1) (Log|x|)/x

Sol: $f(x) = \frac{\log|x|}{x}$

C.d.E.

condizione esistenza funzione $x \neq 0$
dato che l'argomento del log. è in valore assoluto
allora l'unica cond. di esistenza per il log. è che sia $x \neq 0$

Studio agli estremi del c.d.E.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (poiché il log. cresce più lentamente di x)

quindi vi è un asintoto orizzontale bilatero che è $y=0$

$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$ poiché può configurarsi nella forma

$(q \to -\infty) \cdot \frac{1}{q \to 0^\pm} = \pm\infty$ ERGO $x=0$ è asintoto verticale

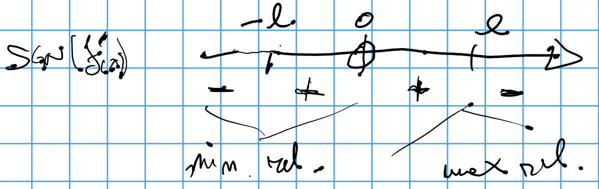
Intervalli di crescenza/decrescenza

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{|x|}\cdot SGN(x)\cdot x - \ln|x| \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln|x|}{x^2}$$

$D|x| = SGN(x)$

(ricordando che $SGN(x) = \frac{|x|}{x} = \pm 1$ a seconda x è >0 o <0)

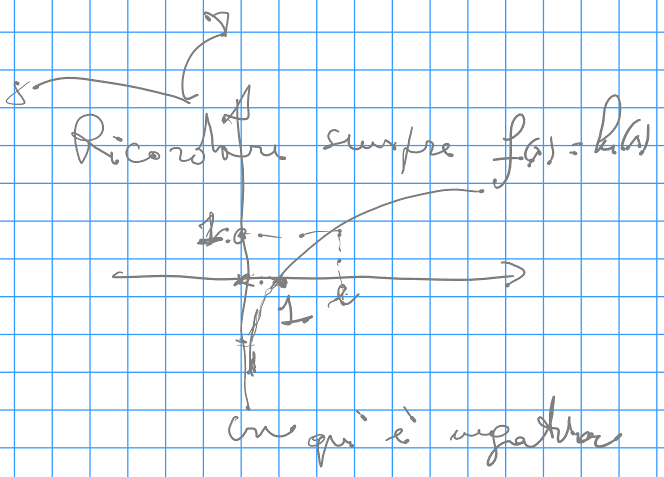
$f'(x) = 0 \iff 1 - \ln|x| = 0 \Rightarrow \ln|x| = 1 \Rightarrow x = \pm e$



minimo rel. in $\left(-e ; \frac{\ln|-e|}{-e}\right) = \left(-e, -\frac{1}{e}\right)$

massimo rel. in $\left(e ; \frac{\ln|e|}{e}\right) = \left(e, \frac{1}{e}\right)$

Ricordare sempre $f(x) = \ln(x)$



che qui è negativa

Studio delle concavità

$$f''(x) = D_x\left(\frac{1 - \ln|x|}{x^2}\right) = \frac{-\frac{1}{|x|}\cdot \mathrm{sgn}(x)\cdot x^2 - 2x\left(1 - \ln|x|\right)}{x^4}$$

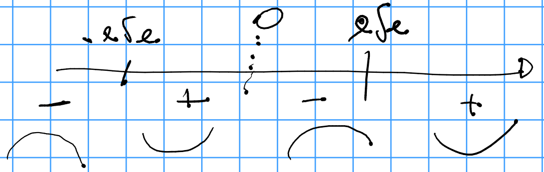
ricordando che $\mathrm{sgn}(x) = \frac{|x|}{x}$

$$= \frac{-x - 2x\left(1 - \ln|x|\right)}{x^4} =$$

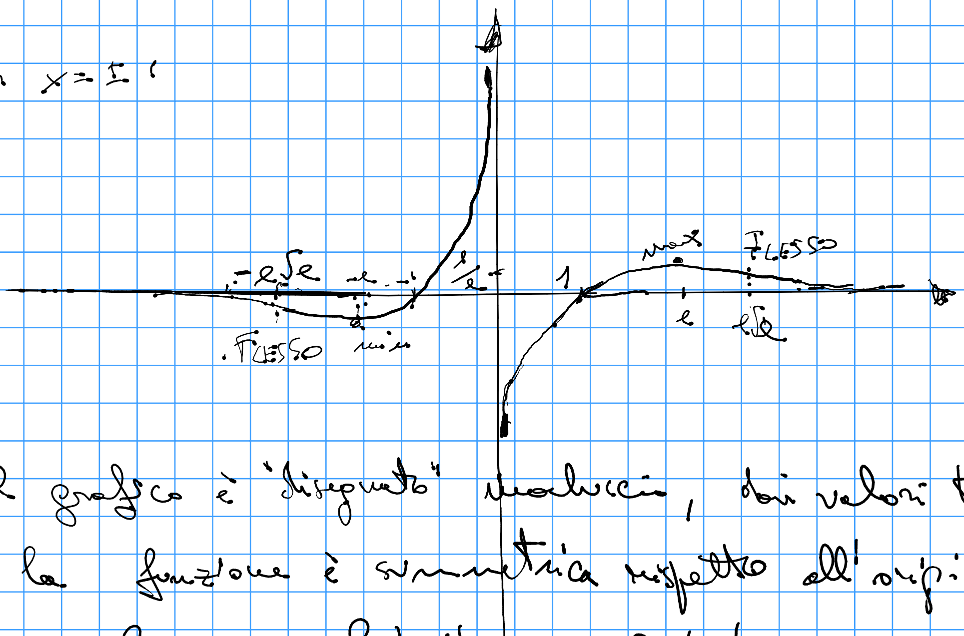
$$= -\frac{3 - 2\ln|x|}{x^3}$$

$f'' = 0$ se $3 - 2\ln|x| = 0 \Rightarrow \ln|x| = \frac{3}{2}$

se $x > 0 \Rightarrow x = e\sqrt{e}$; per $x < 0 \Rightarrow x = -e\sqrt{2}$



Oss. $f(x) = 0$ per $x = \pm 1$



Oss: anche se il grafico è "disegnato" maluccio, dai valori trovati viene suggerito che la funzione è simmetrica rispetto all'origine, infatti è dispari:

$$f(-x) = \frac{\ln|-x|}{-x} = -\frac{\ln|x|}{x} = f(x)$$

2) Log(x^2/x-2)

Sol: $f(x) = \ln \frac{x^2}{x-2}$

C.d.E.

condizione esistenza funzione $x \neq 2$

" " logaritmo $\frac{x^2}{x-2} > 0 \Rightarrow x > 2$

(questa già contiene $x \neq 0$)

Studio agli estremi del C.d.E.

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

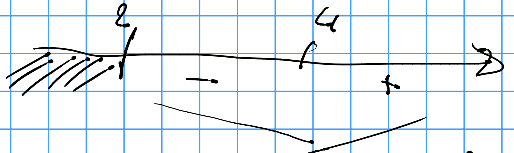
c'è un asintoto verticale in $x = 2$; nessuno orizz.

non cerco gli asintoti obliqui poiché le funzioni logaritmiche non ne hanno.

Crescenza/decr.

$$f'(x) = D \ln\left(\frac{x^2}{x-2}\right) = \frac{x-2}{x^2} \cdot \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{x^2(x-2)} = \frac{x-4}{x(x-2)}$$

$f' > 0$ nel C.d.E. per $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$

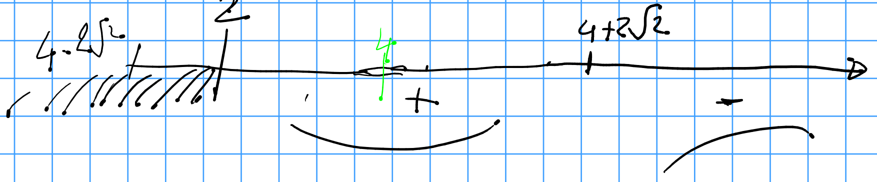


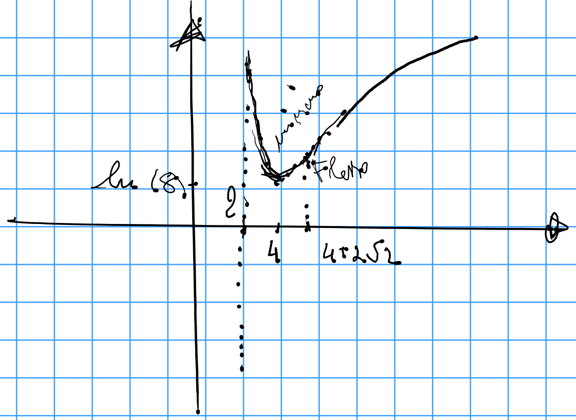
min. rel. $(4, \ln \frac{16}{2}) = (4, \ln 8)$

Concavità

$$f''(x) = D\left(\frac{x-4}{x^2-2x}\right) = \frac{x^2-2x-(x-4)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-x^2+8x-8}{\dots}$$

$f'' = 0$ per $-x^2+8x-8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 8 = 0$ $x_{1,2} = 4 \mp \sqrt{16-8} = 4 \mp 2\sqrt{2}$





3) X^2/(2^x-2)

Soluzione: $$f(x) = \frac{x^2}{2^x - 2}$$

C.d.E.

$$2^x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$$

Studio agli estremi del c.d.E.

perché $2^{-q\to\infty} = \frac{1}{2^{q\to\infty}} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$ poiché le esponenziali crescono più velocemente di qualsiasi potenza di x.

$$\lim_{x\to1^{\mp}} f(x) = \mp\infty$$ poiché siamo in presenza d'una forma del tipo $\frac{1}{q\to0^{\mp}}$

Quindi A.V. x=1 e A.or. solo a destra $y=0$

Crescenza/decrescenza

$$f'(x) = D\frac{x^2}{2^x-2} = \frac{2x(2^x-2) - x^2(2^x\ln(2))}{(2^x-2)^2}$$

$$= \frac{x(2^{x+1} - 4 - x\ln(2)\cdot2^x)}{\dots}$$

Ricordiamo che

se $y = 2^x$

$\Rightarrow \ln y = x\ln(2)$

e derivando $\frac{1}{y}\cdot y' = \ln(2)$

da cui $y' = y\cdot\ln(2)$

ovvero $D2^x = 2^x\cdot\ln(2)$

$f' = 0$ per $x = 0$ oppure per $2^x\cdot2 - x\ln(2)\cdot2^x - 4 = 0$

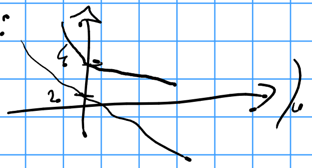
$$2^x(2 - x\ln(2)) - 4 = 0$$

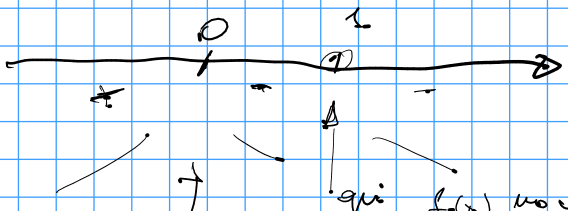
$2 - x\ln(2) = 4\cdot2^{-x}$, ma questa non ha sol. poiché il 1° membro rappresenta una retta che

. sia sempre più bassa della funzione

$4 \cdot 2^{-x}$

(basta fare uno schizzo per convincersi)



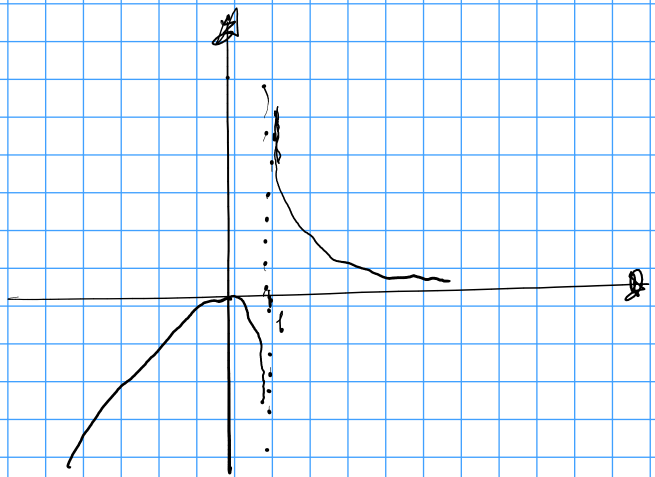


max rel.

qui f(x) non esiste...

(0, 0)

Tralascio lo studio della concavità poiché la f''(x) diverrebbe "ad occhio" troppo complicata...



4) e^(1/|x|)]/ln(x)

Studio:

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{|x|}}}{\ln(x)}$$

C.d.E. $\ln(x) \neq 0$ a ché esista la funzione

$|x| \neq 0$ a ché esista la funz. dell'esponente

$x > 0$ a ché esista il logaritmo

Ergo: $x \neq 1$; $x \neq 0$ ma $x > 0$ comunque ovvero

$$(0,1) \cup (1, +\infty)$$

Studio agli estremi del C.d.E.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{|x|}}}{\ln(x)} = -\infty \; ; \; \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \mp\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

Quindi: $x=0$ è A.V. a destra;
$x=1$ è A.V. bilaterale
$y=0$ è A.OR. a destra

Crescenza/Decrescenza

$$f'(x) = D\,\frac{e^{\frac{1}{|x|}}}{\ln(x)} = \frac{e^{\frac{1}{|x|}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot SGN(x)\cdot \ln(x) - e^{\frac{1}{|x|}}\cdot\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} =$$

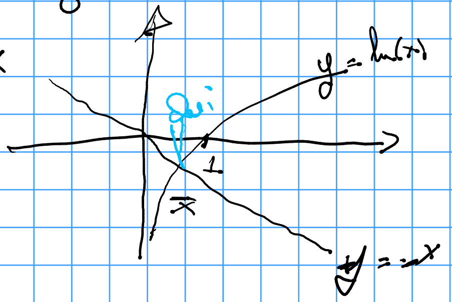
$$\underbrace{\frac{e^{\frac{1}{|x|}}}{(\ln(x))^2}\cdot\frac{1}{x}}_{\text{per } x>0 \text{ questo è tutto positivo}}\left(-\frac{SGN(x)\cdot\ln(x)}{x} - 1\right)$$

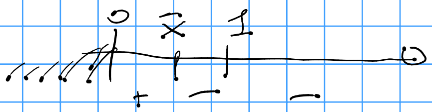
$f'(x) = 0$ per $-\frac{SGN(x)\cdot\ln(x)}{x} - 1 = 0$

$$\Rightarrow -\frac{SGN(x)\ln(x)}{x} = 1$$

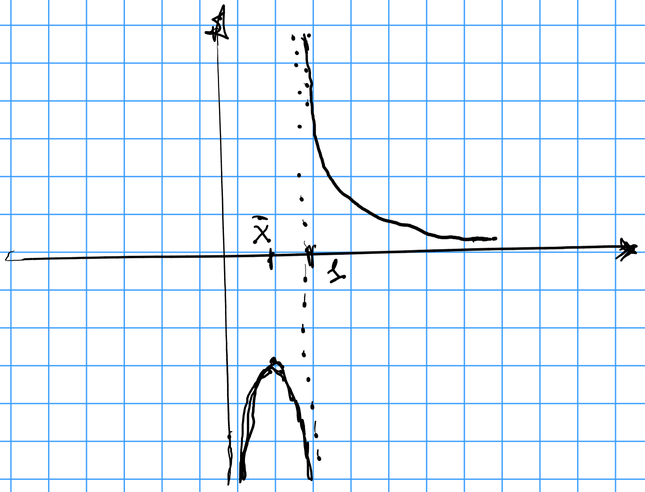
ma per $x>0$ $SGN(x) = +1$ $\Rightarrow$ nel dominio bisogna risolvere

$$-\frac{\ln(x)}{x} = 1 \iff \ln(x) = -x$$





Tralascio lo studio della derivata seconda perché è abbastanza "brutta"



5) (Log|x|)/(x^2)-4

Studio $f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2} - 4$ (mah! secondo me avrebbe dovuto essere $\frac{\ln|x|}{x^2-4}$)

C.d.E. $|x|>0$ per il logaritmo

$x^2 \neq 0$ per la frazione

$\Rightarrow x \neq 0$

Studio agli estremi del c.d.E.

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -4$; $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = -\infty$

per cui $y=-4$ è A. OR. bilatero e $x=0$ è A. Vert.

Crescenza/decrescenza

$$f'(x) = D\left(\frac{\ln|x|}{x^2} - 4\right) = \frac{\frac{1}{|x|} \cdot SGN(x) \cdot x^2 - 2x\ln|x|}{x^4} =$$

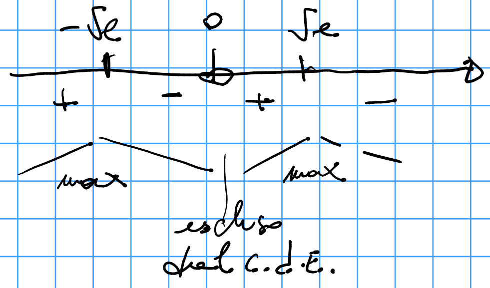
Ricordiamo che $SGN(x) = \frac{|x|}{x}$

$$= \frac{x - 2x\ln|x|}{x^4} = \frac{x(1-2\ln|x|)}{x^4}$$

$f'(x) = 0$ per $x=0$ (non nel c.d.E.) oppure $1-2\ln|x| = 0$

$\Rightarrow \ln|x| = \frac{1}{2} \Rightarrow |x| = \sqrt{e}$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{e}$



max in $\left(-\sqrt{e}, \frac{\frac{1}{2}}{e} - 4\right) = \left(-\sqrt{2} ; \frac{1}{2e} - 4\right)$

ed in $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2e} - 4\right)$

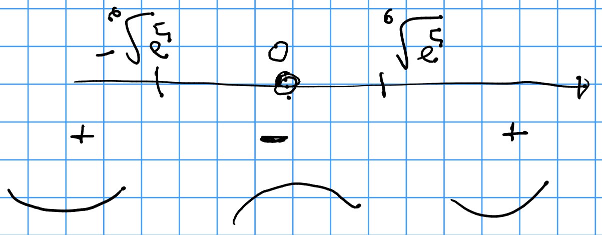
D'altra parte la funzione è pari $f(-x) = \frac{\ln|-x|}{(-x)^2} - 4 = \frac{\ln|x|}{x^2} - 4 = f(x)$

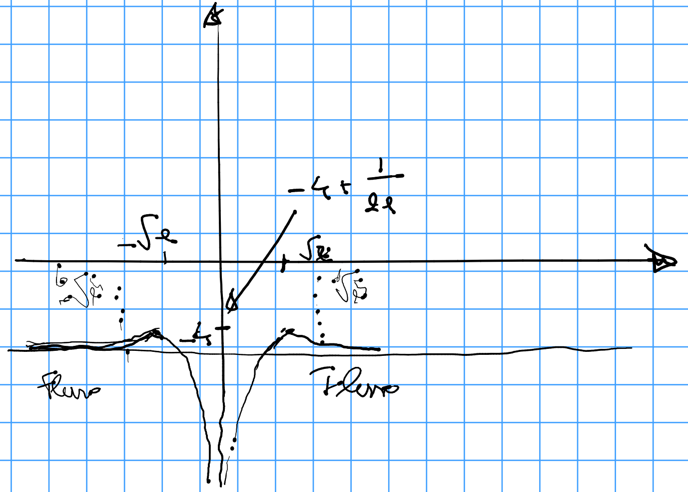
Studio della concavità

$$f''(x) = D\left(\frac{1-2\ln|x|}{x^3}\right) = \frac{-\frac{2}{|x|}\cdot \mathrm{SGN}(x)\cdot x^3 - 3x^2(1-2\ln|x|)}{x^6} =$$

$$= \frac{-2x^2-3x^2(1-2\ln(|x|))}{x^6} = \frac{-5+6\ln|x|}{x^4}$$

$f''=0$ per $-5+6\ln|x|=0 \Rightarrow \ln|x| = \frac{5}{6} \Rightarrow x = \mp\sqrt[6]{e^5}$





6) (x^2 -4)/(x^3-x)

Studio $f(x) = \frac{x^2-4}{x^3-x}$

C.d.E. $x^3-x \neq 0 \Rightarrow x(x^2-1)\neq 0 \Rightarrow x\neq 0$ e $x \neq \mp 1$

$\Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = (-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

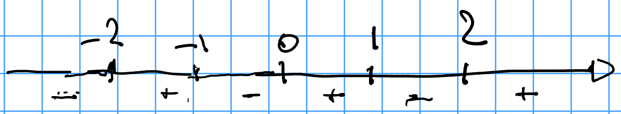
Studio agli estremi del C.d.E.

$\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0$ poiché al denominatore il grado del polinomio è maggiore

$\lim_{x\to -1^{\mp}} f(x) = \infty$ (segno lo decidiamo dopo) ; $\lim_{x\to 0^{\mp}} f(x) = \infty$ (idem per il segno)

Segno $f(x)$ Numeratore $=0$ per $x^2-4=0 \Rightarrow x=\mp 2$

Denominatore $=0$ (già trovato) per $x = 0, \mp 1$



Crescenza/Decrescenza

$$f'(x) = D\,\frac{x^2-4}{x^3-x} = \frac{2x(x^3-x)-(x^2-4)(3x^2-1)}{(x^3-x)^2} =$$

$$= \frac{2x^4-2x^2-3x^4+13x^2-4}{(x^3-x)^2} = \frac{-x^4+11x^2-4}{(x^3-x)^2}$$

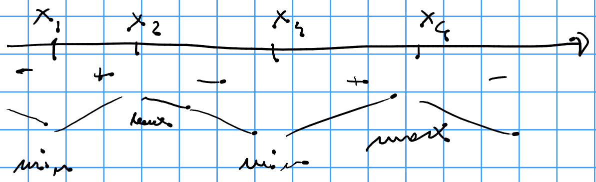
; $f' = 0$ per $x^4-11x^2+4=0$

$$x^2_{1,2} = \frac{11 \mp \sqrt{121-16}}{2} =$$

$$= \frac{11 \mp \sqrt{105}}{2}$$

per cui $f' = 0$ per $x_1 = -\sqrt{\frac{11+\sqrt{105}}{2}}$; $x_2 = -\sqrt{\frac{11-\sqrt{105}}{2}}$; $x_3 = \sqrt{\frac{11-\sqrt{105}}{2}}$; $x_4 = \sqrt{\frac{11+\sqrt{105}}{2}}$

$\sim -3{,}26$ $\sim -0{,}61$ $\sim 0{,}61$ $\sim 3{,}26$



Tralascio il noiosissimo studio della derivata seconda...