CAPITOLO 7

Il Bello in Natura e nell'Arte

A conclusione di questo trattato sulla teoria delle proporzioni, vogliamo illustrare come essa sia alla base del concetto di bello, non solo nel mondo dell'arte ma, soprattutto, in natura. Già nel parlare comune, quando si esprime il concetto che qualcosa o qualcuno è bello, si fa passare -in modo implicito- il fatto che sia *"ben proporzionato"*. Questo significa che l'appagamento estetico è strettamente correlato ad una proporzione che, di fatto, ciascuno di noi considera soddisfacente. Nel mondo greco-classico, allorquando si considerava il bello come un concetto assoluto, gli sforzi dei filosofi e degli artisti si concentrarono nel ricercare quale fosse la *proporzione giusta* che avrebbe fatto dire a tutti -nessuno escluso- che l'oggetto della produzione artistica fosse *oggettivamente bello.* I greci riuscirono a trovare un rapporto che soddisfaceva alle richieste iniziali di appagamento estetico "universale", come presto vedremo, e produssero molte delle loro opere (templi, statue ecc...) proprio utilizzando questo tipo di rapporto nelle varie dimensioni delle parti. Stiamo parlando della celeberrima *proporzione aurea!* essa fu utilizzata spessissimo anche in epoche diverse: per esempio da Leonardo nella realizzazione della famosa "Gioconda" (a quanto pare gli studiosi propendono verso la tesi che tale dipinto è "intrigante" ed "estasiante", proprio perché in esso si possono ritrovare ripetuti rapporti aurei al proprio interno); ma Leonardo -come ben si sa- uomo dal grande ingegno tentò egli stesso di codificare un "rapporto giusto" per determinare il corpo di un uomo ben proporzionato, ottenendo l'altrettanto celeberrimo *uomo vitruviano,* che compare in riproduzione dietro le monetine da un euro coniate in Italia. Ancora esempi di proporzione aurea si possono trovare, al giorno d'oggi, nella produzione delle carte di pagamento (bancomat, carte di credito)... la cosa però che più impressiona è come lo stesso tipo di rapporto -e quindi di proporzione- si riscontra spessissimo in natura: nella disposizione delle foglie di una pianta, per esempio, o nell'evoluzione della spirale di una conchiglia; perfino nella riproduzione della vita e nella stessa"matrice" della vita: il DNA. Oltre questo, si pensi anche al fatto che la *musica* stessa non è altro che un continuo variare di rapporti e, in fondo, lo stesso suono di uno strumento musicale è prodotto, in ultima analisi, dalla vibrazione di varie parti di esso secondo rapporti ben definiti. Non è un caso, ad esempio, che il grande *Pitagora* sia stato uno dei primi a parlare di *armonia* in musica, potendogli perfino attribuire "l'invenzione" degli accordi musicali.
Procediamo comunque per gradi, senza anticipare troppo.

1. La sezione aurea e la proporzione aurea

Per iniziare, definiamo la sezione aurea [1] e vediamo dove la si trova e come la si è utilizzata.

DEFINIZIONE 26. *La **sezione aurea** di un segmento è la parte media proporzionale tra tutto il segmento e la parte rimanente.*

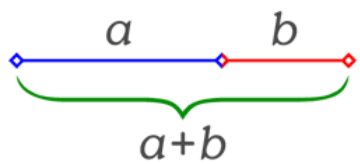

FIGURA 1. Sezione Aurea

Secondo quanto riportato nella figura, possiamo allora scrivere la proporzione:

$$(a+b) : a = a : b.$$

Supponiamo, il ché non lede alla generalità del problema, che tutto il segmento sia lungo uno ovvero $(a+b) = 1$ e cerchiamo di trovare quanto deve essere lungo a. Chiaramente si ha $b = 1 - a$, per cui la proporzione può essere riscritta nella più conveniente forma:

$$1 : a = a : (1-a).$$

Utilizzando la proprietà fondamentale otteniamo l'uguaglianza

$$1 - a = a^2.$$

Questa si può vedere come un'equazione di secondo grado che, riordinando i termine, prende la forma

$$a^2 + a - 1 = 0.$$

Senza entrare nel dettaglio della risoluzione, l'equazione ha due soluzioni -una delle quali viene esclusa essendo negativa (perché?)- di cui solo la seguente è rilevante per il nostro discorso:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0,618.$$

Due segmenti che sommati si trovano nella condizione di cui sopra, ovvero uno di essi è la sezione aurea della somma di entrambi, si dicono in *proporzione aurea.* Un rettangolo le cui dimensioni sono in proporzione aurea, si chiama *rettangolo aureo.*

La proporzione aurea è conosciuta anche come *Divina Proporzione* e la si stimava di tale importanza che verso il 1600 Johannes Kepler si esprimeva

[1] Nell'antichità classica tale proporzione era considerata "tanto perfetta" che le fu attribuita, per l'appunto, l'aggettivo "aurea" -essendo l'oro il metallo più prezioso-.

riguardo ad essa in tali termini: *"La Geometria ha due grandi tesori: uno è il teorema di Pitagora; l'altro è la Sezione Aurea di un segmento. Il primo lo possiamo paragonare ad un oggetto d'oro, il secondo lo possiamo definire un prezioso gioiello".*

I Pitagorici trovarono che il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza deve essere la sezione aurea del raggio. Si entusiasmarono soprattutto quando scoprirono che la *stella a cinque punte* ottenuta dalle diagonali di un pentagono regolare, ha la proprietà che ciascuna di queste diagonali si taglia secondo sezioni auree e, al centro della stella stessa si riforma un pentagono regolare: tanto piacque questo fatto che il *pentagramma pitagorico* assurse a simbolo dell'intera scuola pitagorica [2].

FIGURA 2. Pentagramma pitagorico

Diamo ora qualche teorema, senza dimostrazione, che riguarda la sezione aurea:

TEOREMA 11. *Ogni segmento è sezione aurea della sua somma con la sua sezione aurea.*

TEOREMA 12. *Tolta la sezione aurea, la parte rimanente di un segmento è la sezione aurea della sezione aurea del segmento.*

TEOREMA 13. *Se in un triangolo isoscele la base è la sezione aurea del lato allora l'angolo al vertice è un quinto dellangolo piatto, ovvero la base è il lato del decagono regolare inscritto nel cerchio che ha per raggio il lato* [3].

Un triangolo con angolo al vertice pari ad un quinto dell'angolo piatto si chiama *triangolo aureo.*

TEOREMA 14. *In un triangolo aureo la bisettrice di un angolo alla base interseca il lato in un punto che divide lo stesso lato secondo il rapporto aureo.*

Una costruzione interessante che riguarda i triangoli aurei è la seguente: si traccia la bisettrice di un angolo alla base. Si forma un nuovo triangolo aureo simile al primo. Dalla stessa parte si traccia la bisettrice dell'angolo

[2] Attualmente è anche il simbolo dell'Aeroporto di Sant'Anna, Crotone -città particolarmente legata affettivamente al genio di Pitagora-

[3] Vale anche il viceversa, ovvero: "Se in un triangolo isoscele l'angolo al vertice è un quinto dell'angolo piatto, allora la base è sezione aurea del lato"

alla base del nuovo triangolo ottenuto, ecc... proseguendo finché si vuole, come in figura.

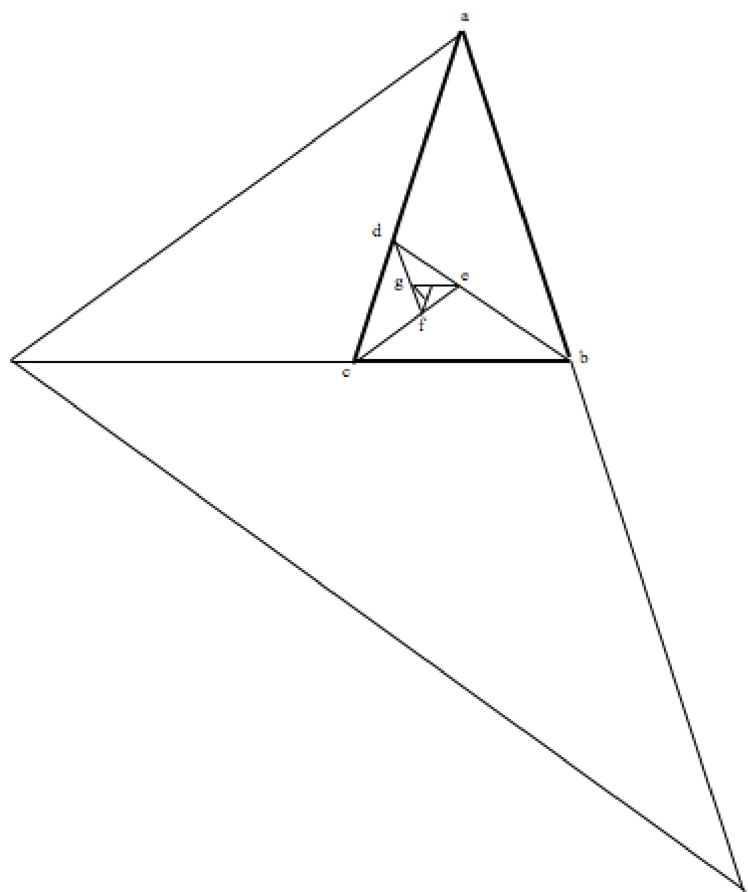

FIGURA 3. Triangoli aurei

Ebbene, tutti quei punti a, b, c, ... appartengono ad una famosa curva denominata *spirale logaritmica* [4]. Ma non è solo dai triangoli aurei che si può trovare la spirale logaritmica! Se uno fa lo stesso procedimento per i rettangoli aurei, così come le figure seguenti ben illustrano, si ritrova sempre una spirale logaritmica (pare che questo fosse noto perfino agli antichi egizi!).

[4]Una spirale è la curva descritta da un punto che si muove su una semiretta con velocità proporzionale alla distanza dall'origine, mentre la semiretta ruota uniformemente attorno la sua origine.

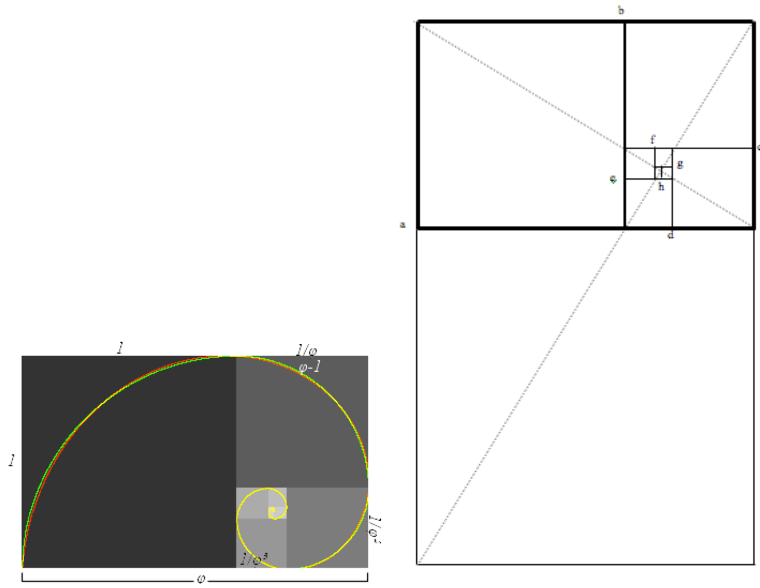

Figura 4. Rettangoli aurei

La spirale testé citata si trova anche in forme naturali molto diffuse, ad esempio nelle conchiglie (come si può notare dalla figura seguente).

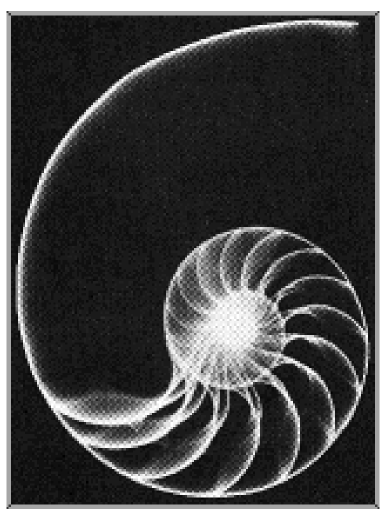

Figura 5. Conchiglia

D'altra parte la sezione aurea è stata largamente utilizzata nell'antichità per le costruzioni architettoniche: questo seguente è, per esempio, uno studio per la costruzione di una "porta".

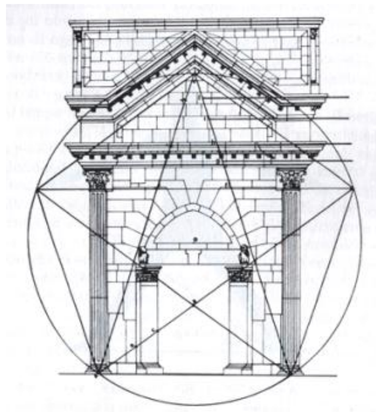

Figura 6. Porta

Il *Partenone* sito nell'acropoli di Atene è un fulgido esempio di quanto gli architetti greci tenessero ad utilizzare la proporzione aurea nelle loro opere; in particolare l'intera facciata del Partenone è racchiudibile in un rettangolo aureo. Se si prende l'altezza e la si riporta sulla base, la parte rimanente della base riforma un rettangolo aureo... e l'altezza delle colonne forma proprio un quadrato con quella parte di base. Tracciato questo quadrato, si riforma un rettangolo aureo nella parte superiore del tempio, ovvero dalla parte del timpano; ecc... come nella seguente figura. Impensabile che tutto questo sia solo casuale: è opera di ingegno e menti attenti alle proporzioni ed esigenti dal punto di vista estetico; quanto ci sarebbe da imparare visto il cattivo gusto imperante...

Figura 7. Partenone

In uno dei reperti più antichi in nostro possesso, la stele del re Get, risalente a circa 5000 anni fa, attualmente custodita al Louvre di Parigi, si osserva al centro un rettangolo aureo, sul lato più corto del quale (sezione aurea del lungo) -verso il basso- si costruisce un quadrato ed all'interno di esso tutta la città; sull'altro lato -dalla parte di sopra- si forma un altro rettangolo aureo, all'interno del quale compare il simbolo del re: un serpente.

FIGURA 8. Stele del re Get

Leonardo, grande intenditore di proporzioni, utilizzò i rettangoli aurei (ripetutamente) nella strutturazione del suo dipinto più famoso: la "Gioconda" (ma non solo, per esempio nell'"Ultima Cena" il centro della scena -da cui poi diparte la prospettiva- è descritto esattamente da un rettangolo aureo). Nella figura qui di seguito sono stati evidenziati i tre rettangoli aurei ritrovati dopo un'attenta analisi: il primo inscrive l'ovale del volto; il secondo va dalla base del collo fino al polso della mano destra. Il terzo va dal punto più basso della scollatura fino al mignolo della mano sinistra. Il senso di pace serafica che trasmette il quadro, assieme al celebre "sorriso enigmatico", probabilmente deriva proprio dal senso di appagamento estetico dovuto all'utilizzo di una "giusta proporzione" tra le parti raffigurate.

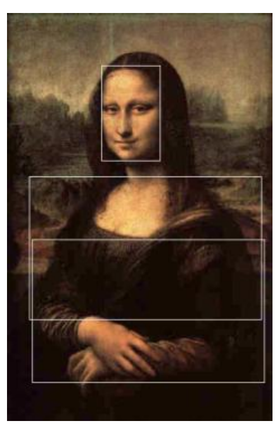

FIGURA 9. La Monnalisa

Per concludere la sezione, si vuole riportare il risultato di un esperimento psico-sociologico: si sono presentati vari anonimi rettangoli di carta di diverse dimensioni e si è chiesto ad un gruppo di volontari di selezionare quelli che si ritenevano "più belli" (nel senso che ciascuno considerava meglio proporzionati). Ebbene, il risultato fu che quasi tutti i rettangoli selezionati erano rettangoli aurei! ora, ognuno faccia le dovute considerazioni... evidentemente il rapporto aureo riesce a soddisfare qualcosa che sta nell'animo dell'uomo e che fa scattare quella molla per cui si dice "Questo è bello!"

2. La successione di Fibonacci ed il rapporto aureo

La successione di Fibonacci ha notevole interesse nell'ambito delle applicazioni della matematica nei più svariati campi del sapere umano, pur essendo la sua definizione notevolmente semplice.

DEFINIZIONE 27. *Definiamo* ***successione di Fibonacci*** *ogni successione che inizia con due numeri qualsiasi e tale che gli altri termini si ottengono come somma dei due immediatamente precedenti.*

In effetti la successione di Fibonacci, originariamente, era solo quella che qui di seguito riportiamo e che inizia con i numeri 0 e 1.
Quindi il terzo termine è $0+1=1$, il quarto $1+1=2$; il quinto $1+2=3$, e così via. Per semplicità ed anche perché ci servirà in seguito, scriviamo un po' di termini...

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Si osserva una cosa interessante: se si mette a rapporto un numero qualsiasi della successione (sufficientemente grande) con il proprio consecutivo, il numero che si ottiene si avvicina al numero aureo ottenuto dal rapporto aureo, non solo! più i due numeri sono grandi, più il numero ottenuto è vicino al numero aureo. Infatti può dimostrare, senza nemmeno tante difficoltà, la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE 1. *Il rapporto tra due termini consecutivi della successione di Fibonacci tende al rapporto aureo, al "crescere dei numeri"* [5].

Per esempio: $0/1=0$, $1/1=1$, $1/2=0,5$, $2/3=0,666$ e già ci stiamo avvicinando... ancora: $3/5=0,600$, $5/8=0,625$, $8/13=0,615$, e va sempre meglio... $13/21=0,619$, $21/34=0,617$, $34/55=0,618$, ecc...

La successione di Fibonacci nacque da un problema concreto, sebbene fortemente semplificato ed idealizzato: *supponiamo di chiudere una coppia di conigli in un recinto e che questi inizino a riprodursi dal secondo mese. Ogni coppia genererà una nuova coppia che si inizierà a riprodursi dopo due mesi e supponiamo anche che nessuna coppia muoia. Quanti conigli ci saranno nel recinto dopo un anno?* ebbene, la risposta è fornita immediatamente

[5] Per essere più precisi, se F_n indica il termine n-esimo della successione, allora $\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=\Phi$ dove con $\Phi\approx 0,618$ si indica il numero aureo.

dalla successione di Fibonacci, infatti le coppie presenti ad ogni mese sono date dai termini di tale successione: basta vedere quale numero occupa la dodicesima posizione! non è difficile vedere [6] che è 377.
Come per il rapporto aureo, elenchiamo alcuni teoremi che non dimostreremo, ma che denotano delle sorprendenti proprietà già solo dal punto di vista meramente matematico.

Teorema 15. *Un termine qualunque della successione e quello che viene dopo altri* 60 *termini finiscono sempre con la stessa cifra.*

Teorema 16. *La somma dei primi* n *termini della successione è sempre uguale all'*$n+2$*-esimo a cui viene sottratto* 1.

Ad esempio: $1+1+2+3+5=12$ è la somma dei primi cinque termini; il settimo termine è 13 ovvero proprio un'unità in più di quanto prima trovato.

Teorema 17. *Se si prendono i primi* n *termini della successione, con* n *pari, si moltiplicano a due a due i termini successivi e poi si sommano i prodotti, si ottiene il quadrato del termine* n*-esimo.*

Esempio: $1\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 8=64$, che è esattamente il quadrato dell'ultimo termine (8).

Teorema 18. *La somma di dieci termini consecutivi qualsiasi dà per risultato il prodotto del settimo termine per* 11.

Tanto è importante e stimata la successione di Fibonacci nel mondo dei matematici (e non solo, per esempio gli economisti la utilizzano per studiare l'andamento dei mercati finanziari, i biologi per creare modelli di sistemi naturali ecc..) che ad essa è addirittura dedicato un periodico scientifico [7].
A noi ora interessa illustrare qualche semplice e sorprendente ritrovamento della successione di Fibonacci nel mondo naturale.

2.1. La Successione di Fibonacci in Natura. Spiegato come l'argomento "Successione di Fibonacci" rientra nell'ambito della Teoria delle Proporzioni, in particolare come "Divina Proporzione" - rapporto privilegiato dagli artisti, ma soprattutto dalla Natura che, probabilmente, è l'opera di un Sommo Poeta - prospettiamo ora qualche scoperta sorprendente che, per lo meno, dovrebbe meravigliare e porre qualche domanda al lettore più sensibile.

Avvisiamo però che alcuni ritrovamenti della successione di Fibonacci in natura potrebbero essere dovuti alla volontà di trovarla, nel senso che gli studiosi, tanto innamorati della Divina Proporzione e della successione di Fibonacci, vedono ciò che gli altri non vedono per il semplice fatto che più gli fa piacere (un atteggiamento certamente non molto "scientifico").

[6] Si inizi la successione con i due termini 1 e 1.
[7] Il "The Fibonacci Quarterly".

- **Sviluppo dei fiori:** il numero dei petali è molto spesso un numero della successione di Fibonacci. Per esempio il giglio ha tre petali, i ranuncoli cinque, la cicoria ventuno, la margherita spesso trentaquattro o cinquantacinque. Per altro i semi del girasole formano, nella loro disposizione al centro del fiore, spirali che si svolgono in sensi opposti: il numero di tali spirali di senso diverso differisce spesso per un numero di Fibonacci, ovvero ventuno e trentaquattro; trentaquattro e cinquantacinque, cinquantacinque e ottantanove; oppure ottantanove e centoquarantaquattro. La stessa cosa avviene per le pigne, il cavolfiore, le conchiglie e l'ananas.

Figura 10. Il Girasole

- **Sviluppo delle piante:** Anche nello sviluppare la parte aerea, alcune piante si "attengono" alle giuste proporzioni prodotte dalla successione di Fibonacci. Consideriamo la figura seguente: essa considera due esempi di sviluppo delle foglie di una pianta.

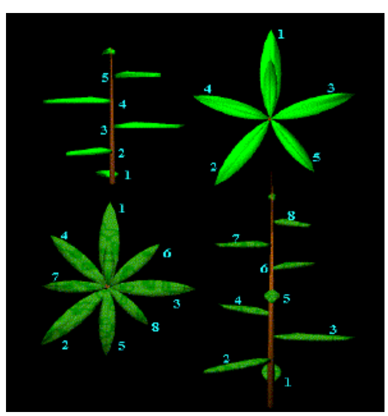

Figura 11. Sviluppo delle foglie

Prima pianta: partendo dalla prima foglia ed andando in senso

orario alla seconda, fino alla terza compiamo esattamente un giro. Dalla terza alla quinta, passando per la quarta un secondo giro e infine arrivando alla sesta foglia compiamo in tutto 3 giri. D'altra parte, girando in senso antiorario compiamo sempre tre giri.
Seconda pianta: girando in senso orario compiamo cinque giri: dalla prima foglia alla seconda compiamo il primo giro; dalla foglia terza alla quarta il secondo giorno; raggiungendo la quinta foglia il terzo, dalla sesta alla settima il quarto giro e dalla ottava all'ultima il quinto giro. Se giriamo invece in senso antiorario compiamo tre giri.
A quanto pare la natura privilegia la successione di Fibonacci per equidistribuire l'illuminazione del sole alle foglie.

Alcune simulazioni compiute con l'ausilio del computer hanno reso evidente che se lo sviluppo della pianta non seguisse una distribuzione secondo successione di Fibonacci, alcune foglie avrebbero una maggiore esposizione al sole rispetto ad altre, pertanto non ci sarebbe uno sviluppo armonico della pianta stessa.

- **Musica:** il cervello è particolarmente sensibile a riconoscere onde sonore strettamente correlate alla successione di Fibonacci. Per esempio, in un pianoforte le ottave presentano otto tasti bianchi e cinque neri: in tutto tredici note! La prima, la terza e la quinta creano gli accordi "maggiori" e tra di loro c'è una separazione di due toni. Questo significa che la costruzione della scala musicale è basata seguendo le proporzioni della serie di Fibonacci.

Per chi fosse interessato ad approfondire il discorso, su internet compaiono numerosi siti dedicati a questo argomento: basta inserire in un qualsiasi motore di ricerca "successione di Fibonacci" oppure "sezione aurea". Tra i libri pubblicati, notevole risulta "On Growth and Form" di D'Arcy Wentworth Thompson, pubblicato dalla Dover (ripubblicato nel 1992, dopo una prima edizione del 1917) di ben 1116 pagine...