Lineáris tér $(L, +, \lambda)$

1) + --ra vonatkozó feltételek:

- ↳ zártság $(\underline{a} + \underline{b} \in L)$
- ↳ kommutatív $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$
- ↳ asszociatív $(\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$
- ↳ $\exists$ egységelem $(\underline{a} + \underline{0} = \underline{a})$
- ↳ $\exists$ ellentett elem $(\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0})$

2) λ-ra vonatkozó feltételek

- ↳ zártság $\lambda \cdot \underline{a} \in L$
- ↳ kommutatív $\lambda \cdot \underline{a} = a \cdot \lambda$
- ↳ asszociatív $(\lambda_1 \lambda_2) a = \lambda_1 (\lambda_2 \cdot a)$
- ↳ $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$ $\exists$ egységelem

3)
$$\left.\begin{array}{l} \lambda(\underline{a}+\underline{b}) = \lambda\underline{a} + \lambda\underline{b} \\ \underline{a}(\lambda_1+\lambda_2) = \lambda_1\underline{a} + \lambda_2\underline{a} \end{array}\right\} \text{disztributív}$$

Vektorrendszer

- végesen sok azonos elemszámú vektorok halmaza

Lineáris kombináció

- n darab vektorból és
- n darab skalárból

képezzük az alábbi vektort:

$$\underline{v} = \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2 + \dots \lambda_n \underline{a}_n$$

Lineáris függetlenség

$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots \underline{a}_n$ vektorrendszer lin. függ
ha $\underline{0}$ $\boxed{\text{csak}}$ úgy állítható
elő, hogy $0 \cdot \underline{a}_1 + \underline{0} \cdot a_2 + \dots + \underline{0} \cdot \underline{a}_n$.

Tehát $\forall \lambda = 0$

bizonyítás:

egyenletek összeadásával,

kivonásával

kijön, hogy

lineárisan függő?

$\Longleftrightarrow$

— || — , ha
semelyik vektora sem
fejezhető ki a többi lin. kombinációjaként.

Generátorrendszer

$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots \underline{a}_n$ az L_n generátorrendszere, ha
$\forall v \in L_n$ előállítható $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ lin. kombinációjaként.

számolás:

Gauss el.: $\rightarrow$ vezérlőelemek száma

Bázis

$a_{1..n}$ lin. független és gen. rendszert alkot.

Bázistranszformáció

$$\begin{bmatrix} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} \\ \underline{c} \end{bmatrix}$$

↳ kicserélési tétel ($\exists$ olyan csere, hogy a bázist kicserélve lin. független marad)

↳ Dimenzió fogalma

LINEÁRIS ALGEBRA

Probléma:

$y_1: 2x - y = 0$

$y_2: -x + 2y = 3$

y_1

$2x - y = 0 \quad /\cdot(-1); -2x$

$\neq$

$y = 2x + 0$

Ha $y=0$: $x=0$

Ha $x=0$: $y=0$

$m = \cancel{0}\,2$

y_2

$-x + 2y = 3 \quad /\div 3$

$x\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3}y = 1$

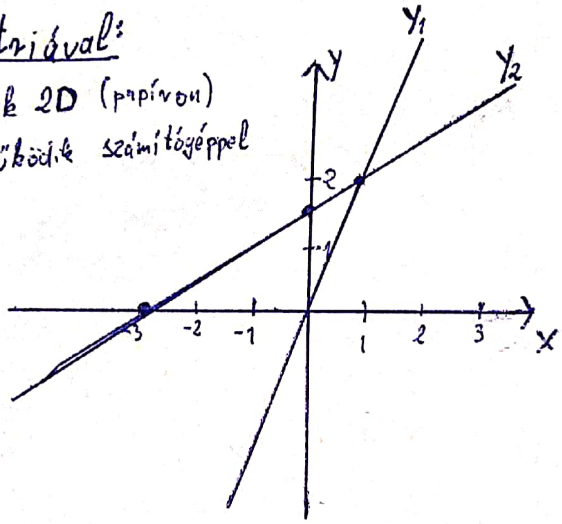
$\frac{x}{-3} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1$

Ha $y=0$: $x=-3$

Ha $x=0$: $y=\frac{3}{2}$

Geometriával:

- csak 2D (papíron)
- ∅ működik számítógéppel



megoldás:

$x = 1$

$y = 2$

Algebrai úton:

mátrixos forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Gauss-elimináció:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ \boxed{-1} & 2 & 3 \end{array}\right] \xRightarrow{O_{21}(2)} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$3y = 6 \quad /\div 3$

$y = 2$

$-1x + 2(2) = 3 \quad /-4$

$-x = -1 \quad /\div(-1)$

$x = 1$

↳ Gauss-Jordan elimináció

$$\xRightarrow{O_{11}(-\frac{2}{3})} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \boxed{1} & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{array}\right] \xRightarrow{O_{12}(-2)} \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$$\xRightarrow{O_{22}(-1)} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \to y = 2 \\ \to x = 1 \end{array}$$

↳ meg kell cserélni őket?

Mátrix szorzás

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & & e & f \\
 & & g & h \\
\hline
a & b & \cancel{e\cdot a+g}\ I & J \\
c & d & K & L
\end{array}
$$

$\overbrace{}^{\text{dot products}}$

$I := e\cdot a + b\cdot g$ ← csak a saját sorából és oszlopából

$J := a\cdot f + b\cdot h$

$K := c\cdot e + d\cdot g$

$L := c\cdot f + d\cdot h$

Egység~~vektor~~ mátrix

$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, mivel $E\cdot A = A$ $\cancel{e\cdot a = a}$

$$
\begin{array}{cc|cc}
 & & e & f \\
 & & g & h \\
\hline
1 & 0 & 1e & 1f \\
0 & 1 & 1g & 1h
\end{array}
$$

→ változott ?

Inverz mátrix

$A \cdot A^{-1} = E = A^{-1}\cdot A$

a) Gauss eleminációval

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} \overbrace{A \quad B}^{A} & & 1 & 0 \\ C & D & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$\Downarrow$$

$$
\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & E & F \\ 0 & 1 & \underbrace{G \quad H}_{A^{-1}} & \end{array}\right]
$$

+ellenőrzés

b) $\frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A) = A^{-1}$ $\quad A = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

A 2x2-es

$\frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} D & -B \\ -C & A \end{bmatrix}$

- főátló 180°-os forgatása
- minden más -1-szerese

A 3x3-as

1) C segéd mátrix ← sakktábla

$$
\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} E\cdot I - F\cdot H & -(D\cdot I - F\cdot G) & DH - EG \\ -(BI - CH) & AI - CG & -(AH - BG) \\ BF - CE & -(AF - CD) & AE - BD \end{bmatrix}
$$

$adj(A) = C^T$ ← tükrözés a főátlóra

+ ellenőrzés

KOORDINÁTA

$v_1, v_2, \ldots$ vektorok és λ_1, λ_2 skalárok lineáris kombinációja.

pl.: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ $v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

tudjuk, hogy

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \cancel{\lambda_2 v_2} + \lambda_3 v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

mennyi $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ értéke?

3 ismeretlenes egyenlet

megoldás:

→ felírható mátrix szorzás alakban:

$$\begin{array}{ccc} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\ }_{v_1} \quad \underbrace{\ }_{v_2} \quad \underbrace{\ }_{v_3}$$

→ Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 \end{array}\right] \xRightarrow[O_{13}(-3)]{O_{12}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -7 & -7 \end{array}\right] \xRightarrow[O_2|=3]{O_3|=7} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} \end{array}\right] \xRightarrow{O_{21}(1)} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] \end{array}$$

$\lambda_2 - \lambda_3 = -1$

$\lambda_1 + 2\lambda_3 = 3$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2×2 inverz

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = 4-6 = -2 \neq 0$$

$\hookrightarrow \exists A^{-1}$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

- főátló: csere
- mellékátló: -1 -szeres

Ellenőrzés:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

3×3 inverz

$$\det(\underline{\underline{A}}) = \left.\begin{matrix} +2(3-8) \\ -0 \\ +5(4-3) \end{matrix}\right\} -5$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$2 \cdot 3 - 3 \cdot 5$
$6 - 15$
$1 - 10$
$0 - 3$

$$\cancel{C} = \begin{bmatrix} -5 & -20 & -5 \\ -3 & -9 & -1 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{C}} = \begin{bmatrix} -5 & 20 & -5 \\ 3 & -9 & 1 \\ 1 & -8 & 2 \end{bmatrix} ; \operatorname{adj}(A) = C^T$$

$$\frac{A}{-5} \cdot$$

$\cancel{15}$ 10

$$-1 + \frac{10}{5} - \frac{6}{5}$$

$$\frac{1}{-5} \cdot \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 20 & -9 & -8 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -4 & \frac{9}{5} & \frac{8}{5} \\ 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -4 & \frac{9}{5} & \frac{8}{5} \\ 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

1)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

$\cancel{\det(A) = 0}$

$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$

$$\cancel{0-0+}(-3-\lambda)\left[\underbrace{(0-\lambda)(1-\lambda) - 1\cdot 2}\right] = 0$$

$\lambda_3 = -3$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = +2$

$S_1 = -1$

$S_2 = 2$

$S_3 = -3$

2)

$$\begin{bmatrix} 0-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$

$$\cancel{0 - 2[} \quad \cancel{+0} - 0 + (2-\lambda)\left[\underbrace{(0-\lambda)(1-\lambda) - 2\cdot 1}\right] = 0$$

$\lambda_3 = 2$

$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = +2$

$S_1 = -1$

$\underbrace{S_2 = S_3}_{2db} = 2$

$AM = 2$

Ha $\lambda = 2$:

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \\ 0 \end{bmatrix} \quad a \neq 0 \in \mathbb{R} \quad ; \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \quad b \neq 0 \in \mathbb{R}$$

3)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$

$$(1-\lambda)\left[\underbrace{(-1-\lambda)(-1-\lambda)-1}\right] \cancel{-0+0} = 0$$

$\lambda_3 = 1$

$1 + \lambda + \lambda + \lambda^2 = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$\lambda_1 = -1$

$\lambda_2 = -1$

Ha $\lambda = -1$:

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x_2 - x_3 &= 0 \\ -2x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_3 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \cancel{\begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}} \quad \begin{aligned} x_3 &= 0 \\ -2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= x_3 \\ x_3 &= -2x_2 \end{aligned}$$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ↯$$

4) $\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$

$0 = \cancel{+1((-1)(-2) - 2 \cdot 0)}$
$\cancel{-1(\underbrace{(1-\lambda)(-2)}_{-2+2\lambda} - \underbrace{2(-2)}_{+4})}$
$\cancel{+0}$

$\cancel{2} - 4 + 2 - 2\lambda = 0$
$\cancel{-2\lambda = 0}$
$\lambda_1 = 0$

$\cancel{+1((-1)(-2) - 2(-\lambda))}$ $\cancel{2+2\lambda - 4 + 2 - 2\lambda = 0}$
$-1\cancel{((1-\lambda)(-2) - \underbrace{2(-2)}_{4})} =$
$+0$

$+1\left[\underbrace{(-1)(-2)}_{2} - \underbrace{(2)(0-\lambda)}_{2\lambda}\right]$
$-1\left[(1-\lambda)(-2) - \underbrace{(2)(-2)}_{+4}\right]$
$\cancel{+0}$

$2+2\lambda$
$-(4 - 2 + 2\lambda)$

$2+2\lambda - 4 + 2 - 2\lambda = 0$
$0 = 0$

5) $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 0-\lambda \end{bmatrix}$

$\cancel{(1-\lambda)[(-1-\lambda)(0-\lambda)}$
$1[0 - 2 \cdot (-2)]$

$-1(+1+\lambda)\left[\underbrace{(1-\lambda)(-\lambda)}_{-\lambda+\lambda^2} - \underbrace{(-1)(+2)}_{-2}\right]$
$+0$

$4 + \lambda^2 - \lambda - 2 - \lambda^2 + \lambda^3 - 2\lambda = 0$
$\lambda^3 - 3\lambda + 2 = 0$
$\lambda(\lambda^2 - 3) + 2 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
$\lambda_3 = -2$

Ha $\lambda = 1$:

$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$
$x_2 - x_3 = 0$
$-x_2 + x_3 = 0$
$-2x_1 - x_3 = 0$
$x_3 = -2x_1$

$\Rightarrow \underline{x_2 = x_3}$
$x_3 = -2x_1$

$\Rightarrow x_3 = \begin{matrix} x_2 \\ -2x_1 \end{matrix}$
$x_1 = x_3 \cdot \frac{1}{-2}$

$\Rightarrow \alpha \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Magtér: olyan vektor melynek a képe nullvektor

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in$ magtér $\Leftrightarrow$ képe nullvektor

$Ker(A) = \{\underline{0}\}$

$\dim\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \underline{0}$

$2 \to 0$ bázisok

leképzés: $x, y \in \mathbb{R}$

a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$

(ez a feladat)

Képtér: $Im(A)$; $\dim(Im(A)) = \underline{\underline{2}}$

<u>Dimenzió tétel</u> (Hány független változó?)

$\dim(Ker(A)) + \dim(Im(A)) = 2 = \mathbb{R}^2$

b) leképzés:

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3x - 2y + 7z \\ 0 \end{bmatrix}$ ~~$= 2 = \mathbb{R}^2$~~ ; $x, y, z \in \mathbb{R}$

<u>Magtér</u> = $Ker(A)$

$\begin{cases} 3x - 2y + 7z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{3}y - \frac{7}{3}z$

$Ker(A) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}y - \frac{7}{3}z \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$\dim(Ker(A)) = \underline{\underline{2}}$

$\hat{}$ x lin. függő

<u>Képtér</u> = $Im(A)$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\begin{bmatrix} 3x - 2y + 7z \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$

$\dim(Im(A)) = \underline{1}$

dimenzió tétel: $2 + 1 = \underline{3}$

2) $T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & +d \end{bmatrix}$

Ker(A):

$\begin{cases} a-b=0 \\ c+d=0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a=b \\ d=-c \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} a=s \\ c=t \end{matrix} \quad \cancel{s,t \in R}$

ez a bázis

$s,t \in R$

$Ker(A) = \begin{bmatrix} s & s \\ t & -t \end{bmatrix} = span\underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}}$ → dimenziója: 2 (mindkettő független)

↑ itt volt egy egyenletrendszer
$a-b=0$
$c+d=0$

↳ elő tudja állítani az összes lehetséges vektort a magtérben.

Pl.: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$

$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \in Ker(A)$ $\cancel{\forall \lambda_1, \lambda_2 \in R}$

képe:

$\begin{bmatrix} a & -b \\ c & +d \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in Ker(A)$ ✓

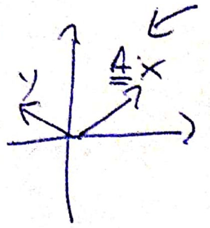
Im(A)

$= \begin{bmatrix} a-b \\ c+d \end{bmatrix} = span\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{lin. függ}}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{lin. függ}} \right\} \Rightarrow dim(Im(A)) = \underline{\underline{2}}$

1)

Leképezés

leképezés mátrixa



$\mathcal{L}(\underline{x}) \mapsto y$

homogén: $\mathcal{L}(\lambda \underline{v}) = \lambda \mathcal{L}(\underline{v})$

lineáris: $\mathcal{L}(\underline{u}+\underline{v}) = \mathcal{L}(\underline{u}) + \mathcal{L}(\underline{v})$

leképezés mátrixa: $(\underline{\underline{A}})$:

$$\mathcal{L}(\underline{x}) = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \underline{y}$$

magtér (Ker) $= \{\mathcal{L}(\underline{v}) = \underline{0}\}$

képtér (Im) =

a) $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \to \begin{pmatrix} -y \\ 5x \\ 2y-x \end{pmatrix}$

b) $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \to \begin{bmatrix} 0 \\ xy \end{bmatrix}$

nem

homogén?

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda x \cdot \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda^2 xy \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ xy \end{pmatrix}$$

nem

lineáris?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u_1 u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 v_2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ (u_1+v_1)(u_2+v_2) \end{pmatrix} \neq$$

$$\mathcal{L}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \mathcal{L}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \mathcal{L}\begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \end{pmatrix}$$

c) $\mathcal{L}(\underline{x}) = \det(\underline{x})$

linearitás: nem

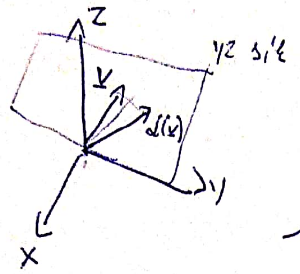
legyen $\det(A) \neq 0$ és $\det(A) \neq -\det(B)$

$\det(B) \neq 0$

de ettől még $\det(A+B)$ lehet $= 0$

2) $\underline{\underline{A}} = ??$ $\quad R^{3\times3}$ $\quad (i, j, k)$ = kanonikus bázis

a) tükrözés yz síkra



y, z nem változik
x −1-szerese

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \end{array}$$

~~b) tükrözés az origóra~~

$$\cancel{\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}}$$

a. homogén? Igen

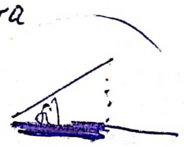
$$\mathcal{A}\left(\begin{bmatrix} \lambda \cdot x \\ \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot z \end{bmatrix}\right) = \checkmark \; \lambda \cdot \begin{matrix} -x \\ y \\ z \end{matrix}$$

b. lineáris? Igen

$$\begin{pmatrix} -(u_1 + v_1) \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix} \checkmark = \begin{pmatrix} -u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

c) ~~vetítés az xy síkra~~

~~↳ skalár szorzat~~



sajátérték, sajátvektor

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0 \qquad \begin{bmatrix} -1-\lambda & & \\ & 1-\lambda & \\ & & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 \swarrow \quad \searrow \lambda_2$

$\quad 1 \qquad -1$

$\underline{\underline{\lambda_1 = -1}}$ $\quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = t \neq 0, \text{ mert akkor } \underline{v} = \underline{0} \text{ és sajátvektor} \neq \underline{0} \\ 2v_2 = 0 \\ 2v_3 = 0 \end{matrix}$$

↳ egy db. nulla → algebrai multiplicitás = 1

OK

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim = 1 \Downarrow \exists S_{v1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{\lambda_2 = 1}}$

$$\begin{bmatrix} -2 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \cancel{-2}w_1 = 0 \\ w_2 = t_1 \neq 0, \text{ ha } t_2 = 0 \\ w_3 = t_2 \neq 0, \text{ ha } t_1 = 0 \end{matrix}$$

$$\left\{ t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$\exists S_{v2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \exists S_{v3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

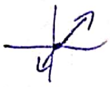
todo: S_{v1}, S_{v2}, S_{v3} bázist alkot

1) ↻ 60° $R^2 \to R^2$ 

$\mathrm{Ker}(\underline{A}) = \{\underline{0}\} \to \dim(\mathrm{Ker}) = 0$

$\dim(\mathrm{Im}(\underline{A})) = 2$

$\Big\}\ \dim(\underline{A}) = 0+2$ ✓

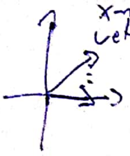
2) Origóra tükrözés $R^2 \to R^2$ 

$\mathrm{Ker}(\underline{A}) = \{\underline{0}\} \to \dim(\mathrm{Ker}) = 0$

$\dim(\mathrm{Im}(\underline{A})) = 2$

$\Big\}\ \dim(\underline{A}) = 0+2$ ✓

3) x-re vetítés $R^2 \to R^2$



$\mathrm{Ker}(\underline{A}) = \{y \text{ tengely}\} \to \dim(\mathrm{Ker}) = 1$

$\mathrm{Im}(\underline{A}) = \{x \text{ tengely}\} \to \dim(\mathrm{Im}) = 1$

$\Big\}\ \dim(\underline{A}) = 1+1$ ✓

4)  x tengely körüli forgatás

$\mathrm{Ker}(\underline{A}) = \{\underline{0}\} \to \dim(\mathrm{Ker}) = 0$

~~Im(A)~~ $\dim(\mathrm{Im}) = 3$

$\Big\}\ \dim(\underline{A}) = 0+3$ ✓

5)  xy síkra tükrözés

$\mathrm{Ker}(\underline{A}) = \{\underline{0}\} \to \dim(\mathrm{Ker}) = 0$

$\dim(\mathrm{Im}) = 3$

$\Big\}\ \dim(\underline{A}) = 0+3$ ✓

6) 

$\mathrm{Ker}(\underline{A}) = \{z \text{ tengely}\} \to \dim(\mathrm{Ker}) = 1$

$\dim(\mathrm{Im}) = 2$

$\Big\}\ \dim(\underline{A}) = 1+2$ ✓

7) $R^3 \to R^3$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(\underline{A}) = +(6-7) - (-4+3) + (2-9) = 5+\cancel{7}-11=+1 \neq 0$$

↳ lin. független

⇓

$\dim(\mathrm{Im}) = 3$

8)
$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} -1(-5+12) \\ +3(10-9) \\ -2(-8+3) \end{matrix}\right\} -7-3+10=0$$

↳ lin függő

észrevétel: 2 lin. függő

↓

$$\left.\begin{matrix} \dim(\mathrm{Ker}(\underline{A})) = 1 \\ \dim(\mathrm{Im}(\underline{A})) = 2 \end{matrix}\right\} 3$$

8) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 7 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow$ 2 lin. független $\to$ $Ker(\underline{\underline{A}}) = \{\underline{0}\}$

$\hookrightarrow$ $dim(Im(\underline{\underline{A}})) = 2$ $\Big\}$ $\underline{\underline{2}}$

b) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \to 1 \text{ lin. független} ; \quad 1 \text{ szabad változó}$$

$u \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$dim(Ker(\underline{\underline{A}})) = 1$ $\Big\}$ $\underline{\underline{2}}$

$dim(Im(\underline{\underline{A}})) = 1$

$\cancel{Ker(\underline{\underline{A}}) = \{\underline{0}\}}$

$\cdot(-3)$ $\begin{bmatrix} x \\ -3x \end{bmatrix}$

g) $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \overset{O_{12}}{\underset{O_{13}}{\Rightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{-1} \end{bmatrix} \to 2 \text{ lin független}$$

$a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

2 szabad

$dim(Im(\underline{\underline{A}})) = 2$ $\Big\}$ 4

$dim(Ker(\underline{\underline{A}})) = 4 - 2 = 2$

oszlopok száma

b 10a) $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \overset{O_{13}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \to$ 3 szabad

$dim(Im(\underline{\underline{A}})) = 3$ $\Big\}$ 4

$dim(Ker(\underline{\underline{A}})) = 1$

LINEÁRIS TÉR / VEKTORTÉR

Legyen L ¬üres halmaz, melyen értelmezve van:

- összeadás $+$
- skalárral való szorzás λ

ennek bizonyítása: behelyettesítéssel.

egy tetszőleges ~~[illegible]~~ halmazra.

$H \stackrel{?}{=} L$

1) $+$-ra vonatkozó feltételek

↳ $\underline{a} + \underline{b} \in L$ (zárt)

↳ $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ (kommutatív)

↳ $(\underline{a}+\underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b}+\underline{c})$ (asszociatív)

diff {

↳ $\underline{a} + \underline{0} = \underline{a}$ (∃ null~~vektor~~ elem = ~~egység~~)

↳ $\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$ (∃ ellentett)

2) λ-ra vonatkozó feltételek

↳ ~~zártsa~~ $\underline{a} \cdot \lambda \in L$ (zárt)

↳ $\lambda \cdot \underline{a} = \underline{a} \cdot \lambda$ (kommutatív)

↳ $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \underline{a} = \lambda_1 (\lambda_2 \cdot \underline{a})$ (asszociatív)

diff {

↳ $1 \cdot \underline{a} = \underline{a}$ (∃ egységelem)

↳ $\lambda(\underline{a}+\underline{b}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b}$ (disztibutív)

↳ $(\lambda_1 + \lambda_2)\underline{a} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{a}$

HF:// A természetes számok halmaza vektortér?

– nem mivel ∄ nullelem $\mathbb{N}$-ben

$0 \notin \mathbb{N}$

~~$ax^2 + bx^{01}$~~

~~HF:// Első és másodfokú polinomok halmaza vektortér?~~

HF:// n-ed fokú polinomok halmaza vektortér?

$\underline{a} = 6x^n + 1x^{n-1}$

$\underline{b} = -6x^n + 0x^{n-1}$, nem mivel nem zárt művelet az összeadás.

$\underline{a}+\underline{b} = \quad 1x^{n-1}$

↯

↳ ez n-1 fokú polinomok halmaza

~~HF:// Legfeljebb n-ed fokú~~ ? És a $L = M_{1\times2}$ mátrix?

~~$\underline{a} = 6x^n + 1x^{n-1}$ vagy~~

↳ reprezentáció:

Igen.

$\underline{a} = [6 \quad 1]$ $\quad \underline{a}+\underline{b} = [0 \quad 1]$

$\underline{b} = [-6 \quad 0]$ $\quad 6 \cdot \underline{b} = [-36 \quad 0]$

..., mind a 11 feltétel teljesül

HF:// Legfeljebb n-ed fokú?

$$\underline{a} = 6x^n + 2x^{n-1}$$

Igen $\quad \underline{b} = \qquad -2x^{n-1}$

$\underline{a} + \underline{b} = 6x^n$ ✓ $= \underline{b} + \underline{a}$

$\underline{a} + 0x^k = \underline{a}$ ✓

$\underline{c} = 2x^n$

$(\underline{a}+\underline{b}) + \underline{c} = 8x^n = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$ ✓

...

mindegyik teljesül

HF:// $\cancel{L} = M_{4x4} \overset{?}{=} L$

$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\underline{a} + \underline{b} = \begin{bmatrix} 12 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \underline{b} + \underline{a}$ ✓ ✓ Igen

...

mindegyik teljesül

HF:// n-ed fokú?

$\underline{a} = 6x^n + 2x^{n-1} + \ldots$

$\underline{b} = -6x^n + \ldots$

$\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} = \qquad + 2x^{n-1} + \ldots$

↯

$\underline{c}$ n-1 -ed fokú → nem

Homogén → átmegy az origón

$\underline{\underline{A}}\,\underline{x}=\underline{b}$

HA m homogén	MO. száma	count of vezérelemek & dim(V)	„marad"
✓	1 → $\underline{x}=\underline{0}$ (triviális) (független) → $\det(A)\neq 0$		—
✓	∞ (¬független) → $\det(A)=0$	$=\dim(\mathrm{Im}(A)) < \dim(V)$	nullsor
X	1	= oszlopok száma	—
X	∞	< oszlopok száma ← van szabad változó	nullsor
X	0	< oszlopok száma	tilos sor

P_3, P_2, P_1 } $\dim(V)=3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{R} & & & 0 \\ & \boxed{R} & & 0 \\ & & \boxed{R} & 0 \end{array}\right]$$

P_3, P_2 } $\dim(V)=2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \square & & & 0 \\ & \square & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

z egy szabad változó = paraméter

Tilos sor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \square & & & 0 \\ & \square & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

n

Ha $\det(A)\neq 0 \rightarrow A^{-1}$

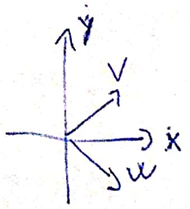
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{adj}(A)$$

$\exists A^{-1}$?	Dim(Ker(A))	Dim(Im(A))	Dim(A)	oszlopok száma ~~gen. rendszer?~~ R^k ~~-ban~~ $=0$	vezérelemek száma	Gen. rendszer R^k-ban?
✓	$=0$	$=\mathrm{Dim}(V)$	$=0+\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(A))$	$n=0$	$n=k$	Igen és bázis
X	$\neq 0$	$=\mathrm{Dim}(A)-\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(A))$	$=\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(A))+\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(A))$	$n<0$	$n=k$	Igen (de van összefüggő" ↑ plusz oszlop
—	—	—	—		$n<k$	Nem
—	—	—	—			
—	—	—	—			

másik táblázat

1)

TÜKRÖZÉS



$\lambda_x = 1$

$\lambda_y = -1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

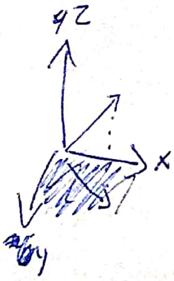
VETÍTÉS

Ha síkban van:

$\lambda = 1$

sv= span(i,j)

x,y altér



$\lambda = 0$

sv= span (k)

magtér : (0,0,0)

$\underline{y} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} = \lambda \underline{x}$ $\quad x \neq 0$

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{x} - \lambda \underline{x} = 0$

$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}})\underline{x} = \underline{0}$ $\quad / x$

$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} = \underline{0}$

$\Updownarrow$

$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$ } karakterisztikus polinom

$\lambda = ???$

$\Uparrow$

sajátérték /értékek

→ kiszámoljuk (Gauss eleminiáció)

→ saját vektor kiszámolása

pl.: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ & 0 & & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} -3y-4z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}$

sík : 2 paraméter

egyenes: 1 paraméter

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 \\ & 2 & 5 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$ $z \in \mathbb{R}$ ← paraméter

$2y + 5z = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}z$

$x + 3y + 4z = 0 \Rightarrow x = -3{,}5z$ $\quad (3 \cdot -\frac{5}{2}z)$

$\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} z$ $\quad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Downarrow$

sajátvektorok: $\text{span}\begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -2{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$\left[\begin{array}{ccc|c} R & 4 & 5 & 0 \\ & R & 3 & 0 \\ & & R & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$ $R_3 \cdot z = 0$

$R_2 \cdot y + 3z = 0$

$R_1 \cdot x + 4y + 5z = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de $x \neq 0$ ↯

CRAMER SZABÁLY

Ha $\det(A) \neq 0$ és négyzetes mátrix!

$$
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 25 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & -6 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\det|\cdots| = \left.\begin{array}{l} 1\left((-1)(-1)-3(-6)\right) \\ +2\left(1\cdot(-1)-3\cdot 3\right) \\ 5\left(1\cdot(-6)-(-1)3\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 19 \\ -22 \\ -15 \end{array}
$$

$$
\Downarrow
$$

$$
\begin{bmatrix} 9 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 25 & -6 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow
$$

$n \times n$ ✓

$$
\det \left| \begin{array}{ccc|cc} 9 & -2 & 5 & 9 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 25 & -6 & -1 & 25 & -6 \end{array} \right|
$$

$$
\det \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & -6 & -1 & 3 & -6 \end{array} \right|
$$

$18 \cdot 9 = 90 + 72 = 162$

$9 + 150 - 60$
$+125 + 162 - 4$ $= 82$

$1 - 18 - 30$
$+15 + 18 - 2$ $= -16$

$X_1 = -5{,}125$

$+9$
-150
-60
$+125$
-162
-4
302

Tehát X_1 megtalálása:

$$
\frac{\det(A.\text{csere}(1, b))}{\det(A)} = X_1
$$

LEKÉPEZÉSEK

Def: Sajátérték:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{v} = \lambda \underline{v}$$

Def: Sajátvektor

$$\underline{\underline{A}} \underline{v} = \lambda \underline{v}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{v} - \lambda \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

$$\underline{v}(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \underline{0}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda) - 4 \cdot 2 = 0$$

$$3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$$

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = +5 \end{matrix}\right\} AM = 1$$

Ha $\lambda = -1$:

$$\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \\ 2(x_1 + x_2) = 0 \end{matrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$\hookrightarrow x_1 = -x_2$

Ha $\lambda = 5$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = x_1 \\ \cancel{x_1 = x_2} \end{matrix} \rightarrow \underline{s}_2 = b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

VEKTORTÉR #11

+ -ra zárt

(1,2) • zárt

(3,4) • kommutatív

(5,6) • asszociatív

• $\exists$ egység

7) $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$ ←

3) $\exists$ inverz:

$\underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$

λ-ra zárt

8) → $\underline{v} \cdot 1 = \underline{v}$

10) disztributív 1 $(\lambda(\underline{a} + \underline{b}) = \lambda \underline{a} + \lambda \underline{b})$

11) disztributív 2 $(\underline{a}(\lambda_1 + \lambda_2) = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{a})$

Bázistranszformáció

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \underline{b} \end{array} \\
\begin{array}{c} \underline{e}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right]
\end{array}$$

p:= generáló elem $\neq 0$

q:= generálandó elem

s:= p sorának és q oszlopának metszete

r:= p oszlopának és q sorának metszete

$\cancel{q-\frac{r\cdot s}{p}}$

1) p sora /= p

2) $q-\frac{r\cdot s}{p}$

$\Downarrow$

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc} x_2 & x_3 & \underline{b} \end{array} \\
\begin{array}{c} \underline{x}_1 \\ \underline{e}_2 \\ \underline{e}_3 \end{array} & \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ -3 & -3 & -15 \\ -5 & \boxed{-1} & -13 \end{array}\right]
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cc} x_2 & \underline{b} \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ e_2 \\ x_3 \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} -3 & -5 \\ \boxed{12} & 24 \\ 5 & 13 \end{array}\right]
\end{array}$$

$-15+39$

$39-15$

$29-5$

24

$$\begin{array}{c|c}
 & \underline{b} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \left[\begin{array}{c} \cancel{} \\ 2 \\ \cancel{\frac{109}{13}} \end{array}\right]
\end{array}$$

$\cancel{13-\frac{120}{13}}$

$\cancel{\frac{43\cdot 13}{39}}$ $\cancel{169-120}=49$

$$\begin{array}{c|c}
 & \underline{b} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\right]
\end{array}$$

$13-\frac{\cancel{120}^{10}}{12}$

$-5-\left(\frac{-72}{12}\right)$ -6 $\Rightarrow -5+6$

$x_1=1$

$x_2=2$

$x_3=3$

2X2 INVERZ

$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A)$

$\exists A^{-1} = (det(A) \neq 0)$

$adj(A) =$

2x2 esetén:

- megfordított főátló
- mellékátló $\cdot = (-1)$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$adj(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ell.: $A \cdot A^{-1} = e$

$$\begin{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & \end{matrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = ?$

C segéd mátrix:

$+(1 \cdot 3 - 4 \cdot 2) = -5$

$-(0 \cdot 3 - 4 \cdot 5) = 20$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -5 & -20 & -5 \\ -3 & -9 & -1 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{adott sor \& oszlop letakarása, maradék determinánsa}} + \text{sakktábla} = \begin{bmatrix} -5 & 20 & -5 \\ 3 & -9 & 1 \\ 1 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

$adj(A) = C^T$ ← transzponálás: tükrözés a főátlóra

$$= \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 20 & -9 & -8 \\ -5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$det(A) =$ 1. oszlop szerint

$$\begin{matrix} +2(1 \cdot 3 - 4 \cdot 2) & -10 \\ -0(1 \cdot 3 - 3 \cdot 2) & = +0 & = -5 \\ +5(1 \cdot 4 - 3 \cdot 1) & +5 \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \cdot \cancel{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \\ -4 & \frac{9}{5} & \frac{8}{5} \\ 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

VEKTORRENDSZER

Definíció: véges sok azonos elemszámú vektorok halmaza.

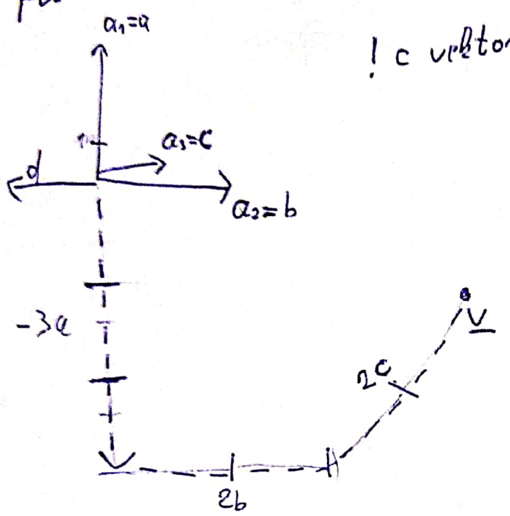
Lineáris kombináció

$\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots \underline{a}_n$ vektorrendszerhez válasszunk tetszőlegesen
$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ skalárokat. és képezzük a következő vektort:

$\underline{v} = \lambda_1 \cdot \underline{a}_1 + \lambda_2 \cdot \underline{a}_2 + \dots + a_n \cdot \lambda_n$

pl.: $-3a + 2b + 2c + 0d$

! c vektor itt a síkban is lehet



Független vektorrendszer

Definíció: Csak úgy kaphatunk $\underline{0}$-t, hogy $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_n = 0$.

Tehát ~~nem~~ lineárisan független nem nulla hosszú vektorok összege sosem $\neq \underline{0}$.

Magyarul: Megnyit egy olyan irányt, amit eddig nem tudtunk előállítani (az eddigiek lineáris kombinációjaként)
akkor az új vektor független a többitől.

$\cancel{\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}} \quad \cancel{\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ c \\ 1 \end{bmatrix}} \quad \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ezek lineárisan függetlenek

$\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

1) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \Rightarrow \underline{0}$

2) $\lambda_2 = -2\lambda_1 \Rightarrow \underline{0}$

avagy $\underline{b}$ előállítható $\underline{a}$-ból.

$\underline{b} = 2\underline{a} + 0\underline{c} + \dots \cdot 0\underline{z}$ kombinációja

lehetne több vektor ~~össze~~ is.

sajátérték, sajátvektor

↳ dim?

$3\lambda^2-6\lambda+3-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda$

$\lambda^2-2\lambda+1 \quad \cdot 3-\lambda$

$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ $\quad \mathcal{L}(\underline{x}) = \underline{A} * \underline{x} = \underline{y} \in R^3$

$-3+\lambda-3\lambda+\lambda^2+4$

$\mathcal{L}: R^3 \to R^3$

$x \in R^3 \qquad y \in R^3$

$\to (-1-\lambda)(3-\lambda)+2\cdot 2$

$\det(\underline{A}-\lambda \underline{E}) = 0 = \det\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 1\\ -1 & (-1-\lambda) & -2\\ 1 & 2 & (3-\lambda)\end{vmatrix} = +(3-\lambda)\cdot\det\begin{vmatrix}-1-\lambda & -2\\ 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}$

$-1\cdot\det\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix} \to (-1)(3-\lambda)+2\cdot 1$
$-3+\lambda+2 = \lambda+1 \quad \cdot(-1) = \underline{-\lambda-1}$

$+1\cdot\det\begin{vmatrix}-1 & (-1-\lambda)\\ 1 & 2\end{vmatrix} \to -1\cdot 2+(1+\lambda)\cdot 1$
$= \underline{\lambda-1}$

???

$\lambda=1$

$\lambda(1)=1:$

$\Sigma = \cancel{-\lambda^3+5\lambda^2-4\lambda+1}$

$-\lambda^3+5\lambda^2-7\lambda+3$

$= -(\lambda-1)^2\cdot(\lambda-3) = 0$

$\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -2\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(1)\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$\lambda_1=1 \qquad \lambda_2=-3$

algebrai multiplicitás:

2 (db)

$2x_1+x_2+x_3=0$

$-x_1-2x_2+2x_3=0$ $\quad$ észrevétel: $\cdot=(-1)$

$x_1+2x_2+2x_3=0$

$x_1=-2x_2-2x_3$

$2(-2x_2-2x_3)+x_2+x_3=0 \Rightarrow -4x_2-4x_3+x_2+x_3=0$

$-3x_2-3x_3=0$

$x_2+x_3=0 \qquad |-x_3$

$x_2=-x_3 \qquad |\cdot(-1)$

$-x_2=x_3$

$\cancel{z = x_2+x_3=0}$

$\cancel{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} = s_1$

$\Rightarrow$ szabad paraméterek száma = geometriai multiplicitás =

$\lambda_2=3$

$w_2=-w_3$

$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & -4 & -2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

$w_2+w_3=0$

$-w_1-4w_2-2w_3=0$

$-w_1+2w_2=0$

$\to w_1=-2w_2 \Rightarrow -\frac{1}{2}w_1=w_2=-w_3$

$\div(-2)$

$w_1=-2w_2=2w_3$

???

$\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \to s_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

WATCH: 17:30