2023年度　1-IJKLクラス　線形代数学II中間試験

2023/11/06　9:15〜10:20

学籍番号　　　　　　　　氏名

注意事項

1. 開始時間になるまでは2ページ以降は見ないこと。
2. 開始時間まで、表紙の注意事項を読みましょう。
3. 各ページの裏は計算用紙としてください。
4. 表紙の解答用紙に氏名と学籍番号を書くこと。
試験開始後、2ページ以降もなるべく氏名と学籍番号を書くこと。
5. 問題自体に疑問があったら、手を挙げて下さい。
6. この問題兼解答用紙は、このページを含め、6ページあります。試験開始の最初に乱丁、落丁が無いことを確認しましょう。
7. 解答が終わったら、解答用紙を提出し退出しても良いが、その後の解答の変更は認めません。

学籍番号　　　　　　　　氏名

問題 1

$V = \mathbf{R}^3$ の部分集合 $L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$ が V の部分(ベクトル)空間かどうか調べよ。

(1) $3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 = 0$ より $\mathbf{0} \in V$

(2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in L$ とすると $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$ ①

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$ は ①より

$3(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = 0$

よって $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in L$

(3) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in L$ とすると $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ ②

スカラー C に対して

$C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Cx_1 \\ Cx_2 \\ Cx_3 \end{pmatrix}$ は ②より $3Cx_1 + 2Cx_2 + x_3 = 0$

よって $C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in L$

(1), (2), (3) より L は部分空間

学籍番号　　　　　　　　氏名

問題 2

$V = \boldsymbol{R}^3$ の部分空間 $L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3 \,\middle|\, 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}$ の基底を求めよ。

① $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in L$ とすると $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ は 1次独立なので　Lの基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

② $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in L$ とすると $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は 1次独立なので　Lの基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5

③ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in L$ とすると $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ は 1次独立なので　Lの基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

($\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ もOK)

学籍番号　　　　　　　　　氏名

問題 3

$\boldsymbol{R}^2$ の部分空間

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x_1 = x_2 \right\},\ W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2 \,\middle|\, x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

に対して、$V \oplus W = \boldsymbol{R}^2$ となることを示せ。

① $V \cap W = \{0\}$ であること

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V \cap W$ とすると　$x_1 = x_2$　かつ　$x_1 + x_2 = 0$.

よって　$x_1 = x_2 = 0$　なので　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\therefore\ V \cap W = \{0\}$　6

② $V + W = \mathbb{R}^2$ であること

・$V + W \subset \mathbb{R}^2$ は明らか …(1)　4

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{x_1+x_2}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{x_1-x_2}{2} \\ -\frac{x_1+x_2}{2} \end{pmatrix}$　と書けて

$\begin{pmatrix} \frac{x_1+x_2}{2} \\ \frac{x_1+x_2}{2} \end{pmatrix} \in V$,　$\begin{pmatrix} \frac{x_1-x_2}{2} \\ -\frac{x_1+x_2}{2} \end{pmatrix} \in W$　なので　$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in V + W$　4

よって　$\mathbb{R}^2 \subset V + W$ …(2)　2

(1), (2) より　$\mathbb{R}^2 = V + W$　2

以上より　$V \oplus W = \mathbb{R}^2$　2

$V + W$ の次元が 2 なので

$V + W = \mathbb{R}^2$ は OK

学籍番号　　　　　　　　　　氏名

問題 4

次の線形写像 f の $\mathrm{Im}(f)$ と $\mathrm{Ker}(f)$ の基底を求めよ。

$$f:\ \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^3,\ f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}$$

$$f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ と書ける

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は1次独立なので $\mathrm{Im}(f)$ の基底は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

($\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ もOK)

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$ とすると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ よって $x_1 = -x_3$, $x_2 = -x_3$

よって $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって $\mathrm{Ker}(f)$ の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

学籍番号　　　　　　　　　氏名

問題 5

U と V を $\boldsymbol{R}^m$ の部分空間とする。$U \cap V$ が $\boldsymbol{R}^m$ の部分空間であることを示せ。

(1) $0 \in U$, $0 \in V$ なので　$0 \in U \cap V$

(2) $a, b \in U \cap V$ とする

$a, b \in U$ なので　$a+b \in U$

$a, b \in V$ なので　$a+b \in V$　　よって　$a+b \in U \cap V$

(3) $a \in U \cap V$,　c : スカラー とする

$a \in U$ より　$ca \in U$

$a \in V$ より　$ca \in V$　　よって　$ca \in U \cap V$

(1), (2), (3) より　$U \cap V$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間