Le successioni numeriche

Una successione numerica è una funzione che ha come dominio l'insieme dei numeri naturali, o un suo sottoinsieme, normalmente infinito. Una successione numerica, quindi, è definita se vi è una legge che associa ogni punto del dominio, cioè ogni numero naturale dell'insieme di definizione, uno e un solo punto del codominio.

$$f:N \to R; n \to f(n)$$

$$f:N \to C; n \to f(n)$$

Se l'insieme di arrivo della successione è l'insieme dei numeri reali, la successione si dice reale, altrimenti, se l'insieme di arrivo è l'insieme dei numeri complessi, essa si dice complessa.

I valori della funzione, cioè i numeri naturali che costituiscono gli elementi del codominio, sono definiti al variare di n nell'insieme di definizione, e vengono detti elementi, o termini, della successione; questi vengono di solito indicati con una lettera che ha il corrispondente valore di n come pedice:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

E si ha che:

$$a_0 = f(0), a_1 = f(1), a_2 = f(2), \dots, a_n = f(n)$$

Definizione analitica di una successione

Le successioni numeriche sono spesso definite attraverso un'espressione analitica del tipo:

$$a_n = f(n)$$

cioè, una legge che permette di determinare, con un finito numero di operazioni matematiche, un qualsiasi termine della successione, a partire dal valore di n.

In questo caso, ovviamente, si suppone che l'insieme di definizione della successione sia il sottoinsieme dei numeri naturali per il quale ha senso l'espressione di a_n.

Esempio: Consideriamo la seguente funzione:

$f:N\{0\} \to R; n \to 1/n$

Tale funzione esprime una successione la cui espressione analitica è la seguente:

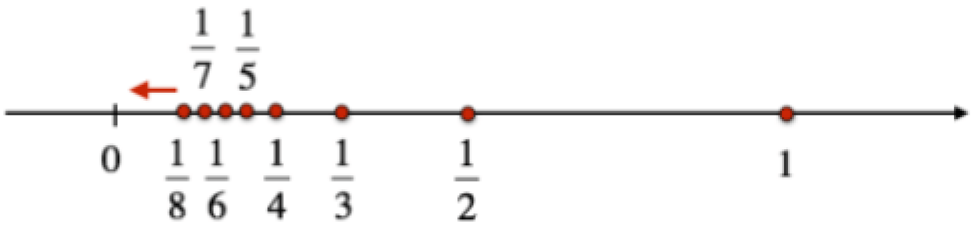
$a_n=\frac{1}{n}$

Notiamo che, in questo caso, il dominio della successione è costituito da tutti i numeri naturali escluso lo zero, perché, infatti, l’espressione $1/n$ non è definita per $n=0$.

Possiamo calcolare gli elementi della successione sostituendo i valori del dominio alla sua espressione analitica:

$a_1=1, a_2=\frac{1}{2}, a_3=\frac{1}{3}, \ldots, a_n=\frac{1}{n}$

Possiamo rappresentare l’andamento della successione su una retta:



Non sempre le successioni hanno un codominio infinito; consideriamo, infatti, la successione definita dalla seguente funzione analitica:

$a_n=(-1)^n$

Determiniamo i primi termini della successione sostituendo alla n i valori del dominio:

$a_1=1, a_2=-1, a_3=1, \ldots, a_n=(-1)^n$

Possiamo quindi notare che la successione assume solamente due valori, e precisamente essa vale 1 per i valori di n pari, mentre vale -1 per i valori di n dispari.

Successioni definite per ricorrenza

Un altro modo per descrivere una successione, è la definizione per ricorrenza. Le successioni definite per ricorrenza sono tali che ogni termine della successione, escluso il primo che viene definito direttamente, dipende dal termine precedente. Cioè, dopo aver definito il primo elemento della successione, si stabilisce una regola che permette, dato un certo termine della successione, di calcolare il successivo.

Esempio: Una successione definita per ricorrenza è la seguente:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$$

Questa legge descrive una successione in cui il primo termine è 1, e tutti gli altri termini sono tali che ogni termine è il doppio del precedente. Calcoliamo alcuni termini della successione a partire dal primo:

$$a_0 = 1, a_1 = 2a_0 = 2, a_2 = 2a_1 = 4, a_3 = 2a_2 = 8, \ldots$$

Una successione è definita per ricorrenza anche nel caso in cui si definiscono i primi k termini, e si stabilisce una regola che permetta di calcolare un qualsiasi termine della successione a partire da uno o più dei termini precedenti

Esempio: La seguente successione, definita per ricorrenza, viene anche detta Successione di Fibonacci:

$$\begin{cases} a_0 = 0, a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

In questo caso, quindi, ogni termine della successione dipende dai due termini che lo precedono; calcoliamo i primi termini della successione come abbiamo fatto in precedenza:

$$a_2 = a_1 + a_0 = 1 + 0 = 1$$

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

E così via.

Il modo in cui una successione viene definita non caratterizza la successione stessa; infatti, in diversi casi, una successione può essere definita sia analiticamente che ricorsivamente. La definizione analitica di una successione è preferibile, in quanto permette di calcolare il valore di un suo termine a partire dal valore di n, mentre nel caso di una funzione ricorsiva, per calcolare un determinato termine dobbiamo prima calcolare tutti i suoi precedenti.