Parciális derivált

$$f_{xy} = x^5 + y^6 + x\,y^3 - x^3y^4 + 12$$

$$\frac{d}{dx} = 5x^4 + 0 + 1\,y^3 - 3x^2y^4 + 0$$

$$\frac{d}{dy} = 0 + 6y^5 + x\,3y^2 - x^3\,4y^3 + 0$$

Másodrendű derivált

$$\begin{tikzcd}
 & & f(x,y) \arrow[dl, "\frac{d}{dx}"'] \arrow[dr, "\frac{d}{dy}"] & \\
 & f'_x(x,y) \arrow[d, "\frac{d}{dx}"] \arrow[dr, "\frac{d}{dy}"] & & f'_y(x,y) \arrow[dl, "\frac{d}{dx}"'] \arrow[d] \\
 & f'_{xx}(x,y) & f'_{xy}(x,y) & f'_{yy}(x,y)
\end{tikzcd}$$

Lokális szélsőértékek

$$\left.\begin{aligned} f'_x(x,y) &= 0 \\ f'_y(x,y) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{stac. pontok}$$

= ez megadja a lehetséges pontok koordinátáit

$\det(\text{Hesse mátrix})$ ⇐ be kell helyettesíteni a koordinátákat

Ha $f'_{xx} \cdot f'_{yy} - (f'_{xy})^2 > 0$ és

- $f'_{xx}(x,y) > 0 \rightarrow$ lok. min.
- $f'_{xx}(x,y) < 0 \rightarrow$ lok. max

Kettős integrál (térfogat)

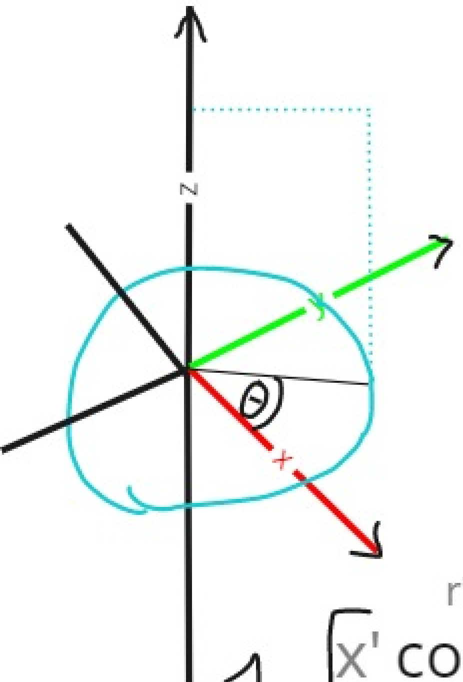
(sorrend felcserélhető)

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f(x,y)\,dy\,dx$$

Kiszámolás menete:

1. Integrál felírása az optimális alakban
    a. külső integrálban nincs változó
    b. létezik primitív függvény
2. belső integrál kiszámítása
3. határértékek behelyettesítése [Fb - Fa]
    a. itt a határérték tartalmazhat változót is
4. A már egyváltozós integrál kiszámolása

Polár koordináta (henger)



x = r*cos0

y = r*sin0

z = h

r = sqrt(x^2 + y^2)

0 = atan(y/x)

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t)) \cdot \underbrace{x'(t)}_{= \det(J)}\,dt$$

-> nem függ f-től

$$J = \begin{array}{c|cc} & r' & 0' \\ \hline x' & \cos 0 & r * -\sin 0 \\ y' & \sin 0 & r\cos 0 \end{array}$$

Be kell helyettesíteni az x/y adott deriváltjait

most: kör; det = r

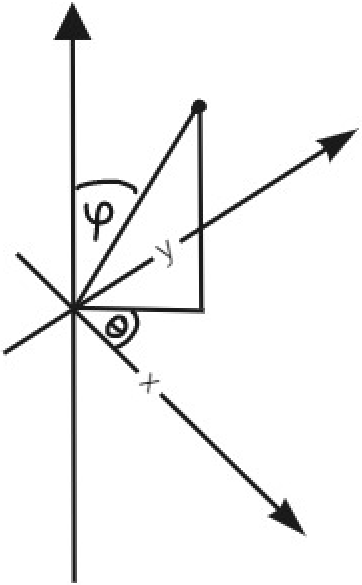
Tripla integrál - J mátrix

$$J = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} r' & \quad phi' \quad & 0' \end{array} \\ \begin{array}{c} dx \\ dy \\ dz \end{array} & \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \end{array}$$

henger esetében det(J) = r

kör esetében det(J) = r^2 * sin(phi)

Tripla integrál - J mátrix



r = sqrt(x^2 + y^2 + z^2)

0 = atan(y/x)

phi = acos(z/r)

x = rsin(phi)cos(0)

y = rsin(phi)sin(0)

z = rcos(phi)

Feltételes szélsőértékek

Adott $g(x,y)$ feltétel

$$F(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$$

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= 0 \\ F'_y &= 0 \\ g &= 0 \end{aligned}\right\} \text{stac. pontok \& teszt (feltétel)}$$

Érintősík egyenlete

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)+f(x_0,y_0)$$

Példa: henger

$x^2 + y^2 = 2^2$

$0 <= z <= 8$

1) x = r*cos(0)

y = r*sin(0)

z = h

2) det(J) = r

det(J)

3)

$$x^2 + y^2 = \left[(r\cos\theta)^2 + (y\sin\theta)^2\right]\cdot r$$

$$= r^3 \cdot \cancel{\left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\right]}$$

4)

$z \le 8$ kör $r^2 \le 4$

$$\int_0^8 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 \, dr \, d\theta \, dh = \int_0^8 1 \, dh \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \cdot \int_0^2 r^3 \, dr$$

$$8 \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 64\pi$$

Taylor formula

a táblázatban azonos sorban vannak

P_0 = (X_0, Y_0)

h = (h_1, h_2)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot \{h^m\}$$

New grid

<table>
<tr><th>k</th><th>f^(k)</th><th>f^(k) (P_0)</th><th>hatvány</th></tr>
<tr><td>0</td><td>f</td><td rowspan="3">behelyett
esítés</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>f'x = ...
f'y = ...</td><td>h_1
h_2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>f'xx
f'xy
f'yx
f'yy</td><td>h_1^2
h1h2
h1h2
h_2^2</td></tr>
</table>