Funzione razionale intera

Studiamo la funzione di equazione $f(x)=x^3+2x^2-3$

1. Per prima cosa, notiamo che la funzione, come tutte le funzioni razionali intere, è definita in tutto l'asse reale, quindi il suo dominio coincide con $\mathbb{R}$;
2. Cerchiamo di capire se la funzione presenta simmetrie. Poiché si ha:

$$f(-x)=(-x)^3+2(-x)^2-3=-x^3+2x^2-3$$

possiamo concludere che la funzione non presenta simmetrie, e quindi, non è né pari né dispari;

3. Determiniamo le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani, e risolviamo i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} y=x^3+2x^2-3 \\ y=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=x^3+2x^2-3 \\ x=0 \end{cases}$$

dai quali abbiamo i punti di intersezione $(0;-3)$ e $(1;0)$;

4. Studiamo ora il segno della funzione, determinando gli intervalli in cui essa è positiva; risolviamo, quindi, la seguente disequazione:

$$x^3+2x^2-3>0$$

La disequazione è verificata per $x>1$, quindi possiamo affermare che in questo intervallo si ha $f(x)>0$; al contrario, per $x<1$, si ha $f(x)<0$;

5. Cerchiamo gli eventuali asintoti della funzione. Studiamo il limite per x che tende a più o meno infinito:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3+2x^2-3)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+2x^2-3)=-\infty$$

La funzione, quindi, non ammette asintoti orizzontali, in quanto entrambi i limiti precedenti sono infiniti. Inoltre, poiché la funzione è definita in tutto $\mathbb{R}$, non può avere asintoti verticali. Possiamo, però, ricercare gli asintoti obliqui; studiamo, quindi, il seguente limite per determinare l'eventuale coefficiente angolare dell'asintoto:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2-3}{x}=+\infty$$

Dato che il limite precedente è infinito, la funzione non ha neanche asintoti obliqui;

6. Calcoliamo la derivata della funzione, e cerchiamo gli eventuali punti stazionari:

$$f'(x)=3x^2+4x$$

Risolviamo quindi la seguente equazione:

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+4x=0$$

Dalle soluzioni della disequazione, possiamo determinare due punti stazionari, che hanno ascisse:

$$x_1=0, x_2=-43$$

Studiando il segno della derivata prima, troviamo i seguenti intervalli, nei quali la funzione è crescente:

$$x<-43 \vee x>0$$

7. Determiniamo la derivata seconda della funzione, e cerchiamo gli eventuali punti di flesso:

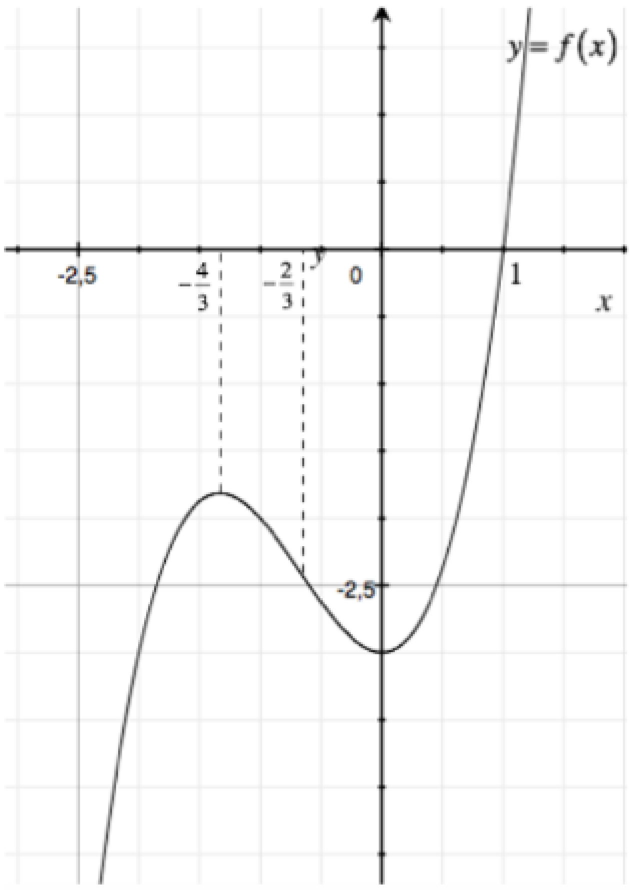
$$f''(x)=6x+4$$

Risolviamo la seguente equazione:

$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x+4=0$$

Da cui otteniamo il punto di ascissa $-2/3$. Studiando il segno della derivata seconda, troviamo che per $x>-2/3$, la funzione volge la concavità verso l'alto, e che quindi, per $x<-2/3$, la funzione volge concavità verso il basso.

Unendo i dati ottenuti, siamo in grado di tracciare il grafico della funzione:



Funzione esponenziale

Studiamo la funzione di equazione $y=e^{\frac{x-1}{x}}$

1. La funzione esponenziale è definita per ogni valore di x; tuttavia, in questo caso l'esponente di e è una frazione, definita per $x \neq 0$. Il dominio della funzione è, quindi, $\mathbb{R} - \{0\}$;
2. La funzione non presenta simmetrie. Infatti, abbiamo:

$$f(-x)=e^{\frac{-x-1}{-x}}=e^{\frac{x+1}{x}}$$

la funzione, quindi, non è né pari né dispari;

3. Determiniamo le intersezioni della funzione con gli assi cartesiani; sapendo che la funzione non è definita in zero, possiamo cercare solo le intersezioni con l'asse x:

$$\begin{cases} y=e^{\frac{x-1}{x}} \\ y=0 \end{cases}$$

Poiché la funzione esponenziale non si annulla mai, concludiamo che non vi sono intersezioni con gli assi;

4. Studiamo ora il segno della funzione, determinando gli intervalli in cui essa è positiva; risolviamo, quindi, la seguente disequazione:

$$e^{\frac{x-1}{x}}>0$$

La disequazione è sempre verificata, quindi la funzione si trova sempre al di sopra dell'asse x.

5. Cerchiamo gli eventuali asintoti della funzione. Studiamo il limite per x che tende a più o meno infinito:

$$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x-1}{x}}=e$$

Poiché il limite esiste ed è finito, possiamo affermare che la retta $y=e$ è asintoto orizzontale per la funzione $f(x)$. Dato che la funzione non è definita in $x=0$, è lecito ricercare l'asintoto verticale. Calcoliamo, quindi, il limite per x che tende a zero:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{x-1}{x}}=0, \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{x-1}{x}}=+\infty$$

Possiamo concludere che la funzione ha $x=0$ come asintoto verticale sinistro;

6. Calcoliamo la derivata della funzione, e cerchiamo gli eventuali punti stazionari:

$$f'(x)=e^{\frac{x-1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}$$

Risolviamo quindi la seguente equazione:

$$f'(x)>0 \Rightarrow e^{\frac{x-1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}>0$$

La disequazione è verificate per ogni x del dominio, quindi la funzione è crescente in tutto il dominio;

7. Determiniamo la derivata seconda della funzione, e cerchiamo gli eventuali punti di flesso:

$$f''(x)=e^{\frac{x-1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{x^2}+e^{\frac{x-1}{x}}\cdot\frac{-2x}{x^4}=e^{\frac{x-1}{x}}\cdot\frac{1}{x^4}\cdot(1-2x)$$

Risolviamo la seguente equazione:

$$f''(x)=0$$

Da cui otteniamo il punto di ascissa $1/2$, che è un punto di flesso per la funzione.

Studiando il segno della derivata seconda, troviamo che per $x<1/2$, la funzione volge la concavità verso l'alto, e che quindi, per $x>1/2$, la funzione volge concavità verso il basso.

Possiamo ora tracciare il grafico della funzione: