

# 1 Varianza de Allan

En la caracterización de sensores y sistemas de medición, especialmente aquellos empleados en navegación inercial, metrología o sincronización temporal, resulta fundamental evaluar la estabilidad y calidad de las señales que producen. Las mediciones obtenidas de sensores reales siempre contienen distintos tipos de ruido estocástico, como ruido blanco o deriva aleatoria, cuyas identificaciones permiten comprender las limitaciones del sensor y optimizar los algoritmos de filtrado o fusión de datos.

En este contexto, la varianza de Allan (Allan Variance, AVAR) y su raíz cuadrada, la desviación de Allan (Allan Deviation, ADEV), son herramientas estadísticas diseñadas específicamente para caracterizar la estabilidad temporal de señales ruidosas. A diferencia de la varianza clásica, que no es adecuada para señales con componentes de deriva o correlaciones a largo plazo, la varianza de Allan analiza cómo la señal promedio cambia a lo largo de diferentes intervalos de tiempo de integración, permitiendo distinguir los distintos regímenes de ruido presentes.

El análisis mediante la varianza o desviación de Allan proporciona una visión más completa del comportamiento dinámico de un sensor: revela qué tipos de ruido dominan en determinadas escalas temporales y cómo estos afectan la precisión y estabilidad del sistema. Por este motivo, constituye una herramienta esencial para la evaluación del desempeño y la calibración de sensores iniciales, relojes de precisión y otros dispositivos de medición.

Para comenzar, consideremos el modelo en tiempo discreto de un sensor unidimensional:

$$d_k = p_k + b_k + v_k, \quad v_k \sim \mathcal{N}(0, R) \quad (1)$$

$$b_{k+1} = b_k + w_k, \quad w_k \sim \mathcal{N}(0, qT_s) \quad (2)$$

donde:

- $d_k$ : medición del sensor [u],
- $p_k$ : valor verdadero [u],
- $b_k$ : sesgo del sensor [u],
- $v_k$ : ruido blanco de medición [u],
- $R$ : varianza del ruido de medición [ $u^2$ ],
- $w_k$ : caminata aleatoria del sesgo [u],
- $q$ : intensidad de la caminata aleatoria [ $u^2/s$ ],
- $T_s$ : período de muestreo [s].

Podemos formar  $i$  promedios a partir de grupos conformados por  $m$  muestras que abarcan un tiempo  $\tau = mT_s$  cada uno:

$$\bar{d}_i^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} d_{im+k} \quad (3)$$

Para intervalos de tiempo  $\tau$ , la varianza de Allan de los promedios es:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2} E \left[ (\bar{d}_{i+1}^{(m)} - \bar{d}_i^{(m)})^2 \right] \quad (4)$$

Se puede derivar el valor de  $\sigma^2(\tau)$  en función de los tipos de ruido presentes en la señal, cómo los que están presentes en las ecuaciones (1) y (1).

## 1.1 Caracterización del ruido blanco de medición $v_k$

Si asumimos  $d_k = p_0 + v_k$  (ignorando el sesgo de medición por el momento), siendo  $p_0$  una constante conocida en la medición y, por ende, puede ser eliminada de la misma, el promedio de ruido de cada

bloque es

$$\bar{v}_i = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} v_{im+j} \quad (5)$$

Dado que los valores de  $v$ , por ser ruido blanco gaussiano, son independientes y recordando que  $\text{Var}(v_k) = R$ ,

$$\text{Var}(\bar{v}_i) = \frac{1}{m^2} \sum_{j=0}^{m-1} \text{Var}(v_{im+j}) = \frac{mR}{m^2} = \frac{R}{m} \quad (6)$$

Además

$$\text{Var}(\bar{v}_{i+1} - \bar{v}_i) = \text{Var}(\bar{v}_{i+1}) + \text{Var}(\bar{v}_i) = 2 \frac{R}{m} \quad (7)$$

dado que los promedios de ruido en los distintos bloques son independientes entre sí, en este caso la varianza de Allan viene dada por:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{R}{m} = \frac{R}{m} \quad (8)$$

Sustituyendo  $m = \tau/T_s$ :

$$\sigma^2(\tau) = \frac{R}{m} = \frac{RT_s}{\tau} \quad (9)$$

De forma equivalente,

$$\sigma(\tau) = \sqrt{\frac{RT_s}{\tau}} \quad (10)$$

De esta manera, en un gráfico de doble escala logarítmica de la desviación de Allan, la región de ruido blanco gaussiano aparece como una línea recta de pendiente  $-\frac{1}{2}$ . De la intersección del eje de abscisas  $a_{wn}$ :

$$\log_{10} \sigma(\tau) = -\frac{1}{2} \log_{10} \tau + a_{wn} \quad (11)$$

obtenemos:

$$R = \frac{(10^{a_{wn}})^2}{T_s} \quad (12)$$

## 1.2 Caracterización de la caminata aleatoria del sesgo $b_k$

Para el modelo de medición analizado, el sesgo evoluciona según (2) con incrementos  $w_k$  independientes con  $\text{Var}(w_k) = qT_s$ . Es decir,  $w_k$  se modela como ruido blanco gaussiano.

Queremos obtener  $\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2}E[(\bar{b}_{i+1} - \bar{b}_i)^2]$  para los promedios de bloque  $\bar{b}_i$  sobre  $m$  muestras.

Para eso, necesitamos:

- Escribir  $b_k$  como una suma acumulativa de incrementos:  $b_k = b_0 + \sum_{j=0}^{k-1} w_j$ .

- Expresar los promedios de bloque  $\bar{b}_i = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} b_{im+n}$  como una doble suma de incrementos  $w_j$  con pesos triangulares.

Entonces:

$$\bar{b}_i = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \left( b_0 + \sum_{j=0}^{im+n-1} w_j \right) \quad (13)$$

Podemos asumir, para la derivación, que  $b_0 = 0$

$$\bar{b}_i = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \left( \sum_{j=0}^{im-1} w_j + \sum_{t=0}^{n-1} w_{im+t} \right) \quad (14)$$

$$\bar{b}_i = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{im-1} w_j + \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \sum_{t=0}^{n-1} w_{im+t} \quad (15)$$

$$\bar{b}_i = \sum_{j=0}^{im-1} w_j + \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} (m-n-1) w_{im+n} \quad (16)$$

### 1.2.1 Expresión para $\bar{b}_{i+1} - \bar{b}_i$

De manera similar, calculamos  $\bar{b}_{i+1}$

$$\bar{b}_{i+1} = \sum_{j=0}^{(i+1)m-1} w_j + \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} (m-n-1) w_{(i+1)m+n} \quad (17)$$

Sustraemos luego  $\bar{b}_i$

$$\bar{b}_{i+1} - \bar{b}_i = \left[ \sum_{j=0}^{(i+1)m-1} w_j + \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} (m-n-1) w_{(i+1)m+n} \right] - \left[ \sum_{j=0}^{im-1} w_j + \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} (m-n-1) w_{im+n} \right] \quad (18)$$

$$\bar{b}_{i+1} - \bar{b}_i = \left[ \sum_{j=0}^{im-1} w_j + \sum_{n=0}^{m-1} w_{im+n} + \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} (m-n-1) w_{(i+1)m+n} \right] - \left[ \sum_{j=0}^{im-1} w_j + \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} (m-n-1) w_{im+n} \right] \quad (19)$$

La suma común a ambos  $\sum_{j=0}^{im-1} w_j$  se cancela. Arreglando términos:

$$\bar{b}_{i+1} - \bar{b}_i = \left[ \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} mw_{im+n} + \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} (m-n-1) w_{(i+1)m+n} \right] - \left[ \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} (m-n-1) w_{im+n} \right] \quad (20)$$

Entonces

$$\bar{b}_{i+1} - \bar{b}_i = \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} \left( (n+1) w_{im+n} + (m-n-1) w_{(i+1)m+n} \right) \quad (21)$$

Esta es una combinación lineal de  $2m - 1$  incrementos independientes  $w$  con coeficientes determinísticos conocidos.

### 1.2.2 Varianza de la diferencia

Dado que los valores de  $w$  son independientes, la varianza de la combinación lineal es igual a  $Q$  multiplicada por la suma de los coeficientes al cuadrado:

$$\text{Var}(\bar{b}_{i+1} - \bar{b}_i) = \frac{Q}{m^2} \sum_{n=0}^{m-1} ((n+1)^2 + (m-n-1)^2) \quad (22)$$

$$= \frac{Q}{m^2} \left[ \sum_{n=0}^{m-1} (n+1)^2 + \sum_{n=0}^{m-1} (m-n-1)^2 \right] \quad (23)$$

$$= \frac{Q}{m^2} \left[ \sum_{n=1}^m n^2 + \sum_{n=1}^m (m-n)^2 \right] \quad (24)$$

$$= \frac{Q}{m^2} \left[ \sum_{n=1}^m n^2 + \sum_{n=1}^m m^2 - 2 \sum_{n=1}^m mn + \sum_{n=1}^m n^2 \right] \quad (25)$$

$$= \frac{Q}{m^2} \left[ 2 \sum_{n=1}^m n^2 + m^3 - 2m \sum_{n=1}^m n \right] \quad (26)$$

Para evaluar la suma, utilizamos la fórmulas:

$$\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} \quad \sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2} \quad (27)$$

Entonces:

$$S = 2 \sum_{n=1}^m n^2 + m^3 - 2m \sum_{n=1}^m n \quad (28)$$

$$= 2 \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + m^3 - 2m \frac{m(m+1)}{2} \quad (29)$$

$$= \frac{(m^2+m)(2m+1)}{3} + m^3 - m^3 - m^2 \quad (30)$$

$$= \frac{2m^3 + 3m^2 + m}{3} - m^2 \quad (31)$$

$$= \frac{2m^3 + m}{3} \quad (32)$$

$$= \frac{m(2m^2 + 1)}{3} \quad (33)$$

Por lo tanto:

$$\text{Var}(\bar{b}_{i+1} - \bar{b}_i) = \frac{Q}{m^2} \cdot \frac{m(2m^2 + 1)}{3} \quad (34)$$

$$= Q \cdot \frac{2m^2 + 1}{3m} \quad (35)$$

### 1.2.3 Varianza de Allan

Recordando que la varianza de Allan es la mitad del valor esperado del cuadrado de la diferencia:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{1}{2} \text{Var}(\bar{b}_{i+1} - \bar{b}_i) \quad (36)$$

$$= \frac{Q}{2} \cdot \frac{2m^2 + 1}{3m} \quad (37)$$

$$= Q \cdot \frac{2m^2 + 1}{6m} \quad (38)$$

Reemplazamos  $Q = qT_s$  y  $m = \tau/T_s$  para expresar en términos de  $\tau$  y  $T_s$ .

Luego, expandimos para aislar el término dominante y el término de corrección:

$$\sigma^2(\tau) = \frac{q}{3}\tau + \frac{qT_s^2}{6\tau} \quad (39)$$

### 1.2.4 Aproximación para valores de $m$ grandes

Para  $m \gg 1$  ( $\tau \gg T_s$ ), el término de corrección es despreciable; entonces:

$$\sigma^2(\tau) \approx \frac{q}{3}\tau \implies \sigma(\tau) \approx \sqrt{\frac{q}{3}}\sqrt{\tau} \quad (40)$$

De esta manera, en un gráfico de doble escala logarítmica de la desviación de Allan, la región de ruido por caminata aleatoria del sesgo aparece como una línea recta de pendiente  $+\frac{1}{2}$ . De la intersección del eje de abscisas  $a_{rw}$ :

$$\log_{10} \sigma(\tau) = \frac{1}{2} \log_{10} \tau + a_{rw} \quad (41)$$

de esta manera, obtenemos (despreciando la corrección por muestras finitas):

$$q \approx 3 \cdot (10^{a_{rw}})^2 \quad (42)$$

## 1.3 Resumen del método

- **Región de ruido blanco gaussiano**  $\sigma(\tau) = \sqrt{\frac{RT_s}{\tau}}$
- **Región de caminata aleatoria del sesgo**  $\sigma(\tau) = \sqrt{\frac{q}{3}}\sqrt{\tau}$

Estas relaciones permiten la estimación de  $R$  y  $q$  directamente de los datos recolectados.