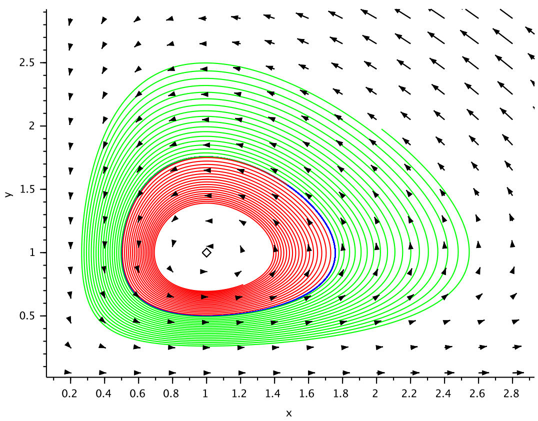
TP Méthodes Numériques :

Simulation de modèles proies-prédateurs



Ce TP constitue une introduction à l'intégration en temps des équations différentielles à travers l'étude d'un modèle décrivant des populations de proies et prédateurs en interaction.

- **Contacts :**
  guillaume.james@univ-grenoble-alpes.fr, fatima.karbou@meteo.fr

- Le TP est à réaliser en **Python**. Rédiger un compte-rendu sous la forme d'un **notebook Jupyter** (fichier .ipynb), en présentant et commentant avec soin les méthodes que vous avez employées, vos programmes et les résultats obtenus. La lisibilité des codes sera prise en compte dans l'évaluation du TP (penser notamment à structurer votre code en fonctions pour éviter des répétitions).

- **Travail en binôme**. Il n'y a qu'un seul rapport à rendre par binôme.

- **Remise du rapport:** le TP est à rendre au plus tard le **2 Mai 2022 sur TEIDE. Déposer un seul ficher .ipynb non compressé** (ne pas utiliser d'autres formats et ne pas créer d'archive, seul un fichier .ipynb sera examiné). Nommer le fichier avec les noms (et prénom en cas d'homonymes) des membres du binôme (Nom1_Nom2.ipynb).

1 Introduction

On souhaite décrire l'évolution de deux populations en interaction : une population de proies (par exemple des lièvres) et une population de prédateurs (par exemple des lynx). On note respectivement $x(t)$ et $y(t)$ les effectifs des proies et prédateurs (normalisés par des valeurs de référence) à l'instant t. On peut modéliser l'évolution de ces populations à l'aide d'équations différentielles de la forme :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & x(t)\, f(x(t), y(t), t) \\ y'(t) & = & y(t)\, g(x(t), y(t), t) \end{array}\right. \tag{1}$$

où f, g sont des fonctions C^1 qui décrivent les taux de croissance de chaque population. La fonction $y \mapsto f(x, y, t)$ est décroissante (terme de prédation) et $x \mapsto g(x, y, t)$ est croissante. Par ailleurs, on suppose les fonctions $x \mapsto f(x, y, t)$ et $y \mapsto g(x, y, t)$ décroissantes si on veut prendre en compte une quantité limitée de nourriture. La dépendance de f, g par rapport au temps permet de tenir compte des variations saisonnières de la quantité de nourriture et des taux de natalité.

Remarque 1.1. *Les solutions $(x(t), y(t))$ de (1) doivent être positives pour avoir un sens dans ce problème. On peut montrer que si $x(0) > 0$ alors $x(t) > 0$ pour tout t, et il en va de même pour y.*

2 Equation de Lotka-Volterra

Ce modèle est une version de (1) très simplifiée, dans laquelle la population de proies dispose de ressources illimitées et l'équation différentielle est autonome, i.e. les fonctions f, g ne dépendent pas de t :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & x(t)(1 - y(t)) \\ y'(t) & = & \alpha\, y(t)(x(t) - 1). \end{array}\right. \tag{2}$$

Le paramètre α est strictement positif. Pour les calculs numériques, on fixera $\alpha = 1$.

2.1 Analyse du modèle

Question 1. *Calculer la solution de (2) pour la condition initiale $(x(0), y(0)) = (0, y_0)$ avec $y_0 \geq 0$. Quel est son comportement quand $t \to +\infty$? Interpréter ce résultat.*

Question 2. *Mêmes questions pour la condition initiale $(x(0), y(0)) = (x_0, 0)$ avec $x_0 \geq 0$.*

Question 3. *Déterminer les solutions d'équilibre (solutions (x, y) indépendantes de t) de (2).*

Question 4. *Une fonction* $H\ :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *est appelée* intégrale première *de l'équation (2) lorsque pour toute solution* $(x(t),y(t))$ *de (2) on a* $\frac{d}{dt}H(x(t),y(t))=0$. *Vérifier que*

$$H(x,y)=\alpha\,(x-\ln x)+y-\ln y$$

est une intégrale première de (2).

Question 5. *Tracer différentes courbes de niveau* $H(x,y)=$ *constante (*`matplotlib.pyplot.contour`*) ainsi que la direction du champ de vecteurs* $F(x,y)=(\,x(1-y)\,,\,\alpha\,y(x-1)\,)$ *du système (2) (*`matplotlib.pyplot.quiver`*) pour* $\alpha=1$.

Question 6. *Quand on considère des solutions* $(x(t),y(t))$ *de (2) de conditions initiales* $(x(0),y(0))$ *strictement positives, que peut-on en déduire pour les trajectoires* $\gamma=\{(x(t),y(t)),\,t\in\mathbb{R}\}\subset(\mathbb{R}^+)^2$ *ainsi que pour les fonctions* $t\mapsto(x(t),y(t))$ *?*

2.2 Intégration numérique

On discrétise maintenant le système (2) pour $\alpha=1$ en utilisant différents schémas numériques.

2.2.1 Schéma d'Euler explicite

Afin d'approcher numériquement les solutions de (2) pour $t\in[0,t_{\max}]$, on discrétise l'équation à l'aide du schéma d'Euler explicite :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{k+1} & = & x_k+h\,x_k(1-y_k)\\ y_{k+1} & = & y_k+h\,y_k(x_k-1)\end{array}\right. \tag{3}$$

où $h>0$ est le pas d'intégration en temps et (x_k,y_k) une approximation de $(x(t_k),y(t_k))$ en $t_k=k\,h$. On fixe $h=t_{\max}/N$ où N est un entier ≥ 1.

Question 7. *Pour* $t_{\max}=120$, $(x(0),y(0))=(2,1)$ *et différentes valeurs du pas de temps* h, *tracer les trajectoires* $(x_k,y_k)_{0\leq k\leq N}\subset(\mathbb{R}^+)^2$ *ainsi que les graphes de* x_k, y_k *en fonction de* t_k. *Qu'observez-vous ? Comparer ces résultats à l'étude théorique de la question 6.*

2.2.2 Schéma d'Euler implicite

On considère maintenant le schéma d'Euler implicite

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_{k+1}-x_k & = & h\,x_{k+1}(1-y_{k+1})\\ y_{k+1}-y_k & = & h\,y_{k+1}(x_{k+1}-1)\end{array}\right. \tag{4}$$

Question 8. *Exprimer* x_{k+1} *en fonction de* x_k, y_{k+1} *et* h, *puis calculer* y_{k+1} *en fonction de* (x_k,y_k,h) *en résolvant une équation du second degré.*
Remarque : lorsque $h=0$ *on doit obtenir* $(x_{k+1},y_{k+1})=(x_k,y_k)$.

Question 9. *Reprendre la question 7 pour le schéma d'Euler implicite.*

2.2.3 Schéma d'Euler semi-implicite

On considère un schéma d'Euler semi-implicite

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{k+1} - x_k & = & h\, x_k(1 - y_{k+1}) \\ y_{k+1} - y_k & = & h\, y_{k+1}(x_k - 1) \end{array}\right. \tag{5}$$

dans lequel la variable x est traitée de manière explicite (évaluée en $t = t_k$ dans le second membre de (5)) et y de manière implicite (évaluée en $t = t_{k+1}$).

Question 10. *Exprimer (x_{k+1}, y_{k+1}) en fonction de (x_k, y_k, h).*

Question 11. *Pour $t_{\max} = 120$ et différentes valeurs du pas de temps h, tracer les trajectoires $(x_k, y_k)_{0 \leq k \leq N}$ pour différentes conditions initiales $(x(0), y(0))$, ainsi que les graphes de x_k, y_k en fonction de t_k. Qu'observez-vous ? Comparer ces résultats à ceux de la question 6.*

3 Modèle proies-prédateurs avec croissance limitée

On considère l'équation différentielle :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t)(1 - y(t) - c(t)\, x(t)) \\ y'(t) & = & y(t)(x(t) - 1) \end{array}\right. \tag{6}$$

où le coefficient $c(t) > 0$ tient compte du fait que la population de proies est limitée par la quantité de nourriture. On suppose que la fonction c est T-périodique (variations saisonnières des ressources) avec $T = 12$ (l'unité de temps représente un mois). Dans ce TP on fixera

$$c(t) = \lambda \left(1 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{6}\, t\right)\right),$$

où $\lambda > 0$ est un paramètre.

On discrétise (6) par le schéma d'Euler semi-implicite

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{k+1} - x_k & = & h\, x_k(1 - y_{k+1} - c(t_k)\, x_k) \\ y_{k+1} - y_k & = & h\, y_{k+1}(x_k - 1) \end{array}\right. \tag{7}$$

Question 12. *Exprimer (x_{k+1}, y_{k+1}) en fonction de (t_k, x_k, y_k, h).*

Question 13. *On fixe $t_{\max} = 120$ et $h = 10^{-3}$. Pour différentes valeurs du paramètre λ, tracer les graphes de x_k, y_k en fonction de t_k pour différentes conditions initiales $(x(0), y(0))$. Qu'observez-vous ? Interpréter le comportement des solutions lorsque $t \to +\infty$ en terme d'évolution des populations, ainsi que l'effet du paramètre λ.*