Successioni limitate

Limitata superiormente: Una successione si dice superiormente limitata (o limitata dall'alto) se tutti i suoi termini risultano minori uguali ad un numero reale L, cioè se vale:

$$\exists L \in R : a_n \leq L, \forall n \in N$$

Limitata inferiormente: Una successione si dice inferiormente limitata (o limitata dal basso) se tutti i suoi termini sono maggiori o uguali ad un numero reale l, cioè se:

$$\exists l \in R : a_n \geq l, \forall n \in N$$

Limitata: Una successione che è limitata sia inferiormente che superiormente, cioè sia dal basso che dall'alto, si dice limitata. Tutti i valori della successione, quindi, sono compresi tra due numeri reali:

$$\exists l, L \in R : l \leq a_n \leq L, \forall n \in N$$

Per abbreviare la notazione possiamo anche scrivere:

$$\exists k \in R : |a_n| \leq k, \forall n \in N$$

Notiamo che, con quest'ultima definizione la successione risulta essere compresa tra due valori uguali, in valore assoluto, anche se ciò non risultava dalla notazione precedente. In ogni caso, possiamo determinare sempre un raggio k abbastanza grande per poter contenere una successione compresa tra due valori l ed L: possiamo prendere un qualsiasi $k \geq L$. Infatti, per $k = L$, se la funzione è compresa tra l ed L, automaticamente risulta compresa anche tra $-L$ e $+L$.

Esempio: Consideriamo la successione definita analiticamente nel seguente modo:

$a_n = n^2 - 6n$

Per cercare di capire se la successione è limitata o meno, calcoliamo i primi termini:

$a_0 = 0^2 - 6 \cdot 0 = 0 \quad a_5 = 5^2 - 6 \cdot 5 = -5$

$a_1 = 1^2 - 6 \cdot 1 = -5 \quad a_6 = 6^2 - 6 \cdot 6 = 0$

$a_2=2^2-6\cdot 2=-8 \qquad a_7=7^2-6\cdot 7=7$

$a_3=3^2-6\cdot 3=-9 \qquad a_8=8^2-6\cdot 8=16$

$a_4=4^2-6\cdot 4=-8 \qquad a_9=9^2-6\cdot 9=27$

Da questa prima analisi, sembra che i termini della successione, dopo $n=6$, crescano, e siamo sempre positivi. Il valore più basso assunto dalla funzione, quindi, sembra essere -9, assunto per $n=3$. Per poter dire, però, che la successione è limitata dobbiamo dimostrarlo, cioè dobbiamo verificare che per ogni n valga la seguente disuguaglianza:

$a_n \geq -9, \forall n \in N$

cioè:

$n^2-6n \geq -9, \forall n \in N$

Risolviamo, quindi, la disequazione in n:

$n^2-6n+9 \geq 0 \rightarrow (n-3)^2 \geq 0, \forall n \in N$

Abbiamo, dunque, dimostrato che la successione è limitata dal basso.

Successioni monotone

Crescente: Una successione si dice crescente (o strettamente crescente) se i suoi termini crescono al crescere dell'indice n, cioè se si ha:

$$\forall n,m \in N \; n<m \Rightarrow a_n<a_m$$

Decrescente: Una successione si dice decrescente (o strettamente decrescente) se i suoi termini decrescono al crescere dell'indice n, cioè se si ha:

$$\forall n,m \in N \; n<m \Rightarrow a_n>a_m$$

Debolmente crescente: Una successione si dice debolmente crescente (o crescente in senso lato) se si ha:

$$\forall n,m \in N \; n<m \Rightarrow a_n \leq a_m$$

Debolmente decrescente: Una successione si dice debolmente decrescente (o decrescente in senso lato) se si ha:

$$\forall n,m \in N\, n<m \Rightarrow a_n \geq a_m$$

Notiamo che per verificare che una successione è crescente (o decrescente) è sufficiente confrontare un termine con il suo successivo: infatti, se il termine precedente è minore del successivo, allora la successione è crescente:

$$a_n<a_{n+1} \forall n \in N \Rightarrow \text{successione crescente}$$

mentre se il termine precedente è maggiore del successivo, allora la successione è decrescente.

$$a_n>a_{n+1} \forall n \in N \Rightarrow \text{successione decrescente}$$

Allo stesso modo, se vogliamo verificare che una successione sia debolmente crescente, o debolmente decrescente, dobbiamo controllare che ogni termine sia minore o uguale al termine successivo (nel primo caso), oppure che ogni termine sia maggiore o uguale al termine successivo (nel secondo caso).

Se una successione è crescente, decrescente, debolmente crescente, o debolmente decrescente, la successione si dice **monotòna**.

Una successione che non è monotòna si dice oscillante.

Se una delle precedenti proprietà è soddisfatta non da tutti i termini della successione, ma solo da un certo termine in poi, cioè, da tutti i termini della successione che sono maggiori di un certo elemento, allora la proprietà in questione è soddisfatta definitivamente.

Quindi, se abbiamo che:

$$\exists n_0 \in R: \forall n>n_0, m>n_0; n,m \in N\, n<m \Rightarrow a_n<a_m$$

la successione si dice definitivamente crescente, mentre se accade che:

$$\exists n_0 \in R: \forall n>n_0, m>n_0; n,m \in N\, n<m \Rightarrow a_n>a_m$$

la successione si dice definitivamente decrescente.

Esempio: Consideriamo la seguente successione: $a_n=nn+1$

Cerchiamo di stabilire se essa è crescente, o decrescente. Dobbiamo, quindi, capire se, per ogni n, un termine della successione è maggiore o minore del suo successivo. Impostiamo, quindi, la seguente disuguaglianza:

$a_n < a_{n+1}$

Quindi: $\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{(n+1)+1}$

Risolviamo la disuguaglianza (possiamo eliminare i denominatori, in quanto n è sempre positivo, e in questo caso i denominatori non si annullano mai):

$$\frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{(n+1)+1} < 0 \rightarrow \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} < 0 \rightarrow n(n+1) - (n+1)^2 < 0$$

$$n^2 + n(n^2 + 2n + 1) < 0 \rightarrow n^2 + n - n^2 - 2n - 1 < 0 \rightarrow -n - 1 < 0$$

Poiché n è un numero naturale, la disuguaglianza è verificata per qualsiasi valore di n. Concludiamo, quindi, che la successione è crescente, in quanto, per ogni n, un termine della successione è minore del suo successivo.