La velocità con cui si raffredda un corpo è direttamente proporzionale alla differenza tra la temperatura dell'ambiente in cui si trova il corpo (supposta costante T_0) e la temperatura stessa del corpo (questa è nota anche come Legge del raffreddamento di Newton). Supponiamo che un corpo sia stato riscaldato a 80° C e che sia posto in un ambiente a 20° C; se dopo un'ora la sua temperatura è di 40° C quale temperatura raggiungerà dopo due ore?

Soluzione:

Sia $T = T(t)$ la temperatura del corpo al tempo "t".
Allora la velocità di raffreddamento (ovvero la velocità con la quale varia la temperatura) è rappresentata dalla derivata prima, rispetto a "t", di $T(t)$.

Per cui, per la legge di Newton: $\frac{dT}{dt} \propto T_a - T$, dove T_a = Temperatura ambiente.

Possiamo quindi scrivere l'o.d.e.

$$T' = k(T_a - T)$$ dove k è una costante opportuna di proporzionalità

$$\int \frac{1}{T_a - T}\, dT = \int k\, dt$$ ← separando le variabili

$$-\ln|T_a - T| = k \cdot t + C_1 \rightarrow T_a - T = C \cdot e^{-kt}$$

$$\Rightarrow T = T_a - C \cdot e^{-kt}$$

dall'informazione iniziale $T(1) = 40°$; $T_a = 20°$ e temperatura iniziale 80

otteniamo $40 = 20 - C e^{-k}$

$$\Rightarrow 20 = -C \cdot e^{-k}; \quad C = -20 e^{k}$$ per cui $T = T_a + 20 e^{k} \cdot e^{-kt}$

con condizione $T(0) = 80$ otteniamo

$$80 = 20 + 20 \cdot e^{k} \Rightarrow 3 = e^{k} \Rightarrow k = \ln(3)$$

ERGO la legge di cambiamento della temperatura è data, per il nostro problema, da

$$T(t) = 20 + 20 \cdot 3 \cdot e^{-\ln(3) \cdot t}$$

da cui $$\boxed{T(t) = 20 + 60 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{t}}$$

dopo 2 ore la temperatura sarà di

$$T(2) = 20 + \frac{60}{9} \approx 26{,}7°$$

In una riserva naturale, rimasta priva di animali a seguito di una epidemia, vengono immessi 50 cervi. Si stima che la foresta riesca ad offrire risorse di cibo fino a 500 esemplari. Supponendo che la velocità con cui aumenta la popolazione sia direttamente proporzionale alla popolazione stessa (crescita logistica), con una costante di proporzionalià di k = 0.4, determina dopo quanto tempo la popolazione di cervi sarà il doppio di quella inizialmente immessa.

Soluzione:

Sia $N = N(t)$ il numero degli individui al tempo t, allora la velocità di crescita della popolazione è data dalla derivata nel tempo $N'(t)$.

Possiamo scrivere il modello $N' \propto N\left(1-\frac{N}{500}\right)$

questo fattore è la limitazione imposta dalle risorse di cibo: nei fatti, se $N(t)=500 \Rightarrow$ il fattore diventa $1-\frac{500}{500}=0$ e la popolazione non cresce più.

Dato che $k=0{,}4$ per come definito nel problema, allora

$$N' = \frac{4}{10} N\left(1-\frac{N}{500}\right) \Leftrightarrow \frac{dN}{dt} = \frac{2}{5} N\left(1-\frac{N}{500}\right)$$

separiamo le variabili ed integriamo:

$$\boxed{\int \frac{1}{N\left(1-\frac{N}{500}\right)}\,dN = \int \frac{2}{5}\,dt};$$

$$\int \frac{1}{N\left(1-\frac{N}{500}\right)}\,dN = 500\int \frac{1}{N(500-N)}\,dN =$$

$$= \text{[Fratti Semplici]} = 500\int \frac{A}{N} + \frac{B}{500-N}\,dN =$$

$$A(500-N)+BN = 1$$

$$\begin{cases} 500A = 1 \\ (-A+B)N = 0 \end{cases} \qquad A=\frac{1}{500} \qquad B=A=\frac{1}{500}$$

$$= \int \frac{1}{N} + \frac{1}{500-N}\,dN = \ln|N| - \ln|500-N|$$

$$= \ln\left|\frac{N}{500-N}\right|$$

per cui:

$$\ln\left|\frac{N}{500-N}\right| = \frac{2}{5}t + K \Rightarrow \frac{N}{500-N} = C_1 \cdot e^{\frac{2}{5}t} \Rightarrow \frac{500-N}{N} = C \cdot e^{-\frac{2}{5}t}$$

$$C = \frac{1}{C_1}$$

$$\Rightarrow \frac{500}{N} - 1 = C\cdot e^{-\frac{2}{5}t} \Rightarrow \frac{500}{N} = 1 + C\cdot e^{-\frac{2}{5}t}$$

$$\Rightarrow \frac{N}{500} = \frac{1}{1+C\cdot e^{-\frac{2}{5}t}} \Rightarrow N(t) = \frac{500}{1+C\cdot e^{-\frac{2}{5}t}}$$

per la c.i. $N(0)=50 \Rightarrow 50 = \frac{500}{1+C} \Rightarrow \frac{10}{1+C} = 1 \Rightarrow C = 9 \Rightarrow \boxed{N(t) = \frac{500}{1+9\cdot e^{-\frac{2}{5}t}}}$

per rispondere alla domanda del problema dobbiamo risolvere l'equazione $N(t) = 2 \cdot N(\bar{t})$ ovvero $\dfrac{500}{1+9\cdot e^{-\frac{2}{5}t}} = \cancel{2\cdot 50}$ $\iff 1+9\cdot e^{-\frac{2}{5}t} = 5$

$\Rightarrow e^{-\frac{2}{5}t} = \frac{4}{9} \Rightarrow -\frac{2}{5}t = \ln\frac{4}{9} \Rightarrow t = -\frac{5}{2}\ln\left(\frac{4}{9}\right) \simeq 2$ anni

Una coltura di batteri cresce, istante per istante, con una velocità proporzionale al numero di batteri della colonia, secondo un costante di proporzionalità di k = 10%/ora.
Se inizialmente i batteri presenti sono 100, dire dopo 5 ore quanti batteri sono presenti e quanto tempo impiegherebbero a raddoppiare di numero (rispetto all'istante iniziale).

Soluzione:

Sia $N = N(t)$ il n° dei batteri presenti al tempo t. La velocità di crescita è, come al solito, la derivata di $N(t)$ rispetto al tempo.

Quindi scriviamo $N'(t) \propto N(t)$ ed in particolare $N' = K\cdot N$

ERGO $N' = 10\% \cdot N \Rightarrow \dfrac{dN}{dt} = \dfrac{1}{10}\cdot N$ e separando le variabili

$$\int \frac{dN}{N} = \int \frac{1}{10}\,dt \Rightarrow \ln|N| = \frac{1}{10}t + C_1$$

$$\Rightarrow \boxed{N(t) = C\cdot e^{\frac{1}{10}t}}$$ da $N(0) = 100$ otteniamo $100 = C$

quindi il modello di crescita è $N(t) = 100\cdot e^{\frac{1}{10}t}$

Dopo 5 ore ci saranno $N(5) = 100\cdot e^{\frac{1}{2}} \simeq 164$ batteri (quasi 165)

per raddoppiare la popolazione iniziale risolviamo l'equazione $N(t) = 2N(0)$

ovvero $\cancel{100}\cdot e^{\frac{1}{10}t} = 2\cdot\cancel{100} \Rightarrow \frac{1}{10}t = \ln(2) \Rightarrow t = 10\cdot\ln(2) \simeq 6{,}93$ ore

dato che $\frac{93}{100}$ di ore corrispondono a $\frac{93}{100}\cdot 60 \simeq 56$ minuti:

allora la risposta è che vogliono circa 6 ore e 56 minuti.

Una campagna pubblicitaria è volta a far conoscere un nuovo prodotto ad un milione di potenziali acquirenti. Si suppone che la velocità con cui cresce il numero dei potenziali consumatori, che vengono a conoscenza del nuovo prodotto, sia direttamente proporzionale, secondo una costante k, al numero di coloro che ancora non conoscono il prodotto.
All'inizio della campagna pubblicitaria nessuno conosceva il prodotto, mentre dopo sei mesi, ne è venuto a conoscenza un quarto dei potenziali consumatori.
Stima quante persone saranno venute a conoscenza del prodotto dopo due anni, avendo impostato un'equazione differenziale che modellizzi correttamente la situazione descritta.
Quanto tempo si dovrebbe impiegare per raggiungere il 90% dei potenziali consumatori?

Soluzione:

Sia $N(t)$ = n° potenziali consumatori che vengono a conoscenza del prodotto al tempo t. Allora il numero dei consumatori ancora non raggiunti dalla campagna pubblicitaria sarà $1000'000 - N(t)$; considerando le unità di misura in "milioni di persone" allora è semplicemente $1 - N(t)$

ERGO il modello è $N'(t) = k(1 - N(t))$ con c.i. $N(0) = 0$

Risolviamo per separazione di variabile:

$$\int \frac{1}{1-N}\, dN = \int k\, dt$$

$$-\ln|1-N| = kt + c_1 \Rightarrow 1 - N = c \cdot e^{-kt}$$

$$\Rightarrow N(t) = 1 - c \cdot e^{-kt}$$ e data la c.i. $0 = 1 - c$ $\Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow$ il modello di crescita è $\boxed{N(t) = 1 - e^{-kt}}$

Dato che dopo 6 mesi i consumatori raggiunti sono $\frac{1}{4}$ della popolazione allora stimiamo il valore di k: $N\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 - e^{-k\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$

$$e^{-\frac{k}{2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{k}{2} = \ln\frac{3}{4} \Rightarrow k = -2\ln\frac{3}{4} = \ln\frac{16}{9}$$

a questo punto il modello differenziale diventa

$$N(t) = 1 - e^{\ln\frac{9}{16}\cdot t} = 1 - \left(\frac{9}{16}\right)^t$$

Per raggiungere il 90% della popolazione ci vorrà un tempo che soddisfi all'equazione $1 - \left(\frac{9}{16}\right)^t = \frac{90}{100} \Rightarrow \left(\frac{9}{16}\right)^t = \frac{1}{10} \Rightarrow \ln\left(\frac{9}{16}\right)^t = \ln\left(\frac{1}{10}\right)$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln(1/10)}{\ln(9/16)} \approx 4 \text{ anni}$$

A seguito di un periodo di depressione economia, il settore alimentare di un Paese ha registrato una diminuzione delle vendite di carne rossa con un tasso istantaneo relativo del 3% al mese. Posto che inizialmente si siano venduti $1.25 \cdot 10^5$ kg di carne rossa al mese, dopo un anno dalla prima misurazione quanta carne si prevede di vendere, ipotizzando la persistenza della fase depressiva?

Soluzione:

Sia $x(t)$ il numero di Kg di carne venduti al mese contati in unità da 10^5 (10.000); Il tasso di decrescita/crescita è rappresentato dalla derivata prima

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x'(t)}{x(t)}}_{\text{tasso relativo}} = -3\% \quad \Rightarrow$$

integrando per separazione di variabile

$$\int \frac{1}{x}\, dx = -\int \frac{3}{100}\, dt$$

$$\ln|x| = -\frac{3}{100}t + K \quad \Rightarrow \quad x(t) = c \cdot e^{-\frac{3}{100}t}$$

e dalla c.i.

$$x(0) = 1{,}25 \quad \Rightarrow \quad c = 1{,}25$$

Da cui il modello rappresentativo del problema:

$$\boxed{x(t) = 1{,}25 \cdot e^{-\frac{3}{100}t}}$$

dopo 1 anno la carne venduta è data da circa (1 anno = 12 mesi)

$$x(12) = 1{,}25 \cdot e^{-\frac{3}{100}\cdot 12} \quad (\cdot 10^5\ \text{Kg})$$

$$\approx 0{,}872 \cdot 10^5\ \text{Kg} = 8{,}72 \cdot 10^4\ \text{Kg}$$

Il grafico di una funzione passa dall'origine del sistema di riferimento ed ha la simpatica proprietà che in ogni suo punto, la retta normale passa dal punto (0, 2). Determina l'equazione della funzione (e rappresentala, possibilmente).

Soluzione:

Se $y = f(x)$ è la funzione $\Rightarrow$ la pendenza della tangente è data da $y' = f'(x)$ e la pendenza della normale è l'antireciproca di essa, ovvero $m_1 = -\frac{1}{f'(x)}$

Per cui la retta normale nel punto generico (x_P, y_P) è data da

$$y = -\frac{1}{f'(x_P)}x + q$$

e dovendo passare per $(0,2)$ otteniamo $q = 2$ ovvero $y = -\frac{1}{y'} \cdot x + 2$ che è l'o.d.e. che risolve il problema. Ora $\frac{x}{y'} = 2 - y \iff (2-y)y' = x$ e separando le variabili

$$\int (2-y)\,dy = \int x\,dx \quad \Rightarrow \quad 2y - \frac{1}{2}y^2 = x^2 + c$$

ovvero $\quad x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2y + c = 0 \quad *$

Osserviamo che queste rappresentano una famiglia di ellissi, infatti, completando il quadrato possiamo scrivere la $*$ nella forma

$$x^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y - \sqrt{2}\right)^2 - 2 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y - \sqrt{2}\right)^2 = 2 - c$$

e quindi, tramite cambio di variabile $\circledast \begin{cases} x \mapsto X \\ \frac{1}{\sqrt{2}}y - \sqrt{2} = Y \end{cases}$ (e ponendo $2 - c = 1$)

$$\boxed{X^2 + Y^2 = 1}$$

equazione standard di una circ. la trasformazione $\circledast$ la trasla e la "schiaccia" ...