Limite finito di una successione

Definizione: Si dice che una successione di elementi

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

tende ad un valore l, al tendere di n a più infinito, se, prefissato un valore ϵ positivo, abbastanza piccolo, è possibile trovare, in corrispondenza di esso, un numero n_ϵ tale che, per ogni numero naturale $n > n_\epsilon$, sia verificata la seguente relazione:

$$|a_n - l| < \epsilon$$

In simboli, possiamo scrivere:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : |a_n - l| < \epsilon \, \forall n > n_\epsilon$$

Se una successione tende ad un valore l, reale, la successione di dice convergente.

Possiamo quindi affermare che una successione tende ad un valore l se è possibile determinare, dopo aver fissato un qualunque numero ϵ abbastanza piccolo, un numero n_ϵ per cui i valori della successione, definiti per tutti gli indizi n che sono maggiori di n_ϵ, si avvicinano sempre di più a l.

Quindi, da un certo punto in poi (da n_ϵ in poi), la distanza dei valori della successione da l diventano sempre più piccoli, più piccoli di qualsiasi numero piccolo ϵ.

Esempio: Verifichiamo, utilizzando la definizione, che la successione così definita: $a_n = \frac{n+1}{n}$

ha limite 1, cioè che: $\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

Procediamo fissando un $\epsilon > 0$, piccolo a piacere; dobbiamo mostrare che è possibile determinare un n_ϵ (che dipende da ϵ) in modo che, per tutti i valori della successione individuati da $n > n_\epsilon$, valga la seguente disuguaglianza:

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \epsilon$$

Risolviamo la disuguaglianza:

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \epsilon \rightarrow \left|\frac{n+1-n}{n}\right| < \epsilon \rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon$$

Poiché n è sempre positivo, possiamo togliere il valore assoluto:

$\left|\frac{1}{n}\right|<\epsilon \rightarrow \frac{1}{n}<\epsilon \rightarrow n>\frac{1}{\epsilon}$

Possiamo scegliere $n_\epsilon=\frac{1}{\epsilon}$

In questo modo, infatti, la disuguaglianza è verificata per tutti gli n maggiori di n_ϵ.

Limite infinito

Definizione: Si dice che una successione di elementi

$$a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n$$

ha per limite più infinito, al tendere di n a più infinito, se, prefissato un numero M positivo, abbastanza grande, è possibile trovare, in corrispondenza di esso, un numero n_M tale che, per ogni numero naturale $n>n_M$, sia verificata la seguente relazione:

$$a_n>M$$

In simboli, possiamo scrivere:

$$\lim_{n\rightarrow+\infty}a_n=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0 \exists n_M \in \mathbb{N}: a_n>M \forall n>n_M$$

Se una successione tende a più infinito, essa si dice **positivamente divergente**.

Possiamo riassumere la definizione affermando che una successione diverge a più infinito se, comunque scelto un numero M molto grande, esiste un termine della successione tale che ciascun termine della successione che abbiamo indice superiore ad esso, è maggiore di M.

Allo stesso modo, possiamo definire una successione negativamente divergente:

Definizione: Una successione è **negativamente divergente**, cioè ha per limite meno infinito, al tendere di n a più infinito, se, prefissato un numero M positivo, abbastanza grande, è possibile trovare, in corrispondenza di esso, un numero n_M tale che, per ogni numero naturale $n>n_M$, sia verificata la seguente relazione:

$$a_n<-M$$

In simboli:

$$\lim a_n=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0 \exists n_M \in N: a_n<-M \forall n>n_M$$

In generale, possiamo dire che una successione ha per limite infinito (generico) se:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\infty \Leftrightarrow \forall M>0 \exists n_M \in N: |a_n|>M \forall n>n_M$$

Notiamo, quindi, che una successione positivamente (o negativamente) divergente non è limitata superiormente (inferiormente) ; allo stesso modo, si può affermare che una successione limitata superiormente (inferiormente) non può essere positivamente (negativamente) divergente.

Esempio: Consideriamo la successione definita analiticamente nel seguente modo: $a_n=n^2$

Verifichiamo che essa diverge positivamente, cioè che: $\lim_{n\to+\infty} n^2=+\infty$

Applicando la definizione precedente, dobbiamo mostrare che, una volta fissato un numero M abbastanza grande, è possibile determinare un valore n_M, che dipenda da M, in modo che la seguente disuguaglianza sia verificata per tutti i valori della successione che abbiamo indice maggiore di M:

$a_n>M \to n^2>M$

Risolvendo la disuguaglianza, otteniamo:

$n^2>M \to n<-\sqrt{M} \vee n>\sqrt{M}$

Possiamo ignorare la prima parte della soluzione, in quanto n è un numero positivo, e sappiamo che la radice di un numero M positivo e sempre positiva, quindi non può essere $n<-\sqrt{M}$.

Analizziamo ora la seconda parte della soluzione, cioè $n>\sqrt{M}$. Possiamo scegliere $n_M=\sqrt{M}$; in questo modo, la disuguaglianza precedente è verificata per tutti i valori di n maggiori di n_M.

Successioni indeterminate

Non tutte le successioni ammettono limite, cioè sono convergenti o divergenti. Se una successione non ammette limite, né finito, né infinito, essa si dice indeterminata. Un esempio di successione indeterminata è la seguente:

$$a_n=(-1)^n$$

la successione, infatti, assume il valore 1 per n pari, e il valore -1 per n dispari.