SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKLUTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE VARAŽDIN

IVAN HONTIĆ

TOMISLAV HOP

DRAŽEN HRGAR

TRANSFORMACIJE PROSTORA U HOMOGENIM KOORDINATAMA

PROJEKT IZ KOLEGIJA ODABRANA POGLAVLJA MATEMATIKE

Varaždin, 2013.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKLUTET ORGANIZACIJE I INFORMATIKE VARAŽDIN

IVAN HONTIĆ – 39968/11-R

TOMISLAV HOP – 39969/11-R

DRAŽEN HRGAR – 39973/11-R

TRANSFORMACIJE PROSTORA U HOMOGENIM KOORDINATAMA

PROJEKT IZ KOLEGIJA ODABRANA POGLAVLJA MATEMATIKE

Mentor:

Prof. Dr.sc. Blaženka Divjak

Damir Horvat, prof.

Varaždin, 2013.

Sadržaj

Uvod

Homogene koordinate ili projektivne koordinate predstavljene su od Augusta Ferdinanda Möbiusa 1827. godine u radu „Der barycentrische Calcul" te ih je ujedno i nazvao *barycentric coordinates* tj. težišne koordinate. One su sustav koordinata koji se koristi u projektivnoj geometriji, poput kartezijevih koordinata u Euklidskoj geometriji. Imaju vrlo široku primjenu zbog mogućnosti da se iste operacije, množenje vektora i matrice, mogu koristiti za bilo koju geometrijsku transformaciju. Dodavanjem prividne treće dimenzije ravninskim koordinatama, proizlaze homogene koordinate. Praktično to znači da su 2D homogene koordinate zapravo 3D koordinate, a 3D homogene su 4D koordinate. Njihova prednost je da se koordinate točaka, uključujući i koordinate beskonačnosti, mogu predočiti pomoću konačnih koordinata. Homogene koordinate omogućuju projektivne transformacije koje se mogu lako prikazati matricama te se sve linearne transformacije mogu izraziti u matričnom obliku. Također, u jedinstvenom prikazu različitih vrsta transformacije i simetrija u ravnini, uporaba homogenih koordinata je od velike važnosti. Rezultat operacije množenja vektora i matrice dobije se matrica istog reda koja opisuje geometrijsku transformaciju.

Poznato nam je da je svakoj točki realnog euklidskog prostora E^3 pridružena uređena trojka nehomogenih kartezijskih koordinata (x, y, z). Uvedemo li za točku prostora supstituciju:

$$x = \frac{x}{k}, \qquad y = \frac{y}{k}, \qquad z = \frac{z}{k}$$

gdje su x, y, z, k brojevi, te se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ naziva faktor proporcionalnosti ili homogena koordinata čija je vrijednost proizvoljna no najčešće je 1, dobivamo pridruženu uređena četvorka (x, y, z, k) elemenata na način da se k pomnoži sa svakom koordinatom:

$$(x, y, z) \longrightarrow (kx, ky, kz, k), \qquad k \in \mathbb{R} \setminus\{0\}$$

koja jednoznačno daje onu uređenu trojku (x, y, z) nehomogenih koordinata točke. Međutim, jednoznačnost nije obostrana.

Naime za svaku trojku koordinata (x, y, z) postoji jedna čitava klasa četvorki $I(x, y, z, k)$, gdje je I iz istog skupa kao i koordinate ali različit od nule. Dakle više različitih uređenih četvorki može predstavljati istu točku prostora. To su četvorke homogenih koordinata točke.

Uzmemo li da točka A ima koordinate $A = (2, 4, 6)$, pridruživanjem homogenih koordinata točka ima koordinate $A =$ (4, 8, 12, 2). No pošto zapis točke u homogenim koordinatama nije jedinstven, točka A može imati i zapis $(10, 20, 30, 5), (12, 24, 36, 6) \ldots$

Uzmemo li da je $k = 0$, radi se o točkama koje nisu u konačnosti. Točke na beskonačno dalekoj ravnini imaju klase četvorki homogenih koordinata oblika $I(x, y, z, 0)$. Međutim, ne postoji točka koja bi imala koordinate $(0, 0, 0, 0)$ pa ta četvorka nije dozvoljena.

Homogene koordinate se često koriste u računalnoj grafici jer dozvoljavaju da se česte operacije poput translacije, rotacije, skaliranja i perspektivne projekcije implementiraju kao matrice. Neki od poznatijih grafičkih sustava koji koriste prednosti homogenih koordinata su OpenGL i DirectX.

Zadatak 1

Pogledajte kako izgleda implicitni oblik jednadžbe ravnine u homogenim koordinatama i njezine parametarske jednadžbe. Kako glase parametarske jednadžbe pravca u homogenim koordinatama? Na koji način dobijemo beskonačno daleku točku na nekom pravcu? Kako glase parametarske jednadžbe nekog beskonačno dalekog pravca?

Jednadžba ravnine u implicitnom obliku dobijemo provedbom računa:

$$(x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

pa dobijemo jednadžbu ravnine u implicitnom obliku:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0$$

Parametarske jednadžbe iz kojih se izvodi jednadžba ravnine u implicitnom obliku, dobijemo iz umnoška zapisa sa parametrima koji određuju točku u ravnini, $[u \quad v \quad 1]$, i karakteristične matrice ravnine:

$$(\diamond) \qquad T = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4) = [u \quad v \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

Nakon provedbe računa $(\diamond)$ dobijemo parametarske oblike jednadžba ravnine u homogenim koordinatama:

$$x_1 = ua_1 + vb_1 + c_1$$
$$x_2 = ua_2 + vb_2 + c_2$$
$$x_3 = ua_3 + vb_3 + c_3$$
$$x_4 = ua_4 + vb_4 + c_4$$

Parametarske jednadžbe pravca u homogenim koordinatama dobijemo iz umnoška zapisa parametra točke i karakteristične matrice pravca:

$$(\spadesuit) \qquad D = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4) = \begin{bmatrix} t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x_0 & y_0 & z_0 & h_0 \end{bmatrix}$$

Provedbom računa ($\spadesuit$) dobijemo parametarske jednadžbe pravaca u homogenim koordinatama:

$$x_1 = at + x_0$$
$$x_2 = bt + y_0$$
$$x_3 = ct + z_0$$
$$(\star) \quad x_4 = dt + h_0$$

Beskonačno daleku točku na nekom pravcu dobijemo kada je faktor proporcionalnosti, odnosno $x_4 = 0$. Dakle zapis beskonačno daleke točke na nekom pravcu ima oblik:

$$(x_1, x_2, x_3, 0)$$

Kod parametarske jednadžbe pravca ($\star$) dobili bi beskonačno daleku točku na pravcu, a s time i beskonačno daleki pravac ukoliko bi parametri d i h_0 bili jednaki nuli.

Dakle homogene koordinate oblika $(x, y, 0)$ ne predstavljaju točku u kartezijevom sustavu, nego predstavljaju jedinstvenu točku u beskonačnosti u smjeru (x, y).
Kako bi smo prikazali točku u beskonačnosti, predočimo si pravac kroz točku (a, b), sa smjerom (x, y). Parametarski oblik bi izgledao ovako:

$$(a + tx, b + ty)$$

Svaka točka pravca tako ima homogene koordinate $(a + tx, b + ty, 1)$ i ekvivalentno, $(\frac{a}{t} + x,\ \frac{b}{t} + y,\ \frac{1}{t})$. Kako t završava u beskonačnosti, pomicanjem točke duž pravca u beskonačnost, homogene koordinate postaju $(x, y, 0)$. Pomicanjem u smjeru (x, y) kao i u smjeru $(-x, -y)$ završit će u istoj točki beskonačnosti predočenoj sa $(x, y, 0)$ kao i sa $(-x, -y, 0)$.

Zadatak 2

Pronadite inverz matrice F.

Formula za inverz matrice:

$$F^{-1} = \frac{1}{\det F} \cdot F^T$$

Naša početna matrica *F*:

$$F = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & t_x \\ b_1 & b_2 & b_3 & t_y \\ c_1 & c_2 & c_3 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kako bi dobili inverz matrice, početnu matricu je potrebno transponirati. To se učini tako da se zamjene redovi i stupci:

$$F^T = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix}$$

Osim transponiranja matrice, potreebno je izračunati i njezinu determinantu, a to ćemo učiniti pomoću Laplacevog pravila tako da odaberemo jedan redak ili stupac koji sadrži najviše nula. U ovom slučaju, to je četvrti redak:

$$\det F = 0 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & t_x \\ b_2 & b_3 & t_y \\ c_2 & c_3 & t_z \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & t_x \\ b_1 & b_3 & t_y \\ c_1 & c_3 & t_z \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & t_x \\ b_1 & b_2 & t_y \\ c_1 & c_2 & t_z \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^8 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\det F = 0 + 0 + 0 + 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \left(a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 \right)$$

$$\det F = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

Sada nakon što smo sve izračunali, dobivene podatke uvrstimo u formulu za inverz matrice:

$$F^{-1} = \frac{1}{a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 3

Zapišite $(*)$ *u homogenim koordinatama koristeći sa prethodno definiranom matricom F. Usporedite ta dva zapisa i komentirajte prednost zapisa u homogenim koordinatama. Pogledajte kako izgleda matrični zapis kompozicije dviju afinih transformacija u kartezijevim odnosno homogenim koordinatama.*

Imamo zadano:

$$P' = AP + T \quad (*)$$

Formula $(*)$ koja je zapisana u homogenim koordinatama:

$$P' = A \cdot P$$

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

Iz toga dobivamo $(*)$ u homogenim kordinatama:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \alpha \\ b_1 & b_2 & b_3 & \beta \\ c_1 & c_2 & c_3 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nakon usporedbe početnog zapisa i zapisa u homogenim kordinatama, vidi se da je zapis u homogenim kordinatama kraći nego početni zapis.

Matrični zapis dviju afinih transformacija u homogenim kordinatama:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \alpha_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \beta_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & \alpha_2 \\ e_1 & e_2 & e_3 & \beta_2 \\ f_1 & f_2 & f_3 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Matrični zapis dviju afinih transformacija u kartezijevim kordinatama:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}$$

Zadatak 4

Pokažite da matrice F i kF predstavljaju istu transformaciju prostora u homogenim koordinatama za svaki $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Matrica F ima oblik:

$$F = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & t_x \\ b_1 & b_2 & b_3 & t_y \\ c_1 & c_2 & c_3 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Koja se dobije od 3×3 matrice A i matrice translacije T.

Jednu točku iz Euklidskog prostora možemo zapisati kao više točaka pomoću homogenih koordinata, pa tako točku $A = (2,3,4,2)$, možemo prikazati i kao$(4,6,8,4)$, $(16,24,32,16)$, $(-6,-9,-24,-3)$ ...

Kako jednu točku možemo zapisati kao više točaka u homogenim koordinatama, tj za broj k je proizvoljan, onda i množenjem matrice sa bilo kojim brojem *k*, odnosno faktorom proporcionalnosti, dobijemo istu točku, tj. koordinate se proporcionalno transformiraju.

Pošto smo već prije spomenuli da je k faktor proporcionalnosti, provedbom računa dobijemo sljedeće:

$$k \cdot F = k \cdot \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & t_x \\ b_1 & b_2 & b_3 & t_y \\ c_1 & c_2 & c_3 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 & ka_2 & ka_3 & kt_x \\ kb_1 & kb_2 & kb_3 & kt_y \\ kc_1 & kc_2 & kc_3 & kt_z \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}, \ \forall \ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Zadatak 5

Odredite matrične prikaze u homogenim koordinatama za sljedeće transformacije prostora:

- ***translacija za vektor*** $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

Translacija (usporedni pomak) pomiče točku A, u točku A' za iznos $\vec{v}$.

$A(x, y, z)$ - opća točka prostora

$A'(x', y', z')$ - točka dobivena translacijom točke A za vektor $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$

Zatim dobijemo da je:

$$x' = x + v_x$$

$$y' = y + v_y$$

$$z' = z + v_z$$

Prethodne jednadžbe možemo zapisati i kao:

$$(x, y, z) \mapsto (x + v_x, y + v_y, z + v_z)$$

Te na kraju matrični prikaz:

$$T(v_x, v_y, v_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & 0 & v_y \\ 0 & 0 & 1 & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ***rotacija oko osi x za kut φ***

Rotirajući objekti i virtualne kamere, glavni su dio računalne animacije i igara. 3D rotacija je malo kompliciranija od 2D jer treba odrediti os rotacije.

U trodimenzionalnom prostoru objekt se rotira oko x, y ili z osi ili neke druge proizvoljne osi. Pozitivan smjer rotacije oko osi koordinatnog sustava određen je pravilom desne ruke.

Kod rotacije neke točke (x, y, z) oko x osi, koordinata x ostaje konstantna, dok se y i z koordinate mijenjaju.

To možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y\cos(\varphi) - z\sin(\varphi) \\ z' &= y\sin(\varphi) + z\cos(\varphi) \end{aligned}$$

Matrični prikaz rotacije oko x-osi:

$$R_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **rotacija oko osi *y* za kut *φ***

Kod rotacije neke točke (x, y, z) oko y-osi, koordinata y ostaje konstantna dok se koordinate x i z mijenjaju:

$$\begin{aligned} x' &= z\sin(\varphi) + x\cos(\varphi) \\ y' &= y \\ z' &= z\sin(\varphi) - x\cos(\varphi) \end{aligned}$$

Matrični prikaz rotacije oko y-osi:

$$R_y(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **rotacija oko osi *z* za kut $\boldsymbol{\varphi}$**

Sve isto vrijedi i za rotaciju oko z-osi:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos(\varphi) - y\sin(\varphi) \\ y' &= x\sin(\varphi) + y\cos(\varphi) \\ z' &= z \end{aligned}$$

Matrični prikaz rotacije oko z-osi:

$$R_z(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **homotetija za faktor *k* sa centrom u ishodištu**

Homotetijom se lik ravnine Π preslika u njemu sličan lik ravnine Π_1 te se njihove površine odnose kao k^2, gdje je k koeficijent sličnosti odnosno koeficijent homotetije.

Kao ishodišnu relaciju uzimamo:

$$|A_1C_1| = |k| \cdot |AC|$$

Predznak koeficijenta k govori o položaju točaka A i A_1 prema središtu simetrije S.

Homotetija u prostoru preslikavan točku A u točku A_1 i to tako da vrijedi da su točke S, A i A_1 kolinearne te da je:

$$|SA_1| = |k| \cdot |SA|$$

gdje je k koeficijent homotetije ili koeficijent sličnosti, a S središte homotetije.

Ukoliko je k pozitivan, točke A i A_1 leže na istom polupravcu a ako je k negativan leže na različitim polupravcima.

Matrični prikaz homotetije za faktor k sa centrom u ishodištu:

$$T = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **rotacija oko proizvoljnog pravca kroz ishodište s jediničnim vektorom smjera**

$\boldsymbol{\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)}$

Opća formula za matricu koja prikazuje rotaciju oko ishodišta u smjeru vektora izgleda ovako:

$$T = \begin{bmatrix} (1-c)u_1^2 + c & (1-c)u_1u_2 - su_3 & (1-c)u_1u_3 + su_2 & 0 \\ (1-c)u_1u_2 + su_3 & (1-c)u_2^2 + c & (1-c)u_2u_3 - su_1 & 0 \\ (1-c)u_1u_3 - su_2 & (1-c)u_2u_3 + su_1 & (1-c)u_3^2 + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdje je u vektor, $c = \cos\phi$, a $s = \sin\phi$.

Uvrštavanjem tih podataka, i vektora $\vec{a}$ dobijemo matrični prikaz rotacije oko proizvoljnog pravca kroz ishodište s jediničnim vektorom smjera:

$$T = \begin{bmatrix} (1-\cos\phi)a_x^2 + \cos\phi & (1-\cos\phi)a_xa_y - \sin\phi a_z & (1-\cos\phi)a_xa_z + \sin\phi a_y & 0 \\ (1-\cos\phi)a_xa_y + \sin\phi a_z & (1-\cos\phi)a_y^2 + \cos\phi & (1-\cos\phi)a_ya_z - \sin\phi a_x & 0 \\ (1-\cos\phi)a_xa_z - \sin\phi a_y & (1-\cos\phi)a_ya_z + \sin\phi a_x & (1-\cos\phi)a_z^2 + \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **homotetija za faktor k sa centrom u točki (x_0, y_0, z_0)**

Već smo prije prikazali kako izgleda matrični prikaz homotetije za faktor k sa centrom u ishodištu:

$$T = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primjenom jednadžba:

$$\begin{aligned} x' &= k(x - x_0) + x_0 \\ y' &= k(y - y_0) + y_0 \\ z' &= k(z - z_0) + z_0 \end{aligned}$$

možemo postići da homotetija bude relativna za proizvoljne točke, što u matričnom obliku izgleda ovako:

$$T = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & x_0(1-k) \\ 0 & k & 0 & y_0(1-k) \\ 0 & 0 & k & z_0(1-k) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **zrcaljenje s obzirom na *xy*-ravninu**

Zrcaljenje se u prostoru javlja u odnosu na ravninu, a ne u odnosu na os. U matrici zrcaljenja s obzirom na ravninu, negativna je ona koordinata koja ne čini ravninu s obzirom na koju se izvršava zrcaljenje pa tako kod zrcaljenja s obzirom na *xy*-ravninu, negativna je koordinata *z* pa matrica izgleda ovako:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **zrcaljenje s obzirom na *xz*-ravninu**

Kod zrcaljenja s obzirom na *xz*-ravninu, negativna je koordinata *y*:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **zrcaljenje s obzirom na *yz*-ravninu**

Kod zrcaljenja s obzirom na *yz*-ravninu, negativna je koordinata *x*:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **zrcaljenje s obzirom na os *x***

Dok je kod zrcaljenja s obzirom na ravninu negativna koordinata koja ne čini ravninu s obzirom na koju se izvršava zrcaljenje, kod zrcaljenja s obzirom na os, negativne su koordinate s obzirom na koje se ne izvršava zrcaljenje.

Dakle pozitivna je samo os na koju se zrcali pa su tako kod zrcaljenja s obzirom na os *x*, negativne koordinate *y* i *z*:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **zrcaljenje s obzirom na os *y***

Kod zrcaljenja s obzirom na os *y*, pozitivna je *y* koordinata:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **zrcaljenje s obzirom na os *z***

Kod zrcaljenja s obzirom na os *z*, pozitivna je *z* koordinata:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **rastezanje duž koordinatnih osi sa faktorima $\boldsymbol{k_x}, \boldsymbol{k_y}, \boldsymbol{k_z}$**

$$T = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **centralna simetrija sa centrom u ishodištu**

Ako je *A* proizvoljna točka s koordinatama (x, y, z), onda je njena centralno simetrična slika u odnosu na ishodište točka A' s koordinatama $(-x, -y, -z)$.

Matrični prikaz centralne simetrije sa centrom u ishodištu u homogenim koordinatama izgleda ovako:

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **centralna simetrija sa centrom u točki $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z_0})$**

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2x_0 \\ 0 & -1 & 0 & 2y_0 \\ 0 & 0 & -1 & 2z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **ortogonalna projekcija na os *x***

Projekcija je prikaz trodimenzionalnog predmeta u ravnini. Ortogonalna projekcija u prostoru na os x nekoj točki A prostora pridružuje točku A' na osi x, gdje je pravac iz točke A' u točku A, okomit na os x te su ostale dvije koordinate jednake nuli, pa matrični prikaz ortogonalne projekcije na os x izgleda ovako:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **ortogonalna projekcija na os *y***

Isto vrijedi i za ortogonalno projekciju na os y, samo što su koordinate x i z jednake nuli:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **ortogonalna projekcija na os *z***

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **ortogonalna projekcija na *xy*-ravninu**

Kod ortogonalne projekcije na ravninu, trebamo samo koordinate s obzirom na koju se ravninu projicira, dok je treća koordinata jednaka nuli pa tako matrica ortogonalne projekcije na *xy* ravninu izgleda ovako:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **ortogonalna projekcija na *xz*-ravninu**

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **ortogonalna projekcija na *yz*-ravninu**

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **smicanje (uzdužne deformacije)**

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \tan\alpha & \tan\alpha & 0 \\ \tan\beta & 1 & \tan\beta & 0 \\ \tan\chi & \tan\chi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zadatak 6

Navedene transformacije iz zadatka 5 implementirajte na računalu u po volji odabranom alatu za programiranje tako da za svaku transformaciju napišete proceduru (funkciju) koja na ulazu ima parametre određene transformacije i točku na koju će se primijeniti zadana transformacija. Na primjer, za rotaciju oko neke osi kroz ishodište za kut φ, procedura mora imati na ulazu kut φ , jedinični vektor smjera $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ osi oko koje se rotira i točku $(x, y, z, 1)$ u homogenim koordinatama koja će se rotirati. Također, razmislite da li je potrebno unositi posljednju homogenu koordinatu radi uštede memorijskog prostora.

Ovaj zadatak smo riješili u programskom jeziku C++. C++ smo odabrali zbog toga što smo već svi vrlo dobro upoznati s njim kroz kolegije Programiranje 1 i Programiranje 2. Cpp datoteka sa implementiranim rješenjem šestog zadatka bit će predana uz ovaj seminarski rad.

Zadatak 7

Primijenite implementirane procedure za pojedine transformacije na

- *trokut s vrhovima* $(1,1,1), (4,1,3), (3,3,2)$
- *kvadar koji je razapet sa vektorima* $3\vec{i}, 2\vec{j}, -\vec{k}$ *koji imaju početak u točki* $(1,1,1)$
- *sferu sa centrom u točki* $(1,0,0)$ *polumjera 1.*

Nacrtajte i slike za svaku pojedinu transformaciju na kojoj će biti prikazani početni objekt i transformirani objekt. Ulazne dodatne parametre za pojedine transformacije odaberite sami po volji (npr., kod rotacije kut za koji ćete rotirati navedene objekte odaberite sami po volji, s time da za osi rotacije uzmete koordinatne osi i još neku proizvoljnu os kroz ishodište).

Ovaj zadatak smo implementirali u programskom jeziku Python. Ovaj programski jezik smo odabrali jer smo na predavanju vidjeli neke primjere ravnina prikazane u Python-u. Osim toga, već smo se upoznali sa ovim programom na kolegijima Informatika 1 i 2. Rješenja za kvadar, sferu i trokut su predani uz ovaj seminarski rad.

Zadatak 8

Pogledajte kako rotacije oko koordinatnih osi, translacija, ortogonalne projekcije na os na koordinatne osi i koordinatne ravnine, homotetija, zrcaljenja s obzirom na koordinatne osi i koordinatne ravnine djeluju na beskonačno daleke točke i komentirajte ta djelovanja. Proučite transformaciju prostora zadanu matricom

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Kamo se ovom transformacijom preslikaju beskonačno daleke točke? Koje točke se preslikavaju u beskonačno daleke točke? Koje točke se preslikavaju u same sebe (tzv. fiksne točke)?

Homogene koordinate oblika $(x, y, z, 0)$ predstavljaju jedinstvenu točku u beskonačnosti u smjeru (x, y, z). $T = (x, y, z, 0)$

$$T = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Rotacija oko osi x:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \cos\varphi \cdot y + \sin\varphi \cdot z \\ \cos\varphi \cdot z - \sin\varphi \cdot y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Zaključujemo da koordinata x ostaje ista, te da za rotacije oko osi, beskonačno udaljena točka se preslikava u također beskonačno udaljenu točku.

- **Translacija vektora i beskonačno daleke točke:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & 0 & v_y \\ 0 & 0 & 1 & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ovom transformacijom dobili smo također beskonačno daleku točku.

- **Homotetija:**

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \\ kz \\ 0 \end{bmatrix}$$

Možemo zaključiti da se i ovo preslikavanje završi u beskonačno udaljenoj točki, udaljenijoj za faktor k .

- **Zrcaljenje s obzirom na xy-ravninu:**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Točka se zrcali s obzirom na *xy*-ravninu(koordinata mijenja predznak), ali ona je i dalje beskonačno udaljena.

Preslikavanje beskonačno daleke točke:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ -z \end{bmatrix}$$

Zaključujemo da transformacijom zadane matrice F i beskonačno daleke točke $(x, y, z, 0)$ ne dobije se beskonačno daleka točka.

Preslikavanje beskonačno daleke točke u također beskonačno daleku točku:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ l - z \end{bmatrix}$$

Zaključujemo da beskonačno daleku točku dobivamo preslikavanjem samo ako su l i z jednaki, tj. $l - z = 0$.

Fiksne točke, tj. točke koje se preslikavaju u same sebe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ l-z \end{bmatrix}$$

Da bismo dobili fiksnu točku, koordinata z mora biti 0.

$$l - z = 0 \qquad\qquad z = 0$$

Zadatak 9

U prvom oktantu zadana je kocka s duljinom brida 1 s jednim vrhom u ishodištu. Odredite transformaciju prostora koja će zadanu kocku preslikati u kvadar koji je razapet s vektorima $3\vec{\imath}, 2\vec{\jmath}, \vec{k}$ *koji imaju početak u točki* $(2,2,1)$. *Zatim tako dobiveni kvadar zarotirajte oko osi x za* $30°$. *Navedenu transformaciju pronađite kao kompoziciju jednostavnijih spomenutih transformacija prostora. Nacrtajte sliku na računalu. Sve radite u homogenim koordinatama.*

Ovaj zadatak smo riješili i prikazali također u programskom jeziku Python.

Zaključak

Sustav homogenih koordinata je sustav koordinata koji se koristi u projektivnoj geometriji, poput kartezijevih koordinata u Euklidskoj geometriji. Homogene koordinate se dobivaju dodavanjem prividne treće dimenzije ravninskim koordinatama.

Svakoj točki realnog euklidskog prostora E^3 pridružena uređena trojka kartezijskih koordinata (x, y, z). Želimo li takvu točku prebaciti u homogene koordinate, moramo dodati četvrtu točku takvu da vrijedi:

$$(kx, ky, kz, k) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x}{k}, \qquad y = \frac{y}{k}, \qquad z = \frac{z}{k}$$

Četvrtu koordinatu k nazivamo faktorom proporcionalnosti ili homogena koordinata čija je vrijednost najčešće jedan, ali može biti i bilo koji drugi broj. Primjerice točku $A = (2,3,5)$ možemo zapisati na više načina:

$$A = (2,3,5) \quad \Rightarrow \quad (2,3,5,1) \quad \text{ili} \quad (6,9,15,3)$$

Međutim, ako je $k = 0$, tada se radi o beskonačno dalekim točkama koje imaju oblik:

$$(x, y, z, 0)\ .$$

Te točke predstavljaju jedinstvenu točku u beskonačnosti u smjeru (x, y, z).

Dakle u ovom projektu pokušali smo u detalje prikazati i objasniti što su to homogene koordinate, kako se koriste i primjenjuju te njihove prednosti. Smatramo da su homogene koordinate odličan izbor u računalnoj grafici ali i u drugim srodnim područjima zbog njihovog sažetog prikaza u matričnom obliku. Također, pomoću odličnog programa „Python“, pokušali smo što bolje, ljepše i zornije implementirati i prikazati tražene zadatke.

Literatura

[1] Samuel R.Buss, 2003., „3-D Computer Graphics“

[2] John Vince, Springer, 2006., „Mathematics for Computer Graphics“, drugo izdanje

[3] Ž. Mihajlović, ZEMRIS, FER, prezentacija „Grafičke primitive“

[4] http://www.gradri.hr/~pletenac/modeliranje-sazetak.htm

[5] http://www.cs.iastate.edu/~cs577/handouts/homogeneous-coords.pdf

[6] http://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_coordinates

[7] http://www2.geof.unizg.hr/~vcetl/radovi/RoicCetl.pdf

[8] http://www.slideshare.net/PogledKrozProzor/homotetija

[9] http://www.cs.utexas.edu/~fussell/courses/cs384g/lectures/lecture07-Affine.pdf

[10] http://www.etf.unssa.rs.ba/~ognjen/Racunarska%20grafika/Profesorka/Publikovano/RG-Transfomacije-4.pdf

[11] http://zrno.fsb.hr/katedra/download/materijali/1079.pdf