

# Física: Selectividad 2022

tomiock

7 de junio de 2022

## 1. Ondas y sonido

Usualmente este tema se divide en dos, una parte corresponde al MAS y la otra al sonido/ondas estacionarias.

### 1.1. Movimiento Armónico Simple

En la figura 1 se puede ver un meme sobre el Movimiento Armónico Simple.



FIGURA 1: Meme totalmente cierto sobre el Movimiento Armónico Simple

Está en todas partes, es la base de las ondas, y por lo tanto del 70 % de la física. Sirve para describir un movimiento cíclico o periódico. Tienen una frecuencia  $\nu$ , periodo  $T$  y velocidad angular  $\omega$ , que se relacionan como:

$$\nu = \frac{1}{T}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Una variable  $y$  es descrita por un MAS se expresa como:

$$y = A \sin \theta$$

Podemos hacer que el movimiento sea dependiente del tiempo a través de la velocidad angular  $\omega$ :

$$\theta(t) = \omega t + \varphi_0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow y = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

Al derivar la ecuación (2) se pueden obtener la velocidad y la aceleración que describen un MAS, las cuáles también son un MAS pero con la amplitud modificada mediante la regla de la cadena:

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0)$$
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Se puede ver como la velocidad máxima es  $v_{max} = \omega A$  y la aceleración  $a_{max} = \omega^2 A$ .

También tenemos que:

$$a = -\omega^2 y$$

Donde  $y$  es el MAS original que describe el movimiento.

## 1.2. Onda plana

Si describimos un MAS con el espacio y el tiempo tenemos el concepto de onda plana. La cual tiene asociada una velocidad de propagación  $v$ :

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \nu$$

Donde  $\lambda$  es la longitud de onda.

Una onda plana se describe como:

$$y(x, t) = A \sin \left( \frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \varphi_0 \right)$$

Se define un número de onda  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  que es el número de ciclos que se completan en una distancia  $2\pi$  metros.

Por lo tanto tenemos que:

$$y(x, t) = A \sin (\omega t \pm kx + \varphi_0)$$

Donde  $\omega t \pm kx + \varphi_0$  se denomina fase de onda  $\varphi$ :

$$\varphi = \omega t \pm kx + \varphi_0$$

Se puede ver como:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega t - kx_2 + \varphi_0) - (\omega t - kx_1 + \varphi_0) = k(x_1 - x_2) = \frac{2\pi}{\lambda} d$$

Dos puntos se encuentran en fase cuando son múltiplos de  $2\pi$  o en desfase cuando son un múltiplo impar de  $\pi$ .

También se puede representar una onda con un coseno:

$$y(x, t) = A \cos (\omega t \mp kx + \varphi'_0)$$

La velocidad y aceleración se representan igual que en un MAS:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{dy(x, t)}{dt} = A\omega \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \\ a(x, t) &= \frac{dv(x, t)}{dt} = \frac{d^2y(x, t)}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t - kx + \varphi_0) \\ &= -\omega^2 y(x, t) \end{aligned}$$

## 1.3. Los muelles

A partir de la ley de Hooke sabemos que:

$$F = ma = -k\Delta x \Rightarrow a = -\frac{k}{m}\Delta x$$

Como que  $a = -\omega^2\Delta x$  podemos definir la velocidad angular como<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} -\omega^2\Delta x &= -\frac{k}{m}\Delta x \\ \cancel{\omega^2\Delta x} &= \cancel{\frac{k}{m}\Delta x} \\ \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

La energía cinética asociada a un MAS se puede calcular mediante su velocidad:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

Donde la energía cinética máxima es:

$$E_{k \max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

---

<sup>1</sup>No hay péndulos aparentemente pero son lo mismo que los muelles solo que  $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ .

Con la fuerza potencial elástica,

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0),$$

se puede definir la energía cinética:

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \\ &= \frac{1}{2}mA^2 \frac{k}{m} \cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0) \\ &= \frac{1}{2}mA^2 [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] = \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned}$$

Es importante tener en cuenta la representación gráfica de las energías:

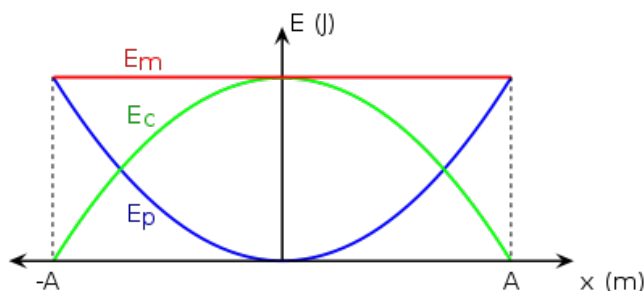


FIGURA 2: Representación gráfica de  $E_m$ .

## 1.4. Reflexión y Refracción

Una onda al encontrarse con otro medio puede ser reflectada de la siguiente forma:

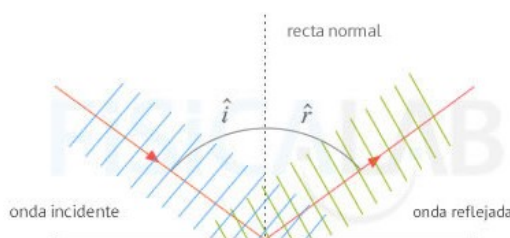


FIGURA 3:  $\hat{i}$  es el ángulo de la onda incidente con la recta normal y  $\hat{r}$  de la reflejada con la normal.

Los ángulos  $\theta_i$  y  $\theta_r$  son iguales:

$$\hat{i} = \hat{r} \text{ o } \theta_i = \theta_r$$

Pero cuando la onda pasa al medio en el cual incide (atraviesa) se da lugar una refracción:

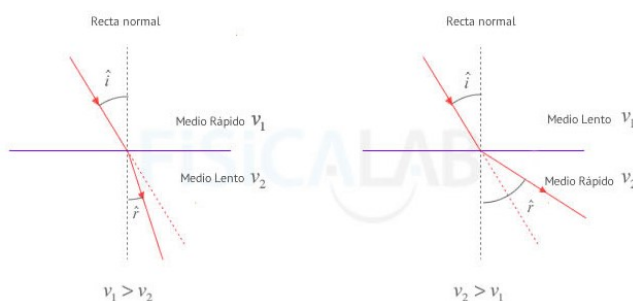


FIGURA 4: Se pueden ver las dos situaciones que dependen de la velocidad que tiene la onda en los medios.

Los ángulos en la figura anterior se describen mediante la ley de Snell<sup>2</sup>:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r}$$

<sup>2</sup>caracol

Existe el caso especial del ángulo límite:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \sin \theta_{lim} = \frac{v_1}{v_2}$$

Cuando  $v_2 = v_1$ , claro. Se ha de mencionar que cuando sucede este efecto la onda mantiene constante la frecuencia, pero al cambiar la velocidad de propagación, la longitud de onda cambia  $\nu = \frac{v}{\lambda}$ .

También se tiene que tener claro el aspecto cualitativo de la difracción de una onda plana (figura 5).

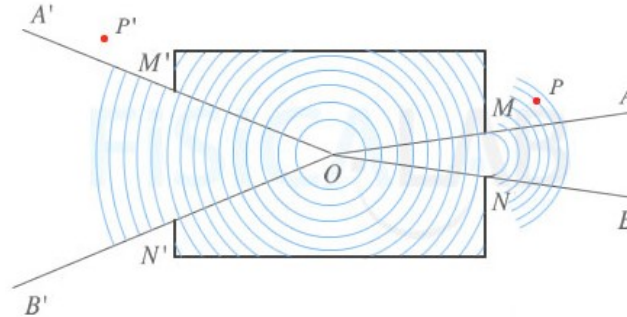


FIGURA 5: Difracción de una onda circular contenida dentro de una caja

Se ha de tener en cuenta que mediante el principio de Huygens, los puntos en un frente de onda se comporta como emisores de esa onda. Se crean nuevos frentes con la misma frecuencia y velocidad de propagación.

### 1.5. Puntos máximos y mínimos en la interferencia de dos ondas

Dos ondas de la misma frecuencia y longitud de onda cuando interfieren lo hacen de la siguiente manera:

$$A_T = 2A \cos \left( k \frac{(x_2 - x_1)}{2} + \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} \right) \quad (3)$$

$$y_T = y_1 + y_2 \quad (4)$$

$$y_T = A_T \sin \left( \omega t - k \frac{(x_1 - x_2)}{2} + \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \quad (5)$$

$$= 2A \cos \left( k \frac{(x_2 - x_1)}{2} + \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{2} \right) \sin \left( \omega t - k \frac{(x_1 - x_2)}{2} + \frac{(\varphi_1 + \varphi_2)}{2} \right) \quad (6)$$

$$(7)$$

Donde los máximos y mínimos vienen dados por la ecuación (3) en la cual  $x_2 - x_1$  es la distancia entre los focos.

La interferencia se puede sacar a partir de una suma de cosenos o senos:

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \left( \frac{A + B}{2} \right) \cos \left( \frac{A - B}{2} \right)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left( \frac{A + B}{2} \right) \cos \left( \frac{A - B}{2} \right)$$

Conviene memorizarse estas igualdades para deducir la interferencia (igualmente las posibilidades de que salgan son bastante pocas).

### 1.6. Onda estacionaria

Cuando dos ondas de las mismas características que viajan en sentido contrario se superponen creando una onda estacionaria. Al ser una superposición con ondas con la misma frecuencia, amplitud y fase, se representa con la siguiente suma:

$$y_T = y_{indidente} + y_{reflectada} = A \sin(\omega t - kx) - A \sin(\omega t + kx)$$

Aplicando una suma de senos tenemos que<sup>3</sup>:

$$y_T = 2A \cos(\omega t) \sin(-kx) = -2A \cos(\omega t) \sin(kx)$$

<sup>3</sup>También aplicamos  $\sin -A = -\sin A$

Las ondas estacionarias forman armónicos:

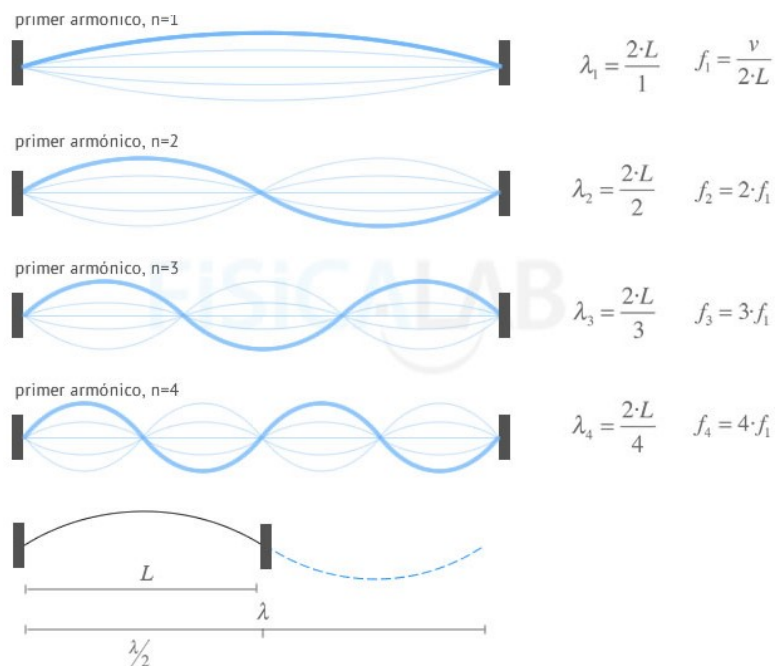


FIGURA 6

Donde el  $n$  armónico contiene  $n$  vientres i  $n + 1$  nodos y tiene una longitud de onda:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

I por lo tanto una frecuencia  $\nu_n$  ya que tienen que tener la misma velocidad:

$$v = \lambda_n \nu_n$$

$$\Rightarrow \nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{\frac{2L}{n}} = n \frac{v}{2L}$$

Se ha de mencionar que las frecuencias de los armónicos, son múltiplos de la frecuencia fundamental:

$$\nu_n = n \nu_1$$

Con las ondas con un extremo fijo el  $n$ -armónico es:

$$\lambda_n = \frac{4L}{2n - 1}$$

Hay que remarcar que tendrá  $n$  nodos y  $n$  vientres.

En cambio, para las ondas con extremos libres:+

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

Y tendrá  $n + 1$  vientres y  $n$  nodos. Aunque para todos los casos el número de vientres y nodos se puede saber en el momento.

Para saber la posición de los nodos en una onda estacionaria simplemente se tiene que utilizar la longitud total y  $\lambda_n$ .

## 1.7. Cualidades del sonido y intensidad

Las cualidades del sonido son las siguientes:

1. So: Es una onda mecánica que se propaga por diversos medios y puede ser detectada por el oído.
2. Tono: Es la propiedad que define si un sonido es grave o agudo, está determinado cualitativamente por la frecuencia.

3. Timbre: Es la cualidad del sonido que define la forma de su onda. Depende de la fuente emisora. Un la de un piano y un violín son diferentes, ¿no?

La intensidad de un sonido se mide mediante la potencia<sup>4</sup>:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{1}{S} \frac{dE}{dt}$$

Siempre al calcular una intensidad sonora se ha de dividir entre la superficie<sup>5</sup>.

Para una onda 3D tenemos que:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{1}{S} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{S} \frac{d}{dt} [2\pi^2 \rho v^2 A^2 V] = \frac{2\pi^2 \rho v^2 A^2}{S} \frac{dV}{dt}$$

En el caso de una onda esférica la superficie es  $S = 4\pi r^2$  y por lo tanto la intensidad es:

$$I = 2\pi^2 \rho v^2 A^2 \frac{dr}{dt} = 2\pi^2 \rho v^2 A^2 v$$

Ja que el diferencial del radio es la velocidad  $\frac{dr}{dt} = v$

Se ha definido en un nivel de intensidad sonora, el cual es una escala logarítmica que se mide en bel B:

$$\beta = \log \frac{I}{I_0}$$

Donde  $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$  es la intensidad a la cual los humanos empiezan a oír. Usualmente se trabaja con decibelios  $\text{dB} = 10^1 \text{ B}$ .

## 1.8. Efecto Doppler

Es un fenómeno que se da lugar cuando el emisor/receptor de una onda se desplaza respecto al otro.

Por ejemplo, cuando el foco se mueve hacia el receptor, el frente de la onda se comprime en esa dirección, por lo tanto, la longitud de onda disminuye y la frecuencia aumenta. Al mismo tiempo cuando se aleja el receptor, el frente de onda se separa y la frecuencia disminuye. Esto se puede pensar cualitativamente en el momento, para ello este tipo de diagramas pueden ayudar:

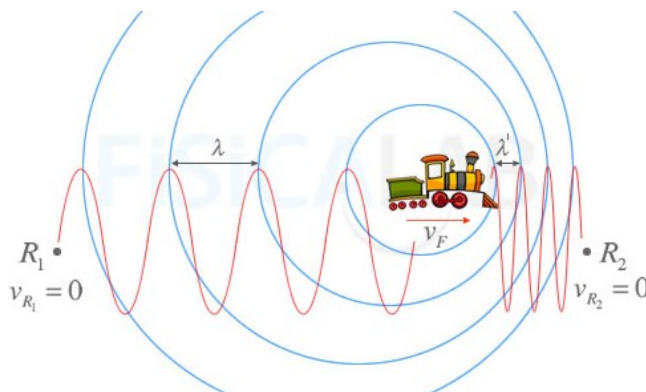


FIGURA 7: Diagrama representativo del efecto Doppler con un tren moviéndose.

Este efecto se describe mediante la formula:

$$\nu' = \nu \frac{v \pm v_O}{v \mp v_E}$$

Donde  $v_O$  es la velocidad del receptor y  $v_E$  del emisor. No es necesario aprenderla pero si que se tiene que saber operar con ella. Normalmente se pide una explicación/interpretación/justificación del efecto. Si se ha de utilizar la formula, te la dan.

<sup>4</sup>Normalmente en los problemas se da la potencia y simplemente se tiene que dividir una superficie, que se ha de calcular, para obtener la intensidad del sonido.

<sup>5</sup>Usualmente se ha de utilizar la área de una esfera  $S = 4\pi r^2$

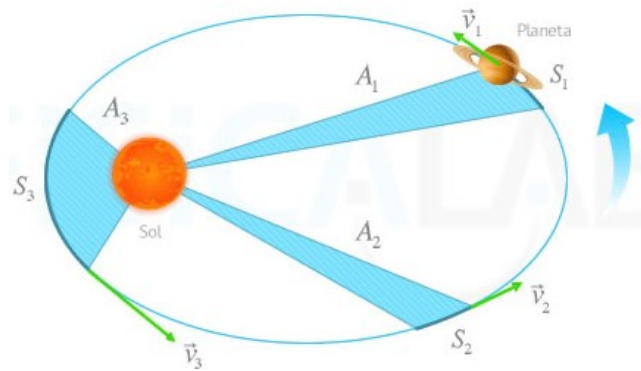


FIGURA 9: Tanto las velocidades ( $v_1, v_2, v_3$ ) como el recorrido del planeta en un tiempo determinado ( $S_1, S_2, S_3$ ) pueden ser diferentes entre si, pero las áreas siempre serán iguales  $A_1 = A_2 = A_3$ .

## 2. Gravitación

Los contenidos de este tema son menos, pero es importante tener en cuenta como se describe un movimiento circular, tanto uniforme como no uniforme. Asimismo se ha de saber la Ley de Gravitación Universal y todas las leyes de Newton.

Para gravitación es importante tener algunas nociones geométricas de una elipse:

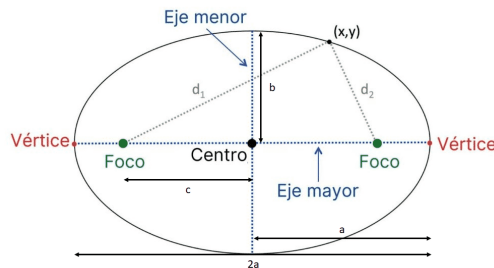


FIGURA 8: Nociones geométricas de una elipse.

El sol siempre se va a ubicar en el foco de una órbita elíptica. Puede parecer que está en el centro, pero se ha de tener en cuenta que son órbitas casi circulares.

### 2.1. Leyes de Kepler

Un punto importante de este tema son las leyes de Kepler:

1. Los planetas giran alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas en las cuales el sol es uno de los focos (no está en el centro de la órbita). "Barre"<sup>6</sup> una área determinada en el mismo en un mismo tiempo determinado.
2. Los planetas giran alrededor del Sol con una velocidad areolar constante: En un tiempo determinado, el vector de posición define una área que es constante (figura 9)<sup>7</sup>.
3. Los cuadrados de los períodos orbitales son directamente proporcionales a los semiejes más grandes de sus órbitas (la distancia más larga a la que están del sol):

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{T'^2}{r'^3}$$

O alternativamente:

$$\frac{r^3}{T^2} = G \frac{m_{\text{sol}}}{4\pi^2}$$

Un aspecto importante es la deducción de la Tercera Ley de Kepler a partir de la Segunda Ley de Newton y la ley de la Gravitación Universal, si se pide será para un movimiento circular uniforme.

<sup>6</sup>En las correcciones de la sele se utiliza mucho la palabra *barrer*.

<sup>7</sup>Área de un sector circular  $A = \frac{\theta r^2}{2}$

Empezamos con la igualdad trivial de:

$$F = ma = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Al describir un movimiento circular uniforme, podemos sustituir la aceleración por la aceleración centrípeta  $a_c = \omega^2 r$ <sup>8</sup>:

$$m\omega^2 r = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$
$$m \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Se puede ver como  $m = m^1$  ya que es la masa del objeto que órbita (entonces definimos  $m_2$  como la masa del sol), al ser lo mismo se cancelan:

$$\left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 r = G \frac{m_{\text{sol}}}{r^2}$$

A continuación se puede aislar el periodo junto al radio para acabar con la Tercera Ley de Kepler:

$$\frac{r^3}{T^2} = G \frac{m_{\text{sol}}}{4\pi^2}$$

## 2.2. Energía mecánica y tipos de órbitas

Si la única fuerza actuando sobre un objeto en órbita es la fuerza gravitatoria, esta es igual a la centrípeta:

$$G \frac{m_1 m_2}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

Por lo tanto la velocidad orbital es:

$$v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

Entonces se puede expresar la energía cinética como:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left( G \frac{M}{r} \right) = -\frac{1}{2} E_p$$

Donde  $E_p$  es la energía potencial gravitatoria:

$$E_p = -G \frac{m_1 m_2}{r}$$

Finalmente tenemos que la energía mecánica es:

$$E_m = E_k + E_p = -\frac{1}{2} E_p + E_p = \frac{1}{2} E_p$$

Es posible relacionar valores de energía mecánica a tipos de órbitas:

- Negativa (Elíptica):  
Cuando la energía mecánica es positiva, el objeto describe una trayectoria elíptica o circular:
- Nula (Parabólica):  
Cuando la energía mecánica es nula, el objeto describe una trayectoria parabólica:

---

<sup>8</sup>La ac. centrípeta es muy importante para deducir varios conceptos de este tema  $a_c = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$ .



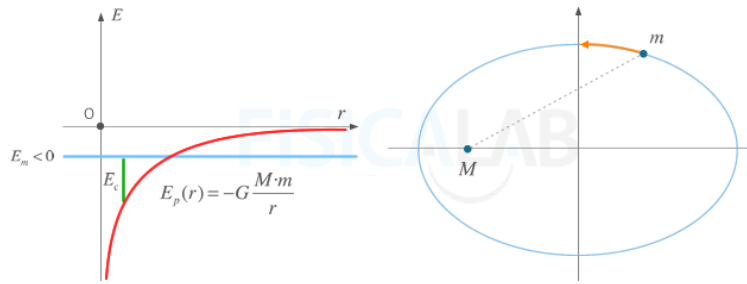


FIGURA 10: Energía Negativa (Elíptica)

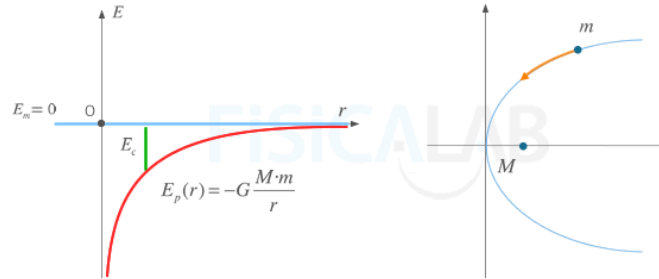


FIGURA 11: Energía Nula (Parabólica)

■ Positiva (Hiperbólica):

Cuando la energía mecánica es positiva, el objeto describe una trayectoria hiperbólica:

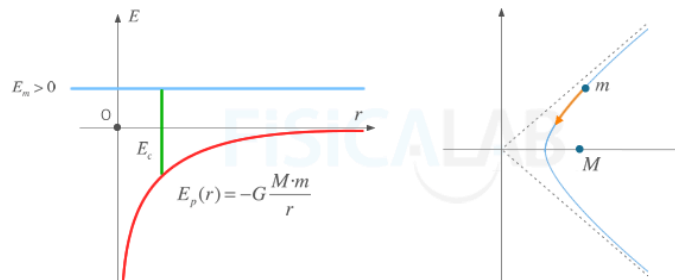


FIGURA 12: Energía Positiva (Hiperbólica)

Cabe remarcar que es el cambio de la energía mecánica es el que es nulo  $\Delta E_m$ , la energía en si misma no tiene porque serlo. También se puede referirse a ella como energía de enlace o energía mecánica orbital.

Conociendo la energía mecánica (a partir de la potencial), es posible definir una velocidad de escapamiento con la energía cinética, debido a que se ha de describir una trayectoria parabólica para escapar de la gravedad de un objeto:

$$\begin{aligned}
 E_m &= 0 \\
 \frac{1}{2}m_1v^2 - G\frac{m_1m_2}{r} &= 0 \\
 \Rightarrow v &= \sqrt{2G\frac{m_2}{r}}
 \end{aligned}$$

Donde  $v$  es la velocidad de escapamiento.

### 3. Física moderna

Este tema viene dividido en dos, una parte es la radioactividad (tiempo de desintegración y ecuaciones radioactivas) y la otra la física cuántica (efecto fotoeléctrico y energía asociada a las partículas). Siempre sale un ejercicio de cada uno estos subtemas.

#### 3.1. Ley de Desintegración Radioactiva

Una muestra de material radioactivo se desintegra mediante su actividad radioactiva:

$$A = \frac{dN}{dt}$$

Podemos definirla mediante la ley de desintegración radioactiva:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

Donde  $\lambda$  es la constante de desintegración y  $N$  el número de isotopos.

La solución a esta ecuación es:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

$N_0$  es la cantidad de material inicial y  $N$  la cantidad de material que hay cuando pasa el tiempo  $t$ .

#### 3.2. Periodo de semidesintegración

Se define el periodo de semidesintegración  $t_{\frac{1}{2}}$  como el tiempo que tarda una muestra radioactiva en reducirse a la mitad. Por la ley de desintegración sabemos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= e^{-\lambda t_{\frac{1}{2}}} \\ \ln \frac{1}{2} &= -\lambda t_{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow t_{\frac{1}{2}} &= -\frac{\ln \frac{1}{2}}{\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda}\end{aligned}$$

También se define la vida media  $\tau$  de un isótopo como la inversa de la constante de desintegración:

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

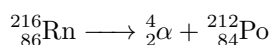
#### 3.3. Ecuaciones Radioactivas

Un elemento  $X$  se puede escribir como:

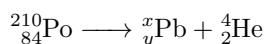
$${}^A_Z X^{\pm n}$$

Donde  $Z$  es el número (nombre atómico), y  $A$  es la suma de los protones y neutrones (nombre másico).  $n$  sería la carga del elemento, en caso de que sea un ion, puede ser positiva o negativa. Esta notación también se aplica a partículas.

Un ejemplo de ecuación radioactiva sería:



Se puede apreciar como la masa y la carga de los elementos y partículas se conserva. También en caso de que no haya ningún tipo de radiación, el número de protones, neutrones y electrones se ha de conservar. Como ejemplo podemos completar la siguiente ecuación:



Se ha de conservar el nombre atómico, por lo tanto:

$$84 = y + 2 \Rightarrow y = 84 - 2 = 82$$

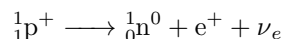
Se ha de conservar el nombre másico, por lo tanto:

$$210 = x + 4 \Rightarrow x = 210 - 4 = 206$$

Hay 3 tipos de radiación, pero las que nos importa son la radiación beta, la cual se puede presentar de dos formas<sup>9</sup>, y la radiación alfa:

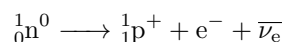
- Radiación  $\beta^+$  Positiva:

Consiste en un protón que decae en un neutrón, positrón  $e^+$  y un neutrino electrónico  $\nu_e$ :



- Radiación  $\beta^-$  Negativa:

Consiste en un neutrón que decae en un protón, electrón  $e^-$  y un antineutrino electrónico  $\bar{\nu}_e$ :



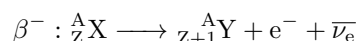
- Radiación  $\alpha$ :

Consisten un núcleo de helio:

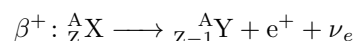


Cada radiación tiene un tipo de decaimiento, la manera en la que cambian los elementos que liberan las partículas correspondientes a cada radiación:

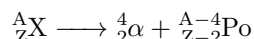
- Decaimiento  $\beta^-$ :



- Decaimiento  $\beta^+$ :



- Decaimiento  $\alpha$ :



Como regla mnemotécnica podemos fijarnos en los el signo de la radiación, si negativo entonces pasa lo contrario con el número de protones, que aumentan. En caso de ser la radiación beta positiva, el número de protones disminuye.

Además se puede relacionar el signo de la radiación con la carga del electrón (si es un positrón o un electrón), también con el neutrino, si es un electrón es un anti neutrino y viceversa. Cuando es la negativa, es un electrón y por lo tanto un antineutrino.

### 3.4. Efecto fotoeléctrico

Es un fenómeno que surge cuando se irradia con radiación electromagnética y genera una corriente (flujo electrones) en un metal. Cuando se irradia el metal este desprende electrones, formando un flujo.

Si hay un aumento de la frecuencia de la radiación, aumenta la energía cinética de los electrones. Es cuando hay un aumento de la intensidad luminosa que es cuando hay un aumento del flujo de electrones.

Este efecto se describe mediante la ecuación:

$$\begin{aligned} E &= h\nu = E_i + E_k \\ &= h\nu_0 + \frac{1}{2}mv^2 \end{aligned}$$

Donde  $E$  es la energía del fotón,  $E_i$  la energía de ionización (energía necesaria para arrancar un electrón de un átomo) y  $E_k$  es la energía cinética del electrón. Se puede ver como cuando  $E$  sobrepasa  $E_i$  es cuando existe una  $E_k$  y por lo tanto el fotón es arrancado. Realmente solo la energía cinética es la que cambia con la frecuencia del fotón porque la energía de ionización se queda constante.

Normalmente se da una frecuencia linder para hacer cálculos con esta ecuación,  $E_i$  sería la energía asociada a esta frecuencia.

---

<sup>9</sup>Conviene memorizar el nombre de cada radiación dependiendo si contiene un electrón de carga negativa (la beta negativa) o de un positrón de carga positiva (la beta positiva).

### 3.5. Dependencia de la masa según la velocidad

Según la relatividad especial una masa varía a partir de la velocidad de acuerdo con la ecuación:

$$m = m_0 \gamma$$

Donde  $\gamma$  es el factor gamma:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Normalmente simplemente se escribe como:

$$m = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} m_0$$

También se pueden referir a esto no sé:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$$

### 3.6. Principio de incertidumbre de Heisenberg

Como ya sabemos existen magnitudes observables en la física como la posición o la velocidad, las cuales se pueden definir perfectamente observando un objeto en un tiempo determinado. Pero en mecánica cuántica se aplica el principio de incertidumbre de Heisenberg que esmenta que estas magnitudes están conjugadas. Esto quiere decir que no se pueden observar con precisión para una determinada partícula en un determinado momento en el tiempo. Cuando se mide con precisión la velocidad, la masa queda indeterminada. Esto también sucede al contrario.

La ecuación que cuantifica este principio es la siguiente<sup>10</sup>:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

Donde  $\Delta x$  i  $\Delta p$  son la imprecisión en la posición i el momento respectivamente.

---

<sup>10</sup> $\hbar = \frac{h}{2\pi}$

## 4. Campo eléctrico

### 4.1. Energía, Campo Eléctrico, Potencial, Fuerza Eléctrica

Un campo eléctrico creado por una distribución de cargas se define como:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Donde una carga  $q_i$  está a una distancia  $r_i$  definida por un vector de posición  $\hat{r}_i$ .

Asimismo la fuerza entre una distribución de cargas sobre una carga  $q$  es:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Se puede ver como el campo eléctrico, es la fuerza magnética dividida por la carga a la cual se aplica la fuerza:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Por el contrario también es verdad que:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

Además se puede definir un potencial eléctrico creado por una distribución de cargas a partir de la energía potencial eléctrica:

$$V(r) = \frac{E_p(r)}{q'} = k \frac{qq'}{rq'} = k \frac{q}{r}$$

Se puede ver como la energía potencial es<sup>11</sup>:

$$E_p(r) = k \frac{qq'}{r}$$

Añadiendo la energía cinética podemos definir una energía mecánica que ha de ser constante ( $\Delta E_m = 0$ ):

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + k \frac{qq'}{r}$$

También es importante saber la relación entre el campo eléctrico y el potencial eléctrico: Un campo eléctrico siempre apunta en la dirección en que el potencial decrece. Esto se pueden expresar fácilmente con una derivada:

$$E = -\frac{dV}{dx} \text{ o alternativamente } \vec{E} = -\frac{dV}{dx} \hat{i}$$

Asimismo el potencial también se puede relacionar con la energía potencial simplemente multiplicando por una carga:

$$\Delta E_p = q' \Delta V$$

---

<sup>11</sup> Energía potencial de una carga  $q'$  en el campo magnético creado por una carga  $q$ .

## 4.2. Diagramas de líneas de campo

Un ejemplo de un diagrama de líneas de campo es el siguiente:

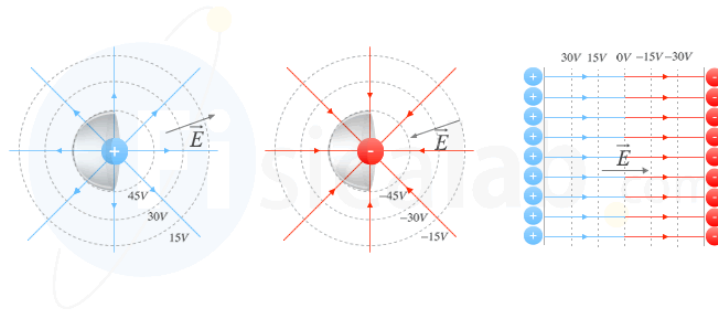


FIGURA 13: Diagrama de movimiento de cargas en un campo eléctrico

Donde las líneas discontinuas son las líneas equipotenciales, donde todos los puntos sobre ellas tienen el mismo potencial, ya que están a la misma distancia de la carga. Se puede ver como en la tercera hay una diferencia de potencial entre un grupo de cargas, y que el campo eléctrico circula de positivo a negativo. Las líneas de campo siempre salen de una carga positiva y entran en una carga negativa.

## 4.3. Movimiento de una carga a través de un campo eléctrico

Una carga siempre se moverá siguiendo la fuerza electrostática, es decir la carga multiplicada por el campo eléctrico:

$$\vec{F}_e = q\vec{E}$$

Hay que tener en cuenta que una carga positiva se mueve en el sentido del campo eléctrico, y una negativa al contrario. También se pueden entender esto como que la carga se mueve en el sentido del potencial (el cual tiene signo).

## 4.4. Onda electromagnética

Es lo mismo que las ondas armónicas planas pero solo que son ondulaciones en el campo eléctrico y magnético que son perpendiculares entre si y suceden al mismo tiempo:

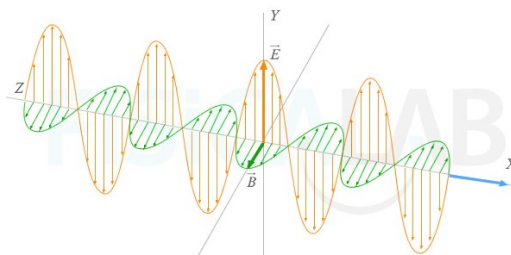


FIGURA 14: Onda electromagnética

La dirección de propagación de una onda viene definida por el producto vectorial de los campos:

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu}$$

También cabe destacar que tiene propiedades como la polarización y puede ser absorbida o reflejada.

## 5. Electromagnetismo

### 5.1. Fuerza sobre conductores rectilíneos debajo de la acción de un campo magnético

Si tenemos un hilo conductor de longitud  $L$  y por el cual circula una corriente  $I$ , la fuerza magnética de  $N$  portadores de carga se puede expresar como:

$$\vec{F}_m = Nq(\vec{v} \times \vec{B}) = Nq \left( \frac{\vec{L}}{\Delta t} \times \vec{B} \right) = \frac{Nq}{\Delta t} \vec{L} \times \vec{B}$$

Debido a que se  $\frac{Nq}{\Delta t}$  es la Intensidad de la corriente, la fuerza se puede escribir como:

$$\vec{F}_m = I\vec{L} \times \vec{B}$$

### 5.2. Partícula cargada en campo magnético

Al ser la fuerza magnética perpendicular a la velocidad, cuando una partícula cargada entra un campo magnético esta describe una trayectoria circular o elíptica:

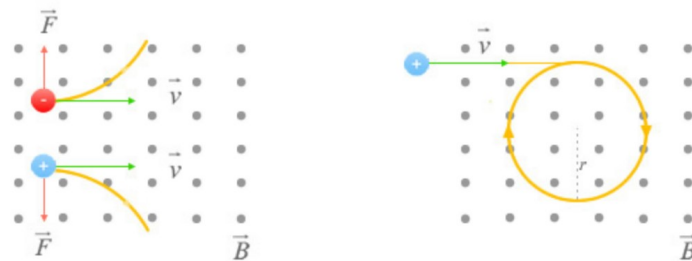


FIGURA 15: Ejemplo de partícula en un campo magnético. Se puede sacar el sentido de la rotación utilizando un producto vectorial o la regla de la mano derecha.

A partir de esta igualdad se puede obtener el radio y período de esta trayectoria:

$$\vec{F} = m\vec{a} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Asumiendo que el campo y la velocidad son perpendiculares, podemos utilizar  $q(\vec{v} \times \vec{B}) = qvB$ :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= qvB \\ \Rightarrow \vec{a} &= \frac{qvB}{m} \end{aligned}$$

Al ser la aceleración, una aceleración centrípeta, ya podemos saber el radio:

$$\begin{aligned} a_c &= \frac{qvB}{m} = \frac{v^2}{r} \\ \Rightarrow r &= \frac{mv}{qB} \end{aligned}$$

Y el período:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{qB}{m} \\ \Rightarrow T &= \frac{2\pi m}{qB} \end{aligned}$$

### 5.3. Inducción campo magnético

#### 5.3.1. Conductor rectilíneo

Un conductor rectilíneo por el cual circula una corriente  $I$ , genera un campo magnético de intensidad:

$$B = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{d}$$

Donde  $d$  es la distancia a la cual se encuentra el punto que tiene esa intensidad.

Utilizando la regla de la mano derecha se puede ver como los dedos indican el sentido del campo circular que se genera: (el pulgar tiene que ir en la dirección y sentido de la intensidad)

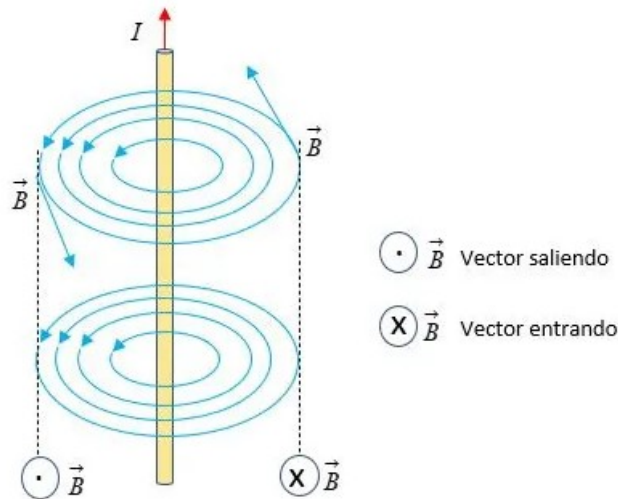


FIGURA 16: Campo magnético generado por un conductor rectilíneo

#### 5.3.2. Espira

Asimismo una espira circular genera un campo magnético en su centro su centro dependiendo de su radio  $R$  y intensidad:

$$B_{\text{centro}} = \frac{\mu I}{2R}$$

Cuando hay  $N$  juntas la intensidad se multiplica por  $M$ :

$$B_{\text{centro}} = N B_{\text{espira}} = \frac{N \mu I}{2R}$$

#### 5.3.3. Solenoide

Si se colocan varias espiras unidas, por las cuales circula una corriente se obtiene un solenoide, el cual es su eje tiene una intensidad de campo magnético inducido de:

$$B_{\text{int}} = \frac{\mu N I}{L} = \mu n I$$

Donde  $n = \frac{N}{L}$  es la densidad de espiras.

### 5.4. Fuerza magnética sobre una carga

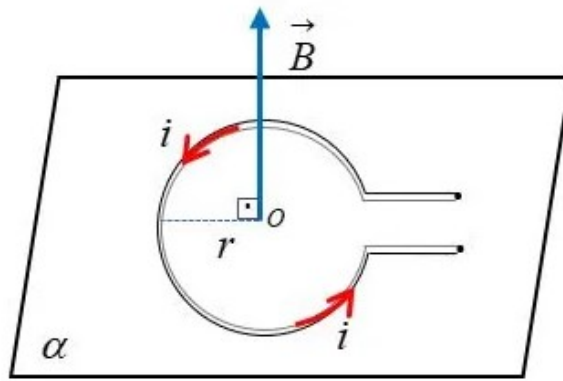
La fuerza de Lorentz describe la fuerza magnética sobre una carga que ubica sobre un campo magnético:

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

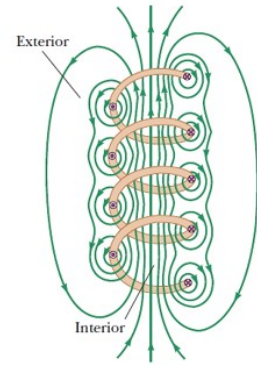
A través de la definición del producto vectorial podemos ver que:

$$F_m = qvB \sin \theta$$





(A) Campo magnético inducido por una espira



(B) Campo magnético inducido por un solenoide

FIGURA 17

Donde  $\theta$  es el ángulo entre el vector de la velocidad y el campo magnético sobre un plano. Entonces si la velocidad y el campo son ortogonales entre si la intensidad será simplemente  $F_m = qvB$ .

Podemos generalizar esta ecuación considerando la existencia de un campo eléctrico:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

También se puede ver como solo existe la fuerza en caso de que la carga entre en movimiento.

En caso de que sean perpendicular la carga comenzará a describir un movimiento circular:

$$qvB = m \frac{v^2}{R}$$

Por lo tanto, el radio de la trayectoria es:

$$R = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}$$

## 5.5. Flujo magnético y fuerza electromotriz

El flujo magnético es una magnitud que cuantifica la cantidad de líneas de campo que atraviesa una determinada superficie:

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \theta$$

Se calcula a partir del producto escalar entre el vector que define el campo magnético y el vector que define la superficie que atraviesa el campo. Se puede simplificar mediante el coseno del ángulo entre el vector del campo y el vector normal de la superficie.

Al derivar el flujo magnético sobre el tiempo se llega a la fuerza electromotriz:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}$$

En caso de que sean una superficie variable (que se mueve) la fuerza electromotriz depende de su velocidad:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -BLv$$

Donde  $L$  es la longitud de una varilla conductora.