Asintoti di una funzione

Asintoto orizzontale: Una retta di equazione $y=l$ si dice asintoto orizzontale per il grafico della funzione $f(x)$ se e solo se si ha che:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=l$$

In particolare, possiamo distinguere l'asintoto orizzontale destro, che si ha quando il limite della funzione per $x\to+\infty$ vale l, e l'asintoto orizzontale sinistro, che si ha invece quando vale l il limite della funzione per $x\to-\infty$.

L'asintoto orizzontale di una funzione è, quindi, una retta tale che la distanza da essa di un punto della curva tende a zero al tendere all'infinito dell'ascissa del punto.

Possiamo notare che una funzione che ha dominio limitato non può avere asintoti orizzontali, in quanto non avrebbe senso calcolare il suo limite per x tendente all'infinito.

Asintoto verticale: Una retta di equazione $x=c$ si dice asintoto verticale per il grafico della funzione $f(x)$ se e solo se si ha che:

$$\lim_{x\to c} f(x)=\infty$$

Anche in questo caso, possiamo parlare di asintoto verticale destro e sinistro se, rispettivamente, x tende a c da destra o da sinistra.

Possiamo definire, quindi, un asintoto verticale come una retta tale che la distanza da essa di un punto sulla curva tende a zero al tendere all'infinito dell'ordinata del punto.

Asintoto obliquo: Una retta di equazione $y=mx+q$, con $m\neq 0$, si dice asintoto obliquo per il grafico della funzione $f(x)$ se e solo se:

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(mx+q)]=0$$

Quindi, un asintoto obliquo è una retta tale che la distanza di un punto sul grafico della funzione $f(x)$ e il punto di uguale ascissa sulla retta $y=mx+q$ tende a zero al tendere di x all'infinito.

In particolare, possiamo determinare l'equazione della retta che è asintoto obliquo con le seguenti formule, che ci permettono di ricavare il suo coefficiente angolare:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

e la sua ordinata all'origine:

$$q=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$$

Osserviamo che l'asintoto obliquo esiste se i limiti precedenti esistono finiti; inoltre, se il dominio della funzione è limitato, o se la funzione è periodica, non esistono asintoti obliqui.

Studio di funzione

Vediamo ora delle regole da seguire per poter tracciare il grafico di una funzione $f(x)$.

1. Si determina il dominio D della funzione $f(x)$, dopo aver stabilito la tipologia della funzione (algebrica o trascendente, intera o fratta, razionale o irrazionale…);
2. Si determinano eventuali simmetrie o periodicità della funzione (eventualmente si determina il suo periodo), o se essa è pari o dispari;
3. Si determinano le intersezioni del grafico della funzione con gli assi cartesiani, risolvendo i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases};\begin{cases} y=f(x) \\ x=0 \end{cases}$$

4. Si studia il segno della funzione risolvendo la disequazione $f(x)>0$, determinando, così, gli insiemi in cui la funzione è positiva (cioè si trova al di sopra dell'asse x) e quelli in cui è negativa (cioè si trova al di sotto dell'asse x);
5. Si cercano gli eventuali asintoti verticali della funzione, studiando i limiti negli estremi finiti del dominio, e gli eventuali asintoti orizzontali o obliqui, studiando i limiti all'infinito della funzione. (Nel caso ci sia un asintoto obliquo, si cercano anche le intersezioni di questo con la funzione);
6. Si calcola la derivata prima della funzione, e si risolve l'equazione $f'(x)=0$, determinando i punti stazionari della funzione. Si studia il segno della derivata prima risolvendo la disequazione $f'(x)>0$, stabilendo in quale intervallo la funzione è crescente, e in quale è decrescente, e si cercano gli eventuali punti di massimo e minimo relativi;
7. Si calcola la derivata seconda $f''(x)$ e si studia il segno di questa, risolvendo la disequazione $f''(x)>0$, determinando gli intervalli in cui la funzione volge la concavità verso l'alto, e in quali verso il basso; si determinano, poi, gli eventuali punti di flesso;

Mano a mano che si svolgono i punti precedenti, tracciamo sul grafico le informazioni ricavate e, alla fine, si potrà disegnare il grafico completo della funzione.