

Mates: Selectividad 2022

tomiock

3 de junio de 2022

Los contenidos consisten en tres grandes bloques (Álgebra Lineal, Geometría y Análisis), pero el examen tiene tan solo 6 preguntas (de las cuales se escogen 4).

1. Álgebra Lineal

1.1. Operaciones con matrices

Las matrices tienen definida una suma, producto y producto por escalar.

Ejemplo de suma de matrices 2×2 :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 & a_4 + b_4 \end{pmatrix}$$

Tiene que tener las mismas dimensiones.

En cambio con el producto entre dos matrices, estas no tienen que tener las mismas dimensiones necesariamente. Tal solo el número de filas de una tiene que ser igual que el número de columnas de la otra y viceversa¹. Producto entre dos matrices:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$$

O un ejemplo más claro con 2 matrices (2×2):

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

Se puede ver como es un producto escalar entre vectores que forman columnas y filas:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \\ c_7 & c_8 & c_9 \end{bmatrix}$$

FIGURA 1: Esquema de la multiplicación entre dos matrices, el producto escalar de los vectores resaltados en verde dan lugar al escalar marcado en azul. Se coge una fila de la primera matriz y una columna de la segunda. Debido a esto el producto de matrices no es conmutativo $AB \neq BA$.

Al multiplicar una matriz por un escalar (número), se multiplican todos los elementos de la matriz por ese escalar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times (1) & 5 \times (4) \\ 5 \times (3) & 5 \times (2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 15 & 10 \end{pmatrix}$$

¹ $(m \times n) \cdot (n \times m) \mapsto (m \times m)$

1.2. Determinantes

El determinante es la variación el área/norma que causa una transformación lineal aplicada a una superficie/vector.

El determinantes de una matriz (2×2) se calcula con la siguiente regla:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Mientras que para una matriz (3×3) se puede utilizar la expansión de Laplace²:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

Donde se puede utilizar cualquier columna o fila para expandir la matriz. Dependiendo de la cual, cambia el signo que tiene el determinante. Para un menor M_{ij} el signo que tiene su elemento en la expansión es $(-1)^{i+j}$. Usualmente se da una matriz con un parámetro y se ha de tomar el determinante de esta, resultando en una ecuación de segundo grado normalmente. Es indispensable saber la expansión de Laplace.

1.3. Rango de una matriz

El rango de una matriz es el máximo número de vectores independientes que se pueden sacar de la matriz, ya sean columnas o filas (y no una combinación de las dos). Se puede calcular el rango a partir del orden máximo de los menores no nulos de la matriz (cuando su determinante no es 0).

Si hay en una matriz hay un menor no nulo de orden k y todos los menores de orden $k + 1$ son nulos, entonces el rango de la matriz es k .

Conviene calcular el rango a través de la linealidad de las columnas o filas si se ve inmediatamente. No se pedirá calcular el rango de una matriz de mayor orden que 3.

1.4. Matriz inversa

A^{-1} es la matriz inversa de A si:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

En otras palabras:

$$\exists A^{-1} \iff AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Se denomina matriz regular a una matriz que tiene inversa.

1.4.1. Cálculo de una matriz inversa

Se puede calcular mediante la matriz adjunta:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^\dagger)^T$$

Donde A^\dagger es la matriz adjunta, definida mediante sus elementos como:

$$m_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \quad (1)$$

Para una matriz A de orden 2, su adjunta será:

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad (2)$$

Y para una matriz A de orden 3, su adjunta será:

$$A^\dagger = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix} \quad (3)$$

²Muy útil para el cálculo de productos vectoriales entre vectores.

Se pueden ver como el elemento de la fila i y la columna j es el menor M_{ij} de la matriz A . El término $(-1)^{i+j}$ de la ecuación 1 indica el signo que se le da a los menor dependiendo de la posición. No hace falta saber la ecuación 1, se puede aprender a hacer mecánicamente con la ecuación 3 y 2.

Haciendo la transpuesta de la adjunta y dividiendo los componentes entre el determinante de la matriz original es como se calcula la inversa de esta.

Sin embargo, usualmente no es necesario utilizar este método porque se puede calcular mediante la resolución de una ecuación matricial, como en este ejemplo:

$$\begin{aligned}M^2 - M - 2I &= 0 \\M - I - 2M^{-1} &= 0 \\-I - 2M^{-1} &= -M \\M^{-1} &= \frac{M - I}{2}\end{aligned}$$

Siendo M una matriz que cumple $M^2 - M - 2I = 0$.

1.5. Discusión de sistemas

Los sistemas de ecuaciones se pueden representar mediante matrices:

$$\begin{cases} px + y + z = 2 \\ 2x + py + p^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} p & 1 & 1 & 2 \\ 2 & p & p^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Donde la última columna representa a que equivale la combinación lineal de los parámetros. Sin embargo siempre que se piensa a discutir el sistema se prescinde de esta columna:

$$\left(\begin{array}{ccc} p & 1 & 1 \\ 2 & p & p^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Dependiendo del rango de estas matrices (denominando la primera como matriz ampliada), podemos diferenciar 3 tipos de sistemas de ecuaciones:

1. Sistema Compatible Determinado:

Sistema que tiene un número finito de soluciones. Para un sistema M con una matriz ampliada M' , es compatible determinado si el rango de ambas matrices es el orden de M :

$$r(M) = r(M')$$

Si el rango de la matriz es su número de filas se dice que es una matriz 'full rank' o de rango completo. Para ser un sistema compatible determinado, ambas matrices han de ser de rango completo.

2. Sistema Compatible Determinado:

Sistema que tiene infinitas soluciones. Lo es cuando $r(M) = r(M') < \text{orden de } M$. Como ejemplo esta el siguiente sistema:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & 8 & 0 \end{array} \right)$$

Aplicando Gauss podemos ver que:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & 8 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

Y como la matriz tiene dos filas iguales, tiene rango 2. Después al mirar M podemos identificar un menor con determinante no nulo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

Al tener este menor orden 2, podemos decir que el rango de la matriz A es igual a 2.

Al tener la matriz del sistema y su matriz ampliada el mismo rango, siendo esta menor que el orden de la matriz del sistema, se puede decir que el sistema es compatible determinado.

3. Sistema Incompatible:

Un sistema que no tiene soluciones. Simplemente es cuando $r(M) \neq r(M')$.

1.6. Resolución de sistemas

1.6.1. Método de Gauss

Se pueden hacer operaciones de filas en las matrices para de esta manera mirar si sus vectores son dependientes o no. Estas operaciones pueden ser las siguientes:

1. Permutación de filas (intercambiar de sitio)
2. Multiplicación de fila por escalar
3. Resta/Suma de una fila por otra

Con estas operaciones se puede conseguir una matriz triangular superior:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 9 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{array} \right)$$

A partir de ella se puede resolver el sistema:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 6 & 9 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 2x + 6y + 9z = 1 \\ -3y + 6z = 1 \\ 7z = 5 \end{cases}$$

Y entonces $z = \frac{5}{7}$, y a partir de esto se puede resolver todo el sistema.

1.7. Método de Cramer

Este método no se puede aplicar en sistema indeterminados.

Se pueden obtener los parámetros con:

$$x = \frac{\Delta_x}{|M|} \quad y = \frac{\Delta_y}{|M|} \quad z = \frac{\Delta_z}{|M|}$$

Para un sistema:

$$\begin{cases} m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + m_{13}x_3 = b_1 \\ m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + m_{23}x_3 = b_2 \\ m_{31}x_1 + m_{32}x_2 + m_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Con su matriz ampliada siendo:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} m_{11} & m_{12} & m_{13} & b_1 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & b_2 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & b_3 \end{array} \right)$$

Donde Δ_x es:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & m_{12} & m_{13} \\ b_2 & m_{22} & m_{23} \\ b_3 & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}$$

Podemos ver como la primera columna ha sido sustituida por el vector \vec{b} , donde $M\vec{x} = \vec{b}$.

2. Geometría

2.1. Vectores

No sé muy bien como explicar que es un vector sin empezar a hablar de mates de la uni, pero lo bueno es que no es necesario saber lo que es. Piensa que es como un número de tres dimensiones que señala un punto en un espacio vectorial³.

Por ejemplo esto es un vector:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Donde sus componentes son x_1, x_2, x_3 .

Dado un conjunto de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una combinación lineal de estos vectores es:

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n \text{ tal que } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

Los vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ son linealmente independientes si:

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

Donde se puede ver que es verdad si para un conjunto de vectores independientes solo si $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

2.2. Ecuaciones del plano y la recta

2.2.1. Recta

Es posible definir una recta 3D solo con un punto de posición y un vector director:

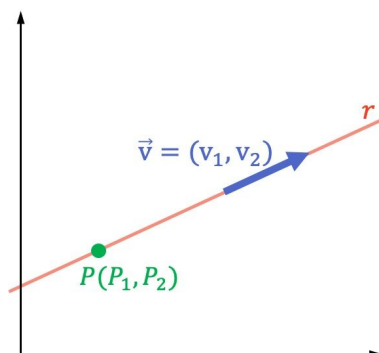


FIGURA 2: Recta en el espacio con su vector director y punto de posición.

Esto matemáticamente se expresa como (**Ecuación Vectorial**):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$
$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Podemos transformar estos vectores en un sistema de ecuaciones (**Ecuación Paramétrica**):

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 \end{cases}$$

Es posible aislar el número λ para igualar las ecuaciones (**Ecuación Continua**):

$$\lambda = \frac{x - x_0}{u_1} = \frac{y - y_0}{u_2} = \frac{z - z_0}{u_3}$$

³Tampoco explicaré que es un espacio vectorial porque es chungo hacerlo y no importa mucho. Siempre vamos a trabajar con el mismo espacio, uno de vectores con componentes reales en tres dimensiones.

2.2.2. Plano

En cambio, un plano se puede definir con un punto de posición y dos vectores:

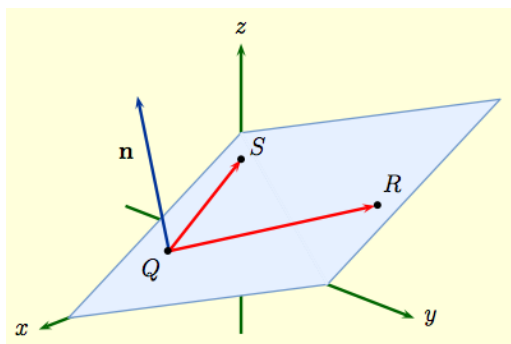


FIGURA 3: Se puede ver como el punto de posición Q y los vectores S y R , pueden definir el plano. También está el vector normal \vec{n} .

Por lo tanto se puede definir un plano con la siguiente **Ecuación Vectorial**:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \lambda \in \mathbb{R}$$

La **Ecuación Paramétrica** sería:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

De la ecuación vectorial, sabemos que el vector $\vec{x} - \vec{p}$ es una combinación lineal de los vectores \vec{u} i \vec{v} . Por lo tanto los vectores $\vec{x} - \vec{p}, \vec{u}, \vec{v}$ son linealmente dependientes y por lo tanto el determinante de la matriz que forma deberá de ser 0:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u_1 & v_1 \\ y - y_0 & u_2 & v_2 \\ z - z_0 & u_3 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Utilizando la expansión de Laplace acabamos en esta ecuación:

$$(x - x_0) \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} - (y - y_0) \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} + (z - z_0) \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}$$

Que utilizando un poco de álgebra, podemos acabar con:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Es muy común que en los exámenes se pregunte está ecuación de un plano para definirlo. Se denomina **Ecuación General o Cartesiana**.

A partir de esta también se puede definir el vector normal del plano o el vector asociado al plano. Es un vector que es perpendicular al plano. Sus componentes son los parámetros de la ecuación general:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

El número D no forma parte del vector, ya que su función es indicar la posición del plano en el espacio, no su orientación.

También se puede repasar como definir a una recta a partir de dos planos pero es bastante trivial en mi opinión. Simplemente si te dan dos planos tienes que formar un sistema y resolverlo para un parámetro (tendrá infinitas soluciones claro).

2.3. Posiciones Relativas Planos

2.3.1. Planos paralelos

Para dos ecuaciones generales, los planos son paralelos si:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

No hay una igualdad con $\frac{D}{D'}$ porque en caso de serlo, serían planos coincidentes (el mismo plano):

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

2.3.2. Planos Secantes

A partir de dos ecuaciones generales podemos definir un sistema como:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = -D \\ A'x + B'y + C'z = -D' \end{cases}$$

Al mirar el rango de las matrices si $r(M) = r(M') = 2$, entonces el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Concretamente lo es con un grado de libertad. Estas infinitas soluciones son todos los puntos en la recta. Así también se pueden definir una recta, claro, porque si son secantes, definen una recta.

2.3.3. Posición Relativa de 3 Planos

Para tres planos con sus ecuaciones generales:

$$\begin{aligned} \pi_1 : Ax + By + Cz &= D \\ \pi_2 : A'x + B'y + C'z + D' &= 0 \\ \pi_3 : A''x + B''y + C''z + D'' &= 0 \end{aligned}$$

Con las cuales podemos definir una matriz y por lo tanto un sistema:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \\ -D' \\ -D'' \end{pmatrix}$$

Hay varios casos:

1. $r(M) = r(M') = 1$
Si el rango de ambas matrices es 1, entonces es un sistema compatible determinado con 2 grados de libertad, por lo tanto que definen un plano... y entonces pues son el mismo plano (planos coincidentes).
2. $r(M) = 1$ i $r(M') = 2$
Podemos ver como el sistema es incompatible (sin soluciones) por lo tanto no tiene ningún punto en común y entonces solo pueden ser paralelos o dos pueden ser paralelos y el restante coincidente. Para saber bien su posición, se ha de estudiar si son paralelos entre cada par.
3. $r(M) = r(M') = 2$
El sistema sería compatible indeterminado con un grado de libertad. Si te acuerdas ya hemos hablado de esto, estos planos definen una recta entre dos de ellos o los tres. Para saber exactamente como la definen pues se ha de estudiar si son el mismo plano.
4. $r(M) = 2$ i $r(M') = 3$
El sistema sería incompatible. Los tres planos no tienen ningún punto en común. Pero claro, dos de ellos si que los pueden tener, definiendo una recta ($r(M) = 2$). El tercer plano puede ser coincidente o paralelo a uno de ellos o definir otra recta. En este caso se dice que los tres planes son secantes de dos a dos.
5. $r(M) = r(M') = 3$
Realmente este es el caso más fácil, porque los planos coincidirían en un solo punto y ya está :)

2.4. Posición Relativa entre Plano y Recta

Para una recta definida como la intersección entre dos planos:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

Y un plano definido como su ecuación general ($A''x + B''y + C''z + D'' = 0$).

Es posible crear el siguiente sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D \\ A'x + B'y + C'z = D' \\ A''x + B''y + C''z = D'' \end{cases}$$

A través del cual podemos ver diversos casos:

1. $r(M) = r(M') = 2$
El sistema sería compatible indeterminado, es decir, que hay infinitas soluciones. La única posición que puede cumplir esto es que la recta forme parte del plano.
2. $r(M) = 2$ i $r(M') = 3$
El sistema sería incompatible, por lo tanto la recta únicamente puede ser paralela al plano.
3. $r(M) = r(M') = 3$
Simplemente la recta cruza el plano en un punto :)

2.5. Producto Escalar

El producto escalar entre dos vectores:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Se puede utilizar para obtener información ya que también es definido como:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$$

Donde θ es el ángulo entre los dos vectores.

Por lo tanto para $\theta = \frac{\pi}{2}$ los vectores serían perpendiculares y su producto escalar sería igual a 0, ya que $\cos \frac{\pi}{2} = 0$.

2.6. Perpendicularidad i Ángulos

Utilizar este el producto escalar en vectores asociados a un plano, nos puede decir si estos planos son perpendiculares o no, por ejemplo.

También cuando hablamos de un plano y una recta, esos son perpendiculares si el vector director de la recta y el vector asociado son linealmente dependientes.

Por último dos rectas son perpendiculares cuando sus vectores directores también lo son.

Al igual que podemos determinar la perpendicularidad entre dos objetos, también lo podemos hacer con sus ángulos, utilizando también el producto escalar (con el coseno que está en su definición).

2.7. Producto Vectorial

El producto vectorial entres dos vectores:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$
$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Se define como:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Mediante la expansión de Laplace se puede definir un vector a partir de los ejes ubicados en la matriz de arriba:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{x} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{y} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{z}$$

Este producto tiene la maravillosa cualidad de generar un vector perpendicular a los dos vectores del producto, siempre que sean independientes, claro.

También está definido un producto mixto entre tres vectores:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

El cual también es útil para el calculo de volumen, áreas y distancias.

Esta cualidad comporta que este producto tenga muchas aplicaciones sobretodo en el calculo de áreas de figuras geométricas:

1. Paralelogramo:

Para dos vectores \vec{v} i \vec{u} :

$$A = |\vec{u} \times \vec{v}|$$

2. Triangulo:

Para tres puntos Q, R, P que definen un triangulo:

$$A = \frac{1}{2} |\vec{PQ} \times \vec{PR}|$$

3. Distancia Punto y Recta:

Para una distancia d entre el punto P i una recta r (con vector director \vec{r}), que coinciden en un punto Q :

$$d(P, r) = \frac{|\vec{u} \times \vec{QP}|}{|\vec{u}|}$$

4. Volumen Paralelepípedo:

Para un paralelepípedo definido por los vectores $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$:

$$V = |[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]|$$

5. Volumen i Área Pirámide de Base Triangular:

Para una pirámide definida por los vectores $\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}$, su volumen es:

$$V = \frac{1}{3} Ah = \frac{1}{6} |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

Donde su área es:

$$A = \frac{1}{2} |\vec{v} \times \vec{w}|$$

Y su altura:

$$h = |\vec{u}| \cos \alpha$$

Donde α es el angulo entre el vector de la pirámide que va hacia arriba y el vector que define la altura (que es $\vec{v} \times \vec{w}$).

3. Análisis

3.1. Límites

Hay varios tipos de límites con varias maneras de calcularlos, pero son todas bastantes parecidas.

Dejando de lado el teorema de l'Hôpital, conviene calcular los límites con la calculadora, utilizando un número cerca al que queremos calcular el límite hacia.

$$f(x) = \frac{x^2}{4-2x} \rightarrow D_f = \{x \in \mathbb{R} | 4-2x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

Como se puede ver 2 no pertenece al dominio de la función y por lo tanto podríamos calcular el límite para solucionar la discontinuidad:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{4-2x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{4-2x} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

Para hacer los límites hacia los infinitos también se pueden hacer con la calculadora, sustituyendo la variable por un número muy grande negativo o positivo.

3.2. Asíntotas

⁴No se muy bien como definir las lo siento, pero piensa en ellas como indicadores de como la función tiende a algún valor cuando va hacia infinito o algún valor en concreto.

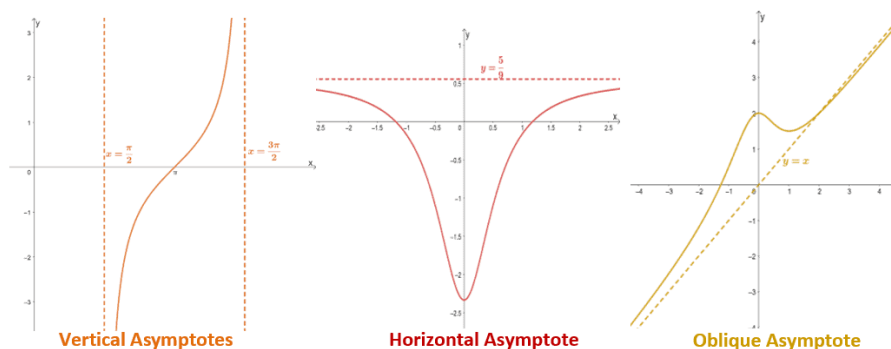


FIGURA 4: Tipos de asíntotas

1. Asíntota Vertical:

$f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = a$ si:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$$

En caso de:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

La función tiene una discontinuidad vertical en $x = a$:

2. Asíntota Horizontal:

Existe una asíntota horizontal cuando la función tiende a un número $b \in \mathbb{R}$ cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R} \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$$

3. Asíntota Oblicua:

Es cuando la función tiende a ser una recta $y = mx + n$ según x tiende a $\pm\infty$. Al existir una asíntota horizontal, es imposible que exista una oblicua. Para poder identificarlas, primero se comprueba que no haya una horizontal y luego se encuentra la m de la recta a través de este límite:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

⁴asín de tontas, jaja lo pillas?

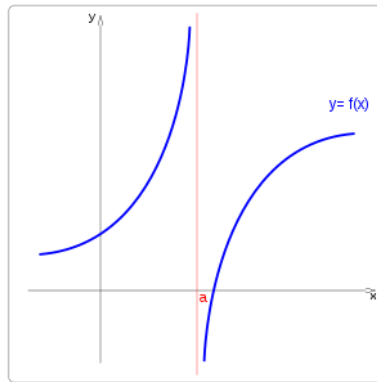


FIGURA 5: Ejemplo de discontinuidad vertical donde $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$.

Para luego encontrar la n con este:

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$$

También es posible que no haya ni horizontal ni oblicua, en ese caso al calcular el limite para encontrar m , daría un número muy grande o infinito.

3.3. Continuidad de Funciones

Una función es continua en $x = a$ cuando es verdad que:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

En caso de que no lo sea, se dice que a no está en el dominio de $f(x)$:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq a\} = \mathbb{R} - \{a\}$$

Una función es continua en un intervalo si lo es para todos los puntos en el intervalo.

Para saber la continuidad de una función sin conocer si gráfica ni realizar limites, hay que tener en cuenta varios aspectos:

1. La suma de dos funciones continuas es una nueva función continua.
2. Todas las funciones polinómicas son funciones continuas.
3. Todas las funciones exponenciales y las \sin o \cos son continuas⁵.
4. Para una función con un cociente, si el denominador es cero, esta función no es continua para el valor de x que cumple esta condición ($D_f = \{x \in \mathbb{R} | f(a) = \frac{b}{0}\} = \mathbb{R} - \{a\}$). En otras palabras si hay un cero en el denominador, la función no es continua.
5. Una función derivable en un punto, también es continua en ese punto.

Las funciones de las cuales vamos a tener que estudiar la continuidad son:

1. Polinómicas
2. Racionales
3. Trigonómicas (\cos, \sin, \tan)
4. Exponenciales i Logarítmicas
5. Con valor absoluto
6. Definición a trozos

Para todas ellas, estudiar la continuidad es muy fácil. Lo único que hay que tener en cuenta es lo dicho con anterioridad y pensar en como se pueden obtener discontinuidades, incluido las verticales, que se encuentran a través de limites.

⁵No todas las funciones trigonométricas son continuas, \tan tiene una discontinuidad vertical cada $\frac{\pi}{2}$ radianes.

3.3.1. Clasificación de puntos de discontinuidad

Hay tres tipos de discontinuidades:

1. Evitable:

Es cuando para un valor a no existe $f(a)$, pero si que los límites laterales son iguales:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b \in \mathbb{R}$$

En este caso se puede decir que es evitable, en el sentido que $f(a) = b$.

2. De Salto:

Es cuando para un valor a puede existir $f(a)$, pero los límites laterales no son iguales:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

En este caso puede o no existir $f(a) = b$ y b puede ser o no igual a uno de los límites laterales (pero no a ambos).

3. Asintótica:

Es cuando uno de los límites laterales es un valor que tiene al infinito:

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$$

3.4. Teorema de Bolzano

Me la agarras con la mano :) (regla para memorizar)

-Teorema:

Para una función $f(x)$ en un intervalo cerrado $[a, b]$ y tal que $f(a)$ i $f(b)$ sean de signo diferente ($f(a)f(b) < 0$), entonces existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

Tiene mucho sentido si lo piensas, porque para pasar de un número negativo a positivo (o viceversa) se ha de pasar por el cero.

Este teorema sirve para comprobar si existe una raíz de una función en un intervalo o si esta raíz es única en este intervalo. Existen algunas excepciones a esto, por ejemplo las funciones trigonométricas \cos o \sin .

3.5. DERIVADAS

La derivada de una función $f(x)$ es otra función $f'(x)$ que describe como varia $f(x)$ según varia x .

La derivada de una función en un punto es:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Está es la definición de una derivada. De ella podemos saber que para una función $y = f(x)$ en un punto $x = x_0$ es la pendiente tangente a la gráfica en este punto:

$$f'(x_0) = m$$

Donde m es la pendiente de una función afín $y = mx + n$.

A partir de la definición de la derivada se pueden crear reglas una especie de reglas que se utilizan para averiguar la derivada de una función.

■ Función Constante:

$$f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$$

■ Función de un monomio:

$$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \mid n \in \mathbb{Q}$$

(Para cualquier número racional n)

- Suma de funciones:

$$f(x) = p(x) + q(x) \rightarrow f'(x) = p'(x) + q'(x)$$

- Producto de función con un escalar k :

$$f(x) = kg(x) \rightarrow f'(x) = kg'(x)$$

$$f(x) = kg(x) \rightarrow \frac{df(x)}{dx} = k \frac{dg(x)}{dx}$$

Donde la notación $\frac{d}{dx}$ significa que:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

- Funciones \cos y \sin :

$$f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

- Función $\ln |x|$:

Para una función $\ln |x|$ o función $\ln x$ definida en \mathbb{R}^+ :

$$f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

- Función logarítmica:

Para una función $\log_a x$ definida en \mathbb{R}^+ :

$$f(x) = \log_a x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{x}$$

- Función Compuesta (**Regla de la Cadena**):

$$f(x) = g \circ u = g(u(x)) \rightarrow f'(x) = g'(u(x))u'(x)$$

O con otra notación sin tantos paréntesis:

$$f'(x) = \frac{dg(u)}{du} \frac{du(x)}{dx}$$

Donde la derivada $\frac{dg(u)}{du}$ es la derivada de $g(x)$ con respecto a la función $u(x)$. Para hacerla simplemente se crea un nuevo parámetro v y se define como $u(x)$, para luego tomar la derivada de $g(x)$ respecto a v .

Aplicando esto a las funciones de las que he hablado anteriormente tenemos que:

$$f(x) = [u(x)]^n \rightarrow f'(x) = n[u(x)]^{n-1}u'(x)$$

$$f(x) = \sin[u(x)] \rightarrow f'(x) = \cos[u(x)]u'(x)$$

$$f(x) = \cos[u(x)] \rightarrow f'(x) = -\sin[u(x)]u'(x)$$

$$f(x) = \ln[u(x)] \rightarrow f'(x) = \frac{1}{u(x)}u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f(x) = \log_a[u(x)] \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\ln a} \frac{1}{u(x)}u'(x) = \frac{1}{\ln a} \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$f(x) = [u(x)]^n \rightarrow f'(x) = n[u(x)]^{n-1}u'(x)$$

■ Producto de Funciones⁶:

$$f(x) = g(x)h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

■ Funciones 'Inversas':

$$f(x) = \frac{1}{g(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}$$

■ Cociente de Funciones:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

■ Funciones Exponenciales:

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = e^{u(x)} \rightarrow f'(x) = e^{u(x)}u'(x)$$

$$f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x \ln a$$

$$f(x) = a^{u(x)} \rightarrow f'(x) = a^{u(x)}u'(x) \ln a$$

■ Funciones con Funciones de Exponente:

$$f(x) = g(x)^{h(x)} \rightarrow f'(x) = [g(x)]^{h(x)} \left[h'(x) \ln(g(x)) + h(x) \frac{g'(x)}{g(x)} \right]$$

■ Inversa de Funciones Trigonométricas:

$$f(x) = \sin^{-1} u(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2(x)}} u'(x)$$

$$f(x) = \cos^{-1} u(x) \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2(x)}} u'(x)$$

$$f(x) = \tan^{-1} u(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+u^2(x)} u'(x)$$

3.5.1. Funciones Derivables (o no)

Para un punto x_0 , la función $f(x)$, no es derivable si el siguiente límite no existe:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Esto pasa con las siguientes discontinuidades:

1. Discontinuidad Evitable
2. Discontinuidad de Salto
3. Discontinuidad Asintótica

No obstante es de mayor importancia recordad que una función derivable en un punto es continua en ese punto.

⁶ $fg = f'g + fg'$

3.6. Estudio de Funciones

Hay varios aspectos a los que mirar para el estudio de las funciones:

1. Dominio i Recorrido:

El dominio es simplemente todos los puntos en los cuales la función es continua. Mientras que el recorrido son todas las y que existen para $y = f(x) \forall x \in D_f$

2. Puntos de Corte con los Ejes:

Solucionar las ecuaciones:

$$0 = f(x_0)$$

$$y_0 = f(0)$$

Para definir el corte con el eje OX $(x_0, 0)$ y el corte en el eje OY $(0, y_0)$.

3. Simetrías:

Existe una simetría en la función si para dos puntos a, b , la función de estos tiene el mismo valor:

$$f(a) = f(b)$$

La simetría puede ser en un intervalo o en un punto en concreto.

4. Limites al infinito:

Ya he hablado antes sobre esto x1

5. Asíntotas:

Ya he hablado antes sobre esto x2

6. Continuidad:

Ya he hablado antes sobre esto x3

7. Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento:

Las funciones tiene intervalos en los que crecen y en los que decrecen (menos las funciones constantes, claro). Con la derivada se puede ver inmediatamente que:

- Funciones Creciente cuando:

$$f'(x_0) > 0$$

- Funciones Decrecientes cuando:

$$f'(x_0) < 0$$

A partir de mirar varios puntos, es como se puede construir un intervalo. Hay que recordad que una derivada puede dar 0 (veremos a continuación que pasa si se da el caso) o que hay puntos en un intervalo que no pueden ser derivables (si hay discontinuidades).

8. Máximos y Mínimos Relativos:

Se puede ver como cuando una función pasa de ser creciente a decreciente, existe un máximo relativo entre esos dos intervalos. Asimismo, cuando pasa de decreciente a creciente, existe un mínimo relativo.

Estos puntos cumplen con la condición de que su derivada es 0:

$$f'(x_0) = 0$$

Sin embargo para encontrar esos puntos es mejor emplear el concepto de segunda derivada. Para una función $f(x)$, su segunda derivada $f''(x)$ es⁷:

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} f(x) \right] = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

Cuando empleamos la segunda derivada en un punto x_0 , este es un máximo relativo cuando:

$$f'(x_0) = 0 \text{ y } f''(x_0) < 0$$

Asimismo, para un punto x_0 en el que hay un mínimo relativo, es verdad que:

$$f'(x_0) = 0 \text{ y } f''(x_0) > 0$$

⁷Hay que recordar que $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{df(x)}{dx}$

9. Concavidad i Convexidad:

Cuando se habla de si la primera derivada crece o decrece, hablamos si esta es cóncava o convexa. No importa mucho que es lo que significa esto intuitivamente, pero como lo pregunta en el examen tenemos que saber como se hace: Un intervalo donde la segunda derivada es positiva $f''(x) > 0$, en este intervalo, la derivada es cóncava. En caso de que sea negativa $f''(x) < 0$ esta es convexa.

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 \quad f'(x) \text{ crece en } x &\Rightarrow f(x) \text{ es cóncava} \\ f''(x) < 0 \quad f'(x) \text{ decrece en } x &\Rightarrow f(x) \text{ es convexa} \end{aligned}$$

10. Puntos de Inflexión:

Son los puntos cuando la función pasa de ser convexa a cóncava o viceversa. A partir de las definiciones se pueden ver que estos puntos es cuando la segunda derivada es 0:

$$f''(x) = 0$$

Hay que mencionar que cuando se encuentra un punto nulo de la primera derivada, conviene ver si en ese punto la segunda derivada también lo es, porque en ese caso tendríamos un punto de inflexión, no un mínimo o máximo.

11. ¿Tienes un resumen de todo esto, por favor?

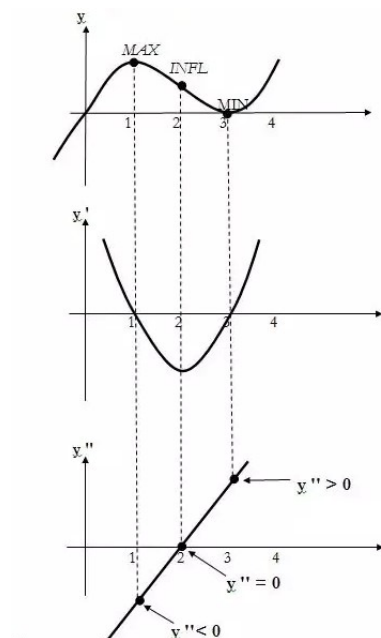


FIGURA 6: Aquí tenemos unas gráficas ilustrativas de como se relacionan la primera y segunda derivada de una función.

Pero aquí tenéis una tabla bien chula que sirve como resumen de todo esto:

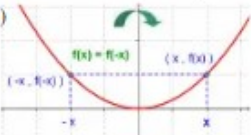
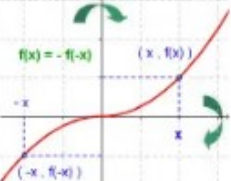
	CARACTERIZACIÓN	OBSERVACIONES
Dominio	Valores de x para los que hay función, $Dom f(x) = \{x \in \mathbb{R} / \exists f(x)\}$	$\exists \frac{f(x)}{g(x)}$ si $g(x) \neq 0$ $\exists \sqrt[n]{f(x)}$ si $f(x) \geq 0$ $\exists \log_b f(x)$ si $f(x) > 0$
Simetría	$f(x) = f(-x) \Rightarrow$ función PAR (simetría respecto eje OY)  $f(x) = -f(-x) \Rightarrow$ función IMPAR (simetría respecto al punto (0,0)) 	- Si es una función PAR o IMPAR, basta hacer el estudio para $x \geq 0$ y por simetría obtener la gráfica para $x \leq 0$.
Período	$f(x) = f(x+T) \Rightarrow T$ período (mínimo que lo cumple)	- Tenerlo en cuenta en las funciones con razones trigonométricas.
ESTUDIO DE $f(x)$		
Puntos de corte con los ejes	$P.Corte\ eje\ OY \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} *$ $P.Corte\ eje\ OX \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} **$	- Los puntos de corte con el eje OY son de la forma (0,a) y se obtienen resolviendo el sistema * - Los puntos de corte con el eje OX son de la forma (b,0) y se obtienen resolviendo el sistema **
Signo	$f(x) > 0 \Rightarrow$ gráfica por encima de OX $f(x) < 0 \Rightarrow$ gráfica por debajo de OX	- Estudiar el signo de $f(x)$ en las regiones que resultan de introducir $f(x) = 0$ \mathbb{R} - Tachar las zonas no válidas, donde no habrá gráfica.
ESTUDIO DE $f'(x)$		
Extremos relativos	$f'(x) = 0 \Rightarrow$ "posibles" máximos o mínimos.	- Será máximo si $f'(x) = 0$ y cambia de crecer a decrecer. - Será mínimo si $f'(x) = 0$ y cambia de decrecer a crecer. - La segunda coordenada del punto se obtiene sustituyendo el valor de x en $f(x)$
Monotonía	$f'(x) > 0 \Rightarrow$ función creciente $f'(x) < 0 \Rightarrow$ función decreciente	- Estudiar el signo de $f'(x)$ en las regiones que se obtiene de introducir $f'(x) = 0$ \mathbb{R}
ESTUDIO DE $f''(x)$		
Puntos de inflexión	$f''(x) = 0 \Rightarrow$ "posibles" puntos de inflexión.	- Será punto de inflexión si $f''(x) = 0$ y cambia de curvatura. - La segunda coordenada del punto se obtiene sustituyendo el valor de x en $f(x)$
Curvatura	$f''(x) > 0 \Rightarrow$ función cóncava hacia arriba $f''(x) < 0 \Rightarrow$ función cóncava hacia abajo	- Estudiar el signo de $f''(x)$ en las regiones que se obtiene de introducir $f''(x) = 0$ \mathbb{R}



FIGURA 7: RESUMEN DE TODO ESTO (hay un error cuando se habla de la curvatura (cóncava/convexa), cuando $f''(x) > 0$ es cóncava y cuando $f''(x) < 0$ es convexa).

3.7. Representaciones Gráficas

De tanto en tanto salen ejercicios en los cuáles hay que representar gráficamente una función que te dan, con las herramientas que de las que he hablado en la sección anterior es muy fácil hacerlo. Lo más importante es empezar sabiendo los puntos de corte de una función, además de cuando esta es nula. Luego se pasa a dibujar los mínimos y máximos (si es que los hay), y finalmente dibujar puntos de inflexión (en caso de que los haya también).

Si no te gusta hacerlo de esta manera, utiliza una tabla de valores. También conviene saber aproximadamente como dibujar una parábola o una función logarítmica, para hacerse una idea general de como se deberían de dibujar este tipo de funciones.

Además es posible que se relacionen estas gráficas o funciones son situaciones 'reales' geométricas, científicas y tecnológicas.

3.8. Problemas de Optimización

En estos problemas hay que encontrar dos funciones, una que sirva para expresar la función que se ha de optimizar (encontrar el máximo o mínimo con una segunda derivada) y otra función que nos sirve de condición para derivar la primera.

La función de condición se ha de expresar como una variable y luego sustituirla en la que se optimiza, una vez hecho esto se puede derivar para encontrar el máximo o mínimo.

La dificultad de estos problemas normalmente radica encontrar las funciones, no es hacer los cálculos para saber en que punto la función es óptima. Normalmente las derivadas que se tiene que hacer son bastante sencillas.

3.9. INTEGRALES