Infiniti

Una funzione y = f(x) si dice infinita per x → c, finito o infinito, se, per x → c, il suo limite è infinito:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

Si dice anche che la funzione f(x) è un infinito per x che tende a c.

Esempi di funzioni che sono infiniti:

- La funzione f(x) così definita:

$$f(x) = x^5 + 3x^2 + 2x - 1$$

così come ogni funzione costituita da un polinomio di grado n, n > 0, è un infinito, in quanto si ha:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (x^5 + 3x^2 + 2x - 1) = \infty$$

- La funzione radice quadrata, f(x) = √x, in quanto abbiamo che:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = \infty$$

- La funzione $f(x) = \frac{1}{x-1}$

Poiché, per x che tende a 1, essa tende a infinito:

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$

Così come per gli infinitesimi, anche con gli **infiniti**, spesso, è necessario confrontare due funzioni infinite per x che tende allo stesso valore, con lo scopo di determinare quale delle due tenda ad infinito più rapidamente. Per farlo, si analizza il limite del rapporto delle due funzioni, che si presenterà nella forma indeterminata [∞/∞].

Vediamo i casi possibili che si possono presentare, considerando due funzioni f(x) e g(x) infinite per x → c:

- Se il limite del rapporto delle due funzioni è infinito, cioè se:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

allora, possiamo affermare che la funzione f(x) tende all’infinito più rapidamente di g(x), e pertanto, viene definita infinito di ordine superiore a g(x).

- Se il limite del rapporto delle due funzioni è zero, cioè se:

$$\lim_{x \to c} f(x)g(x)=0$$

allora, in questo caso, la funzione g(x) tende all’infinito più rapidamente di f(x), che viene quindi detta infinito di ordine inferiore a g(x).

- Se il limite del rapporto delle due funzioni è un valore l, diverso da zero, cioè se:

$$\lim_{x \to c} f(x)g(x)=l, l \neq 0$$

possiamo affermare che le due funzioni f(x) e g(x) tendono all’infinito con la stessa rapidità, e sono quindi infiniti dello stesso ordine.

- Se, invece, il limite del rapporto delle due funzioni non esiste, si dice che le funzioni f(x) e g(x) sono degli infiniti non confrontabili.

Ordine e parte principale di un infinito

Consideriamo due funzioni f(x) e φ(x) infinite per x → c; f(x) si dice **infinito di ordine n**, se il rapporto tra f(x) e la potenza n-esima di φ(x) è una valore l diverso da zero, cioè se:

$$\lim_{x \to c} f(x)[\phi(x)]_n=l, l \neq 0$$

Come per le funzioni infinitesime, anche in questo caso, possiamo rappresentare le funzioni con la **scrittura fuori dal segno di limite**, cioè:

$$\lim_{x \to c} f(x)[\phi(x)]_n=l \Rightarrow \lim_{x \to c} f(x)[\phi(x)]_n-l=0$$

Quindi, se la funzione δ(x) è tale che:

$$\delta(x)=f(x)[\phi(x)]_n-l$$

Possiamo scrivere la funzione f(x) come somma di due funzioni infinite, in questo modo:

$$f(x)=l\cdot[\phi(x)]_n+\delta(x)\cdot[\phi(x)]_n$$

I due addendi che compaiono nella somma vengono definiti, rispettivamente, parte principale e parte complementare di f(x). In particolare, la parte principale è un infinito dello stesso ordine di f(x), mentre la parte complementare è un infinito di ordine inferiore di f(x).

Esempio: Consideriamo le due seguenti funzioni, entrambe infinite per x che tende all’infinito:

$$f(x)=3x^2–2x+1,g(x)=x^2$$

Per confrontare le due funzioni calcoliamo il limite del loro rapporto:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)g(x)=\lim_{x\to\infty}3x^2-2x+1x^2$$

Come possiamo notare, il limite si presenta nella forma indeterminata [∞/∞], ma sappiamo che, poiché entrambi polinomi del numeratore e del denominatore sono di secondo grado, il valore del limite è dato dal rapporto dei coefficienti della x di grado massimo:

$$\lim_{x\to\infty}3x^2-2x+1x^2=31=3$$

Dato che il limite del rapporto delle funzioni è un valore diverso da zero, possiamo concludere che g(x) e f(x) sono infiniti dello stesso ordine, e in particolare, f(x) è un infinito di secondo ordine rispetto a g(x).