Le serie numeriche

Definizione

Consideriamo una successione di numeri reali:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$$

dove n è un generico numero naturale; ipotizziamo di voler sommare tutti i termini della successione, cioè di voler calcolare la somma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Tale somma si dice **serie numerica**, o semplicemente serie.

Gli elementi della successione si dicono termini della serie, e l'elemento a_n prende il nome di termine generale della serie. Molto spesso è utile esprimere una successione con il simbolo di sommatoria, cioè:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Notiamo che ogni serie da luogo ad una successione, la successione delle somme parziali. Infatti, possiamo considerare le somme dei termini di a_n nel seguente modo:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

$\ldots$

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

E quindi, la nuova successione ha per termini le somme parziali $S_1, \ldots, S_n$. In questo caso, ha senso considerare il limite per n che tende all'infinito di questa successione, e in particolare se il limite esiste finito, la serie si dice convergente, e tale limite corrisponde proprio con il valore della somma dei termini della successione a_n:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = S \in R \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$$

Se, invece, il limite della successione delle somme parziali è infinito, la serie è divergente, e quindi la somma dei termini di a_n è infinita; in particolare, se il limite vale più infinito, diremmo che la serie diverge positivamente, mentre se il limite vale meno infinito, diremmo che la serie diverge negativamente.

Infine, se il limite delle somme parziale non esiste, la serie si dirà indeterminata, oppure oscillante.

Determinare il carattere di una serie significa stabilire se essa è convergente, divergente, o oscillante.

La serie geometrica

La serie geometrica è una serie particolarmente importante, che è definita nel seguente modo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n+\ldots$$

Notiamo che, per $q=0$ la serie converge, ed ha per somma 1 (in questo caso, per far in modo che l'uguaglianza abbia significato anche per $q=0$, si conviene che 0^0 valga 1).

Supponiamo, quindi, che $q\neq 0$, e osserviamo che il rapporto tra un generico termine della serie e il suo precedente è q:

$$\frac{q^{n+1}}{q^n} = q^{n+1-n} = q, \forall n \in \mathbb{N}$$

il termine q viene detto, quindi, **ragione della serie**.

La serie in questione, quindi, prende il nome di **progressione geometrica di ragione** q.

Studiamo il comportamento della progressione geometrica nei casi in cui $q=1$ e $q=-1$.

Se $q=1$, la serie è divergente, in quanto si ha la somma infinita di valori 1, che tende a più infinito:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1^n = 1+1+1^2+1^3+\ldots+1^n+\ldots$$

Se $q=-1$, la serie è indeterminata, in quanto assume la forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n=1-1+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^n+\ldots$$

$$\ldots=1-1+1-1+\ldots+(-1)^n+\ldots$$

sappiamo, infatti, che la successione $(-1)^n$ assume il valore 1 per n pari, e il valore -1 per n dispari, ed è quindi impossibile calcolarne il limite.

Si può dimostrare (utilizzando il principio di induzione) che la somma delle potenze di q, da 1 a n, può essere scritta con la seguente formula:

$$\sum_{k=0}^{n}q^k=1+1+q^2+q^3+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

che possiamo indicare con S_n:

$$S_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Possiamo ora studiare come si comporta questa successione per n che tende all'infinito. Distinguiamo due casi:

- se $|q|<1$, cioè se $-1<q<1$, allora la potenza $n+1$-esima di q tende a zero, e quindi si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1}{1-q}$$

In questo caso, quindi, la serie geometrica converge.

- se, invece, $|q|>1$, cioè se $q<-1$, o $q>1$, allora la potenza $n+1$-esima di q tende all'infinito, e quindi si ha che:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\infty$$

quindi, la serie geometrica diverge, positivamente o negativamente in base al segno di q.

Proprietà delle serie

Vediamo alcuni teoremi che riassumono delle importanti proprietà delle serie:

Teorema 1: Il carattere di una serie rimane invariato se si moltiplicano o si dividono tutti i suoi termini per una costante c diversa da zero:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=s\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}c\cdot a_n=c\cdot s$$

Teorema 2: Sommando termine a termine due serie convergenti si ottiene una serie convergente la cui somma è la somma delle somme delle serie date:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a \land \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = b \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = a + b$$

Teorema 3: Sopprimendo un numero finito di termini da una serie, il carattere di essa non cambia:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s \land \sum_{n=1}^{k} a_n = A \Rightarrow \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n = s - A$$