

# Configurazioni di equilibrio di una diffusione virale. Il caso del Coronavirus

Marcello Colozzo – <http://www.extrabyte.info>

## 1 Introduzione

In quest'articolo mostriamo che un sistema non autonomo (nel caso specifico di una diffusione virale)

$$\frac{dN}{dt} = \alpha(t) N, \quad (\alpha(t) \geq 0, \quad \forall t)$$

può essere descritto da un insieme al più infinito numerabile, di sistemi istantaneamente autonomi, ciascuno dei quali è del tipo *mappa logistica*.

## 2 Sistema non autonomo

Per la popolazione dei contagiati assumiamo un'equazione differenziale lineare del tipo<sup>1</sup>:

$$\dot{N} = \alpha(t) N \quad (1)$$

che con la condizione iniziale

$$N(0) = N_0, \quad (2)$$

restituisce la soluzione

$$N(t) = N_0 e^{\mathcal{A}(t)}, \quad (3)$$

essendo

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t \alpha(t') dt' \quad (4)$$

Si noti che se  $\alpha(t) \equiv \alpha_0 = \text{costante}$ , si ha l'ordinaria crescita esponenziale ( $\alpha_0 > 0$ ) con costante di tempo  $\tau_0 = \alpha_0^{-1}$ :

$$N(t) = N_0 e^{\alpha_0 t} \quad (5)$$

Sfortunatamente non conosciamo la funzione  $\alpha(t)$  se non attraverso i dati giornalieri forniti dal sito web della *Protezione civile*. Per poter inserire questi dati in un'equazione differenziale del tipo (1) dobbiamo necessariamente eseguire un campionamento della variabile  $t$  con ampiezza di campionamento pari a 1 d, in modo da poter scrivere la (1) nella forma:

$$N_{k+1} - N_k = \alpha_k N_k, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (6)$$

Per quanto precede, i dati  $N_k, N_{k+1}$  sono forniti dal sito della Protezione civile, per cui possiamo calcolare giornalmente

$$\alpha_k = \frac{N_{k+1} - N_k}{N_k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

dove l'intero naturale  $n$  identifica l'istante giornaliero  $t_n$ . Ad esempio, in data odierna (22/03, i dati sono aggiornati al giorno precedente) abbiamo l'andamento graficato in fig. 1. Eseguendo un'interpolazione con Mathematica (o con un qualunque altro software), si ottiene l'andamento di fig. 2.

La conoscenza della funzione  $\alpha(t)$  nell'intervallo  $[0, t_n]$ , ci permette di integrare numericamente l'equazione (1), per poi graficare in un unico plot l'andamento di  $N_k$  e di  $N(t)$ , come mostrato in fig. 3, da cui vediamo che l'approssimazione ottenuta per interpolazione, funziona solo a tempi brevi.

<sup>1</sup>Per la derivata rispetto alla variabile  $t$  utilizziamo la notazione puntata, anzichè quella apicale.

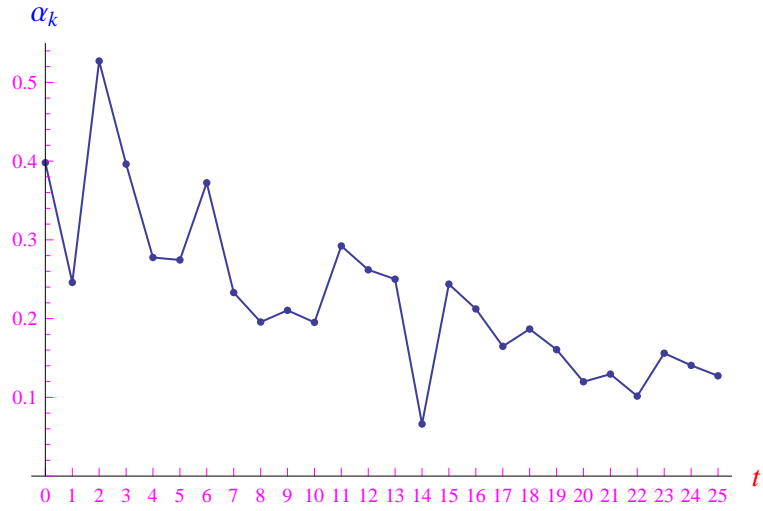


Figura 1: Andamento di  $\alpha_k$ .

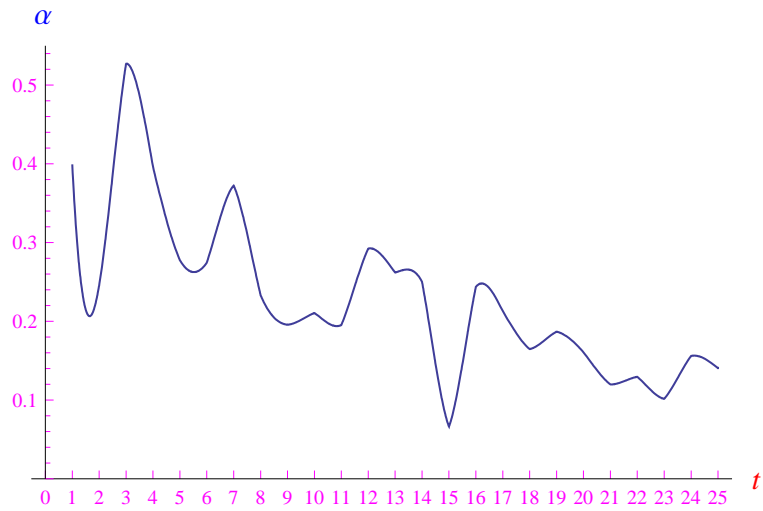


Figura 2: Andamento di  $\alpha(t)$  ottenuta per interpolazione.

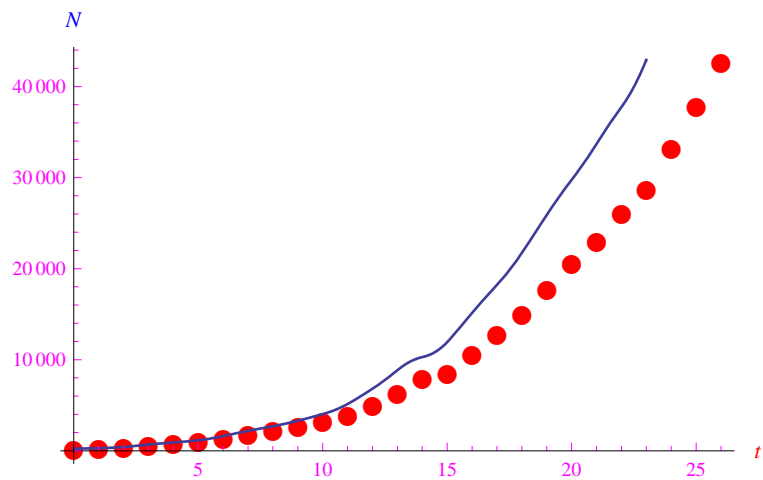


Figura 3: Andamento di  $N(t)$  (ottenuto per integrazione numerica) confrontato con  $N_k$ .

### 3 Sistema autonomo

Siccome l'approccio precedente non funziona, proviamo ad approssimare l'evoluzione virale con un sistema autonomo. Più precisamente, in approssimazione *logistica* e per un assegnato  $n$ , abbiamo il seguente sistema autonomo nonlineare:

$$\dot{N} = \mu_n N - \beta_n N^2, \quad (7)$$

dove

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n \geq 1} \alpha_k \quad (8)$$

Alcuni esempi (tenendo conto che l'istante iniziale è  $t_0 = 0 \text{ d} \equiv 24 \text{ febbraio}$ ):

$$\begin{aligned} n = 1 &\implies t_1 = 1 \text{ d} \equiv 25 \text{ febbraio}, \quad N_0 = 221, \quad N_1 = 309 \\ &\implies \alpha_0 = \frac{N_1 - N_0}{N_0} = 0.398 \end{aligned}$$

Se  $n = 2$

$$\begin{aligned} n = 2 &\implies t_2 = 2 \text{ d} \equiv 26 \text{ febbraio}, \quad N_0 = 221, \quad N_1 = 309, \quad N_2 = 385 \\ &\implies \alpha_0 = \frac{N_1 - N_0}{N_0} = 0.398, \quad \alpha_1 = \frac{N_2 - N_1}{N_1} = 0.246 \end{aligned}$$

etc. L'altro parametro è  $\beta_n = f(\mu_n) > 0$ , che viene determinato in base ai dati osservativi (cioè i valori  $\alpha_k$  e quindi, il valor medio  $\mu_n$ ). Per essere più precisi, argomentiamo nel modo che segue. Il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{N} = \mu_n N - \beta_n N^2 \\ N(0) = N_0 \end{cases}, \quad (9)$$

ammette un'unica soluzione che dà luogo alla curva integrale:

$$\Gamma_{\mu_n} : N(t; \mu_n) = \frac{\mu_n N_0}{\beta_n N_0 + (\mu_n - \beta_n) e^{-\mu_n t}}, \quad \forall \mu_n \in A \subset [0, +\infty) \quad (10)$$

o meglio, a una famiglia (ad un parametro) di curve, ciascuna delle quali è nota come *curva logistica*. Notiamo incidentalmente che a tempi brevi, le soluzioni della (9) si comportano come quelle dell'equazione differenziale

$$\dot{N} = \mu_n N \implies N(t) = N_0 e^{\mu_n t}$$

In altri termini, a tempi brevi la diffusione virale segue una legge esponenziale con costante di tempo  $\tau_n = \mu_n^{-1}$ . Progressivamente inizia a pesare il termine di smorzamento  $-\beta_n N^2$ , per poi riprodurre il comportamento asintotico:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t; \mu_n) = \frac{\mu_n}{\beta_n} \stackrel{\text{def}}{=} L_n \quad (11)$$

**Congettura 1** Per un'assegnato istante giornaliero  $t_n$ , la  $n$ -pla ordinata  $(N_0, N_1, \dots, N_n)$  determina univocamente il parametro  $\beta_n$  in modo che la curva (10) sia la migliore approssimazione dei dati puntuali

$$(0, N_0), (t_1, N_1), \dots (t_n, N_n)$$

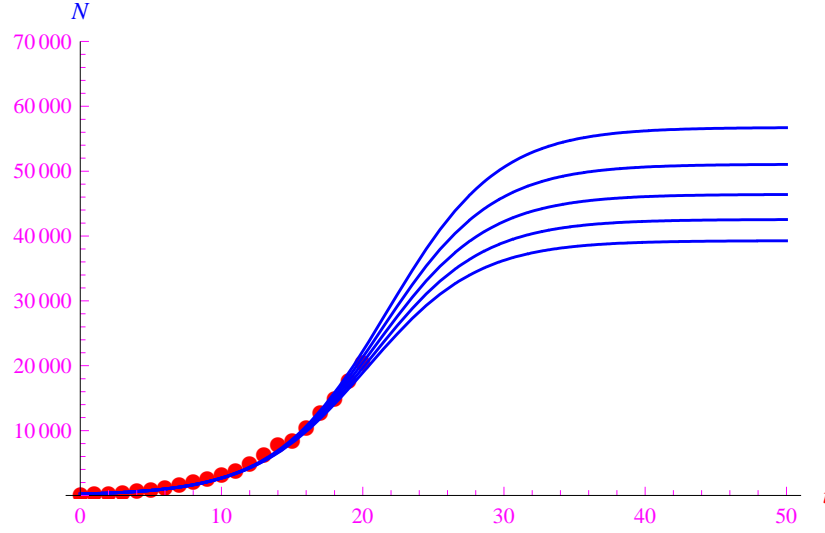


Figura 4: Andamento di alcune logistiche.

In linea di principio, si potrebbe utilizzare un qualche procedimento analitico per la determinazione della migliore approssimazione. Tuttavia, ci siamo limitati a determinare il parametro  $\beta_n$  per via computazionale in ambiente *Mathematica*. In tale paradigma, risulta:

$$0 < \beta_n \ll \mu_n, \quad \forall n$$

In fig. 4. sono graficate alcune logistiche della famiglia (10), da cui vediamo che  $L_n$  cresce al crescere di  $t_n$ .

Ad esempio, nella data odierna (22/03) abbiamo i dati del 21/03 per cui è  $n = 26$

$$\mu_{26} = 0.228 \text{ d}^{-1}, \quad \beta_{26} = 2.3 \times 10^{-6} \text{ d}^{-1}$$

Quindi

$$L_{26} = \frac{\mu_{26}}{\beta_{26}} = 99364.8$$

mentre il grafico è in fig. 5.

## 4 Stabilità della famiglia di logistiche

Per quanto precede risulta:

$$L_{n+1} > L_n$$

Il processo di diffusione virale dovrà comunque raggiungere un equilibrio, per cui:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 1,$$

avendo posto per definizione

$$\lambda_n = \frac{L_{n+1}}{L_n},$$

per cui

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n > \nu_\varepsilon \implies \lambda_n \sim 1 + \varepsilon$$

Tale condizione può essere verificata graficamente, in modo da stimare l'indice  $\nu_\varepsilon$  e quindi la data  $t_{\nu_\varepsilon}$  corrispondente alla stabilità asintotica della famiglia di logistiche.

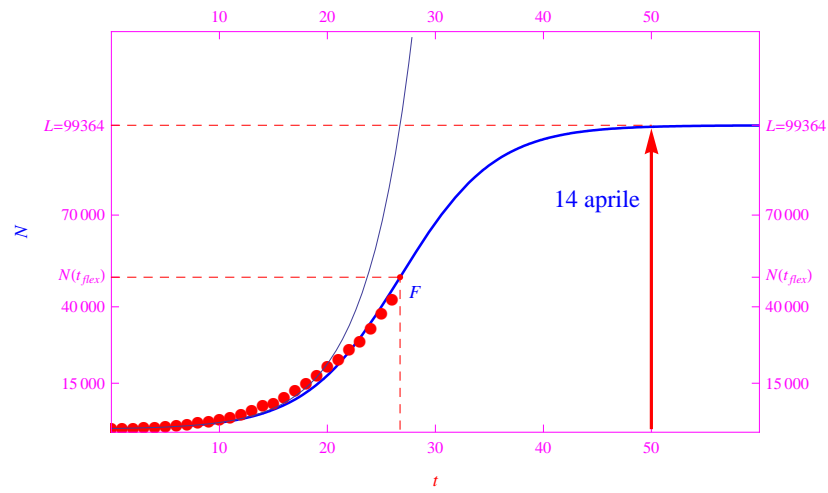


Figura 5: Aggiornamento 22/03.