条件（i）の歪対称性は，逆方向へのフローは符号を反転することを意味している．条件（ii）のフロー保存則は，ソースとシンク以外の頂点では，入ってきたものがちょうど出ていくことを表している．条件（iii）の容量制約は，各辺を流れる量は辺ごとに決められた容量を超えないことを表している．ある辺を容量に等しいフローが流れるとき，その辺は飽和しているという．

飽和辺：saturated edge

ソース s から流れ出るフロー f の総量

$$\sum_{(s,v)\in E} f(s,v)\left(=\sum_{(u,t)\in E} f(u,t)\right)$$

流量：net flow

をフロー f の流量といい，$|f|$ と表す．これは，シンク t に流れ込むフローの総量に等しい．

最大流問題：maximum flow problem

最大流問題とは，ソース s からシンク t まで流すことができる流量の最大値とその最大の流量を与える流し方（すなわち，関数 f）を求める問題である．

図 6.11 に対するネットワークとフローの例を図 6.12 に示す．同図において，辺（u,v）につけられたラベルの分母が $c(u,v)$ を示し，分子が $f(u,v)$ を示している．

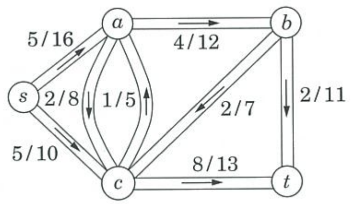

図 6.12　水道網に対するネットワークとフロー

2.　最大流最小カット定理

最大流最小カット定理：maximum flow minimum cut theorem

ここでは，まずネットワークの最大流とネットワーク（グラフ）の構造の関係を示し，それに基づく最大流を計算するアルゴリズムについて概説する．

ネットワーク $G=(V,E,c)$ が与えられたとき，その頂点集合 V を互いに共通部分をもたない 2 つの部分集合 S と T に分割する方法は多数考えられるが，ソースとシンクが分離されるように，すなわち $s\in S$，$t\in T$ となるように分割するものを特に s,t-カットと呼ぶ．s

カット：cut

と t が異 … は単にカットという．図 6.13 は s,t-カットの例を示し … が，この図のように，カット（S,T）は辺を横切る曲線 … 定できる．その曲線を横切る辺には，S から T に向か … S に向かう辺がある．このうち S から T へ向かう辺の容量の総和をカット（S,T）の容量と定義し，$c(S,T)$ と表す．図 6.13 の例では，(a,b)，(b,c)，(c,t) の 3 本の辺が交差するが，その中で (b,c) だけが逆の方向をもつ．したがって，カット容量は

$$c(S,T)=c(a,b)+c(c,t)=12+13=25$$

ということになる．

大文字

一般には

$$c(S,T)=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} c(u,v)$$

と定義する．フロー f に対して，カットを横切るフロー $f(S,T)$ を

$$f(S,T)=\sum_{u\in S}\sum_{v\in T} f(u,v)$$

と定義する．

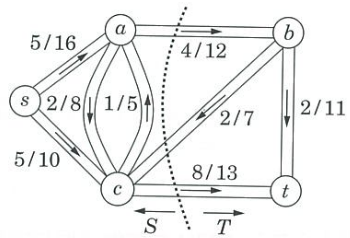

図 6.13　ソースとシンクを分離する s,t-カットの例

ここでは証明をしないが，フロー保存則を用いると，任意のカット（S,T）に対して $|f|=f(S,T)$ が成り立つ．

フローの条件（iii）より，フローの流量はカットの容量を超えない．また，カットの容量と等しい流量をもつフローが存在するが，明らかにそれ以上流すことはできないから，そのフローのことを最大流と呼ぶ．

最大流：maximum flow

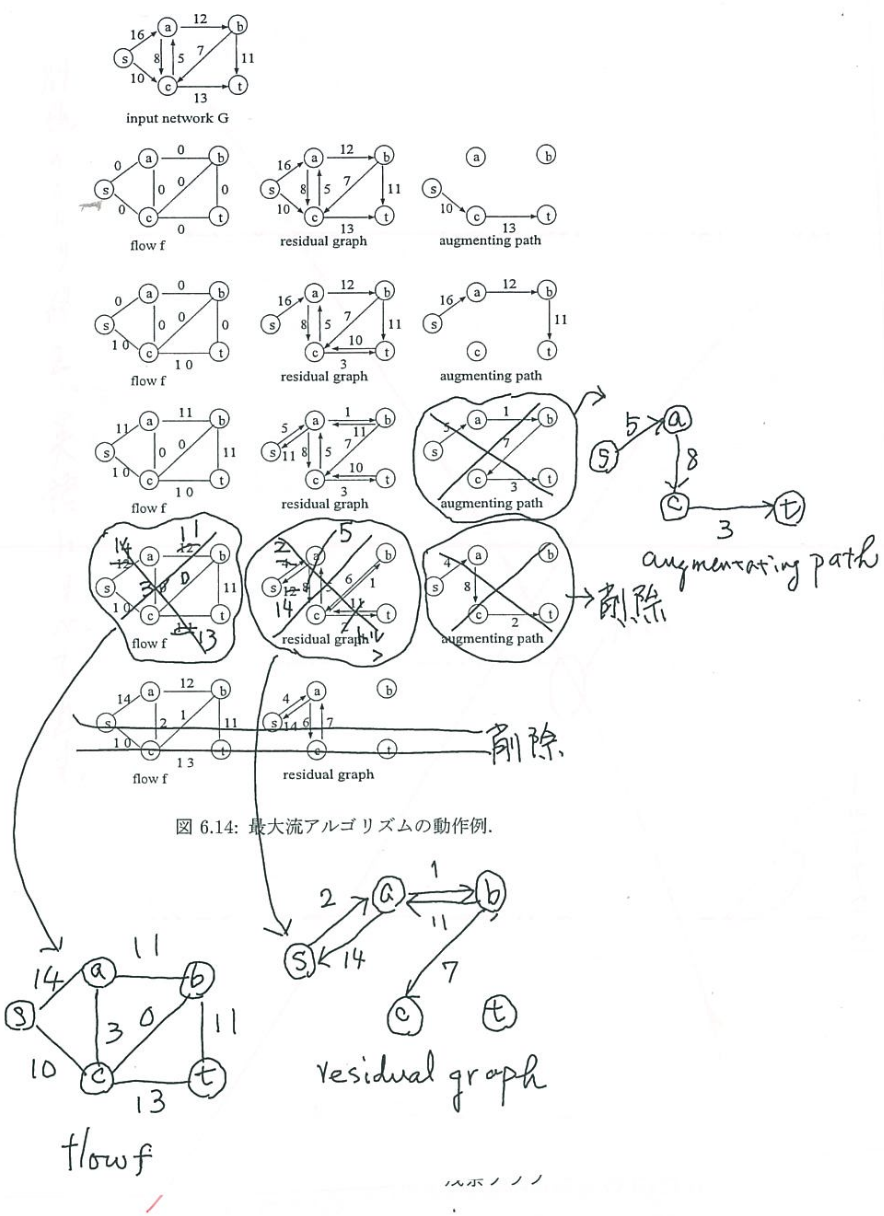

図 6.14: 最大流アルゴリズムの動作例.

図 6.14 最大流アルゴリズムの動作例

　更新されたフロー f に対する残余グラフを G_f とする.
}
f を最大フローとして出力する.

図 6.14 は，図 6.12 のネットワークに対して最大流アルゴリズムを適用したときの動作例を示したものである.

この最大流アルゴリズムの計算時間を解析しよう．ネットワークの容量はすべて整数であると仮定しよう．残余グラフにおける拡張可能経路は幅優先探索を用いることにより，辺数に比例する $O(|E_f|)=O(m)$ 時間で求めることができる．拡張可能経路によって更新されるフローの値は少なくとも 1 増えるので，最大流の値を $|f_{\max}|$ とすると，繰返しはたかだか $|f_{\max}|$ 回でよい．したがって，最大流アルゴリズムの計算時間は $O(|f_{\max}|m)$ となる.

容量が整数で，最大流の値も比較的小さいときには上記のアルゴリズムで問題はないが，この条件が成り立たない場合には別のアルゴリズムを用いなければならない．幸い，最大流の値に関係なく $O(|V||E|^2)$ 時間で最大流を求める Edmonds と Karp によるアルゴリズムのほか，$O(|V|^3)$ 時間のアルゴリズムも知られている.

演習問題

問 1　スタックを用いて後置記法で表された式を左から順に見ていき，式を評価するアルゴリズムを書け.

問 2　再帰版の深さ優先アルゴリズムを変更して式を表現した 2 分木から前置記法，中置記法，後置記法にそれぞれ変換するアルゴリズムを示せ.

問 3　フロー保存則を用いて，任意のカット A,B に対して $|f|=f(A,B)$ が成り立つことを証明せよ.

問 4　ネットワークを $G=(V,E,c)$ とする．A,B を任意のカットとし，f を任意のフローとする．このとき，$|f|\leq c(A,B)$ が成り立つことを証明せよ.

問 5 簡単のため，ハッシュ表に格納するデータは正の整数とする．ハッシュ表の値 0 で最初から空であり続けたことを表し，-1 で削除によって空になったことを表す．

```
削除すべきデータ x を入力する;
j = hash(x);
while(htb[j] != 0 かつ htb[j] != x )
   j = (j+1) % m;//次の場所へ移動
if(htb[j] == x) htb[j]=-1;
else -1 を返して終了;
```

5章

問 1 列の最大値が列の右端にあるときには要素の交換を実行しないほうが効率がよさそうであるが，要素の交換をやめるためには列の最大値として求めた位置が列の右端かどうかを判定する手間が余分に必要になるが，交換に要する 3 回の代入文が不必要になり，手間を省くことができる．両者を比較したとき，要素の交換をしたほうが得策であるが，その節約分はデータ数に比例する程度にしかならず，全体の計算時間がデータ数の 2 乗に比例することを考慮すると効果は無視できる程度でしかない．

問 2 インサーションソートは，n 個のデータをソートするのに最悪の場合 $O(n^2)$ 時間を要するが，ほぼソートずみのデータが入力された場合には $O(n)$ 時間で処理を終わることができる．インサーションソートにおいて新たな要素を挿入すべき場所を 2 分探索によって求めることにすると，場所の発見は確かに早くなるが，どの要素についても $O(\log n)$ の手間を要するため，全体の処理を $O(n \log n)$ より早くすることができない．つまり，すでにほぼソートずみのデータが入力された場合にも $O(n \log n)$ 時間がかかってしまうのである．さらに，2 分探索を用いたとしても，配列内でのデータの移動に要する手間は減らせないので，最悪の場合にはやはり $O(n^2)$ 時間かかってしまう．

問 3 $\overline{C}(n)=n+\frac{2}{n}\overline{C}(n-1)+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-2}\overline{C}(k)$, $\overline{C}(n-1)=n-1+\frac{2}{n-1}\overline{C}(n-2)$
$+\frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n-3}\overline{C}(k)$ より，$n\overline{C}(n)-(n-1)\overline{C}(n-1)=2n-1+2\overline{C}(n-1)$.

これより，$\overline{C}(n)\leq\frac{n+1}{n}\overline{C}(n-1)+2$ を得る．

問 4 入力デー　素がないと仮定すると，クイックソートでは，ソート区間　が 2 以下なら直接的にソートし，長さが 3 以上なら，2 つの　と $[k+1, j]$ に分割し，最初の区間 $[i, k]$ を再帰的に処理した後で後の区間 $[k, j]$ の処理を行う．つねに後の区間の長さが 3 になってしまう場合を考えると，最初の区間の長さが 2 以下になるまでに約 $n/3$ 個の区間が後で処理すべき区間として残されていることになる．したがって，それらの区間を記憶するために $O(n)$ の領域が必要になる．しかし，2 つの区間のうち短いほうを先に処理することにすれば，記憶すべき区間の個数は $O(\log n)$ 個に抑えることができる．

問 5 配列の要素が正しい順に並んでいるなら，逆順ペアは存在しない．ところが，ちょうど逆順に並んでいる場合にすべてのペアが逆順ペアとなるから，逆順ペアの個数は $n(n-1)/2$ となる．

第6章

トル

~~**問 1** 木は根以外の節点 v に対して親 $Par[v]$ を与えれば指定できる．よって v が訪問されたとき，u をその親 $Par[v]$ とすればよい．~~

問 2 後置記法では各演算子の前にその演算子の項数（2 個）の被演算子がそろったらその計算を行う．したがって，後置記法を左から順に見ていき，被演算子ならそれをスタックに積んでいき，演算子が現れたときスタックの上から 2 つの被演算子を用いて計算をし，計算の途中結果の値としてスタックに積めばよい．後置記法が正しければ，最終の計算結果がスタックに積まれて計算が終了する．

1

問 3 DFS（再帰版）において，葉以外の節点 u に最初に印がつけられるときが 1 回目に訪問されたときである．また，葉以外の節点は子供が 2 つあるので 2 回再帰呼出しが行われるが，それぞれの呼出しから戻ったときがそれぞれその点を 2 回目と 3 回目に訪問されたときである．各記法に応じて，訪問された回目にその節点を出力すればよい．例えば，中置記法であれば，1 回目の再帰呼出しから戻ったときにその節点を出力すればよい．また，葉は再帰呼出しがないので，訪問されたときにその葉を出力すればよい．

2

3

問 4 まず，$X\subseteq V$ に対して，$f(X, X)=0$ となり，$X, Y\subseteq V$ に対して $f(X, Y)=-f(Y, X)$ となること，また，$X\cap Y=\phi$ であるような $X, Y, Z\subseteq V$ に対して，$f(x\cup Y, Z)=f(X, Z)+f(Y, Z)$ が成り立つことを利用して $|f|=f(\{s\}, V)$ を示せ．

問4 ロ 任意のカット A, B について，$|f| = f(A, B)$ であることと容量制約を用いよ．