Mates: Selectividad 2022

tomiock

26 de mayo de 2022

Los contenidos consisten en tres grandes bloques (Álgebra Lineal, Geometría y Análisis), pero el e examen tiene tan solo 6 preguntas (de las cuales se escogen 4).

1. Álgebra Lineal

1.1. Operaciones con matrices

Las matrices tiene definida una suma, producto y producto por escalar.
Ejemplo de suma de matrices 2×2:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}$$

Tiene que tener las misma dimensiones.

En cambio con el producto entre dos matrices, estas no tiene que tener las mismas dimensiones necesariamente. Tal solo el número de filas de una tiene que ser igual que el numero de columnas de la otra y viceversa[1]. Producto entre dos matrices:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

O un ejemplo más claro con 2 matrices (2×2):

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

Se puede ver como es un producto escalar entre vectores que forman columnas y filas:

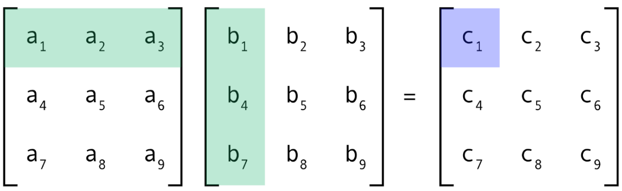

FIGURA 1: Esquema de la multipliación entre dos matrices, el producto escalar de los vectores resaltados en verde dan lugar al escalar marcado en azul. Se coge una fila de la primera matriz y una columna de la segunda. Debido a esto el producto de matrices no es conmutativo $AB \neq BA$.

Al multiplicar una matriz por un escalar (número), se multiplican todos los elementos de la matriz por ese escalar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times (1) & 5 \times (4) \\ 5 \times (3) & 5 \times (2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$$

[1] $(m \times n) \cdot (n \times m) \mapsto (m \times m)$

1.2. Determinantes

El determinante es la variación el área/norma que causa una transformación lineal aplicada a una superficie/vector.

El determinantes de una matriz (2×2) se calcula con la siguiente regla:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Mientras que para una matriz (3×3) se puede utilizar la expansión de Laplace[2]:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Donde se puede utilizar cualquier columna o fila para expandir la matriz. Dependiendo de la cual, cambia el signo que tiene el determinante. Para un menor M_{ij} el signo que tiene su elemento en la expansión es $(-1)^{i+j}$. Usualmente se da una matriz con un parámetro y se ha de tomar el determinante de esta, resultando en una ecuación de segundo grado normalmente. Es indispensable saber la expansión de Laplace.

1.3. Rango de una matriz

El rango de una matriz es el máximo número de vectores independientes que se pueden sacar de la matriz, ja sean columnas o filas (y no una combinación de las dos). Se puede calcular el rango a partir del orden máximo de los menores no nulos de la matriz (cuando su determinante no es 0).

Si hay en una matriz hay un menor no nulo de orden k y todos los menores de orden $k+1$ son nulos, entonces el rango de la matriz es k.

Conviene calcular el rango a través de la linealidad de las columnas o filas si se ve inmediatamente. No se pedirá calcular el rango de una matriz de mayor orden que 3.

1.4. Matriz inversa

A^{-1} es la matriz inversa de A si:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

En otras palabras:

$$\exists A^{-1} \iff AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Se denomina matriz regular a una matriz que tiene inversa.

1.4.1. Cálculo de una matriz inversa

Se puede calcular mediante la matriz adjunta:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^{\dagger})^T$$

Donde $A^{\dagger}$ es la matriz adjunta, definida mediante sus elementos como:

$$m_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{1}$$

Para una matriz A de orden 2, su adjunta será:

$$A^{\dagger} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\dagger} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{2}$$

Y para una matriz A de orden 3, su adjunta será:

$$A^{\dagger} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{\dagger} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \tag{3}$$

[2] Muy útil para el cálculo de productos vectoriales entre vectores.

Se pueden ver como el elemento de la fila i y la columna j es el menor M_{ij} de la matriz A. El término $(-1)^{i+j}$ de la ecuación 1 indica el signo que se le da a los menor dependiendo de la posición. No hace falta saber la ecuación 1, se puede aprender a hacer mecánicamente con la ecuación 3 y 2.

Haciendo la transpuesta de la adjunta y dividendo los componentes entre el determinante de la matriz original es como se calcula la inversa de esta.

Sin embargo, usualmente no es necesario utilizar este método porque se puede calcular mediante la resolución de una ecuación matricial, como en este ejemplo:

$$\begin{aligned} M^2 - M - 2I &= 0 \\ M - I - 2M^{-1} &= 0 \\ -I - 2M^{-1} &= -M \\ M^{-1} &= \frac{M - I}{2} \end{aligned}$$

Siendo M una matriz que cumple $M^2 - M - 2I = 0$.

1.5. Discusión de sistemas

Los sistemas de ecuaciones se pueden representar mediante matrices:

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2 z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Donde la última columna representa a que equivale la combinación lineal de los parámetros. Sin embargo siempre que se piensa a discutir el sistema se prescinde de esta columna:

$$\begin{pmatrix} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dependiendo del rango de estas matrices (denominando la primera como matriz ampliada), podemos diferenciar 3 tipos de sistemas de ecuaciones:

1. **Sistema Compatible Determinado**:
   Sistema que tiene un número finito de soluciones. Para un sistema M con una matriz ampliada M', es compatible determinado si el rango de ambas matrices es el orden de M:

   $$r(M) = r(M')$$

   Si el rango de la matriz es su número de filas se dice que es una matriz '*full rank*' o de rango completo. Para ser un sistema compatible determinado, ambas matrices han de ser de rango completo.

2. **Sistema Compatible Determinado**:
   Sistema que tiene infinitas soluciones. Lo es cuando $r(M) = r(M') <$ orden de M. Como ejemplo esta el siguiente sistema:

   $$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & 8 & 0 \end{array} \right)$$

   Aplicando Gauss podemos ver que:

   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & 8 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

   Y como la matriz tiene dos filas iguales, tiene rango 2. Después al mirar M podemos identificar un menor con determinante no nulo:

   $$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

   Al tener este menor orden 2, podemos decir que el rango de la matriz A es igual a 2.

   Al tener la matriz del sistema y su matriz ampliada el mismo rango, siendo esta menor que el orden de la matriz del sistema, se puede decir que el sistema es compatible determinado.

3. **Sistema Incompatible**:
   Un sistema que no tiene soluciones. Simplemente es cuando $r(M) \neq r(M')$.

1.6. Resolución de sistemas

1.6.1. Método de Gauss

Se pueden hacer operaciones de filas en las matrices para de esta manera mirar si sus vectores son dependientes o no. Estas operaciones pueden son las siguientes:

1. Permutación de filas (intercambiar de sitio)
2. Multiplicación de fila por escalar
3. Resta/Suma de una fila por otra

Con estas operaciones se puede conseguir una matriz triangular superior:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 9 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{array}\right)$$

A partir de ella se puede resolver el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 9 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} 2x + 6y + 9z = 1 \\ -3y + 6z = 1 \\ 7z = 5 \end{cases}$$

Y entonces $z = \frac{5}{7}$, y a partir de esto se puede resolver todo el sistema.

1.7. Método de Cramer

Este método no se puede aplicar en sistema Indeterminados.
Se pueden obtener los parámetros con:

$$x = \frac{\Delta_x}{|M|} \qquad y = \frac{\Delta_y}{|M|} \qquad z = \frac{\Delta_z}{|M|}$$

Para un sistema:

$$\begin{cases} m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + m_{13}x_3 = b_1 \\ m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + m_{23}x_3 = b_2 \\ m_{31}x_1 + m_{32}x_2 + m_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Con su matriz ampliada siendo:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} m_{11} & m_{12} & m_{13} & b_1 \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & b_2 \\ m_{13} & m_{32} & m_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

Donde Δ_x es:

$$\Delta_x = \begin{pmatrix} b_1 & m_{12} & m_{13} \\ b_2 & m_{22} & m_{23} \\ b_3 & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

Podemos ver como la primera columna a sido sustituida por el vector b, donde $Mx = b$.

2. Geometría

3. Análisis