Sprawozdanie

Obliczenia naukowe 2019/2020 – lista 2
Tomasz Janik

1. Wstęp

Jest to sprawozdanie, w którym zaprezentowane są rozwiązania zadań z pierwszej listy z kursu Obliczenia naukowe oraz wnioski jakie zostały z nich wyciągnięte. Zadania zostały rozwiązane z pomocą programów napisanych w języku Julia oraz programów pomocniczych.

2. Rozwiązania zadań

2.1. Zadanie 1

2.1.1. Opis problemu i rozwiązanie

W tym zadaniu należało powtórzyć eksperyment z zadania 5 z listy 1. ze zmodyfikowanymi danymi. W tym celu została użyta funkcja napisana na potrzeby poprzedniej listy, gdzie wprowadzono zmodyfikowane dane.

2.1.2. Wyniki i wnioski

W tabeli poniżej przedstawiono wyniki otrzymane po zmianie danych oraz różnice w porównaniu do oryginalnych wartości.

Metoda	*Float32*	*Różnica*	*Float64*	*Różnica*
a („w przód”)	-0.4999443	0.0	-0.004296342739891585	0.004296342842410399
b („w tył”)	-0.4543457	0.0	-0.004296342998713953	0.004296342842280865
c	-0.5	0.0	-0.004296342842280865	0.004296342842280865
d	-0.5	0.0	-0.004296342842280865	0.004296342842280865

Jak można zauważyć dla arytmetyki Float32 wyniki się nie zmieniły. Wynika to z faktu ograniczonej precyzji arytmetyki, przez co nasza zmiana nie miała wpływu na obliczenia.

Zmiany możemy zaobserwować dla arytmetyki Float64, gdzie usunięcie ostatniej cyfry po przecinku spowodowało, że wyniki znacznie się od siebie różnią. Widać więc, że nawet niewielka zmiana danych ma wpływ na otrzymany wynik. Z tego wynika, że zadanie to jest **źle uwarunkowane.**

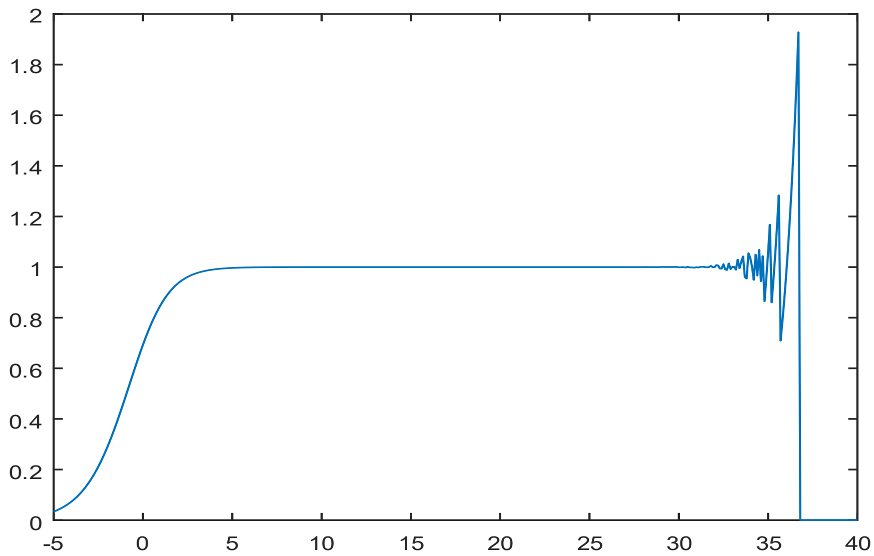
2.2. Zadanie 2

2.2.1. Opis problemu i rozwiązanie

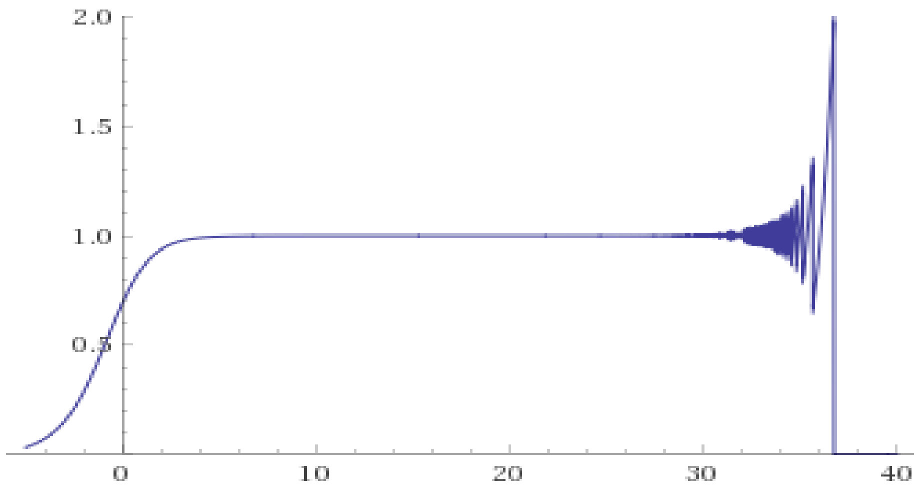
W tym zadaniu należało narysować wykres funkcji $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$ w co najmniej dwóch programach do wizualizacji danych. Następnie policzyć granicę tej funkcji w nieskończoności i porównać z otrzymanymi wykresami

2.2.2. Wyniki i wnioski

Poniże znajdują się 2 wykresy zadanej funkcji. Pierwszy z nich został wykonany za pomocą programu Matlab, a drugi programu WolframAlpha.



Wykres – Matlab



Wykres - WolframAlpha

Granica wyliczona za pomocą Wolframa wynosi 1.

Łatwo zauważyć, że mniej więcej od x = 30 zaczynamy odbiegać od oczekiwanej wartości. Najpierw pojawiają się coraz większe odchylenia od granicy, a następnie wartość funkcji spada do 0.

Odchylenia te wynikają z faktu, że między różnica e^x, a drugim składnikiem mnożenia $\ln(1 + e^{-x})$ w pewnym momencie staję się na tyle duża, że pojawiają się błędy w obliczeniach.

Natomiast fakt otrzymywania wartości 0 od pewnego momentu, wynika z tego, że e^{-x} jest bardzo małe w porównaniu z 1, więc w pewnym momencie otrzymamy $\ln(1 + e^{-x}) = \ln(1) = 0$, a co za tym idzie wynik mnożenia również jest równy 0.

2.3. Zadanie 3

2.3.1. Opis problemu i rozwiązanie

W tym zadaniu należało rozwiązać układ równań liniowych zadany przez macierz współczynników **A** oraz wektor prawych stron **b** na dwa sposoby, metodą eliminacji Gaussa ($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A} \backslash \boldsymbol{b}$) oraz za pomocą macierzy odwrotnej ($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$). Następnie należało porównać otrzymane wyniki z dokładnymi, czyli policzyć błędy względne. W tym celu zostały napisane funkcje hilbert() oraz random().

Macierz współczynników była generowana jako macierz Hilberta stopnia n lub jako macierz losowa z zadanym wskaźnikiem uwarunkowania za pomocą dołączonych funkcji.

2.3.2. Wyniki i Wnioski

W pierwszej znajdują się wyniki uzyskane dla macierzy Hilberta, a w drugiej dla macierzy losowej.

n	*Rank(A)*	*Cond(A)*	*Błąd metodą Gaussa*	*Błąd metodą inwersji*
1	1	1.0	0.0	0.0
2	2	19.28147006790397	5.661048867003676e-16	1.4043333874306803e-15
3	3	524.0567775860644	8.022593772267726e-15	0.0
4	4	15513.73873892924	4.137409622430382e-14	0.0
5	5	476607.25024259434	1.6828426299227195e-12	3.3544360584359632e-12
6	6	1.4951058642254665e7	2.618913302311624e-10	2.0163759404347654e-10
8	8	1.5257575538060041e10	6.124089555723088e-8	3.07748390309622e-7
11	10	5.222677939280335e14	0.00015827808158590435	0.007618304284315809
12	11	1.7514731907091464e16	0.13396208372085344	0.258994120804705
13	11	3.344143497338461e18	0.11039701117868264	5.331275639426837
16	12	7.865467778431645e17	54.15518954564602	29.84884207073541
20	13	1.3553657908688225e18	7.549915039472976	22.062697257870493

n	*c*	*Rank(A)*	*Błąd metodą Gaussa*	*Błąd metodą inwersji*
5	1.0	5	1.9860273225978183e-16	1.4895204919483638e-16
5	10.0	5	5.15985034193911e-16	7.021666937153401e-16
5	1000.0	5	2.6682334361182925e-15	8.846185720293485e-15
5	1.0e7	5	3.6311939421285176e-11	2.6031257322754125e-11
5	1.0e12	5	3.200676991392471e-5	2.5788030671929275e-5
5	1.0e16	4	0.04964427479904247	0.20515298112994582
10	1.0	10	3.1006841635969763e-16	2.0770370905276122e-16
10	1000.0	10	1.2379360112333173e-14	7.76870578861531e-15
10	1.0e7	10	7.188227408760592e-11	8.482031652700439e-11
10	1.0e12	10	3.620665362851843e-6	6.579661678566108e-6
10	1.0e16	9	0.07046663204187811	0.06578292010944026
20	1.0	20	3.657001166779273e-16	4.3638968010370034e-16
20	10.0	20	5.09978018830275e-16	5.347542221830667e-16
20	1000.0	20	4.0687909271516324e-14	3.659588801429782e-14
20	1.0e7	20	1.1384355183189299e-10	9.503414544309313e-11
20	1.0e12	20	1.4757604641700831e-5	1.7881393432617188e-5
20	1.0e16	19	0.09748747456054	0.10614654890174244

Jak można zauważyć dla macierzy Hilberta błąd rośnie wraz ze wzrostem rozmiaru macierzy podobnie dla obu algorytmów. Tak samo rośnie również wskaźnik uwarunkowania. Można zatem stwierdzić, że zadanie to jest źle uwarunkowane dla macierzy Hilberta.

Na przykładzie macierzy losowej możemy zauważyć, że niezależnie od rozmiaru, błędy mają podobną wartość dla takich samych wskaźników uwarunkowania. Rzędy wielkości błędów rosną wprost proporcjonalnie do rzędów wskaźnika uwarunkowania. Widać tutaj dobrze zależność między wskaźnikiem uwarunkowania, a faktycznymi wartościami uzyskanych błędów.

2.4. Zadanie 4

2.4.1. Opis problemu i rozwiązanie

W tym zadaniu należało znaleźć miejsca zerowe dla zadanego wielomianu (Wilkinsona), przy użyciu biblioteki Polynomials dla języku Julia. Następnie należało porównać otrzymane wyniki z rzeczywistymi. Następnie należało powtórzyć eksperyment Wilkinsona, tj. zmienić współczynnik −210 na $-210 - 2^{-23}$. Wyjaśnić zjawisko.

2.4.2. Wyniki i wnioski

W tabelach poniżej przedstawiono najpierw wyniki dla podstawowego wielomianu, a następnie dla zmodyfikowanego.

k	$\|P(z_k)\|$	$\|p(z_k)\|$	$\|z_k - k\|$
1	36352.0	38400.0	3.0109248427834245e-13
2	181760.0	198144.0	2.8318236644508943e-11
3	209408.0	301568.0	4.0790348876384996e-10
4	3.106816e6	2.844672e6	1.626246826091915e-8
5	2.4114688e7	2.3346688e7	6.657697912970661e-7
6	1.20152064e8	1.1882496e8	1.0754175226779239e-5
7	4.80398336e8	4.78290944e8	0.00010200279300764947
8	1.682691072e9	1.67849728e9	0.0006441703922384079
9	4.465326592e9	4.457859584e9	0.002915294362052734
11	3.5759895552e10	3.5743469056e10	0.025022932909317674
12	7.216771584e10	7.2146650624e10	0.04671674615314281
13	2.15723629056e11	2.15696330752e11	0.07431403244734014
14	3.65383250944e11	3.653447936e11	0.08524440819787316
15	6.13987753472e11	6.13938415616e11	0.07549379969947623
16	1.555027751936e12	1.554961097216e12	0.05371328339202819
17	3.777623778304e12	3.777532946944e12	0.025427146237412046
18	7.199554861056e12	7.1994474752e12	0.009078647283519814
19	1.0278376162816e13	1.0278235656704e13	0.0019098182994383706
20	2.7462952745472e13	2.7462788907008e13	0.00019070876336257925

k	$\lvert P(z_k)\rvert$	$\lvert p(z_k)\rvert$	$\lvert z_k - k\rvert$
1	20992.0	22016.0	1.6431300764452317e-13
2	349184.0	365568.0	5.503730804434781e-11
3	2.221568e6	2.295296e6	3.3965799062229962e-9
4	1.046784e7	1.0729984e7	8.972436216225788e-8
5	3.9463936e7	4.3303936e7	1.4261120897529622e-6
6	1.29148416e8	2.06120448e8	2.0476673030955794e-5
7	3.88123136e8	1.757670912e9	0.00039792957757978087
8	1.072547328e9	1.8525486592e10	0.007772029099445632
9	3.065575424e9	1.37174317056e11	0.0841836320674414
11	7.143113638035824e9	1.4912633816754019e12	1.1109180272716561
12	3.357756113171857e10	3.2960214141301664e13	1.665281290598479
13	3.357756113171857e10	3.2960214141301664e13	2.045820276678428
14	1.0612064533081976e11	9.545941595183662e14	2.5188358711909045
15	1.0612064533081976e11	9.545941595183662e14	2.7128805312847097
16	3.315103475981763e11	2.7420894016764064e16	2.9060018735375106
17	3.315103475981763e11	2.7420894016764064e16	2.825483521349608
18	9.539424609817828e12	4.2525024879934694e17	2.454021446312976
19	9.539424609817828e12	4.2525024879934694e17	2.004329444309949
20	1.114453504512e13	1.3743733197249713e18	0.8469102151947894

Jak można zauważyć w pierwszej tabeli, żadne z obliczonych miejsc zerowych nie jest poprawne. Dodatkowo błąd rośnie wraz z kolejnymi pierwiastkami wielomianu. Wynika to z faktu, że w arytmetyce Float64 jesteśmy wstanie zapisać jedynie 15-17 cyfr znaczących w systemie dziesiętnym. Ze względu na wielkość współczynników nie da się ich zapisać dokładnie, przez co generujemy coraz większe błędy mnożąc przez coraz większe argumenty.

W drugiej tabeli widzimy, że po zmianie jednego ze współczynników o jedynie 2^{-23}, sprawiło, że otrzymywane wyniki znacząca się zmieniły. Dodatkowo niektóre obliczone pierwiastki były zespolone. Z tego wynika, że zadanie jest źle uwarunkowane ze względu na zaburzenia współczynników.

2.5. Zadanie 5

2.5.1. Opis problemu i rozwiązanie

W tym zadaniu należało wykonać zadaną ilość iteracji zadanego równania rekurencyjnego.

$$p_{n+1} := p_n + rp_n(1 - p_n)$$

Najpierw należało wykonać 40 iteracji równania, a następnie znowu wykonać je tyle samo razy, lecz po 10. iteracji obciąć wynik do 3 miejsc po przecinku i porównać otrzymane wyniki.

Następnie należało wykonać standardowo 40 iteracji wyrażenia w arytmetykach Float32 oraz Float64 i porównać otrzymane wyniki.

W tym celu zostały napisane funkcje p1 – do pierwszego podpunktu oraz p2 – do drugiego.

2.5.2. Wyniki i wnioski

W poniższych tabelach przedstawiono porównanie wyników dla obu podpunktów.

n	*p(n)*	*P(n) ze zmianą*
1	0.0397	0.0397
…		
10	**0.7229306**	**0.722**
11	1.3238364	1.3241479
12	0.037716985	0.036488414
13	0.14660022	0.14195944
14	0.521926	0.50738037
15	1.2704837	1.2572169
16	0.2395482	0.28708452
17	0.7860428	0.9010855
18	1.2905813	1.1684768
19	0.16552472	0.577893
20	0.5799036	1.3096911
21	1.3107498	0.09289217
22	0.088804245	0.34568182
23	0.3315584	1.0242395
24	0.9964407	0.94975823
25	1.0070806	1.0929108
26	0.9856885	0.7882812
27	1.0280086	1.2889631
28	0.9416294	0.17157483
29	1.1065198	0.59798557
31	1.3110139	0.05600393
32	0.0877831	0.21460639
33	0.3280148	0.7202578
34	0.9892781	1.3247173
35	1.021099	0.034241438
36	0.95646656	0.13344833
37	1.0813814	0.48036796
38	0.81736827	1.2292118
39	1.2652004	0.3839622
40	**0.25860548**	**1.093568**

n	Float32	Float32
1	0.0397	0.0397
2	0.15407173	0.15407173000000002
3	0.5450726	0.545072626044421
4	1.2889781	1.2889780011888006
5	0.1715188	0.17151914210917552
6	0.5978191	0.5978201201070994
…		
23	0.3315584	0.22328659759944824
24	0.9964407	0.7435756763951792
25	1.0070806	1.315588346001072
26	0.9856885	0.07003529560277899
27	1.0280086	0.26542635452061003
28	0.9416294	0.8503519690601384
29	1.1065198	1.2321124623871897
31	1.3110139	1.0766291714289444
32	0.0877831	0.8291255674004515
33	0.3280148	1.2541546500504441
34	0.9892781	0.29790694147232066
35	1.021099	0.9253821285571046
36	0.95646656	1.1325322626697856
37	1.0813814	0.6822410727153098
38	0.81736827	1.3326056469620293
39	1.2652004	0.0029091569028512065
40	**0.25860548**	**0.011611238029748606**

W obu tabelach widać narastające różnicę w otrzymywanych wynikach. W pierwszej tabeli błąd pojawia się od zastosowanego obcięcia, a w drugiej nawarstwia się od samego początku.

Jest to spowodowane tym, że w równiach rekurencyjnych polegamy na wyniku poprzednich iteracji, co sprawia, że jeśli pojawi się błąd to nawarstwia się on w kolejnych iteracjach. Widać to i w przypadku naszego pozornie nieznacznego obcięcia oraz różnicach w precyzji obliczeń w różnych arytmetykach. W każdej kolejnej iteracji otrzymywane wyniki tracą ze sobą związek.

Badane równanie rekurencyjne jest więc numerycznie niestabilne.

2.6. Zadanie 6

2.6.1. Opis problemu i rozwiązanie

W tym zadaniu należało sprawdzić zachowanie zadanego równanie rekurencyjne dla różnych współczynników x_0 oraz c przy 40 iteracjach.

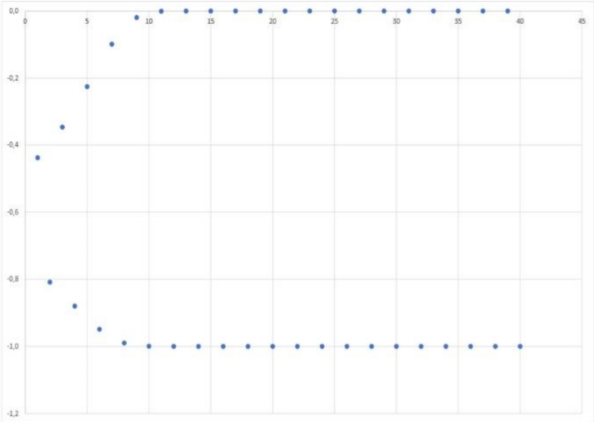
$$x_{n+1} = x_n^2 + \mathrm{c}$$

2.6.2. Wyniki i wnioski

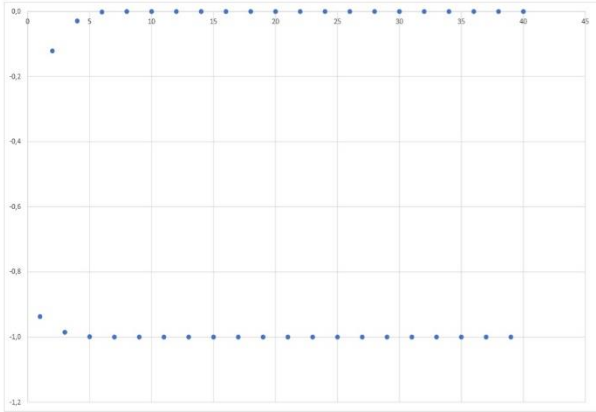
W tabelach znajdują się wyniki po 40 iteracjach, a poniżej załączone zostały wykresy ciągów.

c	x_0	$\boldsymbol{x_{40}}$
-1	1	**-1**
-1	-1	**-1**
-1	0.75	**-1**
-1	0.25	**0**

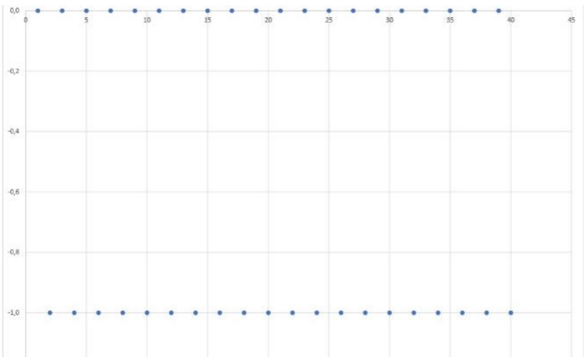
c	x_0	$\boldsymbol{x_{40}}$
-2	1.99999999999999	**-0.3289791230026702**
-2	1	**-1**
-2	2	**2**



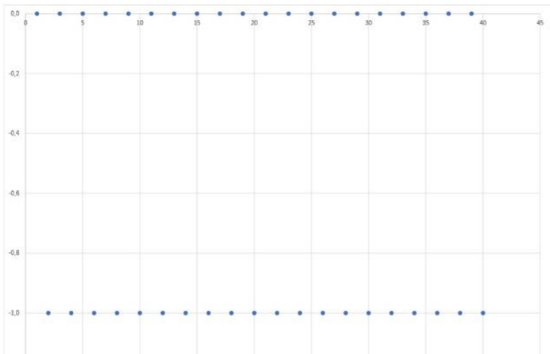
$C = -1, x_0 = 0.75$



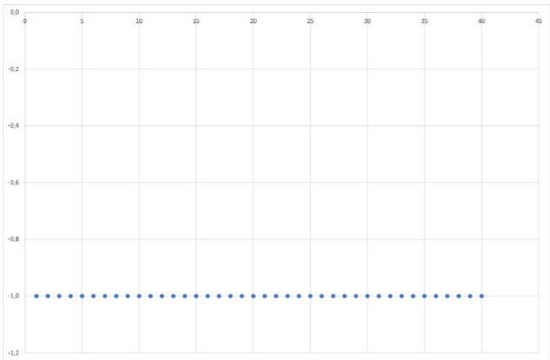
$C = -1, x_0 = 0.25$



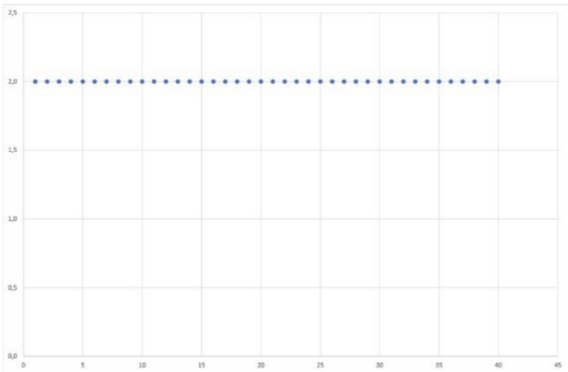
$C = -1, x_0 = -1$



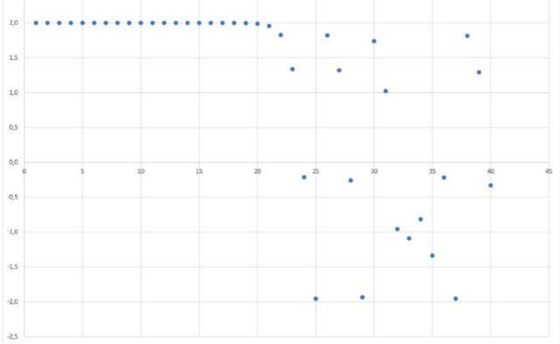
$C = -1, x_0 = 1$



$C = -2, x_0 = 1$



$C = -2, x_0 = 2$



$C = -2, x_0 = 1.99999999999999$

Jak można zauważyć dla wartości całkowitych nie dzieję się nic specjalnego, jedyną różnicą jest oscylacja w przypadku $c = -1$. Dla wartości ułamkowych zachodzą za to ciekawe zjawiska. Dla $c = -1$ oraz $x_0 = 0.25\ i\ x_0 = 0.75$ widzimy jak kolejne wyrazy ciągów zbiegają do granicy w liczbie całkowitej i od pewnego momentu są stabilne. Dla $c = -2$ oraz $x_0 = 1.99999999999999$ ciąg na początku jest stabilny, a od pewnego wyrazu zaczyna dawać wartości losowe.

Z tego wynika, że dla współczynnika $c = -1$ wzór rekurencyjny jest stabilny, ponieważ mimo ograniczonej precyzji arytmetyki, doszliśmy w pewnym momencie do stabilnych wartości.

Natomiast dla współczynnika $c = -2$ zauważamy, że obliczanie kolejnych wyrazów ciągu jest niestabilne, ponieważ błędy się nawarstwiają i od pewnego momentu zaczynamy dostawać wartości losowe.

3. Podsumowanie

Rozwiązania zadań miały na celu ukazać jak bardzo złe uwarunkowanie zadania, bądź niestabilność procesu numerycznego może zaburzyć.