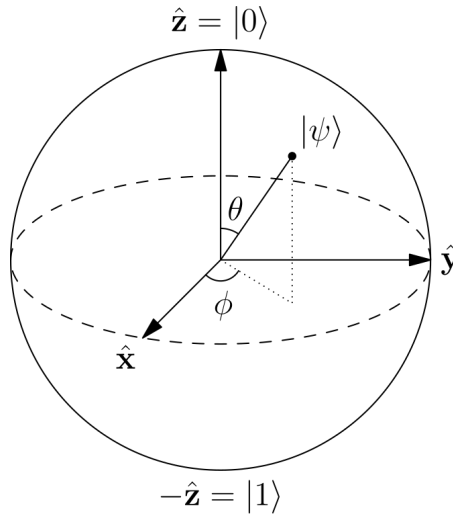


FIGURA 2.1: Esfera de Bloch, on es representa un estat arbitrari $|\psi\rangle$ amb els vectors $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ representat els eixos ortonormals de la esfera de radi 1.

2.1 Representació geomètrica d'un qubit

Un aspecte que sempre m'ha agradat del qubits és la seva representació geomètrica, l'esfera de Bloch 2.1. Si agafem una esfera unitària⁷ que té els seus pols nord i sud definits pels vectors $|0\rangle$ i $|1\rangle$, respectivament. Cada punt de la seva superfície és un estat quàntic vàlid on les seves bases computacionals són $|0\rangle$ i $|1\rangle$.

2.2 Operacions per a només un qubit

Una vegada informació és representada amb els qubits, estaria bé poder operar amb aquesta informació. Operar amb la informació és justament el que fa que els ordinadors siguin ordinadors, poder operar amb la informació. En computació quàntica els qubits al poder ser representats amb vectors són operats per les anomenades portes lògiques quàntiques, que són matrius. Per exemple, si es vol passar de tindre un qubit en l'estat $|0\rangle$ a l'estat $|1\rangle$, s'utilitza la porta lògica X representada a continuació:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

⁷Una esfera que té radi 1 i que qualsevol punt en la seva superfície correspon a un vector en \mathbb{R}^3 unitari.

Podem veure com es fa aquesta l'acció al multiplicar la matriu pel vector:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Que en notació de Dirac s'expressaria com:

$$X |0\rangle = |1\rangle$$

D'una manera més general:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \times \alpha + 1 \times \beta \\ 1 \times \alpha + 0 \times \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

Es pot veure que aquesta matriu el que fa és donar la volta als coeficients d'un vector, per tant:

$$X |0\rangle = |1\rangle \text{ i } X |1\rangle = |0\rangle$$

Aquesta porta lògica forma part d'un grup de matrius molt important, les matrius de Pauli, compost per 3 matrius: la X, la Y i la Z, usualment representades per X , Y , Z o per σ_x , σ_y , σ_z . Aquestes matrius són les següents:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Aquestes matrius són molt importants en la mecànica quàntica⁸ i són utilitzades àmpliament per descompondre portes lògiques quàntiques [19].

A partir d'elles podem elaborar matrius que facin una rotació d'un angle θ

⁸Al ser Hermitianes són uns observables, concretament són els observables que corresponen al spin d'una partícula amb spin $\frac{1}{2}$ bàsicament estan relacionades amb els operadors del moment angular.

qualsevol en un dels eixos de la representació geomètrica d'un qubit 2.1:

$$R_x(\theta) = e^{-i\theta X/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} X = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\theta}{2} \\ -i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$R_y(\theta) = e^{-i\theta Y/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} Y = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$R_z(\theta) = e^{-i\theta Z/2} = \cos \frac{\theta}{2} I - i \sin \frac{\theta}{2} Z = \begin{bmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Per exemple la matriu $R_y(\cdot)$ (Eq.2.3) correspon a una rotació en l'eix \hat{y} de l'esfera de la figura 2.1.

Aquestes operacions poden resultar en superposicions si es fan rotacions amb certs angles. Però hi ha una porta lògica especial per poder fer una rotació que resulta en una superposició uniforme. És a dir una superposició que tingui les mateixes probabilitats de resultar en $|0\rangle$ o $|1\rangle$. Aquesta és la porta de Hadamard, denotada per H :

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Podem comprovar que és una superposició uniforme al aplicar-la a l'estat $|0\rangle$:

$$H |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

L'estat resultant és un estat especial que s'escriu com $|+\rangle$ ⁹. La probabilitat que un estat col·lapsi en una determinada base és el coeficient de la seva base elevat al quadrat. Com que l'estat és:

$$|+\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$$

⁹Un altre estat similar és $\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$, quan la matriu H s'aplica a l'estat $|1\rangle$.

Al elevar al quadrat qualsevol dels coeficients es pot veure que dona $\frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Llavors tenim que la probabilitat per obtenir els dos estats és la mateixa, és a dir que si mesurem l'estat $|+\rangle$ hi ha la mateixa probabilitat que surti $|0\rangle$ o $|1\rangle$. La porta lògica de Hadamard és molt important, ja que s'utilitza per crear distribucions uniformes, sigui en un qubit o en diversos¹⁰.

Altres operacions importants de només un qubit són les portes S i T :

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$$

2.3 Circuit quàntics

Aquestes operacions usualment es representen a través de circuits quàntics. Són representacions gràfiques que indiquen de quines operacions s'apliquen a quins qubits i en quin ordre¹¹.

La forma de representar una porta H aplicada a un qubit és amb el circuit quàntic:

$$|0\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ ---}$$

El qubit és representat per la línia que comença amb $|0\rangle$, amb $|0\rangle$ sent el seu estat inicial. Aquests diagrames es llegeixen d'esquerra a dreta, la mateixa forma en la qual s'apliquen les operacions.

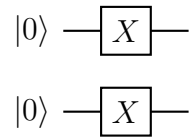
Un qubit en el qual se li aplica una porta H i després una porta X , és representat com:

$$|0\rangle \text{ --- } \boxed{H} \text{ --- } \boxed{X} \text{ ---}$$

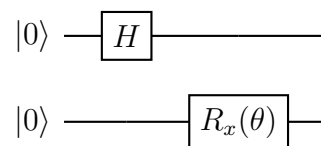
¹⁰S'aplica aquesta operació a cada qubit del sistema.

¹¹A mi em semblen semblants a les partitures musicals.

Múltiples qubits són simplement més línies, aquí estan representant dos qubits amb portes X aplicades a cada un:



Amb múltiples qubits també hi ha un ordre en el qual les portes s'han d'aplicar. Un circuit de dos qubits, en el qual s'aplica una porta Hadamard en el primer qubit i a continuació s'aplica una rotació¹² en l'eix x en el segon qubit, seria:



Es pot veure que hi ha un ordre específic per aplicar aquestes portes, primer s'aplica la H i després la rotació.

2.4 Operacions per a múltiples qubits

Lo realment interessant és quan s'apliquen portes a diversos qubits, perquè d'aquesta manera es pot arribar a tindre qubits entrellaçats. La porta més útil per entrellaçar qubits és la CNOT o *Controlled NOT*:

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

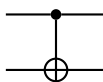
Aquesta porta s'aplica a dos qubits, que anomenaré c i t . És bàsicament una porta X que està controlada pel qubit c : si c és $|1\rangle$, s'aplica la porta X al qubit t . El cas contrari, amb el qubit c sent l'estat $|0\rangle$, en el qubit t no s'aplicaria cap porta.

¹²D'un angle θ .

Però si el qubit c està en superposició, aquesta superposició passa també al qubit t , i al mesurar-lo, la probabilitat de què s'hagi aplicat la porta X al qubit t és la mateixa probabilitat de què c estigui en l'estat $|1\rangle$. Els qubits d'alguna manera han passat a compartir la superposició. Es considera que aquests qubits estan entrellaçats, una mesura a un d'ells afecta a la mesura de l'altre.

El qubit al qual se li aplica la porta X es diu *target* (que en l'explicació anterior seria el qubit t) i el qubit sobre el qual depèn el *target* és el *control* (que seria el qubit c).

Aquesta porta representada en un circuit s'escriu com:



On el qubit *control* és el primer i el segon és el *target*, el qubit que té el símbol \oplus ¹³.

2.4.1 Entrellaçament quàntic

L'exemple més senzill d'un entrellaçament quàntic en la computació quàntica són els parells de Bell, que es creen al aplicar a dos qubits una porta H al primer i després una porta CNOT als dos creant l'estat:

$$\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

Es pot veure que només hi ha dos estats possibles $|00\rangle$ i $|11\rangle$ que tenen la mateixa probabilitat associada¹⁴. S'afecten l'un a l'altre en el sentit que quan es mesura només un dels qubits i dona per exemple $|1\rangle$, al mesurar l'altre també dona $|1\rangle$, d'aquesta manera acabant amb l'estat $|11\rangle$. En altres paraules, la mesura d'una part del sistema determina el resultat d'una mesura en una altra part del sistema.

Matemàticament, un sistema quàntic, i.e. un conjunt de qubits, està entrellaçant quan aquest sistema no es pot descriure amb un producte tensorial de

¹³A vegades escriure els circuits quàntics sense especificar l'estat inicial, ja que no és necessari.

¹⁴Això es pot veure al elevar al quadrat els coeficients del dos, que donen $\frac{1}{2}$.

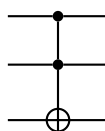
les parts. Per exemple estat $|00\rangle$ es pot escriure com $|0\rangle \otimes |0\rangle$, mentre que l'estat $\frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$, no. Per tant, el primer no és sistema amb qubits entrelaçats i el segon si ho és.

A partir de l'entrelaçament i la superposició és com els ordinadors quàntics arribem a tenir avantatges en complexitat sobre els ordinadors clàssics, per més informació sobre els avantatges que presenten els algorismes quàntics en certes tasques i el concepte de complexitat algorítmica veure l'apèndix [E](#).

2.4.2 Operacions controlades

A part de la porta CNOT existeixen diverses portes quàntiques controlades. Realment es pot controlar qualsevol porta, en altres paraules, si l'estat del qubit *control* és $|0\rangle$, s'aplica qualsevol porta al qubit *target*. Fins i tot podem haver-hi diversos qubits *control* i *target*.

Per exemple existeix la porta Toffoli:



Que en la seva forma matricial és:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aquesta porta aplica una porta X a l'últim qubit en cas que els dos primers siguin $|0\rangle$.

Tornant a dos qubits, al veure la matriu per la porta CNOT, es pot apreciar que està composta per una matriu identitat i una porta X ¹⁵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

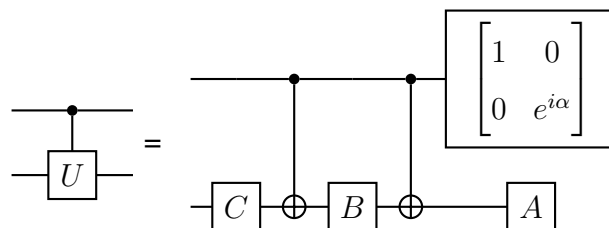
També al veure la porta Z controlada (CZ), es pot apreciar el mateix patró:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Amb la matriu de la porta Z a la cantonada inferior dreta. Aquesta porta en un circuit quàntic es representa de la següent manera:



No obstant això, una operació controlada de qualsevol matriu unitària U es forma a través del següent circuit:



On U, α, A, B i C son tals que $U = e^{i\alpha}AXBXC$ i $ABC = I$.

¹⁵La matriu identitat es troba a la cantonada superior esquerra, mentre que la porta X es troba a l'altre extrem.

2.3 Mesurament quàntic

Com ja s'ha esmentat a la secció 2.2 al elevar al quadrat el coeficient d'un estat base que forma part d'un estat, s'obté la probabilitat d'obtenir aquest estat base quan es mesura.

Aquesta és la forma més simple de poder predir el mesurament d'un estat quàntic. Però hi ha altres mètodes que a vegades resulten més útils.

Els mesuraments quàntics també es poden pensar com un conjunt d'operadors de mesura M_m . On la probabilitat d'obtenir l'estat m associat a un operador M_m al mesurar un $|\psi\rangle$ és:

$$\text{prob}(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle \quad (2.7)$$

On l'estat després de la mesura és:

$$\frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}}$$

Els operadors M_m han de complir que la suma de les seves probabilitats sigui 1:

$$1 = \sum_m \text{prob}(m) = \sum_m \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle$$

La diferència entre aquesta manera de fer les mesures i elevar els coeficients al quadrat, és que l'equació 2.7 és una forma més general, on en comptes de mesurar en la base computacional, es pot mesurar en qualsevol base.

Per mesurar en la base computacional d'un *statevector* s'utilitzen operadors de mesura derivats de la base computacional fets a partir de productes exteriors. Per crear l'operador de mesura M_i associat a la base computacional $|i\rangle$ s'agafa el producte exterior de la base:

$$M_i = |i\rangle \langle i|$$

Per tant la probabilitat que la mesura del estat $|\psi\rangle$ resulti en $|0\rangle$, és:

$$\begin{aligned}\text{prob}(|0\rangle) &= \langle\psi| M_{|0\rangle}^\dagger M_{|0\rangle} |\psi\rangle \\ &= \langle\psi| (|0\rangle \langle 0|)^\dagger |0\rangle \langle 0| \psi\rangle\end{aligned}$$

Per $|\psi\rangle = |0\rangle$ tenim que¹⁶:

$$\begin{aligned}\text{prob}(|0\rangle) &= \langle 0|0\rangle \langle 0|^\dagger |0\rangle \langle 0|0\rangle \\ &= \langle 0|0\rangle \langle 0|0\rangle \langle 0|0\rangle \\ &= \langle 0|0\rangle \langle 0|0\rangle \\ &= 1\end{aligned}$$

El resultat té sentit, ja que si mesurem $|0\rangle$ en la base $|0\rangle$, la probabilitat de trobar l'estat hauria de ser 1.

2.4 Matriu de densitat

Una sèrie de qubits es pot representar tant per un vector com per una matriu, anomenats *statevector* i *density matrix*, respectivament [8]. En aquesta secció explicaré ràpidament sobre el concepte de matriu de densitat i com les operacions que s'apliquen a un *statevector* poden ser aplicades a aquesta matriu. Després parlaré dels mesuraments parcials d'un sistema, un concepte que és important per la part experimental del treball.

Una matriu de densitat és la representació matemàtica d'un estat quàntic a partir d'una matriu. Aquest concepte en anglès s'anomena *density operator/matrix*. Aquesta representació serveix per descriure sistemes quàntics que no són completament coneguts. Concretament, aquestes matrius són conjunts d'estats quàntics: Per un sistema que es descriu com un conjunt d'estats $\{|\psi_i\rangle\}$ amb cada

¹⁶Cal notar que $|0\rangle \langle 0|^\dagger = |0\rangle \langle 0|$ i que $|0\rangle$ és un vector unitari.

element del conjunt tenint una probabilitat associada de p_i . La matriu densitat ρ del d'aquest sistema és [19]:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

Aquesta matriu pot ser simplement $|\psi\rangle \langle \psi|$ per un estat qualsevol $|\psi\rangle$, per exemple la matriu que representa $|0\rangle$ és:

$$\rho = |0\rangle \langle 0| = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'evolució d'un operador de densitat que descriu un sistema quàntic, igual que amb els vectors, s'efectua a partir de matrius unitàries. Un estat ρ evoluciona a partir d'una matriu unitària U de la següent manera:

$$\sum_i p_i U |\psi_i\rangle \langle \psi_i| U^\dagger = U \rho U^\dagger$$

Igual que es fan mesures en els *statevectors*, les podem fer en els operadors de densitat. Per un operador de mesura M_m , tenim que la probabilitat de tindre l'estat m al mesurar un vector $|\psi\rangle$ o una matriu de densitat ρ , és:

$$\begin{aligned} \text{prob}(m) &= \langle \psi_i | M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle = \text{tr}(M_m^\dagger M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i|) \\ &= \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho) \end{aligned}$$

També tenim que l'estat $|\psi_i\rangle$ després de la mesura m és [19]:

$$|\psi_i\rangle = \frac{M_m |\psi_i\rangle}{\sqrt{\langle \psi_i | M_m^\dagger M_m | \psi_i \rangle}} = \frac{M_m |\psi_i\rangle}{\sqrt{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}} \quad (2.8)$$

L'equació 2.8 es pot reescriure en termes d'una matriu de densitat després

d'una mesura m :

$$\begin{aligned}\rho_m &= \sum_i p_i \frac{M_m |\psi_i\rangle \langle \psi_i| M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)} \\ &= \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{\text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho)}\end{aligned}$$

Perquè això sigui cert els operadors de mesura M_m , han de satisfer:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I$$

Per a tots els estats possibles m .

Per últim s'ha de recordar que les matrius densitat igual que els vectors d'estat han de tenir certes característiques:

1. La traça de ρ ha d'equivaldre a 1.
2. ρ ha de ser un operador positiu¹⁷.

2.1 Matriu de densitat reduïda

Una aplicació important dels operadors de densitat és la descripció d'estats parcials amb l'operador de densitat reduït, i per tant, la descripció dels mesuraments parcials.

Per un sistema físic compost per dos sistemes A i B que es descriu per una matriu de densitat ρ^{AB} , la matriu de densitat reduïda del sistema A és:

$$\rho^A = \text{tr}_B(\rho^{AB}) \quad (2.9)$$

On tr_B és la traça parcial sobre el sistema B , que es defineix per l'equació següent [20]:

$$\text{tr}_B(|a_1\rangle \langle a_2| \otimes |b_1\rangle \langle b_2|) = |a_1\rangle \langle a_2| \text{tr}(|b_1\rangle \langle b_2|)$$

¹⁷Un operador positiu A es aquell que $\langle \psi | A | \psi \rangle \geq 0, \forall |\psi\rangle$.

Amb $|a_1\rangle$ i $\langle a_2|$ sent estats vàlids pel sistema A , i $|b_1\rangle$ i $\langle b_2|$ sent-ho per B . El terme $\text{tr}(|b_1\rangle\langle b_2|)$ s'omet quan els vectors del producte exterior són iguals i formen un operador de densitat vàlid, el qual té una traça de 1.

No obstant aquesta definició no es pot utilitzar quan no saps com representar la matriu de densitat ρ com a un producte tensorial, en el qual un dels termes és l'estat que es traça a fora. En altres paraules, en l'equació 2.9 si no es coneix ρ^A i ρ^B per $\rho^{AB} = \rho^A \otimes \rho^B$, aquesta equació no serveix de res.

A causa d'això en el llibre de text *Quantum Computing: A Gentle Introduction* [21] els autors defineixen la traça parcial d'una altra manera més general, on només s'ha de saber les bases dels sistemes A i B i un operador vàlid pel sistema AB . Per una matriu de densitat ρ^{AB} que representa el sistema $A \otimes B$, la traça parcial de ρ^{AB} sobre B és:

$$\text{tr}_B \rho^{AB} = \sum_i \langle \beta_i | \rho^{AB} | \beta_i \rangle$$

On el conjunt $\{|\beta_i\rangle\}$ són les bases del sistema B . Les entrades de la matriu $\text{tr}_B \rho^{AB}$ representades en termes de les bases $|\alpha_i\rangle$ i $|\beta_j\rangle$ dels sistemes A i B respectivament, són:

$$(\text{tr} \rho^{AB})_{ij} = \sum_{k=0}^{M-1} \langle \alpha_i | \langle \beta_k | \rho^{AB} | \alpha_j \rangle | \beta_k \rangle$$

Amb la matriu sent:

$$\text{tr} \rho^{AB} = \sum_{i,j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{M-1} \langle \alpha_i | \langle \beta_k | \rho^{AB} | \alpha_j \rangle | \beta_k \rangle \right) |\alpha_i\rangle \langle \alpha_j|$$

On N és la dimensió del sistema A i M és la dimensió del sistema B .

Es pot comprovar que aquestes definicions són correctes ja que en els dos llibres utilitzen les seves definicions per tractar el mateix cas i obtenen el mateix resultat [22, 23].

2.1.1 Mesurament parcial

Es pot arribar a treure una mesura parcial¹⁸ sobre un sistema de qubits amb la traça parcial i operadors de mesura. En el paper fet per Huang et.al. [5] es descriu un estat ρ després d'un mesurament parcial Π_A sobre un sistema A que pertany a l'estat $|\psi\rangle$ com:

$$\rho = \frac{\text{tr}_A(\Pi_A |\psi\rangle \langle\psi|)}{\text{tr}(\Pi_A \otimes I_{2^{N-2N_A}} |\psi\rangle \langle\psi|)}$$

El sistema A està compost per N_A qubits, per tant, la resta de l'estat $|\psi\rangle$ té $N - N_A$, on N és el nombre total de qubits del estat $|\psi\rangle$. D'aquesta manera $\Pi_A \otimes I_{2^{N-2N_A}}$ té $2^N \times 2^N$ dimensions i pot ser multiplicat per la matriu $|\psi\rangle \langle\psi|$ que té les mateixes dimensions. No obstant sorgeix un problema amb el numerador de l'equació perquè Π_A no té les mateixes dimensions que $|\psi\rangle \langle\psi|$, encara no he pogut utilitzar aquesta equació adequadament. No sé com computar-la. Aquest problema l'adreçaré en la part experimental del treball.

En el mateix article es planteja una altra equació, per l'estat post-mesura expressat en forma de vector d'estat, molt semblant a l'equació 2.8. L'única diferència és que en l'equació de l'article no s'expressa l'operador de mesura en la forma $M_m^\dagger M_m$, en canvi, els autors ho expressen tan sols com Π_A , més concretament $I_{2^{N-2N_A}} \otimes \Pi_A$. Potser la forma plantejada pels autors té en compte el conjugat hermitià, però no estic segur. L'equació esmentada en l'article és la següent:

$$|\psi_m\rangle = \frac{I_{2^{N-2N_A}} \otimes \Pi_A |\psi\rangle}{\sqrt{\text{tr}(I_{2^{N-2N_A}} \otimes \Pi_A |\psi\rangle \langle\psi|)}}$$

Al igual que amb l'altra equació, no sé com computar-la.

2.5 Ordinadors quàntics

Tota aquesta teoria és aplicada a través de qubits físics que s'ubiquen als ordinadors quàntics. Hi ha diversos tipus d'ordinadors quàntics, a causa del fet que

¹⁸És a dir, una mesura a només una part dels qubits que conformen un sistema.

els qubits poden ser diversos sistemes. Poden ser fotons, xips de silici superconductors o ions atrapats per imants. No elaboraré més sobre aquest tema, ja que no és el tema central d'aquest treball, m'he centrat molt més en la teoria.

Però si vull generar imatges amb un ordinador quàntic, no necessito un? No necessàriament, perquè puc simular l'evolució dels estats quàntics amb un ordinador, al cap i a la fi, és només àlgebra lineal, són operacions que es poden fer perfectament en un ordinador. No obstant això, quan s'intenta simular un sistema quàntic de molt qubits¹⁹ un ordinador de sobretaula tardaria molt de temps i realment no és viable.

¹⁹Més de 50 per exemple.

Capítol 3

Intel·ligència artificial

Segurament has sentit parlar de l'intel·ligència artificial o de les xarxes neuronals, són conceptes que semblen abstractes, però jo penso que són bastant intuïtius i els intentaré explicar de la millor manera possible.

Intel·ligència artificial és un mot una mica ambigu, que es refereix a qualsevol algoritme que entra dintre del camp del *machine learning* o aprenentatge automàtic¹. Aquests algoritmes simplement s'alteren a ells mateixos per fer millor la tasca que s'ha els ha designat, no importa quin és l'objectiu o com ho aconsegueix, el que importa és si aprèn automàticament. Cal notar que els canvis que s'efectuen sobre si mateixos no han de ser predeterminats, si l'algoritme té una llista de les instruccions que va executant segon la situació no seria una intel·ligència artificial o un algoritme de *machine learning*.

La manera que tenen aquests algoritmes d'alterar-se a si mateixos és canviant els paràmetres de les operacions dels quals estan compostos. Per exemple, en una regressió lineal, s'actualitzen els paràmetres de la recta que representa la tendència de les dades, com es pot veure a la figura 3.1.

Hi ha diversos mètodes per ajustar els paràmetres, el més comú és ajustar-los segons la derivada d'una funció anomenada funció de pèrdua o *loss function*, usualment representada per la lletra \mathcal{L} . Aquesta funció representa els objectius

¹Tanmateix, col·loquialment s'utilitza per denominar a qualsevol algoritme o robot que és intel·ligent o sembla que és intel·ligent.



FIGURA 3.1: Exemple d'una regressió lineal de dades generades a l'atzar. Veure el codi a [F.1.0.1](#).

del programa i pot ser minimitzada o maximitzada, per exemple, en una regressió lineal es vol reduir la distància entre els punts de dades i la línia que prediu la tendència.

Degut a que es poden realitzar molts tipus de funcions de pèrdua, ja sigui per la forma de la funció en si o pels paràmetres de la funció, el programes de *machine learning* són extremadament versàtils, la màxima expressió d'això es pot veure en les xarxes neuronals o *neural networks*. Aquests algoritmes són els més potents, complexos i polivalents, dintre de l'aprenentatge automàtic. Precisament utilitzo un d'aquests algoritmes d'aquests per generar les imatges. Reconeixement d'imatges, la traducció i sintetització de textos, la conducció automàtica, els algoritmes de recomanació, i és clar, la generació d'imatges.

3.1 Xarxes neuronals

Aquests tipus d'algoritmes no tenen un nombre que fa recordar a les xarxes de neuronals dels nostres cervells per casualitat, estan directament inspirades en els nostres cervells. Són uns programes que consisteixen en la connexió de diverses operacions anomenades neurones, que conjuntament formen una xarxa, la qual s'organitza a partir de capes. Segons la variació del tipus de neurona i l'estructura que aquestes formen podem tindre algoritmes destinats a fer diferents

tasques. Això juntament amb els diversos tipus de funció de pèrdua contribueix a la versatilitat de les xarxes neuronals. Aquests models d'intel·ligència artificial constitueixen el camp del *deep learning* o aprenentatge profund. S'anomenen d'aquesta forma per referenciar la gran profunditat d'aquests algorismes, és a dir el gran nombre de capes que tenen.

Una neurona consisteix simplement en una suma ponderada, a la qual se li suma un altre número, i finalment una funció no lineal que s'aplica al resultat. Les neurones tenen vectors com input i output. Per tant, una neurona es pot definir com:

$$\sigma \left(\sum_{i=1}^n w_i x_i + b \right) = \sigma (w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n + b)$$

Per σ sent una funció no lineal i n sent la mida del vector. Després estan els paràmetres, w_i i b , anomenats *weights* i *bias*.

Una neurona pot tindre diversos inputs que venen de diverses neurones, el mateix passa amb els outputs. Depenent de com es connectin entre si les neurones, aquestes passen a formar diversos tipus de capes. A partir dels tipus de capes i el nombre d'aquestes és com s'especifica l'arquitectura d'una xarxa neuronal.

Una vegada especificada la interconnectivitat de les neurones puc parlar de la intuïció darrere dels paràmetres. Un *weight* especifica com és de forta la relació entre una neurona en una capa i una altra neurona en una capa veïna. I un *bias* especifica com és d'important una neurona, ja que aquest número afecta el resultat a la suma, fent que l'activació de la neurona² sigui més alta.

Tornant a l'arquitectura, usualment aquesta es divideix en tres parts la capa d'input, les capes ocultes i la capa d'output. La quantitat de neurones que hi ha a la capa d'inputs és la que defineix la mida del vector que es dona com input a la xarxa, ja que cada element del vector es dona a cada neurona amb la capa. El mateix passa amb la capa d'outputs, cada output de cada neurona de la capa acaba sent un element en el vector que surt de la xarxa. Per tant, el nombre de neurones que té cadascuna d'aquestes dues capes, especifica la mida dels

²Així és com s'anomena el seu resultat.

vectors d'input i d'output de la xarxa respectivament. Per exemple, si es vol donar com input a una xarxa una imatge de 16 per 16 píxels en blanc i negre calen 256 neurones en la capa d'inputs, una per cada píxel.

En canvi, les *hidden layers*, és a dir les capes ocultes, no tenen una mida determinada, el mateix passa amb el nombre d'aquestes que té la xarxa. Depenen de cada cas la quantitat de neurones que tenen aquestes capes i també el nombre d'aquestes, varia. Això, juntament amb els diversos tipus de capes és el que dona la versatilitat d'aquests algoritmes.

Entre els diferents tipus de capes que poden tindre les xarxes neuronals, la més comuna i simple d'aquestes és la *fully connected layer*, o una capa completament connectada, com les que es poden veure en la figura 3.2. Les neurones que formen aquesta capa estan connectades a totes les neurones de la capa anterior i així mateix, a totes les neurones de la capa següent. L'única forma que aquestes capes tenen de variar és a partir de canviar el nombre de neurones, ja que no es pot alterar el funcionament de les neurones.

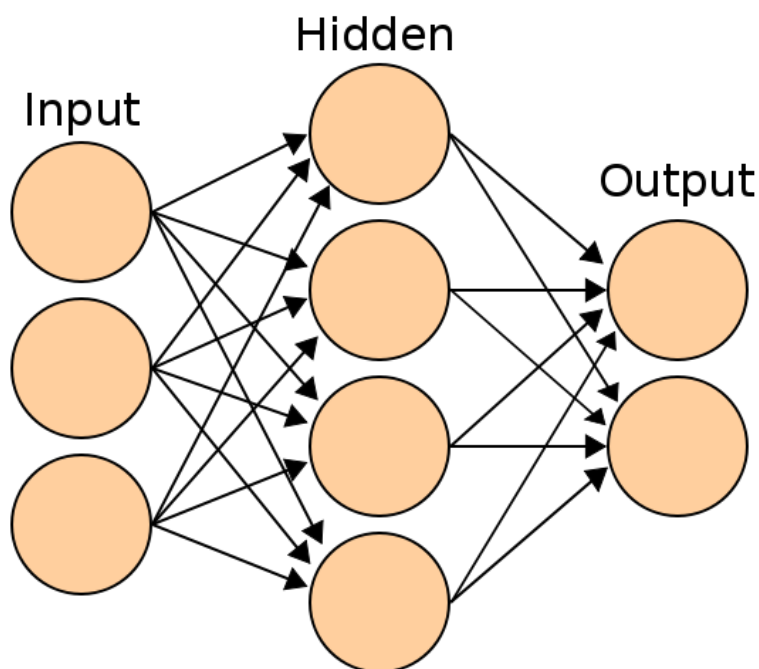


FIGURA 3.2: Usualment, les xarxes neuronals es representen d'aquesta forma, amb fletxes i boles. Les boles representarien cada neurona i les fletxes mostren com estan connectades. La *hidden layer* d'aquesta representació es pot veure que és una *fully connected layer* a causa de com està connectada a les altres capes, rebent cada neurona l'output de cada neurona anterior.

No obstant això, es pot variar la funció d'activació que tenen, que ha de ser una funció no lineal. La més utilitzada és la sigmoide:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

3.2 Descens del gradient

Una vegada he parlat de les xarxes neuronals, he de comentar com aquestes evolucionen al llarg del temps, és a dir com se'n van actualitzen a si mateixes per complir el seu objectiu. Ja he comentat que existeix una funció anomenada *loss function*, la qual es deriva per actualitzar els paràmetres de la xarxa. El mecanisme pel qual s'actualitzen els paràmetres s'anomena el descens del gradient.

Aquest procés comença amb la funció de pèrdua, que esmenta els objectius de la xarxa. Els punts mínims d'aquesta funció representen els punts òptims de la xarxa, als quals es vol arribar.

Per explicar-lo utilitzaré un exemple pràctic, primer de tot parlaré sobre la funció de pèrdua que s'utilitza i a continuació de l'actualització dels paràmetres.

Parlaré de la classificació d'imatges, si es volen classificar imatges de gats i gossos, s'assignen dues etiquetes a aquestes, per exemple, 1 als gats i 0 als gossos. A continuació s'escull una funció de pèrdua³ com *binary cross entropy* o *log loss*. La funció *binary cross entropy* és la següent:

$$\mathcal{L} = -t \log(y) - (1 - t) \log(1 - y) \quad (3.1)$$

Amb t sent l'etiqueta que ha de tenir la imatge, anomenada etiqueta real, i y sent l'etiqueta que el model assigna a la imatge. Per tant, si l'etiqueta real és 1, l'equació acaba sent:

$$\mathcal{L}_1 = -\log(y)$$

³Una que funcioni per la classificació d'imatges, és clar.

I el cas contrari per $t = 0$ seria:

$$\mathcal{L}_0 = -\log(1 - y)$$

Si donen com input la imatge d'un gat i el programa es dona com output 0.92 tenim que la pèrdua és de:

$$\mathcal{L} = -t \log(y) - (1 - t) \log(1 - y) = -\log(0.92) \simeq 0.0834$$

En canvi, si el programa es dona un output de 0.15 la pèrdua, seria:

$$\mathcal{L} = -t \log(y) - (1 - t) \log(1 - y) = -\log(0.15) \simeq 1.897$$

Es pot veure que si l'etiqueta que posa el model s'allunya més de l'etiqueta real la pèrdua acaba sent més gran. El mateix es pot veure per les imatges dels gossos, és a dir, les imatges que haurien de tenir etiqueta zero:

$$\mathcal{L} = -0 \cdot \log(0.89) - (1 - 0) \cdot \log(1 - 0.89) = -\log(1 - 0.89) \simeq 2.207$$

$$\mathcal{L} = -0 \cdot \log(0.08) - (1 - 0) \cdot \log(1 - 0.08) = -\log(1 - 0.08) \simeq 0.0834$$

Per tant, com més pròximes estén les prediccions (els outputs del model) a les etiquetes ideals, menor serà la pèrdua. Llavors al minimitzar la funció es trobarà el punt òptim on totes les prediccions seran iguals a les etiquetes.

A aquests punts òptims s'arriben actualitzant els paràmetres a partir de la derivada de la funció, concretament a través del seu gradient. El gradient d'una funció és un vector on els seus elements són la derivada parcial respecte a cada paràmetre (per aclarir, una entrada per paràmetre). El gradient d'una funció $f(\theta)$

es representa com $\nabla f(\theta)$, i es pot escriure en forma de vector com:

$$\nabla f(\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_{n-1}} \\ \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}$$

No fa falta fixar-se en el que és exactament un gradient, només s'ha de saber que cada paràmetre de la xarxa neuronal⁴ s'ha d'actualitzar d'acord amb la derivada respecte al paràmetre. Això es pot entendre com canviar lleugerament un paràmetre d'acord amb la direcció de la derivada respecte a ell. L'objecte que s'encarrega d'actualitzar-los s'anomena optimitzador. L'optimitzador més senzill que hi ha és el següent:

$$\theta_i^t = \theta_i^{t-1} \pm \eta \frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \theta_i^{t-1}} \quad (3.2)$$

Es pot veure com s'actualitza el paràmetre θ_i . En l'equació he posat el superíndex t per expressar aquesta actualització, passant d'un temps $t-1$ a t . També, utilitzo el símbol θ per expressar tots els paràmetres del model, que es troben en la forma d'un vector. En els optimitzadors s'afegeix un nombre η anomenat *learning rate*. Usualment, és un nombre petit⁵, aquest nombre especifica com de ràpid canvien els paràmetres. El *learning rate* es pot anar ajustant depenen de la situació o del model en el qual s'implementi. Alteracions en aquest poden causar diversos fenòmens tant negatius com positius, i aquesta és la principal tasca que tenen els optimitzadors, alterar el *learning rate*. Existeixen molts optimitzadors que donen a terme aquesta tasca de diverses maneres, un dels més famosos és ADAM [24].

Cal notar que en l'optimitzador he utilitzat el signe \pm perquè si és positiu significa que s'està ascendint pel gradient, i si és negatiu s'està descendint. No obstant això, usualment es fa servir el signe negatiu per convenció, ja que la majoria de funcions de pèrdua estan dissenyades per ser minimitzades.

Al fer la derivada de la funció de pèrdua es pot veure immediatament que

⁴Cada *weight* i cada *bias*.

⁵Entre 0.1 i 0.001 per exemple.

s'ha d'aplicar la regla de la cadena, ja que l'estructura de la xarxa neuronal està composta per una sèrie de funcions compostes entre si. En la secció següent parlaré del procediment que s'utilitza per avaluar el gradient, anomenat *backpropagation* o propagació inversa.

3.1 Backpropagation

Al aplicar la regla de la cadena «de fora cap a dins» s'ha de començar a derivar per l'última capa i acabar per la primera, d'aquí ve el nom *backpropagation* perquè es propaga l'error en direcció contrària. Mentre que quan es dona un input a la xarxa, s'anomena *forward propagation* o *forward pass*.

No entraré en profunditat sobre l'intuïció de la *backpropagation* en aquesta secció, només em limitaré a esmentar la manera en la qual es calcula.

L'activació⁶ d'una neurona j en l'última capa L de la xarxa es defineix com:

$$a_j^L = \sigma \left(\sum_{k=0}^{n_{L-1}} w_{jk}^L a_k^{L-1} + b_j^L \right)$$

On a_k^{L-1} és l'activació d'una neurona k en la capa anterior $L - 1$, i on el *weight* w_{jk}^L és el paràmetre que expressa en què mesura es connecta la neurona j a la neurona k . Com ja he dit, expressa com és de forta aquesta connexió. La suma es fa al llarg de n_{L-1} que és el nombre de neurones que té la capa $L - 1$. Utilitzant aquesta definició ja es poden efectuar les derivades.

No obstant això, convé definir un nou terme, escrit com z_j^L , per procedir a fer les derivades. Simplement, és l'equació d'una neurona però sense la funció d'activació:

$$z_j^L = \sum_{k=0}^{n_{L-1}} w_{jk}^L a_k^{L-1} + b_j^L \quad (3.3)$$

L'objectiu és obtenir la derivada de la *loss function* respecte a un *weight* qualsevol i un *bias* qualsevol. Per tant, s'han de obtenir les següents derivades parcials:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{jk}^L} \text{ i } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_j^L}$$

⁶S'anomena així al resultat d'una neurona.

Començaré amb la derivada del *weight*, al aplicar la regla de cadena obtenim que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{jk}^L} = \frac{\partial z_k^L}{\partial w_{jk}^L} \frac{\partial a_j^L}{\partial z_j^L} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j^L} \quad (3.4)$$

La primera derivada, és la derivada de z_j^L respecte al *weight*, que és l'activació d'una neurona en la capa $L - 1$:

$$\frac{\partial z_j^L}{\partial w_{jk}^L} = a_k^{L-1}$$

La següent és la derivada del resultat de la neurona a_j^L respecte a z_j^L , que resulta ser la derivada de la funció d'activació de la neurona:

$$\frac{\partial a_j^L}{\partial z_j^L} = \sigma'(z_j^L)$$

Finalment, està la derivada de la funció de pèrdua respecte a l'output de la xarxa, és a dir, l'activació d'una de les últimes neurones. La qual és simplement la derivada de la funció de pèrdua, per tant, varia en cada cas.

Ja sabent totes les derivades, es pot reescriure l'equació 3.4 es pot escriure com⁷:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{jk}^L} = \frac{\partial z_k^L}{\partial w_{jk}^L} \frac{\partial a_j^L}{\partial z_j^L} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j^L} = a_k^{L-1} \sigma'(z_j^L) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j^L}$$

No obstant falta un detall, per efectuar la derivada de l'activació d'una neurona respecte a la funció de pèrdua s'ha d'afegir un sumatori:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j^{L-1}} = \sum_{j=0}^{n_{L-1}} \frac{\partial z_j^L}{\partial a_k^{L-1}} \frac{\partial a_j^L}{\partial z_j^L} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j^L}$$

La suma representa que aquesta neurona té un output que es propaga cap endavant afectant les neurones que la segueixen.

Finalment, he d'esmentar la derivada de la funció de pèrdua respecte a un *bias* qualsevol b_k^L . Al aplicar la regla de la cadena es pot veure que aquesta

⁷Deixo l'última derivada $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j^L}$ sense reescriure perquè aquest terme pot variar depenent de la funció de pèrdua que s'utilitza.

derivada és:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_k^L} = \frac{\partial z_k^L}{\partial b_k^L} \frac{\partial a_k^L}{\partial z_k^L} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_k^L}$$

Al veure l'equació 3.3 es pot veure que la derivada $\frac{\partial z_k^L}{\partial b_k^L}$ serà 1. Les altres derivades de l'equació ja les he esmentat anteriorment. Per tant, finalment tenim que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{jk}^L} &= a_k^{L-1} \sigma'(z_j^L) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j^L} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_k^L} &= \sigma'(z_j^L) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_j^L} \end{aligned}$$

Amb aquestes derivades ja es pot desenvolupar el vector gradient, que com ja he dit està compost per les derivades de cada paràmetre de la xarxa, concretament està compost la mitjana d'aquestes, perquè es vol actualitzar els paràmetres per poder minimitzar la pèrdua respecte a diverses dades, d'aquesta manera el model s'entrena amb el nombre més gran de dades possibles.

Tota aquesta teoria es veurà implementada en la part pràctica en forma de codi, ja que m'he vist amb la necessitat de tenir una xarxa neuronal programada des de zero. No obstant això, usualment s'utilitzen plataformes com *TensorFlow* [25] o *PyTorch* [26] al programar xarxes neuronals, pel fet que aquests *frameworks* faciliten moltíssim el treball als programadors.

3.3 Generative adversarial networks

Com ja he dit hi ha molts tipus de xarxes neuronals, tanmateix, en aquest treball només em centraré en un tipus en específic, les xarxes generatives adversàries o *generative adversarial networks (GAN)* en anglès.

Aquestes xarxes, com el seu nom diu, s'utilitzen per generar dades, usualment s'apliquen a imatges. Es troben al darrere de projectes com *This person does not exist* [27, 28], una pàgina web que et genera una cara d'una persona

que no existeix, ja que és una cara generada artificialment a partir d'aquest tipus de models.

Aquests tipus de models van ser introduïts per primera vegada en 2014 per Ian Goodfellow [4], des de llavors s'han convertit en un dels models de *deep learning* més sòlids i utilitzats.

Aquests algorismes consisteixen en dos models (xarxes) diferents, un generador i un discriminador, amb objectius oposats. Per aquesta raó s'inclou paraula adversària en el nom. El generador i discriminador es poden entendre com un falsificador de bitllets i uns policies que el vol atrapar. On el generador és el falsificador de bitllets i el discriminador és el policia.

L'analogia és la següent: Una vegada el falsificador comença el seu entramat, el policia comença a detectar quins són els bitllets falsificats, i amb el temps es torna millor al seu treball, podent distingir entre els bitllets falsificats i els reals a la perfecció. El falsificador respon a això millorant les seves tècniques, per tant, el policia han de millorar encara més. És un cicle en el qual aquestes forces antagonistes es fan millorar l'una a l'altra.

El mateix passa amb el generador i el discriminador. El discriminador aprèn a distingir entre les imatges reals i les imatges falses que fabrica el generador, mentre que el generador aprèn a enganyar al discriminador.

Si s'especifiquen bé els objectius de cada model, arriben a un *zero sum game*⁸. La manera en la qual es soluciona aquest tipus de joc és arribant a un equilibri de Nash [5, 4], on el discriminador no sap diferenciar entre les imatges reals i les falses⁹.

En l'article original [4], s'esmenta un pseudocodi per aquests models, que he representat en l'algoritme 1 (adaptat). En aquest es parla de *minibatch* que és simplement un grup d'imatges o de dades. I del soroll, que són dades generades aleatòriament i que es donen com input al generador perquè aquest no generi

⁸Un *zero sum game*, és simplement un joc entre dos jugadors que per guanyar un, l'altre ha de perdre e.g. joc d'estirar la corda entre dos equips.

⁹Que el discriminador no sàpiga diferenciar no implica arribar a un equilibri de Nash, aquest concepte és definit d'una altra forma que està fora de l'àmbit d'aquest treball [4].

exactament les mateixes imatges cada vegada. El soroll afegeix variació als outputs del generador, però sempre s'intenta que sigui en una petita quantitat.

Algorithm 1 Pseudocodi per una xarxa generativa adversària

for número de interaccions **do**
 for k pasos **do**
 Crear minibatch de m mostres de soroll $\{z_i, \dots, z_m\}$ de la distribució de soroll $p_g(z)$
 Crear minibatch de m mostres d'exemples $\{x_i, \dots, x_m\}$ de la distribució d'exemples $p_{\text{data}}(x)$
 Actualitzar el discriminador ascendint el seu gradient:

$$\nabla_{\theta} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [\log D(x_i) + \log(1 - D(G(z_i)))]$$

end for
 Crear minibatch de m mostres de soroll $\{z_i, \dots, z_m\}$ de la distribució de soroll $p_g(z)$
 Actualitzar el generador descendent el seu gradient:

$$\nabla_{\theta} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 - D(G(z_i)))$$

end for

En el pseudocodi es pot veure que primer s'actualitza el discriminador k vegades i després el generador una sola vegada. Això és perquè interessa que el discriminador sàpiga distingir les imatges ràpidament, per poder indicar al generador com generar les imatges. Si el discriminador esmenta que unes imatges de gats són imatges de gossos, el generador fabricarà imatges de gossos pensant que ho són de gats, perquè aquest aprèn a partir del que l'indica el discriminador.

També és pot veure com és la funció de pèrdua, que en l'article els autors anomenen *Minimax loss function*. La qual en la pràctica és la mateixa que la *Binary Cross Entropy (BCE)*. Es pot veure que en la BCE, quan $t = 0$, que seria l'etiqueta per les imatges falses del generador, aquesta funció seria $-\log(1 - y)$. En el cas contrari, per $t = 1$, la funció seria $-\log(y)$.

Capítol 4

Generació d'imatges amb un ordinador quàntic

Investigadors en informació quàntica al veure el potencial que tenen els ordinadors quàntics i la intel·ligència artificial, no es van poder resistir a crear un nou camp d'investigació, el *Quantum Machine Learning (QML)*, o aprenentatge automàtic quàntic. Igual que les xarxes neuronals són les estrelles dintre del *machine learning*, les xarxes neuronals quàntiques també ho són dintre del *quantum machine learning*.

Des de que es van començar a investigar aquests algoritmes s'han arribat a implementar diversos tipus de xarxes neuronals en ordinadors quàntics. Principalment pel que fa a la generació i classificació d'imatges i dades.

No obstant això, aquests algoritmes no són completament quàntics, usualment consisteixen a actualitzar els paràmetres d'un circuit quàntic perquè aquest generi les dades. On les actualitzacions dels paràmetres es calculen amb un ordinador clàssic. Això es veurà molt clar quan expliqui la part pràctica del treball.

Abans de continuar amb la secció he de dir que existeixen diversos algoritmes dintre del *quantum machine learning*, no tot en la vida són xarxes neuronals. Per exemple, es pot donar a terme classificació de dades mitjançant *support vector machines*¹ [29, 30] o amb un anàleg de la regressió lineal [31]. Malgrat això, en aquest capítol em centraré exclusivament en les xarxes neuronals quàntiques.

¹Classificar dades de dimensions petites en espais vectorials molt grans.

4.1 Descens del gradient quàntic

De moment tindre en consideració que una xarxa neuronal quàntica és un circuit quàntic qualsevol però parametritzat, és a dir, que té portes quàntiques parametritzades. Això juntament amb una funció de pèrdua i un *dataset* és suficient per explicar com s'actualitzen els paràmetres.

L'objectiu principal és avaluar la derivada respecte a un paràmetre. Sorprenentment, és dona a terme d'una manera més senzilla que amb una xarxa neuronal clàssica. Tan sols s'utilitza la definició de la derivada per poder avaluar-la: S'altera lleugerament un sol paràmetre i es treu la diferència entre dos outputs del circuit quàntic que tenen el paràmetre alterat. Aquest mètode per avaluar la derivada s'anomena *parameter shift* [2, 32].

Si un circuit quàntic té un vector de paràmetres θ , per un paràmetre θ_i , es defineix un vector de pertubació Δ_i ple de zeros, d'igual mida que θ , però que en la posició de θ_i té un 1. He vist que per un vector de pertubació $|\Delta_i\rangle$, donat un vector de paràmetres $|\theta\rangle$ es compleix que:

$$\exists |\Delta_i\rangle \iff \langle \Delta_i | \theta \rangle = \theta_i$$

A partir d'aquest vector es pot definir la derivada de la funció de pèrdua $\mathcal{L}(\cdot)$ respecte al paràmetre θ_i :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \mathcal{L}(\theta) = \mathcal{L}(\theta + \frac{\pi}{4} \Delta_i) - \mathcal{L}(\theta - \frac{\pi}{4} \Delta_i)$$

Es pot veure que el vector $\theta \pm \frac{\pi}{4} \Delta_i$ és el vector θ , però amb una petita variació en la posició i que és la que correspon al paràmetre θ_i . Amb aquest mètode ja es pot desenvolupar pràcticament qualsevol actualització de paràmetres, aquesta és la part senzilla de les xarxes neuronals quàntiques, la dificultat radica en la forma dels circuits quàntics que les componen.

4.2 Circuits quàntics per xarxes neuronals

L'única qualitat obligatòria que hi han de dintre aquests circuits és que han d'estar parametritzats. Usualment, estan compostos per una gran quantitat de portes rotacionals parametritzades, les quals ja he presentat en les equacions 2.2, 2.3 i 2.4.

El problema al qual s'enfronten els investigadors dedicats a les xarxes neuronals quàntiques és la manera amb la qual implementar funcions no lineals en els circuits quàntics. Aquests tipus de funcions són les responsables de la gran complexitat i profunditat de les xarxes neuronals clàssiques. A primera vista pot semblar una tasca quasi impossible a causa de la naturalesa lineal de la computació quàntica. Tanmateix, durant els anys s'han desenvolupat diverses tècniques per donar a terme aquesta fita, les quals comentaré a continuació.

A partir d'una combinació de rotacions i portes que entrellacen qubits es pot arribar a implementar una funció semblant a la tangent hiperbòlica² en un circuit quàntic [33]. No obstant això, aquest mètode té un gran desavantatge, consisteix en un circuit que s'ha d'anar mesurant i repetint per veure si funciona correctament, els autors parlen de *repeat until success* perquè s'ha de mesurar un qubit i mirar si dona $|0\rangle$ per assegurar que aquesta funció ha sigut aplicada correctament³.

En un article posterior⁴, en el qual els autors generen distribucions contínues a partir d'una xarxa generativa adversària quàntica. S'especifica que les no-linearitats presents en l'algoritme no formen part del circuit quàntic, és a dir, funcions que s'implementen clàssicament als resultats dels circuits quàntics o a les dades que s'introdueixen als circuits [34]. Aquesta és la manera més simple de resoldre aquest problema.

En 2019 es va publicar un dels articles que més m'agraden⁵ Cong et. al. (2019) [35], en aquest els autors presenten una xarxa neuronal convolucional

²La tangent hiperbòlica també s'utilitza com a funció no lineal en el *deep learning*.

³En cas que doni $|1\rangle$, s'ha de repetir el procés.

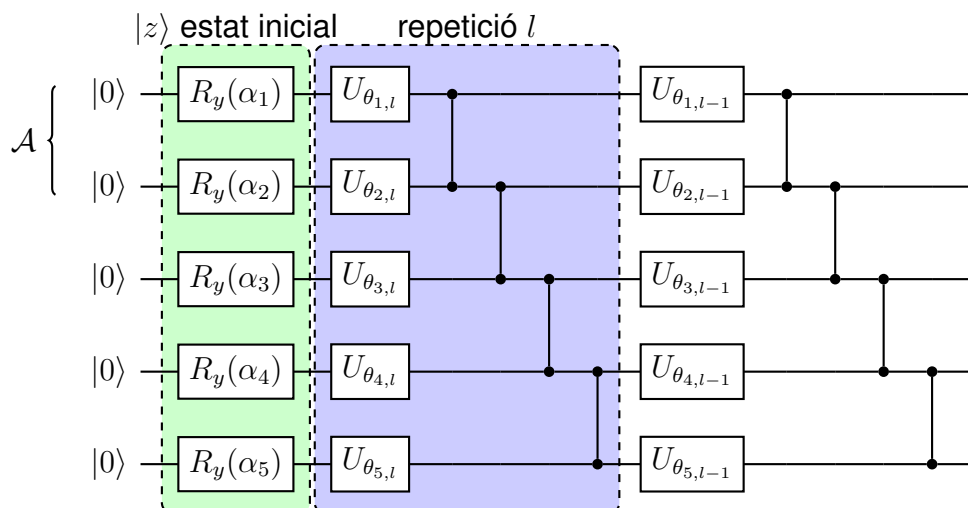
⁴Realitzat en part per un dels autors del mètode anterior.

⁵Utilitzen imatges de gats a les figures i és un dels primers articles que vaig llegir d'aquest camp fa més de dos anys. A més a més la xarxa neuronal esmentada en l'article està completament programada en TensorFlow Quantum [2], i això sempre s'agraeix.

quàntica. No fa falta entrar en detall, però es diuen convolucionals perquè s'apliquen convolucions a les imatges que es volen classificar, es multiplica una part de la imatge per una matriu que s'anomena filtre [36]. Simplement, tenen un altre tipus de capes que no són les capes completament connectades. L'única afirmació dels autors que s'ha de recalcar, és que a partir de reduir els graus de llibertat (*degrees of freedom*) en els circuits quàntics, sorgeixen no-linearitats. Això és a causa dels mesuraments parcials que es donen a terme en un moment determinat de l'algoritme.

Un dels mètodes que m'ha semblat més interessant, és l'implementat en una altra xarxa convolucional quàntica, on a l'aplicar els filtres que s'utilitzen per a la convolució, s'implementa una funció no lineal. Aquest mètode no el puc arribar a comprendre, les equacions que fan servir són molt complexes i no sembla que arriben a utilitzar un mesurament parcial en cap moment. Simplement, els autors presenten una equació i diuen que no és lineal, i no puc arribar a comprendre perquè no ho és.

Finalment, he de parlar de l'article que he seguit per fer aquest treball, Huang et. al. (2021) [5], en aquest, al igual que en l'article de Cong et. el. (2019) [35], s'utilitzen mesuraments quàntics per introduir no-linearitats a l'algoritme. Concretament, els autors implementen aquests mesuraments tant en el generador quàntic d'imatges, com en el discriminador. Els circuits quàntics que utilitzen per al generador d'imatges tenen la següent forma:



On les portes R_y amb un paràmetre α_i , marcades en verd, són utilitzades per introduir les dades al circuit. Aquestes dades són simplement soroll que crea varietat en els outputs dels circuits, igual que el soroll que s'empra en les GAN clàssiques (algoritme 1).

El circuit que genera les imatges realment consisteix en les portes U_θ i CZ, marcades en blau. Aquestes portes s'agrupen en les repeticions- l , que s'utilitzen per afegir profunditat i complexitat als circuits. En aquest cas el circuit té dues repeticions- l ⁶. Al mesurar es fa un mesurament parcial, però els autors especifiquen que es fa d'una forma concreta que explicaré a continuació.

Per un estat $|\Psi_\alpha\rangle$ que surt del circuit especificat posteriorment, l'estat $\rho(z)$ després d'una mesura parcial sobre el qubits \mathcal{A} , és:

$$\rho(z) = \frac{\text{tr}_{\mathcal{A}}(\Pi_{\mathcal{A}} |\Psi(z)\rangle \langle \Psi(z)|)}{\text{tr}(\Pi_{\mathcal{A}} \otimes I_{2^{N-N_{\mathcal{A}}}} |\Psi(z)\rangle \langle \Psi(z)|)}$$

Els autors afirmen que aquest estat $\rho(\alpha)$, és una funció no lineal de l'estat $|z\rangle$. Això és degut al fet que tant el denominador com el numerador de l'equació són funcions de $|z\rangle$.

Tanmateix, en altres treballs com per exemple Zoufal et.al. (2019) [37], on es defineix una GAN quàntica que genera distribucions de probabilitat, els autors no mencionen la necessitat de tenir funcions no lineals en alguna part de l'algoritme.

⁶És a dir $l = 2$.

Part II

Part Experimental

Capítol 5

Plantejament de l'hipòtesi

Podria haver anat per altres vies com la generació d'imatges amb color o la implementació d'un d'una porta X en una part específica del circuit quàntic que genera les imatges, que al posar-la o no, el model generes dos tipus d'imatges a través del mateix circuit. Tanmateix, les dues propostes requerien desenvolupar nous conceptes, ja que són idees meves pròpies, però com que no tenia els coneixements necessaris vaig descartar-les.

Llavors, al ser la implementació de les funcions no lineals un assumpte lleugerament conflictiu entre els diversos models de xarxes neuronals quàntiques, com ja he comentat en la secció [4.2](#), havia decidit des d'un principi centrar-me en aquesta qüestió en concret.

La pregunta a investigar és la següent:

La incorporació d'una funció no lineal en el circuit quàntic generacional, a partir d'una mesura parcial; causa que el model arribi més ràpidament al punt òptim?

En altres paraules, volia veure si la mesura parcial afectaria positivament en l'eficiència del model, fent que la generació de les imatges desitjades es donés a terme en un menor temps.

Sembla una qüestió senzilla, però la dificultat de l'experiment radica en crear la xarxa neuronal en si, amb totes les seves parts accessibles per poder fer els canvis que siguin necessaris. L'única manera de fer l'experiment seria programant el model, una tasca que tenia clar que faria des del principi.

Capítol 6

Programació del model

Posteriorment a començar a programar el model, jo ja sabia que ho havia de realitzar en Python, ja havia creat alguns algorismes abans de començar aquest treball i tenia experiència construint i executant circuits quàntics amb Cirq [38], una eina desenvolupada per Google. A més a més, sabia de l'existència de TensorFlow Quantum [2], una altra eina desenvolupada per Google destinada a la creació de xarxes neuronals quàntiques i algorismes de *quantum machine learning* en general. També tenia experiència en aquest *framework*. Per tant, TensorFlow Quantum va ser la meua primera opció.

Tenia pensat basar el meu codi en el tutorial de TensorFlow sobre una xarxa convolucional generativa adversària. Havia de canviar el generador per un circuit quàntic que s'optimitza a partir d'un diferenciador¹ automàtic provinent de TensorFlow Quantum. Els canvis que corresponien al discriminador simplement havien de ser un canvi d'arquitectura, passar d'una xarxa més complexa a una de més simple que només consistiria en unes poques capes totalment connectades.

El primer problema que em vaig trobar va ser la creació del *dataset* que alimenta a la xarxa discriminativa. A causa de la peculiaritat de les imatges que volia generar, havia de crear-lo manualment. Usualment les imatges que componen els *datasets* utilitzats en *deep machine learning* són extrems de bancs d'informació amb mides enormes. En el meu cas, havien de ser generades per

¹Objecte que calcula el gradient d'un circuit quàntic.

mi, per tant havia de convertir matrius de Numpy en *datasets* de TensorFlow. Recordo que en va costar arribar a tindre la solució a aquest problema.

6.1 Discriminador

Una vegada ja tenia fet el *dataset* em vaig posar a fer el model. En el tutorial per una [DCGAN \(GAN convolucional\)](#) els dos models eren entrenats per la funció `train_step()`, que representa una iteració en el procés d'optimització. En aquesta es crida a la funció `tf.GradientTape` per guardar el diferenciador automàtic. El problema que vaig dintre amb aquesta funció és que directament no funcionava amb el discriminador, aquest no era optimitzat. Després d'intentar solucionar l'error pels meus propis medis, mirant la causa d'aquest i de buscar a fòrums la solució o causa, em vaig rendir. Ja havia estat uns quants mesos intentant desenvolupant el model amb TensorFlow i TensorFlow Quantum. Havia creat les capes del generador quàntic manualment, també ho havia fet amb l'optimitzador². Tenia el model gairebé acabat, però perquè no podia optimitzar el discriminador em vaig veure obligat a canviar d'estratègia.

Existeixen dos grans *frameworks* per crear i executar circuits quàntics: Cirq [38], desenvolupat per Google, i Qiskit [39], creat per IBM. Una vegada vaig decidir no continuar amb Cirq, havia de provar amb Qiskit. La veritat, havia d'haver-hi començat amb Qiskit des del principi, és més útil (té moltes més característiques), i el més important, té una major comunitat, per tant, és més fàcil trobar solucions a l'error que pots tenir i és més fàcil trobar a persones disposades a ajudar-te.

Igual que Cirq té un *framework* per poder desenvolupar xarxes neuronals (TensorFlow Quantum); Qiskit també té el seu, anomenat PyTorch [26], no obstant no té una integració tan directa, ja que no estan desenvolupats pel mateix equip, ni la mateixa companyia.

²No sabia ni si funcionarien adequadament, pel fet que per provar-ho, havia de tenir tot el model enllestit.

Per tant, en canviar de Cirq a Qiskit, també havia de canviar de TensorFlow a PyTorch, però no tenia res d'experiència amb PyTorch, sabia que la transició seria complicada, i tenia raó. No vaig ni aconseguir crear el *dataset* que contenia les imatges per alimentar al discriminador.

Després d'intentar-lo amb TensorFlow Quantum i amb PyTorch, vaig decidir prescindir de *frameworks* per crear models de *machine learning*. El discriminador, al ser una xarxa tan simple, la podria crear des de zero. Llavors vaig començar a buscar codi a internet que pogués utilitzar. Volia una xarxa neuronal feta amb Numpy, una llibreria de Python per fer càlculs amb vectors i matrius amb la qual tenia bastant experiència.

Després de provar dues opcions que més o menys m'agradaven³, va aparèixer un repositori⁴ de Michael Nielsen, un dels autors de *Quantum Computation and Quantum Information* [8] que em va salvar.

El repositori tenia codi per xarxes neuronals que estava estructurat d'una forma que m'agradava i encara més important, que entenia. Inclús tènien diverses versions d'una mateixa xarxa neuronal, amb un nivell de complexitat diferent. Llavors, a partir del model més simple que hi havia en el repositori⁵, vaig començar a desenvolupar el discriminador.

Com es pot veure al codi final pel discriminador a l'apèndix F.1.0.2, he fet bastants canvis, però no he canviat l'estructura o el funcionament teòric. La majoria dels canvis són per afegir més funcionalitat al model, com per exemple l'emmagatzematge de les dades per poder al final veure-les en un gràfic.

El canvi més important és que inclou les dues formes d'optimitzar el model, amb dues funcions de pèrdua que funcionen de manera diferent, però que són la mateixa, la *Binary Cross Entropy* i la *MinMax*.. Això en el codi està materialitzat

³Buscava codi estructurat d'una forma en concret, que estigui dissenyat amb la filosofia de *Object Oriented Programming*, una forma d'escriure codi en el qual tot s'implementa en un sol objecte.

⁴[Enllaç del repositori de Michael Nielsen](#), la persona que més m'ha ajudat a fer aquest treball. Però no m'ha ajudat directament, ho dic perquè és el coautor de *QC i QI* [8] i de la xarxa neuronal que va fer que progressés amb la programació.

⁵Es pot veure el codi original a l'apèndix F.1.0.1.

en dues funcions⁶ diferents, `backprop_bce()` i `backprop_minimax()`. No tenen cap diferència en termes d'eficàcia o rapidesa i les vaig fer tan sols per comprovar aquest fet. El codi final del discriminador es pot veure a l'apèndix [F.1.0.2](#). També en el repositori d'aquest treball hi ha un altre arxiu que conté una altra versió en la qual intentava implementar diverses funcions d'activació en el model, però no ho vaig aconseguir, tanmateix, no em preocupa perquè no és una part vital del treball, no passa res per tindre el discriminador només amb la funció sigmoide com a funció d'activació.

6.2 Generador

El desenvolupament de l'altra part del model, el generador, va ser molt diferent. Després de provar de fer-ho amb TensorFlow, sense obtenir bons resultats, no tenia altra opció que fer-ho tot manualment i jo mateix⁷, això no obstant, ja tenia experiència en fer petites xarxes neuronals quàntiques i això em tranquil·litzava. Sabia perfectament el que havia de fer, i com ho havia de fer: Implementar el mètode de *parameter shift* en els circuits quàntics dels quals vaig parlar en la secció [4.2](#).

Una vegada vaig crear els circuits quàntics amb una funció fins a un punt en el qual sentia que ja estava tot perfecte, em vaig posar amb l'optimització, de la qual parlaré a continuació.

Primer de tot cal remarcar que el model s'optimitza a partir d'un *batch*, és a dir, un grup d'imatges, en aquest cas, un grup de dades. S'agafa la mitjana dels errors de cada *batch*, i s'actualitzen els paràmetres a partir d'aquesta. La motivació per treballar en *batch* i no dades individuals és perquè s'ha de mirar l'error d'unes quantes dades a la vegada, d'aquesta manera l'optimització és més robusta.

Tornant al funcionament del procediment, l'explicaré tal i com està implementat en el codi. Per començar s'han d'agafar els paràmetres a optimitzar, que

⁶Funcions de Python.

⁷No em vaig ni plantejar buscar codi per internet perquè pensava que els autors dels papers que vaig llegir, les úniques persones que sabia que podien tindre el codi, no el penjarien.

estaran en forma d'un vector θ , escollir un d'ells que anomenaré θ_i , que és el paràmetre que s'optimitzarà, i crear un vector de pertubació Δ_i .

Llavors es creen dos vectors de paràmetres nous, θ_i^+ i θ_i^- , multiplicant $\pm \frac{\pi}{4}$ pel vector de pertubació, i sumant el resultat al vector de paràmetres original⁸. A continuació, es creen dues imatges, cadascuna corresponent a un dels vectors de paràmetres creats, una amb θ_i^+ i l'altra amb θ_i^- . Per últim, s'avalua la funció de pèrdua per a cada imatge generada i es treu la diferència entre elles, d'aquesta manera calculant una derivada $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i}$ respecte al paràmetre θ_i . Una vegada es té una derivada per a cada paràmetre de θ es pot construir el vector gradient ∇_θ . He de dir aquest vector, ha de tenir la mateixa mida que el vector θ , com que cada element en el gradient correspon a la derivada d'un paràmetre de θ .

Al llarg de l'optimització es van sumant les derivades a ∇_θ , si això es fa per a tots els paràmetres de θ i per a totes les dades del *batch*, finalment es pot treure la derivada mitjana dividint els elements de ∇_θ per la quantitat de dades que hi ha en un *batch*.

Amb el gradient ∇_θ resultat es poden finalment optimitzar tots els paràmetres, d'acord amb les derivades mitjanes de les quals està compost.

El pseudocodi per aquest procediment es pot trobar en la figura 6.1. En aquesta es pot veure que es crida al discriminador perquè posi etiquetes a les dues imatges generades, això és per poder avaluar aquestes etiquetes amb la funció de pèrdua, per després poder agafar la diferència i d'aquesta manera calcular la derivada. El codi pel generador es pot trobar en l'apèndix, F.1.0.3.

6.3 Creació del model

Quan ja es tenen les dues parts del model, aquestes s'han d'ajuntar d'alguna manera. El que jo he fet és posar-ho tot en una classe de Python anomenada `Quantum_GAN`, que conté les funcions per definir el model, per executar-lo, per guardar les seves dades i per crear els gràfics que serveixen per avaluar l'eficiència

⁸Cada un d'aquests vectors de paràmetres té una petita variació en un paràmetre, i cada vector té una variació en un sentit.

Algorithm 2 Pseudocodi per una xarxa generativa adversària quàntica

```

 $\nabla = 0$  ▷ Creació del vector  $\nabla$  que té la mateixa mida que  $\theta$ 
for soroll en batch do
  for paràmetre  $\theta_i$  en  $\theta$  do
     $\Delta_i = 0$  ▷ Creació del vector perturbació d'acord amb el vector  $\theta_i$ 
     $\theta_i^+ = \theta + \frac{\pi}{4} \Delta_i$ 
     $\theta_i^- = \theta - \frac{\pi}{4} \Delta_i$ 

     $\text{Imatge}_1 = \text{generador}(\text{soroll}, \theta_i^+)$ 
     $\text{Imatge}_2 = \text{generador}(\text{soroll}, \theta_i^-)$  ▷ Generació de les imatges

     $\text{Predicció}_1 = \text{discriminador}(\text{Imatge}_1)$ 
     $\text{Predicció}_2 = \text{discriminador}(\text{Imatge}_2)$  ▷ El discriminador posa una
    etiqueta a cada imatge

     $\text{Diferencia}_i = \mathcal{L}(\text{Predicció}_1) - \mathcal{L}(\text{Predicció}_2)$ 

     $\nabla_\theta = \nabla_i + \text{Diferencia}_i$  ▷ On  $\mathcal{L}$  és la funció de pèrdua del generador
  end for
end for

for  $\theta_i$  en  $\theta$  i  $\nabla_i$  en  $\nabla_\theta$  do ▷ Per a cada paràmetre i per a cada error
   $\theta_i^{t+1} = \theta_i + \frac{\eta}{M} \nabla_i$  ▷ Actualització del paràmetre amb la mitjana de l'error que
  correspon a aquest paràmetre
end for

```

FIGURA 6.1: Em refereixo a l'input de la xarxa generacional com a soroll, ja que és més encertat d'aquesta manera. El vector ∇ té la mateixa mida que el vector de paràmetres θ , cal notar que també té la mateixa mida els vectors θ_i^\pm , ja que aquests vectors són θ amb una alteració al paràmetre θ_i . Les paraules *generador* i *discriminador* denoten els respectius models, per tant, Imatge_i i Predicció_i són els outputs dels models.

del model. No fa falta entrar en detall sobre aquesta part en particular del codi. Només cal mencionar que és el tros de codi que junta tot, tant el discriminador i el generador. També agafa altres funcions que són necessàries, com per exemple la sigmoide. Aquestes funcions que no estan tant en l'arxiu del generador com el discriminador es troben en `functions.py`.

Tanmateix, s'han de tenir en compte algunes de les funcionalitats d'aquesta classe, com circulen les dades del generador als discriminadors i com es creen les gràfiques amb les quals valoro l'eficiència dels models.

A la funció de la classe `Quantum_GAN` que s'utilitza per entrenar, `Quantum_GAN.train()` se li dona, entre altres inputs, un dataset amb imatges reals i el soroll per poder entrenar el generador. Aquest dataset es divideix en grups d'imatges (els *batches*), cada *batch* conté tant imatges reals, com soroll en la mateixa quantitat.

En una iteració primer s'optimitza el generador, que substitueix el soroll del *batch* amb les imatges que genera. Llavors es passa el *batch* al discriminador que s'optimitza tant amb les imatges reals com amb les imatges falses. Aquest és el procés pel qual s'optimitzen els dos models. Pel que fa a la creació de les gràfiques, aquesta classe selecciona una imatge real aleatòria i una de falsa per avaluar la funció de pèrdua en la iteració, també crea les etiquetes utilitzades en aquesta l'avaluació. Totes aquestes dades s'usen per a la creació de diversos gràfics que mostren l'evolució d'aquestes dades a través de tota l'optimització.

6.4 Execució del model

No obstant en l'arxiu `qgan.py`, no es troba l'execució del model, només està la definició de la classe `Quantum_GAN`. Això és perquè el codi realment s'executa en l'arxiu `main.py`. Aquest és l'únic arxiu que té codi que realment s'executa, els altres arxius només tenen definicions. Per projectes relativament grans, com aquest, convé tenir un arxiu que fa tot el treball, el qual crida a totes les funcions definides en altres arxius i les executa d'una manera ordenada.

Com es pot veure en l'apèndix, [F.1.0.5](#), aquest arxiu té molt poc codi. En ell només es crea amb Numpy el dataset, es defineix el discriminador i el generador,



FIGURA 6.2: **A)** Aquest és un exemple d'una imatge del *dataset* amb el qual s'entrena el model que he creat. És simplement una imatge en blanc i negre de 4 píxels, en la qual hi ha dos píxels amb un valor de 0.5 i els altres dos amb un valor de 0. Les imatges es creen a partir d'una *array* de Numpy, per exemple `np.array([[0.47804505, 0.], [0.47804505, 0.]])`. **B)** Aquest és un exemple d'una imatge generada que tracta de ser el més semblant possible a les imatges del *dataset*. Es pot veure que són indistingibles a simple vista, però al veure els valors es pot apreciar com els nombres no són els mateixos: `np.array([[0.504324, 0], [0.495676, 0]])`. Això és perquè només pel valor de 0.5 és possible tenir els dos píxels amb el mateix valor, sempre que els valors dels altres píxels sigui zero. Cal recordar que els valors dels píxels han de sumar 1, per tant, les imatges del *dataset* com la que he mostrat no són possibles de crear. He pensat fer-ho d'aquesta manera per veure si es generaria les imatges correctament amb aquesta limitació, el resultat ha sigut que les imatges que es generen són com la mitjana dels valors de les imatges del *dataset*, tal com es pot apreciar en la figura.

amb els quals es crea el model amb `Quantum_GAN`. Finalment, es crida a la funció `Quantum_GAN.train()` per optimitzar el model. En acabar l'optimització es criden les funcions `Quantum_GAN.plot()`, `Quantum_GAN.create_gif()` i `Quantum_GAN.save()`, les quals donen a terme funcions complementàries com la creació de les gràfiques, la creació d'un GIF que mostra com les imatges van evolucionar al llarg de l'optimització, i l'emmagatzematge de les dades rellevants que s'han creat durant l'optimització.

Les imatges que vaig escollir per generar són les mateixes que van generar en l'article en el qual vaig basar el treball. No entraré molt en detall sobre les distribucions concretes que formen les imatges, però per tindre una imatge general sobre com són es pot veure la figura 6.2.

Si executen el model, amb una mida de *batch* de 10, tant el *learning rate* del discriminador com del generador a 0.1, i un total d'iteracions de 400, hi ha una garantia d'arribar a la convergència desitjada, és dir que, que els dos models

arriben a l'equilibri de Nash i no poden continuar l'optimització. En aquest punt és quan les imatges falses i les reals són iguals.

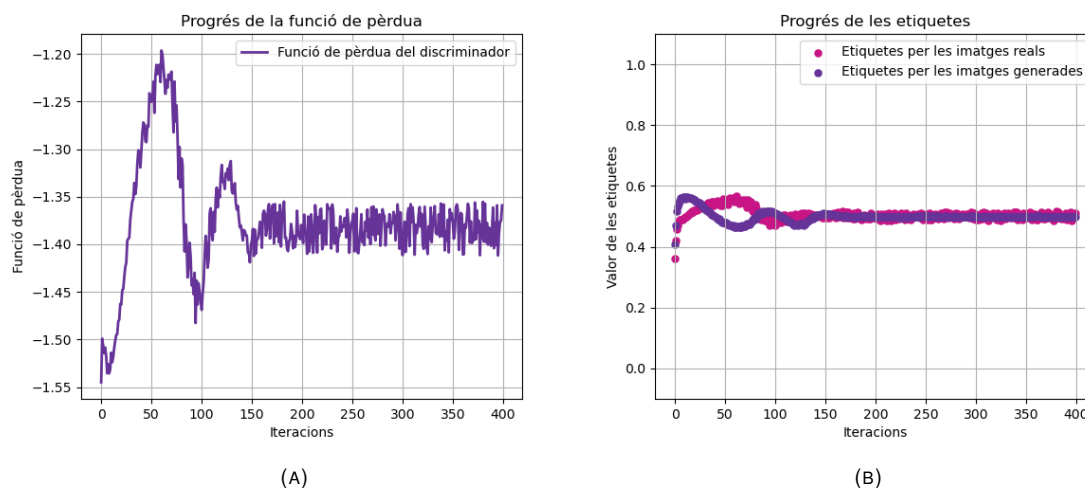


FIGURA 6.3: En pot veure com per la iteració 250, el model ja s'ha estabilitzat, ja que les etiquetes i el valor de la funció de pèrdua convergeixen en un valor. **A)** Funció de pèrdua per cada iteració. A partir de la iteració 175, es pot veure com el valor de la funció s'estabilitza en l'interval $(-1.35, -1.4)$, això concorda amb els valors de les etiquetes en les mateixes iteracions, ja que $\log(\frac{1}{2}) + \log(1 - \frac{1}{2}) \simeq -1.38$. **B)** Etiquetes per les imatges reals i generades per cada iteració. Es pot observar que els valors de les etiquetes per les imatges reals són més inestables que els valors de les generades. Això és perquè les imatges reals tenen una major variació en els valors dels píxels, mentre que en les generades aquest fet no és tan notable. Per tant, el discriminador assigna etiquetes amb una major variació.

En la figura, 6.3b, es pot veure com les etiquetes pels dos tipus d'imatges van oscil·lant fins a estabilitzar-se. El mateix es pot dir per la funció de pèrdua, com es pot veure en la figura 6.3a.

A causa del fet que aquests gràfics són molt semblants als seus anàlegs de les GANs clàssiques i que les distribucions reals i generades són pràcticament iguals, com es pot veure a la figura 6.4, considero que el model funciona correctament.

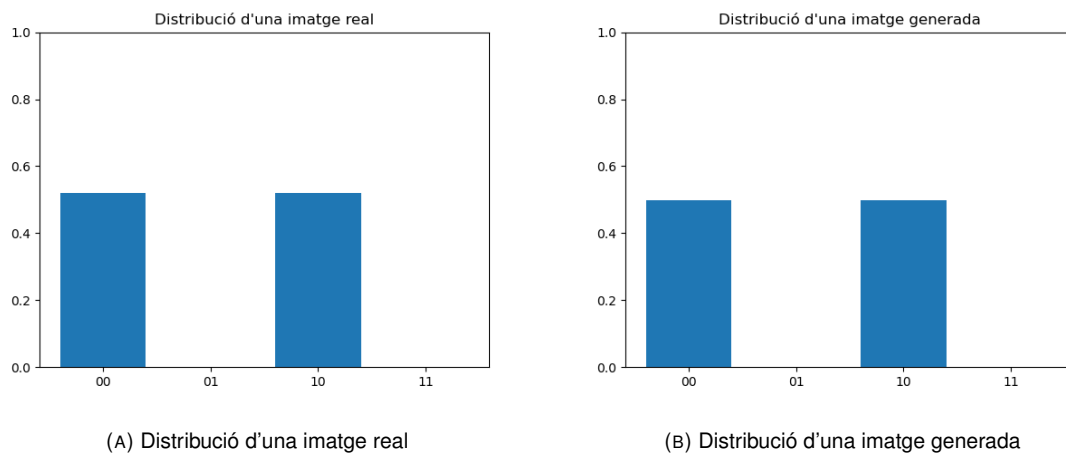


FIGURA 6.4: Comparació d'una imatge generada i una real, quan el model ha assolit la convergència. En l'eix Y es pot veure el valor d'un píxel, mentre que en l'eix X estan els píxels.

Abans he especificat que al cap de 400 iteracions podem tenir la garantia d'arribar al punt d'equilibri, no obstant això, es pot arribar a aquest punt amb menys iteracions, el que vull dir és que amb 400 de segur que s'arriba. Això és perquè, com a tots els models de *machine learning* hi ha una part de sort implicada, si els paràmetres inicials són més semblants als paràmetres desitjats, el model assolirà la convergència més ràpidament.

Capítol 7

Realització del experiment

Una vegada havia confirmat el correcte funcionament del model, vaig alterar el generador per poder acomodar els dos tipus de circuits quàntics que necessitava, uns amb un sistema ancilla, i uns altres sense.

Un sistema ancilla, és un grup de qubits sobre els quals es donen a terme operacions, però que no es mesuren per treure l'output del circuit. Aquests qubits es pot veure clarament en la figura [7.1](#).

Primer de tot he de mencionar que havia de fer alguns canvis al generador per acomodar aquests qubits ancilla.

Segon, cal notar que no he seguit exactament els mateixos passos que en l'article original. En ell tenen aquesta equació [\[5\]](#):

$$\rho = \frac{\text{tr}_A(\Pi_A |\psi\rangle \langle\psi|)}{\text{tr}(\Pi_A \otimes I_{2^N - 2^{N_A}} |\psi\rangle \langle\psi|)}$$

Com ja he comentat en la secció [2.1.1](#), no veig com aquesta equació pot tenir sentit, per tant la vaig ometre del meu experiment.

L'alternativa que he fet servir són els mesuraments de Qiskit, al definir el circuit específic quins són els qubits que no vull mesurar, que són els qubits que formen part del sistema ancilla. No obstant això, no sé exactament que és el

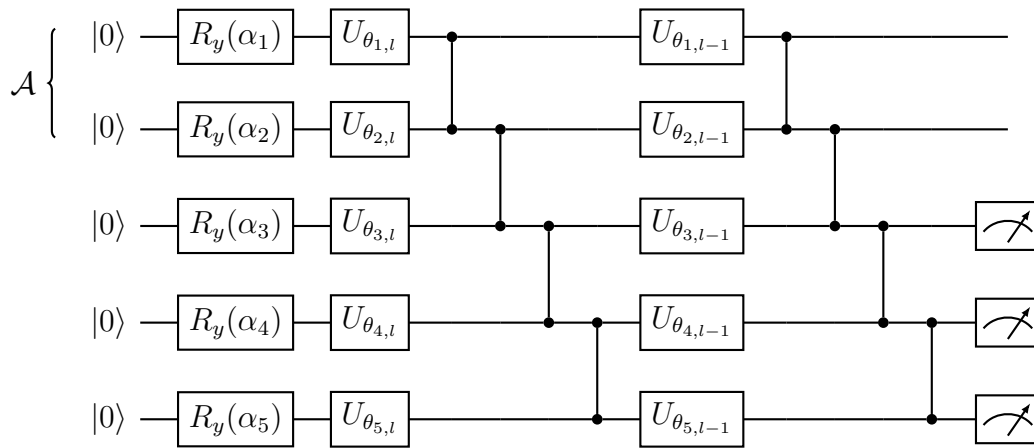


FIGURA 7.1: Aquí he marcat els qubits ancilla amb \mathcal{A} , són els dos primers. També al final del circuit he afegit mesures als qubits que s'han de mesurar.

que fa Qiskit amb el mesurament. Però si empro aquest procediment en altres circuits, dels quals sé el resultat, aquest mètode fa el que m'espero¹.

L'arxiu que utilitzo per fer els experiments és `experiment.py`. En ell es pot veure com defineixo dos discriminadors² i dos generadors, que es diferencien pels circuits que fan servir, un amb qubits ancilla i l'altre sense. Aquests models s'agrupen en parelles per definir dues qGANs.

Cal notar que els generadors i els discriminadors³ comencen amb els mateixos paràmetres, per tant, exactament les mateixes condicions, menys els circuits quàntics és clar. També s'utilitza el mateix dataset.

7.1 Anàlisi dels resultats

Si comparem les gràfiques que mostren les etiquetes es pot veure una clara diferència: Els models que tenen els circuits amb els qubits ancilla són més inestables que el que no els tenen, tal i com es pot veure en la figura 7.2. Això no vol

¹ Parlo dels parells de Bell, els circuits quàntics amb entrellaçament més simples que es poden fer.

² Que tenen les mateixes característiques.

³ Al principi pensava no tenir els mateixos paràmetres inicials pels discriminadors, però al veure les gràfiques de les etiquetes, l'efecte que tenen aquests és molt notable. Es pot veure com a vegades les etiquetes comencen en uns valors de 1 i en altres de 0. [enllaç per veure una imatge amb totes les gràfiques](#) (perdó per la informalitat)

dir necessàriament que siguin més eficients, però l'estabilitat és un factor que es busca en les GANs.

També es pot observar una clara diferència en les imatges generades en la primera iteració. En les primeres imatges d'un generador amb la funció no lineal es pot veure un píxel amb un valor de 1 mentre que els altres estan al 0. Mentre que en l'altre tipus de generador es pot veure que els píxels tenen més o menys el mateix valor, d'aquesta manera formant una distribució uniforme. Aquest fet probablement és causat per l'estructura del circuit que té els qubits ancilla. Tanmateix, perquè exactament passa això està fora dels meus coneixements sobre la matèria⁴.

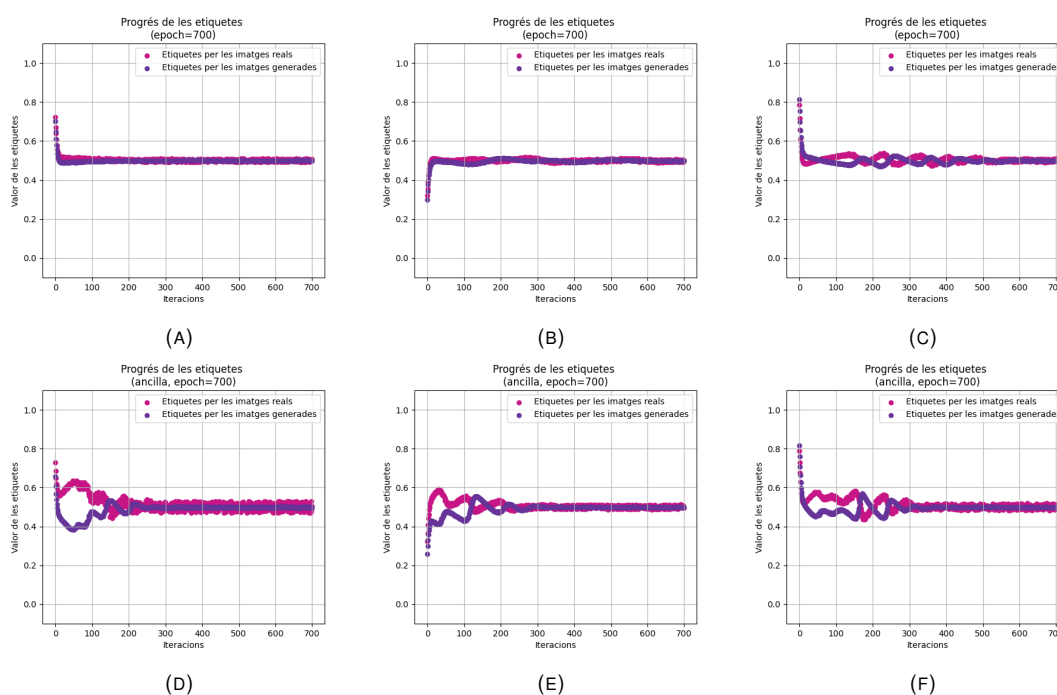


FIGURA 7.2: Es pot apreciar com els models sense la funció no lineal (**A**, **C**, **B**) tenen una major estabilitat en les etiquetes comparats amb els models que sí tenen la funció no lineal (**D**, **E** i **F**).

La part que realment m'intriga és que durant les primeres iteracions, en els circuits amb els qubits ancilla el píxel que té el valor de 1, passa d'un a un altre. Aquest comportament succeeix a absolutament cada vegada que he executat el codi. Igual que he dit abans, arribar a comprendre la causa d'aquest fet està fora del meu nivell de coneixement.

⁴Saber com es comporten sistemes quàntics que tenen parts entrelaçades com aquest està fora del meu àmbit.

Estic bastant segur que aquesta fluctuació dels píxels és el factor que causa la inestabilitat que es pot observar en les etiquetes.

Després de mirar les gràfiques que generaven els models, vaig posar-me a redactar les conclusions, malgrat això, no estava satisfet amb la precisió de l'anàlisi de les dades. No podia saber amb certesa quin dels dos tipus de models era el més eficient. Necessitava una mètrica que en digués quina és la semblança entre les imatges generades i les imatges reals. Sabia que en l'article en el qual he basat el treball els autors havien fet servir una mètrica anomenada *Férchet Score* o puntuació de *Férchet*, en la qual s'emprava la distància de *Férchet*. Aquesta distància serveix per comparar dues distribucions a partir de la seva mitjana i la seva covariància.

Llavors vaig decidir implantar aquesta mètrica, i veure com evoluciona al llarg de l'optimització.

En un article sobre l'avaluació de les imatges generades per les GAN [40], vaig trobar aquesta equació per calcular la distància de *Férchet*:

$$FD(r, g) = |\mu_r - \mu_g|^2 + \text{tr}(\Sigma_r + \Sigma_g - 2(\Sigma_r \Sigma_g)^{\frac{1}{2}})$$

On μ és la mitjana⁵ i Σ és la covariància d'una distribució. Aquesta equació l'he implementat en Python mitjançant matrius, és a dir les imatges. Només em feia falta trobar una funció per poder calcular la covariància d'una matriu, afortunadament Numpy en té una, on cada fila representa una variable d'una distribució. No puc estar 100% segur de què he implementat aquesta mètrica correctament, ja que no sé el funcionament exacte de la covariància, ni de la funció de Numpy. No obstant això, sembla que funciona correctament.

Cal notar que si les dues imatges són exactament iguals, la distancia dona pràcticament zero⁶. Per considerar que dues imatges són «acceptablement semblants», han de tenir una distància entre elles de 10^{-3} aproximadament.

⁵Jo he utilitzat la mitjana aritmètica.

⁶Python diu que és d'un ordre de magnitud de 10^{-16} aproximadament.

Part III

Conclusions

Una vegada havia implementat la distància de Férchet per poder avaluar el rendiment dels models, vaig arribar a una clara conclusió:

Els models que tenen implementada la funció no lineal són més eficients.

Afirmo això perquè els models sense la funció no arriben a estabilitzar-se, és a dir, no arriben al punt d'equilibri. En canvi, els models que tenen la funció si ho estan. Arribar punt d'equilibri ens garanteix que les imatges que generen siguin òptimes indefinidament. Per molt més que el model segueixi optimitzant-se, sempre donarà els mateixos resultats.

Els models que no presenten la funció, no assoleixen aquest punt a causa que la fidelitat de les imatges oscil·la, és a dir, el model pot arribar a generar imatges correctament, però no ho fa indefinidament, al cap d'unes interaccions la semblança de les imatges generades amb les reals ja no és significativa. Simplement, la qualitat de les imatges generades va oscil·lant entre bona i dolenta.

Aquest problema no és causat pel discriminador, això és perquè la variable independent de l'experiment és el circuit quàntic del generador, per tant, és el factor que té més possibilitat de ser el causant d'aquest comportament. No sé molt bé la causa exacta, però està clar que el mesurament parcial té un impacte. Tot i que hi ha excepcions, a vegades els models sense la funció no experimenten aquesta oscil·lació. Tanmateix cal remarcar que les vegades que passa són notablement més altes que les que no passa. Com es pot veure amb les dades de la taula 7.1.

	Presenta oscil·lació	No Presenta oscil·lació
Amb Funció No Lineal	0	6
Sense Funció No Lineal	5	1

TAULA 7.1: Les dades provenen d'un total de 6 models, 3 d'ells amb un total de 700 epoch i els altres 5 amb un total de 550. El nombre d'interaccions no hauria d'afectar de cada manera les dades. Degut si hi ha una oscil·lació, es pot veure clarament a partir de les 400 iteracions. Amb les dades es pot veure que és més probable que un model sense la funció lineal presenti una oscil·lació. Cal notar que cap model amb la funció ha tingut una oscil·lació. Les gràfiques que corresponen a cada model es poden veure en les figures 7.4 i 7.3.

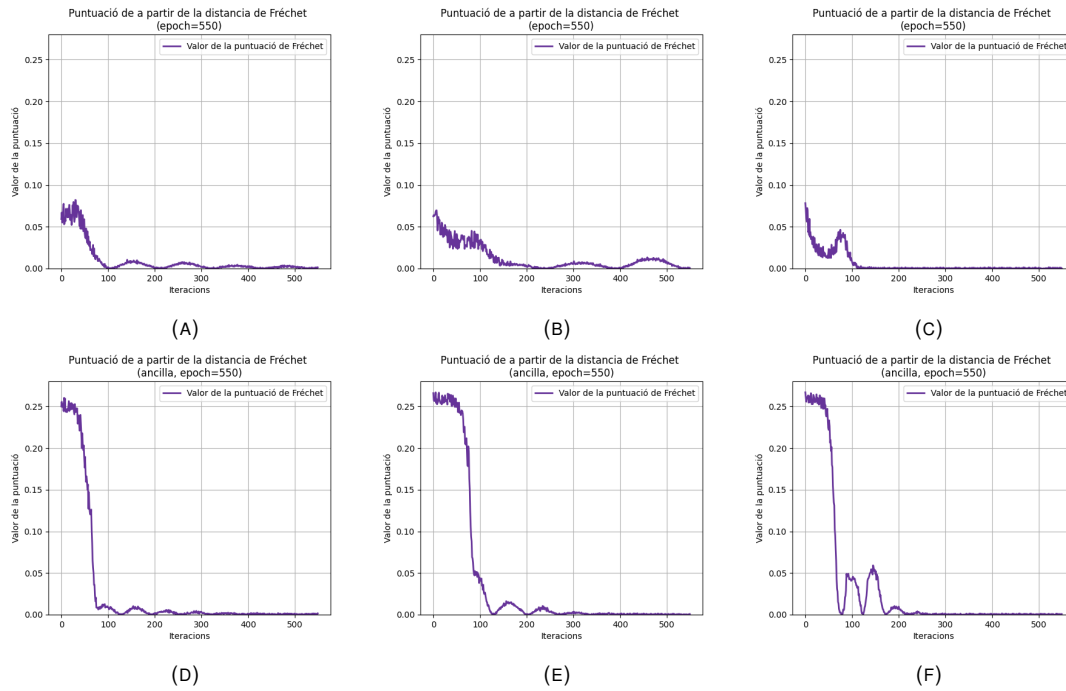


FIGURA 7.3: Totes les gràfiques corresponen a models que s'ha executat al llarg de 550 iteracions. Les figures **A**, **B** i **C**, corresponen a models sense la funció lineal. L'únic d'ells que no presenta una oscil·lació és el **C**. Les gràfiques sense la funció es poden comparar a les d'abaix, les quals representen models amb la funció implementada. Els models han estat creats per parelles, les quals estan organitzades verticalment. És a dir, les gràfiques **A** i **D** representen models que tenen els mateixos paràmetres inicials. El mateix passa amb **B** i **E** i amb **C** i **F**.

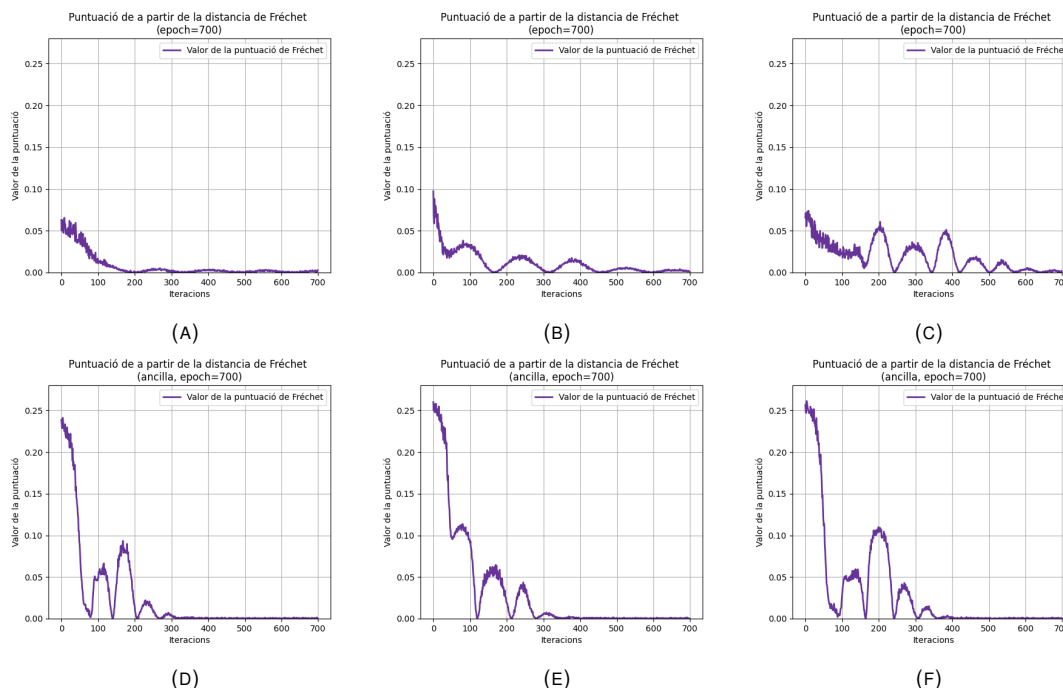


FIGURA 7.4: Aquestes gràfiques corresponen a models que s'han executat al llarg de 700 iteracions. Estan organitzades igual que les gràfiques de la figura 7.3. En aquests casos, com es pot observar tots els models sense la funció no lineal presenten les oscil·lacions. No obstant en la gràfica **A**, aquesta es molt feble. Per veure com afecten les oscil·lacions es pot veure la figura, on estan representades les últimes imatges que han generat els models que corresponen les gràfiques d'aquesta figura.

En les gràfiques 7.3 i 7.4 es pot veure perfectament l'oscil·lació en la Distància de Fréchet. En aquest cas es pot interpretar aquesta mètrica com la semblança entre les imatges generades i les reals. Si aquesta mètrica convergeix a zero, es pot dir que el model a arribat al seu punt d'equilibri. Es pot veure com tots els models que tenen el mesurament parcial assoleixen aquest punt. D'aquesta manera demostrant l'eficàcia de la funció no lineal.

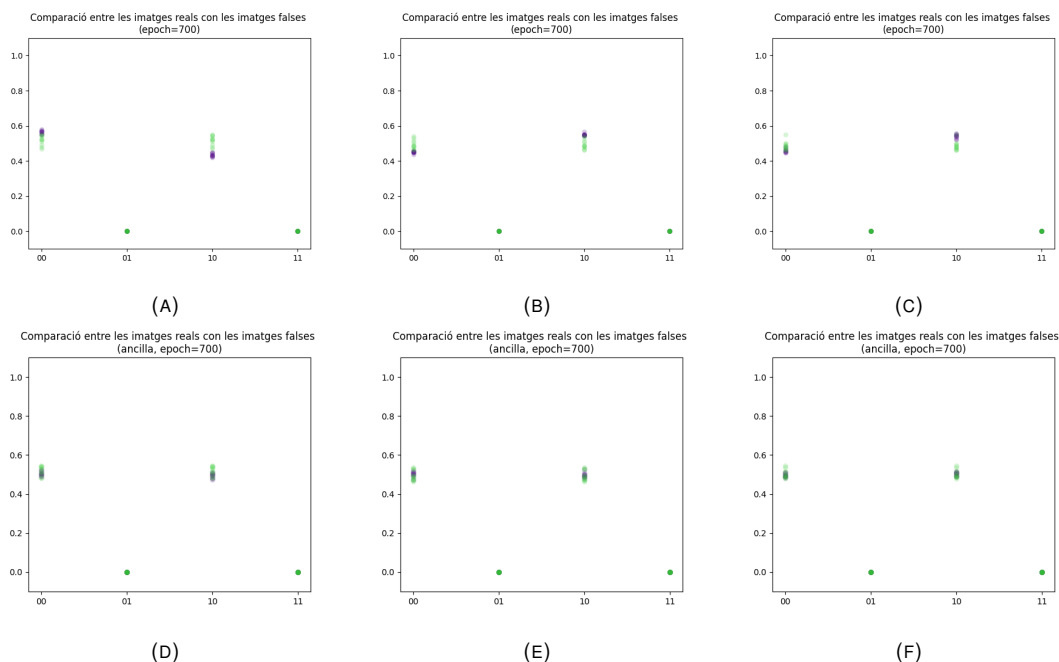


FIGURA 7.5: Aquestes gràfiques corresponen als mateixos models que els de la figura 7.4. Les posicions de les gràfiques són les mateixes, per tant, si estan en la mateixa posició que les de l'altra figura, corresponen al mateix model. Les imatges generades pels models sense la funció no lineal (A, C, B) no s'assemblen a les reals. Es pot veure com els punts de les imatges generades (color violeta) no estan als mateixos valors. Mentre que en les gràfiques D, E i F, sí que ho estan. Els punts violetes sembla que representen la mitjana dels punts verds. També es pot observar que les imatges generades tendeixen a ser més variades que les reals.

Per poder veure la diferència entre les imatges directament, es pot veure la figura 7.5, en la qual es mostren les 10 últimes imatges generades pels models optimitzats al llarg de 700 iteracions.

A partir de la Distància de Fréchet es pot apreciar l'efecte que té el mesurament parcial en la generació de les imatges, fent que aquest procés sigui més eficient i evitant una oscil·lació entre la generació d'imatges de bona i dolenta qualitat. Per tant, es pot afirmar que el mesurament té un efecte positiu en el model, corroborant la tesi exposada en Huang et. al. (2021) [5].

No obstant això, es podria desenvolupar aquest experiment en major profunditat. No he tingut en compte el temps en el qual es tarden a generar les imatges. Els models amb el mesurament parcial implementat són més eficients, però en tenir més qubits és més costós simular-los i, per tant, tarden més temps per cada interacció. He fallat en mirar exactament quina és la diferència en termes de temps, tanmateix, ja que els models sense la funció no lineal no arriben

a assolir el punt d'equilibri la gran majoria de les vegades, des d'un punt pràctic és recomanable utilitzar els models que si tenen la funció.

A més a més es podria investigar la causa de l'oscil·lació en major profunditat. Deixant de banda la investigació teòrica de per què passa, es podria variar el nombre de qubits en els circuits, tant els ancilla, com el total de qubits del circuit, per veure quin és l'efecte que té tenir més qubits en el sistema ancilla. Potser investigaré pel meu compte aquesta qüestió.

El camí que he recorregut

Vull dedicar un petit espai per poder parlar que significa aquest treball per a mi, del tot l'esforç que he posat en aquest i finalment comentar tot el que he après al llarg d'aquest llarg camí.

Va dos anys que vaig començar a aprendre conceptes de computació quàntica, ha sigut un camí molt llarg, però que m'ha encant de recórrer. Comprendre tot l'ho que he après ha sigut una gran alegria, perquè són conceptes de camps que realment m'encanten (computació quàntica i intel·ligència artificial). A més a més, aprendre tot això m'ajudaria molt en cas que estudiï una carrera en física, que és el meu objectiu.

Deixant, d'una banda, els evidents beneficis d'avançar temari d'una carrera que vols fer en un futur, fent aquest treball he après altres coses extremadament útils.

Primer de tot, aquest treball està redactat en \LaTeX ⁷, una espècie de llenguatge de programació per escriure equacions matemàtiques i documents de text. És àmpliament utilitzat per escriure articles científics en el món acadèmic, però més important és utilitzat en l'ambient educatiu de les ciències exactes per poder entregar deures i reports del laboratori. Tots els meus amics que estudien física ho fan servir.

⁷[La web oficial de \$\text{\LaTeX}\$](#)

A continuació tenim el fet de crear un gran projecte científic en Python, he après a programar fins al punt que crec que soc bastant bo, és en allò que soc millor. Programar en Python també és una habilitat que em serà útil a la universitat, perquè és el llenguatge de programació que es fa servir en la carrera de Física a la UB per realitzar experiments computacionals. Així mateix, vull mencionar que al llarg del procés de la creació del model van sorgir moltíssims problemes, en aquest document només he esmenat una part petita de la totalitat dels problemes que em vaig trobar al llarg del camí. Vaig estar més de mig any programant aquest model fins que estava tot perfecte per realitzar l'experiment. Definitivament, ha sigut la part més dura de tot el treball.

Per últim, he après a llegir articles científics sobre computació quàntics. Soc familiar amb la notació que s'empra en el camp i també el llenguatge específic que s'utilitza en els articles, amb això em refereixo a expressions en anglès. Tanmateix, no vull dir que puc interpretar els articles i valorar-los d'alguna manera, tan sols puc comprendre'ls, no obstant hi ha coses que no puc arribar a comprendre és clar, òbviament no tinc els mateixos coneixements d'un estudiant de postgrau.

Penso que aquest treball és el millor que he en la meva vida acadèmica, sigui en termes d'utilitat o en termes de realització personal, m'ha encantat fer-ho. He dedicat dos anys de la meva vida a això; des del primer moment que vaig veure que era la computació quàntica vaig tindre clar que faria el treball de recerca sobre aquest camp. I no me'n penedeixo de tot l'esforç que hi he posat.

Part IV

Apèndixs

Capítol A

Que podria fer en un futur?

M'agradaria parlar sobre que és el que vull fer en el futur, gaudeixo massa aprendre sobre aquest camp i programar experiment per a deixar-ho de banda.

La primera opció seria investigar en major profunditat com afecta aquest mesurament parcial a l'eficiència del model, i veure per què la funció de pèrdua oscil·la d'aquesta manera quan el mesurament parcial no està implementat en el circuit. Aquesta opció és la més fàcil, ja que, no he de desenvolupar més codi per donar-la a terme.

Pel que fa a la segona opció, en aquesta entraria tot el que té a veure amb generar imatges amb la qGAN que he fet. Podria posar-me a generar imatges més complexes com dígit escrit a mà, igual que han fet els autors de l'article en el qual he basat aquest treball. També podria provar de generar imatges a color, ja m'he llegit uns quants articles que donen a terme aquesta fita i em sembla molt interessant. A més de tot això s'ha m'acudeix implementar el meu codi en un ordinador quàntic de veritat, però no crec que no faci perquè el meu model requereix moltes avaluacions de diversos circuits quàntics i no penso que IBM Quantum Experience em deixaria fer-les totes.

Com a última opció he pensat fer una cosa completament diferent de la generació d'imatges. Existeix models generatius que es basen en el que s'anomena *feature encoding*, és a dir, trobar les característiques d'un objecte i a partir d'elles sintetitzar nous objectes. Un gran exemple d'aquests models és Jukebox

desenvolupat per OpenAI [41]. Aquest model serveix per a la generació de música, i consisteix per exemple treure les característiques de l'estil i música d'un artista, i partir d'una gravació d'una veu cantant, transformar la gravació en una cançó amb l'estil d'aquest artista.

Aquests tipus de models tenen una arquitectura anomenada *autoencoder*, la qual ja ha sigut implementada en models quàntics [42]. Vull veure si és possible fer alguna cosa semblant a *Jukebox*, no necessàriament per generar dades, sinó per veure si és possible fer *feature encoding* en un circuit quàntic. No penso que sigui probable fer-ho, però serà divertit intentar-ho.

Tanmateix, l'opció més intel·ligent seria centrar-me en les bases de la computació quàntica i aprendre les subrutines que existeixen com la transformada de Fourier quàntica i l'estimació de fase, els pilars dels algoritmes quàntics. A més a més hi ha algoritmes molt interessants i útils que he d'aprendre a utilitzar i encara més important, comprendre'ls; he de desenvolupar més intuïció.

Capítol B

Més àlgebra lineal

B.1 Procediment de Gram–Schmidt

El procediment de Gram-Schmidt és un mètode utilitzat per produir bases per a espais vectorials [9]. Per un espai V amb producte interior de d dimensions amb el conjunt de vectors $|v_1\rangle, \dots, |v_d\rangle$, podem definir una nova base de vectors ortonormals $\{|u\rangle\}$. El primer element d'aquest conjunt és $|u_1\rangle = |v_1\rangle / \||v_1\rangle\|$, amb el següent element $|v_{k+1}\rangle$ sent:

$$|u_{k+1}\rangle = \frac{|v_{k+1}\rangle - \sum_{i=1}^k \langle u_i | v_{k+1} \rangle |u_i\rangle}{\left\| |v_{k+1}\rangle - \sum_{i=1}^k \langle u_i | v_{k+1} \rangle |u_i\rangle \right\|}$$

Per k en el interval $1 \leq k \leq d-1$.

Si seguim per k en $1 \leq k \leq d-1$, obtenim el conjunt de vectors $|u_1\rangle, \dots, |u_d\rangle$ que és una base vàlida per l'espai ortonormal per l'estai V . Els vectors creats han de tindre el mateix *span*¹ que el dels vectors que originalment eren la base per V :

$$\text{span}(\{|v\rangle\}) = \text{span}(\{|u\rangle\}) = V$$

Cal notar que l'*span* de del conjunt base és la definició del espai. En altres paraules, cada vector en V pot ser representat per una combinació del vectors base.

¹L'*span* d'un conjunt de vectors són totes les combinacions lineals possibles amb aquests vectors.

B.2 Curs ràpid de la notació de Dirac

A la taula següent hi ha un resum de conceptes matemàtics de l'àlgebra lineal importants expressats en la notació de Dirac² [43].

Notació	Descripció
z	Nombre complex
z^*	Conjugat complex d'un nombre complex z . $(a + bi)^* = (a - bi)$
$ \psi\rangle$	Vector amb una etiqueta ψ . Conegut com a <i>ket</i>
$ \psi\rangle^T$	Transposada d'un vector $ \psi\rangle$
$ \psi\rangle^\dagger$	Conjugat Hermitià d'un vector. $ \psi\rangle^\dagger = (\psi\rangle^T)^*$
$\langle\psi $	Vector dual a $ \psi\rangle$. $ \psi\rangle = \langle\psi ^\dagger$ i $\langle\psi = \psi\rangle^\dagger$. Conegut com a <i>bra</i>
$\langle\varphi \psi\rangle$	Producte interior dels vectors $\langle\varphi $ i $ \psi\rangle$
$ \varphi\rangle\langle\psi $	Producte exterior dels vectors $\langle\varphi $ i $ \psi\rangle$
$ \psi\rangle \otimes \varphi\rangle$	Producte tensorial dels vectors $ \varphi\rangle$ i $ \psi\rangle$
0	Vector zero i operador zero
\mathbb{I}_n	Matriu identitat de dimensions $n \times n$
\mathbb{C}_n	Espai vectorial complex de dimensió n
\mathbb{C}_1 o \mathbb{C}	Espai dels nombres complexos

²La notació utilitzada per un espai vectorial complex i l'espai dels nombres complex no són de la notació de Dirac estàndard, però les poso per explicar el que signifiquen.

Capítol C

Computació Quàntica vs Mecànica Quàntica

En la introducció havia mencionat que una de les raons per les quals havia començat a aprendre i recercar sobre computació quàntica era perquè era fàcil, en aquest apèndix explicaré exactament a què em refereixo per això amb un exemple pràctic. Dic que és fàcil, perquè si ho és, si es compara la computació quàntica amb la mecànica quàntica. Presentaré un exemple pràctic per il·lustrar-lo.

En mecànica quàntica la manera més usual de representar els estats quàntics, com els orbitals d'un àtom d'hidrogen és a través de *wavefunctions* o funcions d'ona, no se solen representar mitjançant vectors d'estat. Aquestes funcions d'ona són molt útils i poden representar casos més generals que els vectors d'estat. No obstant això, treballar amb elles és molt més complicat, ja que són funcions que depenen del temps, no són vectors. Això implica que s'han d'utilitzar altres operacions per normalitzar les funcions, determinar com evolucionen en el temps o per fer mesures. A continuació faré una comparació entre com es preserva la normalització d'una funció d'ona i la d'un vector d'estat quan aquests objectes evolucionen en el temps, per mostrar un exemple de com la mecànica quàntica més bàsica em sembla més complicada que la computació quàntica més bàsica.

C.1 Normalitzar

A causa de la interpretació probabilística dels vectors d'estat i de les funcions d'ona, aquests objectes han de ser normalitzats perquè la suma de les probabilitats dels possibles estats de mesura sigui 1.

Per una funció d'ona $\Psi(x, t)$ que representa una partícula, la probabilitat de trobar aquesta partícula en un punt x és $|\Psi(x, t)|^2$. Per tant, la funció d'ona ha de ser normalitzada seguint la fórmula:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1 \quad (\text{C.1})$$

Ja que la funció d'ona evoluciona a través del temps d'acord amb l'equació de Schrödinger (veure la figura C.1) qualsevol solució d'aquesta equació ha d'estar també normalitzada. En altres paraules, aquesta equació ha de preservar la normalització de les funcions d'ona [44].

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

FIGURA C.1: **Equació de Schrödinger.** On \hbar és $h/2\pi$, i V és una funció potencial d'energia.

Podem provar que aquesta equació preserva la fórmula C.1, començant per la igualtat trivial:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx$$

Per la regla del producte tenim que ¹:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \frac{\partial}{\partial t} (\Psi\Psi^*) = \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi$$

Ara l'equació de Schrödinger diu que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{i}{\hbar} V\Psi$$

¹A partir d'ara escriuré $\Psi(x, t)$ simplement com Ψ per no fer les equacions tan enrevessades.

després calculant el complex conjugat tenim que

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{i}{\hbar} V \Psi^*$$

per tant

$$\frac{\partial}{\partial t} |\Psi|^2 = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \Psi \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \right]$$

finalment podem avaluar l'integral del principi:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty}$$

Degut a que $\Psi(x, t)$ ha de convergir a zero quan x va cap a infinit, es veritat que:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 0$$

Es pot veure que l'integral és constant i, per tant, quan Ψ és normalitzada a $t = 0$, es queda d'aquesta manera per qualsevol t (positiu és clar), i la normalització d'una funció d'ona és constant si aquesta evoluciona d'acord amb l'equació de Schrödinger.

Mentre que amb un vector d'estat és molt més simple: al evolucionar a partir de matrius unitàries, les quals preserven la norma del vector a la qual s'apliquen; si el vector al qual s'aplica una porta quàntica té una norma de 1, aquesta norma es preservarà.

Capítol D

Polarització d'un fotó

En l'equació 2.1 he exclòs el concepte de fase, que determina el tipus de polarització que té un fotó. Hi ha 3 tipus:

1. **Linear:** Un fotó té polarització lineal quan els angles de la fase α_x, α_y en els estats base $|x\rangle, |y\rangle$ són iguals:

$$\begin{aligned} |\nearrow\rangle &= \cos(\theta)e^{i\alpha_x} |x\rangle + \cos(\theta)e^{i\alpha_y} |y\rangle \\ &= [\cos(\theta) |x\rangle + \sin(\theta) |y\rangle]e^{i\alpha} \end{aligned}$$

On $\alpha = \alpha_x = \alpha_y$.

2. **Circular:** Quan els angles α_x, α_y són separats per exactament $\frac{\pi}{2}$ i l'amplitud per les dues bases és la mateixa:

$$\begin{aligned} |\nearrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta)e^{i\alpha_x} |x\rangle \pm i \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta)e^{i\alpha_y} |y\rangle \\ &= [\cos(\theta)e^{i\alpha_x} |x\rangle \pm i \sin(\theta)e^{i\alpha_y} |y\rangle] \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

On el signe \pm indica la diferència entre la polarització circular cap a la dreta o l'esquerra, amb $+$ i $-$, respectivament.

3. **El·líptica:** On els angles α_x, α_y són diferents per una quantitat arbitraria¹:

$$|\nearrow\rangle = \cos(\theta)e^{i\alpha_x} |x\rangle + \sin(\theta)e^{i\alpha_y} |y\rangle$$

Aquest és el cas més general.

¹Però que no sigui la quantitat que dona a terme la polarització circular.

Capítol E

Complexitat i algoritmes quàntics

En ciències de la computació existeix el concepte de *Big-O Notation*, una forma de quantificar l'eficiència dels algoritmes, la qual s'anomena la complexitat algorítmica. Bàsicament, és una forma de classificar-los segon la rapidesa que tenen en fer la tasca que els correspon, aquesta rapidesa no és mesura en segons, ja que aquesta mètrica pot variar d'ordinador a ordinador per les diferències en hardware que aquests poden tindre. En canvi, es mesura segons nombre d'operacions o temps directament, però sense unitats.

La *Big-O Notation* consisteix a definir el temps màxim que necessita un algoritme, es denota com $O(\cdot)$ on l'argument usualment depèn de n que és la mida de l'input a l'algoritme, per exemple un algoritme de cerca ha de cercar a través de n coses. A continuació parlo d'un exemple en concret; l'algoritme de cerca de cadenes binàries corre en un temps $O(\log_2 n)$, on n és el nombre de cadenes entre les quals ha de cercar. La notació $O(\cdot)$ es diu que és el *upper bounded*, això significa que $\log_2 n$ és la quantitat de temps més gran en la qual es trobaria la cadena. Això vol dir que és possible que a la primera comprovació es trobi la cadena que se cerca, llavors l'algoritme acabaria en un temps $O(1)$. Simplement, aquesta notació és una manera d'avaluar lo eficients que són els algoritmes amb relació a la mida de l'input que tenen.

Amb aquesta notació tenim una manera de comparar l'eficiència que tenen els algoritmes quàntics amb la dels clàssics que tenen la mateixa funció. Per

il·lustrar aquest avantatge en eficiència que presenten els algorismes quàntics, presentaré a continuació els dos algorismes quàntics més famosos, el de Grover, i el de Shor. Que serveixen per la cerca d'un element en una llista desordenada, i per la factorització en nombres primers; respectivament.

E.1 Algoritme de Grover

En 1996, Lov Grover va presentar un algoritme quàntic per cercar entre una sèrie de dades desordenades [45] (e.g. cercar el número de telèfon en una llista desordenada). Per aquest problema un algoritme clàssic té una complexitat de $O(N)$ cerques¹, mentre que l'algoritme de Grover té una complexitat de $O(\sqrt{N})$, sent substancialment més eficient. En les paraules de Grover [45] (adaptades): un ordinador clàssic per tindre una probabilitat de $\frac{1}{2}$ de trobar el número de telèfon d'una persona en una llista desordenada necessita mirar a un mínim de $\frac{N}{2}$ números, mentre que amb el seu algoritme s'obté el número de telèfon en només $O(\sqrt{N})$ passos².

L'algoritme funciona de la següent manera: Agafar un sistema de n qubits en l'estat $|0\rangle$ que resulten en una combinació de $N = 2^n$ estats. Aplicar una distribució uniforme als qubits, és a dir, aplicar portes Hadamard a tots els qubits, tenint al final un estat resultant $|s\rangle$:

$$|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$$

Aplicar $\approx \frac{\pi}{4}\sqrt{N}$ vegades l'operador de Grover G , que consisteix en el següent conjunt d'instruccions:

- 1: Aplicar l'*Oracle* U_ω
- 2: Aplicar portes Hadamard a tots els qubits
- 3: Aplicar el *Grover diffusion operator* $U_s = 2|s\rangle\langle s| - I$

¹Una cerca és quan es verifica si un element de la llista és l'element que se cerca.

²Per passos entenc que es refereix al nombre de vegades que es mira a l'oracle, és a dir, el nombre que de vegades que es verifica si s'ha trobat l'element que se cerca.

4: Aplicar una altre vegada les portes Hadamard

L'*oracle* és un tipus de funció que s'utilitza en els algoritmes de cerca, té la finalitat de reconèixer si un element és l'element que s'està cercant. En els algoritmes de cerca es construeixen al voltant de l'*oracle*, diversos algoritmes tenen diverses formes de consultar a l'*oracle*. A més a més, la quantitat de consultes a l'*oracle* serveixen per quantificar la complexitat de l'algoritme, a més consultes, més ineficient és l'algoritme.

Al veure el procediment de l'algoritme es pot veure que l'*oracle* es consulta aproximadament $\frac{\pi}{4}\sqrt{N}$, vegades, d'aquesta manera resultat en una complexitat aproximada de $O(\sqrt{N})$, on $N = 2^n$ per n qubits, com ja he esmentat anteriorment.

No entraré més en profunditat sobre aquest algoritme, perquè si no hauré d'introduir més conceptes de computació quàntica com ara la fase d'un estat, o començar a utilitzar notació més complicada que també hauré d'explicar. Em sap greu, perquè és un algoritme que funciona d'una manera bonica de veure. També em sembla el millor algoritme per poder explicar una de les millors característiques de la computació quàntica, tenir algoritmes que et descarten automàticament els estats dolents dintre d'una combinació d'estats, d'aquesta manera lliurant un estat concret desitjat d'entre la combinació. En el cas de l'algoritme de Grover aquest estat desitjat, és l'estat que està cercant l'*oracle*.

E.2 Algoritme de Shor

No explicaré aquest algoritme en profunditat perquè és molt complex³, no surt ni en els llibres de texts als quals tinc accés. Simplement, em limitaré a explicar quina és la seva utilitat i el compararé amb les seves alternatives clàssiques.

L'algoritme de Shor per la factorització en nombres primers [46], és probablement l'algoritme quàntic més famós i més rellevant que hi ha, degut a la

³Hauria d'introduir nous conceptes com la fase d'un qubit i com efectuar la transformada de Fourier inversa en un circuit quàntic, a més a més hauria d'explicar-lo en una notació bastant complexa. Però, es pot entendre com funciona sense cap problema veient l'entrada de Wikipedia sobre aquest algoritme.

gran diferencia en complexitat que té en comparació als seus algoritmes anàlegs clàssics, i a causa del gran impacte que tindria la seva implementació a gran escala. Aquest últim punt és el més interessant i cridaner, per tant, és el que desenvoluparé en major profunditat.

Actualment, totes les dades encriptades que s'envien a través d'internet són encriptades mitjançant la família de protocols RSA⁴. Aquests protocols són lleugerament complicats, no els explicaré, l'únic fet que hem de tenir en compte és que per desencryptar un missatge s'ha de trobar els factors primers d'un nombre n , és a dir, dos nombres primers p i q que multiplicats donin n . Amb aquests nombres es poden saber les claus públiques i privades per encriptar i desencryptar missatges. n seria la clau pública, un nombre que tothom pot conèixer i amb el qual es poden encriptar missatges. Mentre que a partir de p i q es pot trobar la clau privada que correspon a la clau pública, amb la qual es pot desencryptar un missatge encriptat amb n , per aquesta raó es mantenen els nombres p i q secrets. Es pot entendre la clau pública com un cadenat que només s'obre amb la clau privada. Cal mencionar que a cada clau privada correspon una clau pública, són paral·les úniques.

En encriptació es busca el que es diu *one way operations*, és a dir, una operació que sigui fàcil d'efectuar, però que la seva inversa requereixi molts recursos computacionals per donar-la a terme. L'operació $n = pq$ compleix aquest requisit, és fàcil multiplicar els nombres primers p i q i trobar n , però és molt difícil trobar els nombres p i q sabent n , i n sent un nombre de moltes xifres. Els millors algoritmes per donar a terme aquesta tasca requereixen moltíssim temps computacional en els ordinadors clàssics. Per aquesta raó el protocol RSA s'utilitza àmpliament, és molt segur perquè per saber la clau privada a partir de n , es requereix molt de temps. Si n és un nombre de 2048 bits, amb la tecnologia actual no és possible trobar els nombres primers p i q en un temps raonable. Dic raonable perquè es pot arribar a trobar, però es tardaria milers d'anys inclús amb els ordinadors més potents del planeta.

⁴RSA són les sigles dels creadors d'aquests protocols; Ron Rivest, Adi Shamir i Leonard Adleman, que en 1977 van publicar els resultats de la seva investigació [47].

Ara és quan l'algoritme de Shor juga la seva part, com ja he dit s'utilitza per a la factorització de nombres primers, i és extremadament eficient en comparació als seus anàlegs clàssics. En termes de complexitat, aquest algoritme pot factoritzar un nombre de N dígit en un temps polinomi de $O(\log N)$ ⁵. Mentre que el millor algoritme clàssic per factoritzar en nombres primers té una complexitat de $O(e^{c(\log N)^{\frac{1}{3}}(\log \log N)^{\frac{2}{3}}})$ per una constant c . És a dir, que clàssicament es pot factoritzar en un temps exponencial [46], o com a mínim en un temps sub-exponencial. Un algoritme que s'executa en temps sub-exponencial segueix sent més ineficient que un que s'executa en temps polinomi, però significativament més eficient que un que s'executa en temps exponencial. De totes maneres només cal tenir en compte que l'algoritme de Shor és molt més eficient que el millor algoritme clàssic que dona a terme la mateixa tasca.

S'estima que amb un ordinador quàntic prou avançat es podrien arribar a factoritzar nombres els quals tenen una mida que actualment utilitzem⁶, però amb la tecnologia actual aquesta fita és impossible. El record pel nombre més gran factoritzat per un ordinador quàntic en l'actualitat el posseeix un equip de la Universitat de Bristol al Regne Unit. En 2021 van aconseguir factoritzar 21 amb un ordinador quàntic que funciona a partir d'un sistema fotònic [48].

E.3 Ordinadors quàntics actuals

El només ser capaços de poder factoritzar 21 il·lustra lo nova que és la tecnologia que està al darrere dels ordinadors quàntics. És un camp que té pocs anys de vida, i en el qual és difícil fer grans avanços. Al moment només es pot utilitzar el millor algoritme que ofereix la computació quàntica per poder fer una tasca extremadament simple⁷.

Això és a causa de la petita quantitat de qubits dels quals disposen els ordinadors quàntics actuals i als errors que aquests donen a terme a l'hora d'aplicar

⁵Concretament la seva complexitat mesurada mitjançant la quantitat de portes quàntiques seria de $O((\log n)^2(\log \log n)(\log \log \log n))$, per factoritzar un nombre n amb una longitud de $\log n$ bits.

⁶D'uns 2048 o 1024 dígit per exemple.

⁷ $3 \times 7 = 21$

operacions. Quan un ordinador quàntic aplica una rotació en l'estat d'un qubit físic, aquest ho fa amb una certa imprecisió. El mateix passa a l'hora d'aplicar portes a dos qubits, com per exemple una CNOT. Els ordinadors quàntics actuals només són utilitzats per fer experiments, com provar nous algoritmes i valorar els mateixos ordinadors. Pràcticament, no existeixen situacions pràctiques en les quals els ordinadors quàntics actuals siguin més útils que els clàssics. Tanmateix, és una tecnologia molt prometedora, en la qual grans companyies com Google, IBM, Amazon estan invertint per investigar-la, igual que altres companyies més petites i nombrosos equips d'investigació al llarg del món. S'espera que un futur els ordinadors quàntics ens permetran dur a terme tasques que són impossibles de realitzar en ordinadors clàssics, sobretot en tenir en compte que s'espera que començarem a arribar a limitacions físiques si continuem millorant els processadors d'ordinadors actuals.

Capítol F

Codi

En l'apèndix actual presentaré el codi que he utilitzat al llarg del treball. Està organitzat segons el moment en el qual he referenciat el codi en el text. Si no es té coneixements preliminars en Python no espero que s'entengui el codi. Tanmateix, la gran majoria del codi està comentat. Aquesta secció existeix per mostrar la quantitat d'esforç que he ficat en fer aquest model, han sigut molts mesos de treball.

IMPORTANT: Si hi ha text en català dintre del codi (n'hi ha en forma de comentaris), no porta accents perquè els paquets que utilitzo per formatejar el codi d'aquesta manera dintre del document no els accepta. Però si es mira el codi en el [repositori del treball](#) es pot veure que sí que té accents. No em deixa posar ni accents, ni la ce trencada, ni la ele geminada. L'error diu que no són caràcters que estan en Unicode UTF-8, quan sí que estan allà, per fet que és un codi que suposadament està internacionalitzat per tots els llenguatges que es fan servir.

F.1 Part I

F.1 Capítol 3

F.1.0.1 Regressió lineal Codi per efectuar una regressió lineal a dades que es generen a l'atzar en el mateix arxiu, l'utilitzo per poder generar un gràfic per

il·lustrar un exemple de regressió lineal. Aquest tros de codi l'he tret de GitHub¹.

```

1  import numpy as np
2  from matplotlib import pyplot as plt
3  import matplotlib
4
5  font = {'family' : 'Helvetica',
6         'size'   : 18}
7
8  matplotlib.rc('font', **font)
9
10 # generate the data
11 np.random.seed(222)
12 X = np.random.normal(0,1, (200, 1))
13 w_target = np.random.normal(0,1, (1,1))
14 # data + white noise
15 y = X@w_target + np.random.normal(0, 1, (200,1))
16
17 # least squares
18 w_estimate = np.linalg.inv(X.T@X)@X.T@y
19 y_estimate = X@w_estimate
20
21 # plot the data
22 plt.figure(figsize=(15,10))
23 plt.scatter(X.flat, y_estimate.flat, label="Predicció")
24 plt.scatter(X.flat, y.flat, color='red', alpha=0.4, label="Dades")
25 plt.tight_layout()
26 plt.title("Regressió per diferencia de quadrats")
27 plt.legend()
28 plt.savefig("least_squares.png")
29 plt.show()

```

LISTING F.1: Regressió lineal

F.2 Part II

F.1 Capítol 6

F.1.0.1 Codi original per la xarxa neuronal clàssica Està extret del [repositori de GitHub de Micheal Nielsen](#), concretament del arxiu `network.py`.

¹Gist realitzat per l'usuari *jimimvp*: [enllaç](#)

```

1 """
2 network.py
3 ~~~~~
4 A module to implement the stochastic gradient descent learning
5 algorithm for a feedforward neural network. Gradients are calculated
6 using backpropagation. Note that I have focused on making the code
7 simple, easily readable, and easily modifiable. It is not optimized,
8 and omits many desirable features.
9 """
10
11 ##### Libraries
12 # Standard library
13 import random
14
15 # Third-party libraries
16 import numpy as np
17
18 class Network(object):
19
20     def __init__(self, sizes):
21         """The list 'sizes' contains the number of neurons in the
22             respective layers of the network. For example, if the list
23             was [2, 3, 1] then it would be a three-layer network, with the
24             first layer containing 2 neurons, the second layer 3 neurons,
25             and the third layer 1 neuron. The biases and weights for the
26             network are initialized randomly, using a Gaussian
27             distribution with mean 0, and variance 1. Note that the first
28             layer is assumed to be an input layer, and by convention we
29             won't set any biases for those neurons, since biases are only
30             ever used in computing the outputs from later layers."""
31         self.num_layers = len(sizes)
32         self.sizes = sizes
33         self.biases = [np.random.randn(y, 1) for y in sizes[1:]]
34         self.weights = [np.random.randn(y, x) for x, y in zip(sizes[:-1], sizes
35 [1:])]
36
37     def feedforward(self, a):
38         """Return the output of the network if 'a' is input."""
39         for b, w in zip(self.biases, self.weights):
40             a = sigmoid(np.dot(w, a)+b)
41         return a
42
43     def SGD(self, training_data, epochs, mini_batch_size, eta, test_data=None):
44         """Train the neural network using mini-batch stochastic
45             gradient descent. The 'training_data' is a list of tuples
46             '(x, y)' representing the training inputs and the desired
47             outputs. The other non-optional parameters are

```

```

47     self-explanatory. If 'test_data' is provided then the
48     network will be evaluated against the test data after each
49     epoch, and partial progress printed out. This is useful for
50     tracking progress, but slows things down substantially."""
51     if test_data: n_test = len(test_data)
52     n = len(training_data)
53     for j in xrange(epochs):
54         random.shuffle(training_data)
55         mini_batches = [training_data[k:k+mini_batch_size] for k in xrange(0, n
, mini_batch_size)]
56         for mini_batch in mini_batches:
57             self.update_mini_batch(mini_batch, eta)
58         if test_data:
59             print "Epoch {0}: {1} / {2}".format(j, self.evaluate(test_data),
n_test)
60         else:
61             print "Epoch {0} complete".format(j)
62
63     def update_mini_batch(self, mini_batch, eta):
64         """Update the network's weights and biases by applying
65         gradient descent using backpropagation to a single mini batch.
66         The 'mini_batch' is a list of tuples '(x, y)', and 'eta'
67         is the learning rate."""
68         nabla_b = [np.zeros(b.shape) for b in self.biases]
69         nabla_w = [np.zeros(w.shape) for w in self.weights]
70         for x, y in mini_batch:
71             delta_nabla_b, delta_nabla_w = self.backprop(x, y)
72             nabla_b = [nb+dnb for nb, dnb in zip(nabla_b, delta_nabla_b)]
73             nabla_w = [nw+dnw for nw, dnw in zip(nabla_w, delta_nabla_w)]
74             self.weights = [w-(eta/len(mini_batch))*nw for w, nw in zip(self.weights,
nabla_w)]
75             self.biases = [b-(eta/len(mini_batch))*nb for b, nb in zip(self.biases,
nabla_b)]
76
77     def backprop(self, x, y):
78         """Return a tuple '(nabla_b, nabla_w)' representing the
79         gradient for the cost function C_x. 'nabla_b' and
80         'nabla_w' are layer-by-layer lists of numpy arrays, similar
81         to 'self.biases' and 'self.weights'."""
82
83         nabla_b = [np.zeros(b.shape) for b in self.biases]
84         nabla_w = [np.zeros(w.shape) for w in self.weights]
85         # feedforward
86         activation = x
87         activations = [x] # list to store all the activations, layer by layer
88         zs = [] # list to store all the z vectors, layer by layer
89         for b, w in zip(self.biases, self.weights):

```

```

90         z = np.dot(w, activation)+b
91         zs.append(z)
92         activation = sigmoid(z)
93         activations.append(activation)
94
95     # backward pass
96     delta = self.cost_derivative(activations[-1], y) * sigmoid_prime(zs[-1])
97     nabla_b[-1] = delta
98     nabla_w[-1] = np.dot(delta, activations[-2].transpose())
99     # Note that the variable l in the loop below is used a little
100    # differently to the notation in Chapter 2 of the book. Here,
101    # l = 1 means the last layer of neurons, l = 2 is the
102    # second-last layer, and so on. It's a renumbering of the
103    # scheme in the book, used here to take advantage of the fact
104    # that Python can use negative indices in lists.
105    for l in xrange(2, self.num_layers):
106        z = zs[-l]
107        sp = sigmoid_prime(z)
108        delta = np.dot(self.weights[-l+1].transpose(), delta) * sp
109        nabla_b[-l] = delta
110        nabla_w[-l] = np.dot(delta, activations[-l-1].transpose())
111    return (nabla_b, nabla_w)
112
113    def evaluate(self, test_data):
114        """Return the number of test inputs for which the neural
115        network outputs the correct result. Note that the neural
116        network's output is assumed to be the index of whichever
117        neuron in the final layer has the highest activation."""
118        test_results = [(np.argmax(self.feedforward(x)), y) for (x, y) in test_data
119    ]
120
121        return sum(int(x == y) for (x, y) in test_results)
122
123    def cost_derivative(self, output_activations, y):
124        """Return the vector of partial derivatives \partial C_x /
125        \partial a for the output activations."""
126        return (output_activations - y)
127
128    ##### Miscellaneous functions
129    def sigmoid(z):
130        """The sigmoid function."""
131        return 1.0/(1.0+np.exp(-z))
132
133    def sigmoid_prime(z):
134        """Derivative of the sigmoid function."""
135        return sigmoid(z)*(1-sigmoid(z))

```

LISTING F.2: Codi original per la xarxa neuronal clàssica

F.1.0.2 Codi final per el discriminador Aquest codi es pot trobar al [repositori del treball](#) en l'arxiu `discriminator.py`.

```

1  """DISCRIMINATOR"""
2  import json
3  from typing import Dict, List
4
5  import numpy as np
6
7  from quantumGAN.functions import BCE_derivative, minimax_derivative_fake,
    minimax_derivative_real, sigmoid, sigmoid_prime
8
9
10 def load(filename):
11     f = open(filename, "r")
12     data = json.load(f)
13     f.close()
14     # cost = getattr(sys.modules[__name__], data["cost"])
15     net = ClassicalDiscriminator_that_works(data["sizes"], data["loss"])
16     net.weights = [np.array(w) for w in data["weights"]]
17     net.biases = [np.array(b) for b in data["biases"]]
18     return net
19
20
21 class ClassicalDiscriminator:
22
23     def __init__(self,
24                 sizes: List[int],
25                 type_loss: str) -> None:
26
27         self.num_layers = len(sizes)
28         self.sizes = sizes
29         self.type_loss = type_loss
30         self.data_loss = {"real": [], "fake": []}
31         self.ret: Dict[str, any] = {"loss": [],
32                                     "label real": [],
33                                     "label fake": [],
34                                     "label fake time": [],
35                                     "label real time": []}
36         self.biases = [np.random.randn(y, ) for y in sizes[1:]]
37         self.weights = [np.random.randn(y, x) for x, y in zip(sizes[:-1], sizes
38                                                                [1:])]
39
40     def feedforward(self, a):
41         """Return the output of the network if 'a' is input."""
42         for b, w in zip(self.biases, self.weights):
43             a = sigmoid(np.dot(w, a) + b)

```

```

43     return a
44
45     def predict(self, x):
46         # feedforward
47         activation = x
48         zs = [] # list to store all the z vectors, layer by layer
49         for b, w in zip(self.biases, self.weights):
50             z = np.dot(w, activation) + b
51             zs.append(z)
52             activation = sigmoid(z)
53         return activation
54
55     def evaluate(self, test_data):
56         test_results = [(np.argmax(self.feedforward(x)), y)
57             for (x, y) in test_data]
58         return sum(int(x == y) for (x, y) in test_results)
59
60
61     def forwardprop(self, x: np.ndarray):
62         activation = x
63         activations = [x] # list to store all the activations, layer by layer
64         zs = [] # list to store all the z vectors, layer by layer
65         for b, w in zip(self.biases, self.weights):
66             z = np.dot(w, activation) + b
67             zs.append(z)
68             activation = sigmoid(z)
69             activations.append(activation)
70         return activation, activations, zs
71
72     def backprop_bce(self, image, label):
73         """Return a tuple '(nabla_b, nabla_w)' representing the
74         gradient for the cost function C_x. 'nabla_b' and
75         'nabla_w' are layer-by-layer lists of numpy arrays, similar
76         to 'self.biases' and 'self.weights'."""
77         nabla_b = [np.zeros(b.shape) for b in self.biases]
78         nabla_w = [np.zeros(w.shape) for w in self.weights]
79
80         # feedforward and back error calculation depending on type of image
81         activation, activations, zs = self.forwardprop(image)
82         delta = BCE_derivative(activations[-1], label) * sigmoid_prime(zs[-1])
83
84         # backward pass
85         nabla_b[-1] = delta
86         nabla_w[-1] = np.dot(delta, activations[-2].reshape(1, activations[-2].
87             shape[0]))
88         for l in range(2, self.num_layers):

```



```

89         z = zs[-1]
90         delta = np.dot(self.weights[-1 + 1].transpose(), delta) * sigmoid_prime
(z)
91         nabla_b[-1] = delta
92         nabla_w[-1] = np.dot(delta.reshape(delta.shape[0], 1), activations[-1 -
1].reshape(1, activations[-1 - 1].shape[0]))
93         return nabla_b, nabla_w, activations[-1]
94
95     def backprop_minimax(self, real_image, fake_image, is_real):
96         """Return a tuple '(nabla_b, nabla_w)' representing the
97         gradient for the cost function C_x. 'nabla_b' and
98         'nabla_w' are layer-by-layer lists of numpy arrays, similar
99         to 'self.biases' and 'self.weights'."""
100         nabla_b = [np.zeros(b.shape) for b in self.biases]
101         nabla_w = [np.zeros(w.shape) for w in self.weights]
102
103         # feedforward and back error calculation depending on type of image
104         activation_real, activations_real, zs_real = self.forwardprop(real_image)
105         activation_fake, activations_fake, zs_fake = self.forwardprop(fake_image)
106
107         if is_real:
108             delta = minimax_derivative_real(activations_real[-1]) * sigmoid_prime(
zs_real[-1])
109             activations, zs = activations_real, zs_real
110         else:
111             delta = minimax_derivative_fake(activations_fake[-1]) * sigmoid_prime(
zs_fake[-1])
112             activations, zs = activations_fake, zs_fake
113
114         # backward pass
115         nabla_b[-1] = delta
116         nabla_w[-1] = np.dot(delta, activations[-2].reshape(1, activations[-2].
shape[0]))
117
118         for l in range(2, self.num_layers):
119             z = zs[-1]
120             delta = np.dot(self.weights[-l + 1].transpose(), delta) * sigmoid_prime
(z)
121             nabla_b[-1] = delta
122             nabla_w[-1] = np.dot(delta.reshape(delta.shape[0], 1),
activations[-l - 1].reshape(1, activations[-l - 1].shape[0]))
123             return nabla_b, nabla_w, activations[-1]
124
125
126     def train_mini_batch(self, mini_batch, learning_rate):
127         global label_real, label_fake
128         nabla_b = [np.zeros(b.shape) for b in self.biases]
129         nabla_w = [np.zeros(w.shape) for w in self.weights]

```

```

130
131     if self.type_loss == "binary cross entropy":
132         for real_image, fake_image in mini_batch:
133             delta_nabla_b, delta_nabla_w, label_real = self.backprop_bce(
134                 real_image, np.array([1.]))
135             nabla_b = [nb + dnb for nb, dnb in zip(nabla_b, delta_nabla_b)]
136             nabla_w = [nw + dnw for nw, dnw in zip(nabla_w, delta_nabla_w)]
137
138             delta_nabla_b, delta_nabla_w, label_fake = self.backprop_bce(
139                 fake_image, np.array([0.]))
140             nabla_b = [nb + dnb for nb, dnb in zip(nabla_b, delta_nabla_b)]
141             nabla_w = [nw + dnw for nw, dnw in zip(nabla_w, delta_nabla_w)]
142
143     elif self.type_loss == "minimax":
144         for real_image, fake_image in mini_batch:
145             delta_nabla_b, delta_nabla_w, label_real = self.backprop_minimax(
146                 real_image, fake_image, True)
147             nabla_b = [nb + dnb for nb, dnb in zip(nabla_b, delta_nabla_b)]
148             nabla_w = [nw + dnw for nw, dnw in zip(nabla_w, delta_nabla_w)]
149
150             delta_nabla_b, delta_nabla_w, label_fake = self.backprop_minimax(
151                 real_image, fake_image, False)
152             nabla_b = [nb + dnb for nb, dnb in zip(nabla_b, delta_nabla_b)]
153             nabla_w = [nw + dnw for nw, dnw in zip(nabla_w, delta_nabla_w)]
154
155     else:
156         raise Exception("type of loss function not valid")
157
158     # gradient descent
159     # nabla_w and nabla_b are multiplied by the learning rate
160     # and taken the mean of (dividing by the mini batch size)
161     self.weights = [w - (learning_rate / len(mini_batch)) * nw
162                     for w, nw in zip(self.weights, nabla_w)]
163     self.biases = [b - (learning_rate / len(mini_batch)) * nb
164                    for b, nb in zip(self.biases, nabla_b)]

```

LISTING F.3: Codi final pel discriminador

F.1.0.3 Codi per el generador Aquest codi es pot trobar al [repositori del treball](#) en l'arxiu `generador.py`.

```

1  """QUANTUM GENERATOR"""
2
3  from typing import Any, Dict, Optional, cast
4
5  import numpy as np
6  import qiskit

```

```

7 from qiskit import ClassicalRegister, QuantumRegister
8 from qiskit.circuit import QuantumCircuit
9 from qiskit.circuit.library import TwoLocal
10 from qiskit.providers.aer import AerSimulator
11
12 from quantumGAN.functions import create_entangler_map, create_real_keys,
    minimax_generator
13
14
15 class QuantumGenerator:
16
17     def __init__(
18         self,
19         shots: int,
20         num_qubits: int,
21         num_qubits_ancilla: int,
22         generator_circuit: Optional[QuantumCircuit] = None,
23         snapshot_dir: Optional[str] = None
24     ) -> None:
25
26         super().__init__()
27         # passar els arguments de la classe a metodes en de classes
28         # d'aquesta manera son accessibles per qualsevol funcio dintre de la classe
29         self.num_qubits_total = num_qubits
30         self.num_qubits_ancilla = num_qubits_ancilla
31         self.generator_circuit = generator_circuit
32         self.snapshot_dir = snapshot_dir
33         self.shots = shots
34         self.discriminator = None
35         self.ret: Dict[str, Any] = {"loss": []}
36         self.simulator = AerSimulator()
37
38     def init_parameters(self):
39         """Inicia els parametres inicial i crea el circuit al qual se li posen els
    parametres"""
40         # iniciacia dels parametres inicials i dels circuits al qual posar aquests
    parametres
41         self.generator_circuit = self.construct_circuit(latent_space_noise=None,
    to_measure=False)
42         # s'ha de crear primer el circuit porque d'aquesta manera es pot saber el
    nombre de parametres que es necessiten
43         self.parameter_values = np.random.normal(np.pi / 2, .1, self.
    generator_circuit.num_parameters)
44
45     def construct_circuit(self,
46                           latent_space_noise,
47                           to_measure: bool):

```

```

48     """Crea el circuit quantic des de zero a partir de diversos registres de
        qubits"""
49     if self.num_qubits_ancilla is 0:
50         qr = QuantumRegister(self.num_qubits_total, 'q')
51         cr = ClassicalRegister(self.num_qubits_total, 'c')
52         qc = QuantumCircuit(qr, cr)
53     else:
54         qr = QuantumRegister(self.num_qubits_total - self.num_qubits_ancilla,
        q')
55         anc = QuantumRegister(self.num_qubits_ancilla, 'ancilla')
56         cr = ClassicalRegister(self.num_qubits_total - self.num_qubits_ancilla,
        'c')
57         qc = QuantumCircuit(anc, qr, cr)
58
59     # creacia de la part del circuit que conte la implantacio dels parametres d
        'input. En cas que no es donin aquests parametres es creen automaticament
60     if latent_space_noise is None:
61         randoms = np.random.normal(-np.pi * .01, np.pi * .01, self.
        num_qubits_total)
62         init_dist = qiskit.QuantumCircuit(self.num_qubits_total)
63
64         # es col.loca una porta RY en cada qubits i amb un parametre diferent
        cadascuna
65         for index in range(self.num_qubits_total):
66             init_dist.ry(randoms[index], index)
67     else:
68         init_dist = qiskit.QuantumCircuit(self.num_qubits_total)
69
70         for index in range(self.num_qubits_total):
71             init_dist.ry(latent_space_noise[index], index)
72
73     # la funcio create_entangler_map crea les parelles de qubits a les qual col.
        locar les portes CZ
74     # en funcio del nombre de qubits
75     if self.num_qubits_ancilla is 0:
76         entangler_map = create_entangler_map(self.num_qubits_total)
77     else:
78         entangler_map = create_entangler_map(self.num_qubits_total - self.
        num_qubits_ancilla)
79
80     # creacio final dels circuits a partir una funcio integrada a Qiskit que va
        repetint les operacions
81     # que se li especifiquen
82     ansatz = TwoLocal(int(self.num_qubits_total), 'ry', 'cz', entanglement=
        entangler_map, reps=1, insert_barriers=True)
83

```



```

121             shots=self.shots,
122             optimization_level=0).result()
123
124     counts = result_ideal.get_counts()
125
126     try:
127         # creacio de l'imatge resultant
128         pixels = np.array([counts[index] for index in list(real_keys_list)])
129
130     except KeyError:
131         # aquesta excepcio sorgeix quan en el diccionari dels resultats no
132         # estan totes les keys pel fet que qiskit, en cas de que no hi hagi un mesurament
133         # en una base, no inclou aquesta base en el diccionari
134         keys = counts.keys()
135         missing_keys = real_keys_set.difference(keys)
136         # s'utilitza un la resta entre dos sets per poder veure quina es la key
137         # que falta en el diccionari
138         for key_missing in missing_keys:
139             counts[key_missing] = 0
140
141         # una vegada es troba les keys que faltaven es crea l'imatge resultant
142         pixels = np.array([counts[index] for index in list(real_keys_list)])
143
144     pixels = pixels / self.shots
145     return pixels
146
147 def get_output_pixels(
148     self,
149     latent_space_noise,
150     params: Optional[np.ndarray] = None
151 ):
152     """Retorna un output del generador quan se li dona un estat d'input i
153     opcionalment uns parametres en especific. Cada pixel es la probabilitat de que
154     un qubits resulti en l'estat ket_0, per tant, els valors cada pixel (que son
155     independents entre si) es troba en l'interval (0, 1) """
156
157     qc = QuantumCircuit(self.num_qubits_total)
158
159     init_dist = qiskit.QuantumCircuit(self.num_qubits_total)
160     assert latent_space_noise.shape[0] == self.num_qubits_total
161
162     for num_qubit in range(self.num_qubits_total):
163         init_dist.ry(latent_space_noise[num_qubit], num_qubit)
164
165     if params is None:
166         params = cast(np.ndarray, self.parameter_values)
167
168     qc.assign_parameters(params)

```

```

162     # comptes de simular els valors que donara cada qubits, es simula l'estat
    final del circuit i d'aquest s'extreuen els valors que es mesuraran per a cada
    qubit
163     state_vector = qiskit.quantum_info.Statevector.from_instruction(qc)
164     pixels = []
165     for qubit in range(self.num_qubits_total):
166         # per treure la probabilitat s'utilitza una funcio implementada en
    Qiskit
167         pixels.append(state_vector.proBABILITIES([qubit])[0])
168
169     # creacio de l'imatge resultada a partir de la llista que conte el valor
    per a cada pixel
170     generated_samples = np.array(pixels)
171     generated_samples.flatten()
172
173     return generated_samples
174
175 def train_mini_batch(self, mini_batch, learning_rate):
176     """Optimitzacio del generador per una batch d'imatges. Retorna una batch de
    les imatges generades amb unes imatges reals que poder donar com a input al
    generador. """
177     nablA_theta = np.zeros_like(self.parameter_values.shape)
178     new_images = []
179
180     for _, noise in mini_batch:
181         for index, _ in enumerate(self.parameter_values):
182             perturbation_vector = np.zeros_like(self.parameter_values)
183             perturbation_vector[index] = 1
184
185             # Creacio dels parametres per generar les dues imatges
186             pos_params = self.parameter_values + (np.pi / 4) *
    perturbation_vector
187             neg_params = self.parameter_values - (np.pi / 4) *
    perturbation_vector
188
189             pos_result = self.get_output(noise, parameters=pos_params) #
    Generacio imatges
190             neg_result = self.get_output(noise, parameters=neg_params)
191
192             pos_result = self.discriminator.predict(pos_result) # Assignacio
    de les etiquetes
193             neg_result = self.discriminator.predict(neg_result)
194
195             # Diferencia entre les avaluacions de la funcio de perdua entre les
    dues etiquetes
196             gradient = minimax_generator(pos_result) - minimax_generator(
    neg_result)

```

```

197         nabla_theta[index] += gradient # Afegir derivada d'un parametre al
      gradient
198         new_images.append(self.get_output(noise))
199
200         for index, _ in enumerate(self.parameter_values):
201             # Actualitzacio dels parametres a traves del gradient
202             self.parameter_values[index] += (learning_rate / len(mini_batch)) *
nabla_theta[index]
203
204         # Creacio de la batch d'imatges a retornar
205         mini_batch = [(datapoint[0], fake_image) for datapoint, fake_image in zip(
mini_batch, new_images)]
206         return mini_batch

```

LISTING F.4: Codi final pel generador

F.1.0.4 Definició del model Aquest codi es pot trobar al [repositori del treball](#) en l'arxiu `qgan.py`.

```

1  import glob
2  import os
3  import json
4  import random
5  from datetime import datetime
6  from typing import List
7
8  import imageio
9  import matplotlib.pyplot as plt
10 import numpy as np
11
12 from quantumGAN.discriminator import ClassicalDiscriminator
13 from quantumGAN.functions import fechet_distance, minimax, images_to_distribution,
    images_to_scatter
14 from quantumGAN.quantum_generator import QuantumGenerator
15
16
17 class Quantum_GAN:
18
19     def __init__(self,
20                 generator: QuantumGenerator,
21                 discriminator: ClassicalDiscriminator
22                 ):
23
24         self.last_batch = None
25         now = datetime.now()
26         init_time = now.strftime("%d_%m_%Y_%H_%M_%S")

```



```

27     self.path = "data/run{}".format(init_time)
28     self.path_images = self.path + "/images"
29     self.filename = "run.txt"
30
31     if not os.path.exists(self.path):
32         os.makedirs(self.path)
33
34     if not os.path.exists(self.path_images):
35         os.makedirs(self.path_images)
36
37     with open(os.path.join(self.path, self.filename), "w") as file:
38         file.write("RUN {} \n".format(init_time))
39         file.close()
40
41     self.generator = generator
42     self.discriminator = discriminator
43     self.loss_series, self.label_real_series, self.label_fake_series, self.
44     FD_score = [], [], [], []
45
46     self.generator.init_parameters()
47     self.example_g_circuit = self.generator.construct_circuit(
48         latent_space_noise=None,
49         to_measure=False)
50     self.generator.set_discriminator(self.discriminator)
51
52     def __repr__(self):
53         return "Discriminator Architecture: {} \n Generator Example Circuit: \n{}"
54         \
55         .format(self.discriminator.sizes, self.example_g_circuit)
56
57     def store_info(self, epoch, loss, real_label, fake_label):
58         file = open(os.path.join(self.path, self.filename), "a")
59         file.write("{} epoch LOSS {} Parameters {} REAL {} FAKE {} \n"
60             .format(epoch,
61                 loss,
62                 self.generator.parameter_values,
63                 real_label,
64                 fake_label))
65         file.close()
66
67     def plot(self):
68         # save data for plotting
69         fake_images, real_images = [], []
70         for image_batch in self.last_batch:
71             fake_images.append(image_batch[1])
72             real_images.append(image_batch[0])

```

```

71     keys, average_result = images_to_distribution(fake_images)
72     print(average_result)
73     if self.generator.num_qubits_ancilla != 0:
74         plt.title(f"Distribucio d'una imatge generada \n(ancilla, epoch={self.
num_epochs})")
75     else:
76         plt.title(f"Distribucio d'una imatge generada \n(epoch={self.num_epochs
})")
77     plt.ylim(0., 1.)
78     plt.bar(keys, average_result)
79     plt.savefig(self.path + "/fake_distribution.png")
80     plt.clf()
81
82     keys_real, average_result_real = images_to_distribution(real_images)
83     print(average_result_real)
84     if self.generator.num_qubits_ancilla != 0:
85         plt.title(f"Distribucio d'una imatge real \n(ancilla, epoch={self.
num_epochs})")
86     else:
87         plt.title(f"Distribucio d'una imatge real \n(epoch={self.num_epochs})")
88     plt.ylim(0., 1.)
89     plt.bar(keys_real, average_result_real)
90     plt.savefig(self.path + "/real_distribution.png")
91     plt.clf()
92
93     y_axis, x_axis = images_to_scatter(fake_images)
94     y_axis_real, x_axis_real = images_to_scatter(real_images)
95     if self.generator.num_qubits_ancilla != 0:
96         plt.title(f"Comparacio entre les imatges reals con les imatges falses \
n(ancilla, epoch={self.num_epochs})")
97     else:
98         plt.title(f"Comparacio entre les imatges reals con les imatges falses \
n(epoch={self.num_epochs})")
99     plt.ylim(0. - .1, 1. + .1)
100    plt.scatter(y_axis, x_axis, label='Valors per les imatges falses',
101                color='indigo',
102                linewidth=.1,
103                alpha=.2)
104    plt.scatter(y_axis_real, x_axis_real, label='Valors per les imatges reals',
105                color='limegreen',
106                linewidth=.1,
107                alpha=.2)
108    plt.savefig(self.path + "/scatter_plot.png")
109    plt.clf()
110
111    t_steps = np.arange(self.num_epochs)
112    plt.figure(figsize=(6, 5))

```

```

113         if self.generator.num_qubits_ancilla != 0:
114             plt.title(f"Progres de la funcio de perdua \n(ancilla, epoch={self.
num_epochs})")
115         else:
116             plt.title(f"Progres de la funcio de perdua \n(epoch={self.num_epochs})"
)
117         plt.plot(t_steps, self.loss_series, label='Funcio de perdua del
discriminador', color='rebeccapurple', linewidth=2)
118         plt.grid()
119         plt.legend(loc='best')
120         plt.xlabel('Iteracions')
121         plt.ylabel('Funcio de perdua')
122         plt.savefig(self.path + "/loss_plot.png")
123         plt.clf()
124
125         t_steps = np.arange(self.num_epochs)
126         plt.figure(figsize=(6, 5))
127         if self.generator.num_qubits_ancilla != 0:
128             plt.title(f"Progres de les etiquetes \n(ancilla, epoch={self.num_epochs
})")
129         else:
130             plt.title(f"Progres de les etiquetes \n(epoch={self.num_epochs})")
131         plt.scatter(t_steps, self.label_real_series, label='Etiquetes per les
imatges reals',
132                     color='mediumvioletred',
133                     linewidth=.1)
134         plt.scatter(t_steps, self.label_fake_series, label='Etiquetes per les
imatges generades',
135                     color='rebeccapurple',
136                     linewidth=.1)
137         plt.grid()
138         plt.ylim(0. - .1, 1. + .1)
139         plt.legend(loc='best')
140         plt.xlabel('Iteracions')
141         plt.ylabel('Valor de les etiquetes')
142         plt.savefig(self.path + "/labels_plot.png")
143         plt.clf()
144
145         plt.figure(figsize=(6, 5))
146         if self.generator.num_qubits_ancilla != 0:
147             plt.title(f"Puntuacio de a partir de la distancia de Frechet \n(ancilla
, epoch={self.num_epochs})")
148         else:
149             plt.title(f"Puntuacio de a partir de la distancia de Frechet \n(epoch={
self.num_epochs})")
150         plt.plot(t_steps, self.FD_score, label='Valor de la puntuacio de Frechet',
color='rebeccapurple', linewidth=2)

```

```

151     plt.grid()
152     plt.legend(loc='best')
153     plt.ylim(0., .28)
154     plt.xlabel('Iteracions')
155     plt.ylabel('Valor de la puntuacio')
156     plt.savefig(self.path + "/FD_score.png")
157     plt.clf()
158
159     def train(self,
160               num_epochs: int,
161               training_data: List,
162               batch_size: int,
163               generator_learning_rate: float,
164               discriminator_learning_rate: float,
165               is_save_images: bool):
166
167         self.num_epochs = num_epochs
168         self.training_data = training_data
169         self.batch_size = batch_size
170         self.batch_size = batch_size
171         self.generator_lr = generator_learning_rate
172         self.discriminator_lr = discriminator_learning_rate
173         self.is_save_images = is_save_images
174
175         noise = self.training_data[0][1]
176         time_init = datetime.now()
177         for o in range(self.num_epochs):
178             mini_batches = create_mini_batches(self.training_data, self.batch_size)
179             output_fake = self.generator.get_output(latent_space_noise=mini_batches
180 [0][0][1], parameters=None)
181
182             for mini_batch in mini_batches:
183                 self.last_batch = self.generator.train_mini_batch(mini_batch, self.
184 generator_lr)
185                 self.discriminator.train_mini_batch(self.last_batch, self.
186 discriminator_lr)
187
188             output_real = mini_batches[0][0][0]
189             if is_save_images:
190                 self.save_images(self.generator.get_output(latent_space_noise=noise
191 , parameters=None), o)
192
193             self.FD_score.append(fechet_distance(output_real, output_fake))
194             label_real, label_fake = self.discriminator.predict(output_real), self.
195 discriminator.predict(output_fake)
196             loss_final = 1 / 2 * (minimax(label_real, label_fake) + minimax(
197 label_real, label_fake))

```

```

192         self.loss_series.append(loss_final)
193         self.label_real_series.append(label_real)
194         self.label_fake_series.append(label_fake)
195
196
197         print("Epoch {}: Loss: {}".format(o, loss_final), output_real,
output_fake)
198         print(label_real[-1], label_fake[-1])
199         self.store_info(o, loss_final, label_real, label_fake)
200
201         time_now = datetime.now()
202         print((time_now - time_init).total_seconds(), "seconds")
203
204     def save_images(self, image, epoch):
205         image_shape = int(image.shape[0] / 2)
206         image = image.reshape(image_shape, image_shape)
207
208         plt.imshow(image, cmap='gray', vmax=1., vmin=0.)
209         plt.axis('off')
210         plt.savefig(self.path_images + '/image_at_epoch_{:04d}.png'.format(epoch))
211         plt.clf()
212
213     def create_gif(self):
214         anim_file = self.path + '/dcgan.gif'
215
216         with imageio.get_writer(anim_file, mode='I') as writer:
217             filenames = glob.glob(self.path_images + '/image*.png')
218             filenames = sorted(filenames)
219
220             for filename in filenames:
221                 image = imageio.imread(filename)
222                 writer.append_data(image)
223
224             image = imageio.imread(filename)
225             writer.append_data(image)
226
227     def save(self):
228         """Save the neural network to the file 'filename'."""
229         data = {"batch_size": self.batch_size,
230               "D_sizes": self.discriminator.sizes,
231               "D_weights": [w.tolist() for w in self.discriminator.weights],
232               "D_biases": [b.tolist() for b in self.discriminator.biases],
233               "D_loss": self.discriminator.type_loss,
234               "Q_parameters": [theta for theta in self.generator.parameter_values
],
235               "Q_shots": self.generator.shots,
236               "Q_num_qubits": self.generator.num_qubits_total,

```

```

237         "Q_num_qubits_ancilla": self.generator.num_qubits_ancilla,
238         "real_labels": self.label_real_series,
239         "fake_labels": self.label_fake_series,
240         "loss_series": self.loss_series
241     }
242     f = open(os.path.join(self.path, "data.txt"), "a")
243     json.dump(data, f)
244     f.close()
245
246
247     def create_mini_batches(training_data, mini_batch_size):
248         n = len(training_data)
249         random.shuffle(training_data)
250         mini_batches = [
251             training_data[k:k + mini_batch_size]
252             for k in range(0, n, mini_batch_size)]
253         return [mini_batches[0]]
254
255
256     def load_gan(filename):
257         f = open(filename, "r")
258         data = json.load(f)
259         f.close()
260         discriminator = ClassicalDiscriminator(data["D_sizes"], data["D_loss"])
261
262         generator = QuantumGenerator(num_qubits=data["Q_num_qubits"],
263                                     generator_circuit=None,
264                                     num_qubits_ancilla=data["Q_num_qubits_ancilla"]
265                                     ],
266                                     shots=data["Q_shots"])
267
268         quantum_gan = Quantum_GAN(generator, discriminator)
269
270         quantum_gan.discriminator.weights = [np.array(w) for w in data["D_weights"]
271         ]
272         quantum_gan.discriminator.biases = [np.array(b) for b in data["D_biases"]]
273         quantum_gan.generator.parameter_values = np.array(data["Q_parameters"])
274
275         return quantum_gan, data["batch_size"]

```

LISTING F.5: Codi per la definició del model

F.1.0.5 Execució del model Aquest codi es pot trobar al [repositori del treball](#) en l'arxiu `main.py`.

```

1 import numpy as np
2
3 from quantumGAN.discriminator import ClassicalDiscriminator
4 from quantumGAN.qgan import Quantum_GAN
5 from quantumGAN.quantum_generator import QuantumGenerator
6
7 num_qubits: int = 3
8
9 # Set number of training epochs
10 num_epochs = 150
11 # Batch size
12 batch_size = 10
13
14 train_data = []
15 for _ in range(800):
16     x2 = np.random.uniform(.55, .46, (2,))
17     fake_datapoint = np.random.uniform(-np.pi * .01, np.pi * .01, (num_qubits,))
18     real_datapoint = np.array([x2[0], 0, x2[0], 0])
19     train_data.append((real_datapoint, fake_datapoint))
20
21 discriminator = ClassicalDiscriminator(sizes=[4, 16, 8, 1],
22                                       type_loss="minimax")
23 generator = QuantumGenerator(num_qubits=num_qubits,
24                              generator_circuit=None,
25                              num_qubits_ancilla=1,
26                              shots=4096)
27
28 quantum_gan = Quantum_GAN(generator, discriminator)
29 print(quantum_gan)
30 print(num_epochs)
31 quantum_gan.generator.get_output(fake_datapoint[0], None)
32 quantum_gan.train(num_epochs, train_data, batch_size, .1, .1, True)
33
34 quantum_gan.plot()
35 quantum_gan.create_gif()
36 quantum_gan.save()

```

LISTING F.6: Codi final pel generador

F.1.0.6 Funcions extres Hi han funcions en el codi que utilitzo en diversos arxius, aquestes les defineixo en l'arxiu `functions.py`, que es pot trobar al [repositori del treball](#). En aquest arxiu també hi ha una funció que dona a terme una traça parcial a una matriu donada, malgrat que no la he arribat a utilitzar.

```

1 import itertools

```

```

2 import math
3
4 import numpy as np
5 from matplotlib import pyplot as plt
6
7
8 # DATA PROCESSING
9 from scipy import linalg
10
11
12 def save_images_color(image, epoch):
13     plt.imshow(image.reshape(int(image.shape[0] / 3), 1, 3))
14     plt.axis('off')
15     plt.savefig('images/image_at_epoch_{:04d}.png'.format(epoch))
16
17
18 def create_real_keys(num_qubits):
19     lst = [[str(a) for a in i] for i in itertools.product([0, 1], repeat=num_qubits)]
20     new_lst = []
21     for element in lst:
22         word = str()
23         for number in element:
24             word = word + number
25         new_lst.append(word)
26     return set(new_lst), new_lst
27
28
29 def create_entangler_map(num_qubits: int):
30     lst = [list(i) for i in itertools.combinations(range(num_qubits), 2)]
31     index = 0
32     entangler_map = []
33     for i in reversed(range(num_qubits)):
34         try:
35             entangler_map.append(lst[index])
36             index += i
37         except IndexError:
38             return entangler_map
39
40
41 def images_to_distribution(batch_image):
42     num_images = len(batch_image)
43     sum_result = 0
44     for image in batch_image:
45         sum_result += image
46     average_result = sum_result / num_images
47     keys = create_real_keys(int(math.sqrt(batch_image[0].shape[0]))) [1]

```



```

48     return keys, average_result
49
50
51 def images_to_scatter(batch_image):
52     keys = create_real_keys(int(math.sqrt(batch_image[0].shape[0]))) [1]
53     x_axis = []
54     y_axis = []
55
56     for image in batch_image:
57         pixel_count = 0
58         for pixel in image:
59             x_axis.append(pixel)
60             y_axis.append(keys[pixel_count])
61             pixel_count += 1
62
63     return y_axis, x_axis
64
65 def fechet_distance(image1: np.array,
66                     image2: np.array):
67     assert image1.shape == image2.shape
68     y = np.arange(0, image1.flatten().shape[0])
69
70     matrix_a_cov = np.cov(np.stack((y, image1.flatten())), axis=0)
71     matrix_b_cov = np.cov(np.stack((y, image2.flatten())), axis=0)
72
73     to_trace = matrix_a_cov + matrix_b_cov - 2*(linalg.fractional_matrix_power(np.
74     dot(matrix_a_cov, matrix_b_cov), .5))
75     return np.abs(image1.mean() - image2.mean())**2 + np.trace(to_trace)
76
77 # ACTIVATION FUNCTIONS
78
79 def sigmoid(z):
80     """The sigmoid function."""
81     return 1.0 / (1.0 + np.exp(-z))
82
83
84 def sigmoid_prime(z):
85     """Derivative of the sigmoid function."""
86     return sigmoid(z) * (1 - sigmoid(z))
87
88
89 def relu(z):
90     return np.maximum(0, z)
91
92
93 def relu_prime(z):

```

```

94     z[z <= 0] = 0
95     z[z > 0] = 1
96     return z
97
98
99 # LOSSES
100 def MSE_derivative(prediction, y):
101     return 2 * (y - prediction)
102
103
104 def MSE(prediction, y):
105     return (y - prediction) ** 2
106
107
108 def BCE_derivative(prediction, target):
109     # return prediction - target
110     return -target / prediction + (1 - target) / (1 - prediction)
111
112
113 def BCE(predictions: np.ndarray, targets: np.ndarray) -> np.ndarray:
114     return targets * np.log(predictions) + (1 - targets) * np.log(1 - predictions).
115     mean()
116
117
118 def minimax_derivative_real(real_prediction):
119     real_prediction = np.array(real_prediction)
120     return np.nan_to_num((-1) * (1 / real_prediction))
121
122
123 def minimax_derivative_fake(fake_prediction):
124     fake_prediction = np.array(fake_prediction)
125     return np.nan_to_num(1 / (1 - fake_prediction))
126
127
128 def minimax(real_prediction, fake_prediction):
129     return np.nan_to_num(np.log(real_prediction) + np.log(1 - fake_prediction))
130
131
132 def minimax_generator(prediction_fake):
133     return (-1) * np.log(1 - prediction_fake)
134
135 # QUANTUM FUNCTIONS
136
137 class Partial_Trace:
138     def __init__(self, state: np.array, qubits_out: int, side: str):
139

```

```

140     self.state = state
141     self.qubits_out = qubits_out
142     self.side = side
143
144     if self.state.ndim == 1:
145         self.state = np.outer(self.state, self.state)
146
147     self.total_dim = self.state.shape[0]
148
149     self.num_qubits = int(np.log2(self.total_dim))
150     self.a_dim = 2 ** (self.num_qubits - self.qubits_out)
151     self.b_dim = 2 ** self.qubits_out
152
153     # if self.side == "bot":
154     self.basis_b = [_ for _ in np.identity(int(self.b_dim))]
155     self.basis_a = [_ for _ in np.identity(int(self.a_dim))]
156
157     # elif self.side == "top":
158     #     self.basis_a = [_ for _ in np.identity(int(self.b_dim))]
159     #     self.basis_b = [_ for _ in np.identity(int(self.a_dim))]
160     #
161     # else:
162     #     raise NameError("invalid side argument, enter \"bot\" or \"top\"")
163     print(self.basis_a, self.basis_b)
164
165     def get_entry(self, index_i, index_j):
166         sigma = 0
167
168         if self.side == "bot":
169             for k in range(self.qubits_out + 1):
170                 ab_l = np.kron(self.basis_a[index_i],
171                               self.basis_b[k])
172                 ab_r = np.kron(self.basis_a[index_j],
173                               self.basis_b[k])
174
175                 print(ab_r, ab_l)
176
177                 right_side = np.dot(self.state, ab_r)
178                 sigma += np.inner(ab_l, right_side)
179
180         if self.side == "top":
181             for k in range(self.qubits_out + 1):
182                 ba_l = np.kron(self.basis_b[index_i],
183                               self.basis_a[k])
184                 ba_r = np.kron(self.basis_b[index_j],
185                               self.basis_a[k])
186

```

```

187         print(ba_r, ba_l)
188
189         right_side = np.dot(self.state, ba_r)
190         sigma += np.inner(ba_l, right_side)
191
192     return sigma
193
194     def compute_matrix(self):
195         a = [_ for _ in range(self.a_dim)]
196         b = [_ for _ in range(self.a_dim)]
197
198         entries_pre = [(x, y) for x in a for y in b]
199         entries = []
200
201         for i_index, j_index in entries_pre:
202             entries.append(self.get_entry(i_index, j_index))
203
204         entries = np.array(entries)
205         return entries.reshape(self.a_dim, self.a_dim)

```

LISTING F.7: Funcions varies

F.2 Capítol 7

F.2.0.1 Multiprocessament Per poder ser més eficient a l'hora d'executar els models, vaig decidir utilitzar una característica molt útil de Python, el *multiprocessing*. Usualment, una instància de Python, és a dir; un arxiu executant-se, només es fa servir un nucli del processador a la vegada, però amb *multiprocessing* pots emprar múltiples nuclis amb un mateix arxiu, d'aquesta manera executant diverses línies de codi al mateix temps. Per poder executar diversos models a la mateixa vegada i d'una forma simple, vaig fer servir aquest mòdul de Python per executar els models dels quals he agafat les dades que he presentat en aquest treball. Aquest codi es pot trobar al [repositori del treball](#) en l'arxiu `test_multi.py`.

```

1     import multiprocessing
2     import time
3     import numpy as np
4
5     from quantumGAN.discriminator import ClassicalDiscriminator
6     from quantumGAN.qgan import Quantum_GAN
7     from quantumGAN.quantum_generator import QuantumGenerator

```

```

8
9     batch_size = 10
10
11     train_data = []
12     # generacio de les dades
13     for _ in range(800):
14         x2 = np.random.uniform(.55, .46, (2,))
15         fake_datapoint = np.random.uniform(-np.pi * .01, np.pi * .01, (4,))
16         real_datapoint = np.array([x2[0], 0, x2[0], 0])
17         train_data.append((real_datapoint, fake_datapoint))
18     list_epochs = [550, 550, 550]
19
20     example_generator_ancilla = QuantumGenerator(num_qubits=4,
21                                                  generator_circuit=None,
22                                                  num_qubits_ancilla=2,
23                                                  shots=4096)
24     example_generator = QuantumGenerator(num_qubits=2,
25                                         generator_circuit=None,
26                                         num_qubits_ancilla=0,
27                                         shots=4096)
28
29     # generem els parametres inicials d'acord amb el circuit amb un mayor nombre de
30     # parametres
31     circuit_ancilla = example_generator_ancilla.construct_circuit(None, False)
32     circuit_not_ancilla = example_generator_ancilla.construct_circuit(None, False)
33
34     init_parameters_ancilla = np.random.normal(np.pi / 2, .1, circuit_ancilla.
35     num_parameters)
36
37     # canviem les dimensions dels parametres perquè coincideixin amb les dimensions
38     # necessaries pel circuit
39     # sense qubits ancilla
40     not_ancilla_list = init_parameters_ancilla.tolist()[
41     circuit_ancilla.num_parameters - circuit_not_ancilla.num_parameters:]
42     init_parameters_not_ancilla = np.array(not_ancilla_list)
43
44     example_discriminator = discriminator_ancilla = \
45     ClassicalDiscriminator(sizes=[4, 16, 8, 1], type_loss="minimax")
46
47     init_biases_discriminator, init_weights_discriminator = example_discriminator.
48     init_parameters()
49
50     def to_train(num_epochs):
51         # definicio d'un discriminador pel model amb la funcio no-lineal i una
52         # altre pel model que no la te
53         discriminator_ancilla = \

```

```

50         ClassicalDiscriminator(sizes=[4, 16, 8, 1], type_loss="minimax")
51     discriminator_not_ancilla = \
52         ClassicalDiscriminator(sizes=[4, 16, 8, 1], type_loss="minimax")
53
54     # es defineix un generador que te la funcio no-lineal integrada en el
circuit
55     generator_ancilla = \
56         QuantumGenerator(num_qubits=4,
57                           generator_circuit=None,
58                           num_qubits_ancilla=2, # IMPORTANT
59                           shots=4096)
60     # i un altre generador que no te la funcio no-lineal
61     generator_not_ancilla = \
62         QuantumGenerator(num_qubits=2,
63                           generator_circuit=None,
64                           num_qubits_ancilla=0, # IMPORTANT
65                           shots=4096)
66
67     quantum_gan_ancilla = \
68         Quantum_GAN(generator_ancilla, discriminator_ancilla)
69     time.sleep(1)
70     quantum_gan_not_ancilla = \
71         Quantum_GAN(generator_not_ancilla, discriminator_not_ancilla)
72     print(quantum_gan_not_ancilla.path)
73     print(quantum_gan_ancilla.path)
74
75     # abans de començar a entrenar el model s'ha de canviar els parametres als
definites anteriorment
76     quantum_gan_ancilla.generator.parameter_values = init_parameters_ancilla
77     quantum_gan_ancilla.discriminator.weights = init_weights_discriminator
78     quantum_gan_ancilla.discriminator.biases = init_biases_discriminator
79     quantum_gan_ancilla.train(num_epochs, train_data, batch_size, .1, .1, False
)
80
81     quantum_gan_not_ancilla.generator.parameter_values =
init_parameters_not_ancilla
82     quantum_gan_not_ancilla.discriminator.weights = init_weights_discriminator
83     quantum_gan_not_ancilla.discriminator.biases = init_biases_discriminator
84     quantum_gan_not_ancilla.train(num_epochs, train_data, batch_size, .1, .1,
False)
85
86     # una vegada ha acabat l'optimitzacio es creen els grafics per compara l'
eficiencia del models
87     quantum_gan_not_ancilla.plot()
88     quantum_gan_ancilla.plot()
89
90

```

```
91 def main():
92     # Crear una queue para compartir les dades entre els processos
93     # Crear i iniciar el proces de simulacio
94     jobs = []
95     for epoch in list_epochs:
96         simulate = multiprocessing.Process(None, to_train, args=(epoch,))
97         jobs.append(simulate)
98         time.sleep(2)
99         simulate.start()
100
101
102 if __name__ == '__main__':
103     main()
```

LISTING F.8: Executar els models amb multiprocessing

Bibliografia

- [1] Maria Schuld, Ilya Sinayskiy, and Francesco Petruccione. The quest for a quantum neural network. *Quantum Information Processing*, 13:2567–2586, 2014. [Online; accedit en 19/09/2021: [Enllaç](#)].
- [2] Michael Broughton, Guillaume Verdon, Trevor McCourt, Antonio J. Martinez, Jae Hyeon Yoo, Sergei V. Isakov, Philip Massey, Ramin Halavati, Murphy Yuezhen Niu, Alexander Zlokapa, Evan Peters, Owen Lockwood, Andrea Skolik, Sofiene Jerbi, Vedran Dunjko, Martin Leib, Michael Streif, David Von Dollen, Hongxiang Chen, Shuxiang Cao, Roeland Wiersema, Hsin-Yuan Huang, Jarrod R. McClean, Ryan Babbush, Sergio Boixo, Dave Bacon, Alan K. Ho, Hartmut Neven, and Masoud Mohseni. TensorFlow Quantum: A software framework for quantum machine learning. 2021. [Online; accedit en 19/09/2021: [Enllaç](#)].
- [3] IBM quantum, 2021. [Online; accedit en 19/09/2021: [Enllaç](#)].
- [4] Ian J. Goodfellow, Jean Pouget-Abadie, Mehdi Mirza, Bing Xu, David Warde-Farley, Sherjil Ozair, Aaron Courville, and Yoshua Bengio. Generative adversarial networks. 2014. [Online; accedit en 19/09/2021: [Enllaç](#)].
- [5] He-Liang Huang, Yuxuan Du, Ming Gong, Youwei Zhao, Yulin Wu, Chaoyue Wang, Shaowei Li, Futian Liang, Jin Lin, Yu Xu, and et al. Experimental quantum generative adversarial networks for image generation. *Physical Review Applied*, 16(2), 2021. [Online; accedit en 19/09/2021: [Enllaç](#)].
- [6] Gilbert Strang. Linear Algebra MIT OCW, 2011. [Online; accedit en 19/09/2021: [Enllaç](#)].

- [7] Gilbert Strang. Matrix methods in data analysis, signal processing, and machine learning mit ocw, 2018. [Online; accedit en 19/09/2021: [Enllaç](#)].
- [8] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [9] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, chapter 2, page 66. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [10] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right*, chapter 3, pages 37–58. Springer, 2 edition, 1997.
- [11] Sheldon Axler. *Linear Algebra Done Right*, chapter 3, pages 48–52. Springer, 2 edition, 1997.
- [12] Wolfram MathWorld. L2-Norm, 2021. [Online; accedit en 19/09/2021: [Enllaç](#)].
- [13] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, chapter 2, page 74. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [14] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, chapter 2, page 73. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [15] Wikipedia. Tensor product, 2021. [Online; accedit en 19/09/2021: [Enllaç](#)].
- [16] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, chapter 2, pages 80–96. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [17] Asher Peres. *Quantum Theory: Concepts and Methods*, chapter 2, pages 24–29. Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [18] Eleanor Rieffel and Wolfgang Polak. *Quantum Computing: A Gentle Introduction*, chapter 2, pages 12–13. MIT Press, 1 edition, 2011.

- [19] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, chapter 2, page 99. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [20] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, chapter 2, page 105. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [21] Eleanor Rieffel and Wolfgang Polak. *Quantum Computing: A Gentle Introduction*. MIT Press, 1 edition, 2011.
- [22] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, chapter 2, pages 105–106. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [23] Eleanor Rieffel and Wolfgang Polak. *Quantum Computing: A Gentle Introduction*, chapter 10, pages 212–213. MIT Press, 1 edition, 2011.
- [24] Diederik P. Kingma and Jimmy Ba. Adam: A method for stochastic optimization. 2017. [Online; accedit en 26/10/2021: [Enllaç](#)].
- [25] Martín Abadi, Ashish Agarwal, Paul Barham, Eugene Brevdo, Zhifeng Chen, Craig Citro, Greg S. Corrado, Andy Davis, Jeffrey Dean, Matthieu Devin, Sanjay Ghemawat, Ian Goodfellow, Andrew Harp, Geoffrey Irving, Michael Isard, Yangqing Jia, Rafal Jozefowicz, Lukasz Kaiser, Manjunath Kudlur, Josh Levenberg, Dandelion Mané, Rajat Monga, Sherry Moore, Derek Murray, Chris Olah, Mike Schuster, Jonathon Shlens, Benoit Steiner, Ilya Sutskever, Kunal Talwar, Paul Tucker, Vincent Vanhoucke, Vijay Vasudevan, Fernanda Viégas, Oriol Vinyals, Pete Warden, Martin Wattenberg, Martin Wicke, Yuan Yu, and Xiaoqiang Zheng. TensorFlow: Large-scale machine learning on heterogeneous systems, 2015. Software disponible a [tensorflow.org](https://www.tensorflow.org).
- [26] Adam Paszke, Sam Gross, Francisco Massa, Adam Lerer, James Bradbury, Gregory Chanan, Trevor Killeen, Zeming Lin, Natalia Gimelshein, Lu-

- ca Antiga, Alban Desmaison, Andreas Kopf, Edward Yang, Zachary DeVito, Martin Raison, Alykhan Tejani, Sasank Chilamkurthy, Benoit Steiner, Lu Fang, Junjie Bai, and Soumith Chintala. Pytorch: An imperative style, high-performance deep learning library. In *Advances in Neural Information Processing Systems 32*, pages 8024–8035. Curran Associates, Inc., 2019.
- [27] Tero Karras, Samuli Laine, Miika Aittala, Janne Hellsten, Jaakko Lehtinen, and Timo Aila. Analyzing and improving the image quality of stylegan. 2020. [Online; accedit en 26/10/2021: [Enllaç](#)].
- [28] lucidrains. This person does not exist, 2021. [Online; accedit en 26/10/2021: [Enllaç](#)].
- [29] Vojtěch Havlíček, Antonio D. Córcoles, Kristan Temme, Aram W. Harrow, Abhinav Kandala, Jerry M. Chow, and Jay M. Gambetta. Supervised learning with quantum-enhanced feature spaces. *Nature*, 567(7747):209–212, 2019.
- [30] Maria Schuld and Nathan Killoran. Quantum machine learning in feature hilbert spaces. *Physical Review Letters*, 122(4), 2019.
- [31] Maria Schuld, Ilya Sinayskiy, and Francesco Petruccione. Prediction by linear regression on a quantum computer. *Physical Review A*, 94(2), 2016.
- [32] Aram W. Harrow and John C. Napp. Low-depth gradient measurements can improve convergence in variational hybrid quantum-classical algorithms. *Physical Review Letters*, 126(14), Apr 2021.
- [33] Yudong Cao, Gian Giacomo Guerreschi, and Alán Aspuru-Guzik. Quantum neuron: an elementary building block for machine learning on quantum computers. 2017. [Online; accedit en 6/11/2021: [Enllaç](#)].
- [34] Jonathan Romero and Alan Aspuru-Guzik. Variational quantum generators: Generative adversarial quantum machine learning for continuous distributions. 2019. [Online; accedit en 6/11/2021: [Enllaç](#)].
- [35] Iris Cong, Soonwon Choi, and Mikhail D. Lukin. Quantum convolutional neural networks. *Nature Physics*, 15(12):1273–1278, Aug 2019.

- [36] Saad Albawi, Tareq Abed Mohammed, and Saad Al-Zawi. Understanding of a convolutional neural network. In *2017 International Conference on Engineering and Technology (ICET)*, pages 1–6, 2017.
- [37] Christa Zoufal, Aurélien Lucchi, and Stefan Woerner. Quantum generative adversarial networks for learning and loading random distributions. *npj Quantum Information*, 5(103), 2019. [Online; accedit en 01/11/2021: [Enllaç](#)].
- [38] Cirq Developers. Cirq, August 2021. Veure la llista completa dels autors a Github: <https://github.com/quantumlib/Cirq/graphs/contributors>.
- [39] Qiskit Developers. Qiskit: An open-source framework for quantum computing, 2021.
- [40] Stanislau Semeniuta, Aliaksei Severyn, and Sylvain Gelly. On accurate evaluation of gans for language generation. 2019. [Online; accedit en 19/09/2021: [Enllaç](#)].
- [41] Prafulla Dhariwal, Heewoo Jun, Christine Payne, Jong Wook Kim, Alec Radford, and Ilya Sutskever. Jukebox: A generative model for music, 2020.
- [42] Jonathan Romero, Jonathan P Olson, and Alan Aspuru-Guzik. Quantum autoencoders for efficient compression of quantum data. *Quantum Science and Technology*, 2(4):045001, Aug 2017. [Online; accedit en 19/09/2021: [Enllaç](#)].
- [43] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*, chapter 2, page 62. Cambridge University Press, 10 edition, 2010.
- [44] David J. Griffiths. *Introduction to Quantum Mechanics*, chapter 1, pages 11–12. Prentice Hall, 1995.
- [45] Lov K Grover. A fast quantum mechanical algorithm for database search. *Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 212–219, 1996. [Online; accedit en 05/10/2021: [Enllaç](#)].

- [46] Peter W. Shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM Journal on Computing*, 26(5):1484–1509, Oct 1997. [Online; accedit en 02/01/2022: [Enllaç](#)].
- [47] R. L. Rivest, A. Shamir, and L. Adleman. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Commun. ACM*, 21(2):120–126, 1978.
- [48] Enrique Martín-López, Anthony Laing, Thomas Lawson, Roberto Alvarez, Xiao-Qi Zhou, and Jeremy L. O’Brien. Experimental realization of shor’s quantum factoring algorithm using qubit recycling. *Nature Photonics*, 6(11):773–776, 2012. [Online; accedit en 06/01/2022: [Enllaç](#)].