

Compressione e botanica:

come Leonardo Da Vinci anticipò l'approccio alla morfogenesi delle strutture naturali

di Marco Cecca e Silvia Tinelli*

* IISS "P. Sette" Santeramo in Colle (BA)

1. Introduzione

Lo sviluppo di un albero nei suoi rapporti di lunghezza, spessore, angolo e numero di ramificazioni, risponde a precise regole fisiche e matematiche che ne regolano il rapporto in relazione al funzionamento biologico, all'accesso alla luce, all'equilibrio statico e così via. Perciò la crescita dell'albero è regolata in qualche modo dalla necessità di adattarsi continuamente all'ambiente esterno. Queste regole sono in parte descrivibili matematicamente attraverso la cosiddetta geometria frattale. Quest'ultima è una branca relativamente recente della geometria: infatti, un primo approccio matematico allo studio di queste strutture avvenne nel 1872 da parte del tedesco Karl Weierstraß e solo dopo quasi un secolo, nel 1975, si iniziò a parlare di "frattale", termine coniato da Benoît Mandelbrot in celebri lavori [1].

Ciononostante, Leonardo Da Vinci con caparbietà e ingegno intuì circa cinquecento anni prima: *"Maggiori sono i ramiculi de' rami degli alberi che nascono di sotto, che quelli che nascono di sopra... tutti i rami dell'alberi in ogni grado della loro altezza giunti insieme sono eguali alla grossezza del loro pedale"* [2]. Attualmente, attraverso calcoli matematici e computerizzati ad opera di Christophe Eloy, si è verificato che la regola di Leonardo si è rivelata esatta.

2. La regola di Leonardo

Leonardo da Vinci, attraverso osservazioni e straordinarie intuizioni, intuì che il diametro complessivo dei rami sviluppati in un anno da un tronco è uguale al diametro del tronco da cui sono originati, vale a dire che la somma dell'area della sezione trasversale di tutti i rami di un albero al di sopra di un punto di ramificazione a qualsiasi altezza sia uguale all'area della sezione trasversale del tronco o del ramo immediatamente al di sotto del punto di diramazione. Questa relazione può anche essere espressa affermando che l'area della sezione trasversale del ramo al di sotto di un dato nodo di diramazione è uguale alla somma delle aree della sezione trasversale dei rami figli sopra il nodo. Quindi indicando con d il diametro del tronco originario, con N il numero dei rami uscenti di diametro d_i , la regola di Leonardo è la seguente:

$$d^\Delta = \sum_{i=1}^N d_i^\Delta \quad (1)$$

Dove l'esponente di Leonardo è $\Delta = 2$, mentre attraverso l'analisi e l'elaborazione di dati sperimentali ad opera di Christophe Eloy, oggi si è visto come quest'esponente si possa situare nell'intervallo $1,8 < \Delta < 2,3$ a seconda della specie esaminata [3]. Tuttavia, non tutti i rami corrispondono esattamente alla regola di Leonardo da Vinci: si è rilevato infatti che la crescita media annuale della sezione trasversale di un ramo è inferiore rispetto alla somma della crescita dei rami uscenti. Questo perché la percentuale di crescita dell'area è quasi sempre maggiore nei rami piccoli e giovani rispetto a quelli grandi e vecchi. Ciononostante, Leonardo arrivò in un modo del tutto intuitivo a risultati sommariamente esatti, ottenuti oggi attraverso elaborazioni grafiche computazionali. Questa regola accettata così intuitivamente, può essere utilizzata per la rappresentazione grafica di alberi o può essere applicata per descrivere sistemi simili come ad esempio gli alveoli polmonari, le reti fluviali, la circolazione

sanguigna ecc. Naturalmente, lo studio di questo tipo di strutture è molto complicato. Un vasto settore di ricerche scientifiche sul tema coinvolge, generalmente parlando, il cosiddetto Trasporto Ottimale di Massa, ambito nel quale è stata assegnata la Medaglia Fields al matematico italiano Alessio Figalli. In soldoni, queste strutture emergerebbero allo scopo di ottimizzare qualche prestazione, ad esempio il trasporto della linfa negli alberi, o la diffusione del sangue nei tessuti. Avendo in mente tali applicazioni si fa riferimento anche ai cosiddetti “problemi di irrigazione”. Per un’introduzione divulgativa sul tema si veda ad esempio [4]. Segnaliamo anche il materiale presente su @mathematicalpride (conferenza sulla matematica della medaglia Fields).

Ma i motivi di questo tipo di conformazioni possono essere molteplici. Una teoria piuttosto accreditata era quella legata al passaggio della linfa all’interno dei capillari della pianta, secondo la quale una serie di vasi identici collegava tra loro le foglie alle radici (*The Pipe Model Theory*) [5]. Una seconda teoria più diffusa fu quella secondo cui il diametro del tronco cresce in maniera più rapida rispetto alla lunghezza dell’intera struttura, in modo tale che la deflessione dei rami causata dal proprio peso, sia proporzionale alla propria lunghezza (*The Elastic Similarity Theory*) [6]. Lo stesso Leonardo osservò che “*Il lato di quell’angolo si fa più obliquo, il quale è fatto di ramo più sottile*” [7]. Secondo Christophe Eloy, della Aix-Marseille Université d’Aix-en-Provence, grazie anche a diverse simulazioni delle interazioni del vento con gli alberi, invece la causa della conformazione è un’altra: l’albero sembra seguire la regola di Leonardo per adattarsi meglio a resistere alla violenza del vento poiché questa conformazione è, infatti, quella migliore per evitare rotture dei rami.

3. Complessione e Geometria frattale

Il termine “complessione” fu introdotto da Leonardo Da Vinci durante il XV secolo, derivato dal latino *complexionis*, per associazione di *cumplecto* e del greco *πλέκω*, intreccio, e quindi «complesso», al fine di descrivere gli elementi anatomici e le strutture degli organismi umani, animali e vegetali. Complessione, termine colto in uso ancor oggi, richiama la complessità mentre l’accezione scientifica fu esplicitata da Leonardo: “*serve per descrivere la costituzione fisica, la corporatura, l’ordito, la tessitura, lo stato di intreccio derivante dalla unione delle diverse parti e dalla relazione delle medesime tra loro e con tutto l’insieme*” [8]. Infatti, in natura non sempre tutto è riconducibile alla geometria euclidea, attraverso forme lineari e semplici, ma a volte può apparire complessa e ad un primo impatto caotica. Questo è proprio l’ambito in cui fu concepita ed elaborata la geometria frattale da Benoît Mandelbrot nel 1924.

Un frattale è, intuitivamente, una figura in un cui un singolo motivo viene ripetuto su diverse scale: ingrandendo ad esempio una parte della figura, possiamo individuarvi una copia in scala della figura stessa.

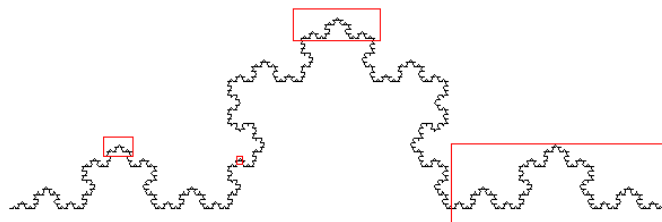


Fig. 1 curva di Von Koch

Questa caratteristica è spesso chiamata *auto-similarità*, *autosomiglianza* o *invarianza di scala*, cioè se osserviamo un frattale al microscopio, via via che aumentiamo gli ingrandimenti, cioè cambiamo “scala”, ci troviamo di fronte ad immagini più o meno simili. Un modo per ottenere questa caratteristica è utilizzare un’omotetia, trasformazione geometrica che permette di ingrandire o ridurre una figura lasciandone inalterata la forma, in particolare Benoît Mandelbrot parla di omotetia interna [9]. Altre proprietà che caratterizzano un frattale sono: la *struttura fine* (rivela dettagli ad ogni ingrandimento), la *irregolarità* [9] (non può essere descritto come luogo dei punti che soddisfano condizioni geometriche o analitiche) e la *dimensione frazionaria* (sebbene

possa essere rappresentato in uno spazio euclideo a due o tre dimensioni, la sua dimensione non è in generale intera).

Una sostanziale differenza tra un oggetto geometrico euclideo ed un frattale è il modo in cui si costruisce. Data, infatti, una funzione continua del tipo, $\phi(t) = (x(t), y(t), z(t))$, definita in un intervallo I di \mathbb{R} e a valori in \mathbb{R}^3 , il sottoinsieme descritto dai punti $\phi(t)$ al variare di t , è una curva nello spazio. La costruzione dei frattali, invece, non si basa su di un'equazione, ma, in senso lato, sull'iterazione di una procedura ricorsiva. La procedura in oggetto è iterata un numero di volte teoricamente infinito: ad ogni iterazione l'oggetto geometrico ottenuto, ad esempio una curva, si avvicina sempre più al risultato finale (per approssimazione), e, dopo un certo numero di iterazioni, l'occhio umano non è più in grado di distinguere le modifiche. Pertanto, quando si disegna concretamente un frattale, ci si può fermare dopo un congruo numero n di iterazioni; il risultato sarà tanto più preciso all'aumentare di n .

Questi oggetti apparentemente astratti sono, in realtà, presenti in maniera consistente anche in natura: la disposizione dei rami di un albero, la conformazione di un cavolfiore, la distribuzione degli alveoli polmonari, la superficie delle nuvole, il delta di un fiume, la struttura delle galassie, il lampo di un fulmine, eccetera. La distribuzione e la relazione dei rami e dei loro diametri secondo la regola di Leonardo possono, infatti, essere spiegati attraverso un *modello frattale* [3]. Ad esempio, in un albero ogni ramo è approssimativamente simile all'intero albero e ogni rametto è a sua volta simile al proprio ramo, e così via. Un albero può essere quindi visto come un frattale costruito nel seguente modo:

$$\frac{l_k}{l_{k+1}} = N^{\frac{1}{D}}, \quad \frac{d_k}{d_{k+1}} = N^{\frac{1}{\Delta}}.$$

Dove l_k e d_k sono rispettivamente la lunghezza e il diametro dei rami di classe k , ($1 \leq k \leq K$), N è il numero di rami uscenti da ogni nodo, Δ è l'esponente di Leonardo e D è la dimensione frattale della struttura dell'albero. Quest'ultima non è mai stata misurata in modo diretto su alberi reali, ma ovviamente ci si aspetta una dimensione frattale $2 < D < 3$. La chioma di un albero avrebbe quindi una dimensione frattale non intera. Un modo per trattare simili questioni è considerare la cosiddetta dimensione frattale.

4. La dimensione frattale

Per definizione la dimensione, dal latino *dimensio*, misura, è essenzialmente il numero di gradi di libertà disponibili per il movimento di un punto materiale in uno spazio. Tutti noi possediamo un concetto intuitivo di dimensione: il punto ha dimensione zero, la retta ha dimensione uno, il piano ha dimensione due, lo spazio ha dimensione tre. Nell'uso comune, le dimensioni di un oggetto diventano le misure che ne definiscono la forma e la grandezza, ed attraverso la geometria analitica, con l'utilizzo delle coordinate cartesiane, si quantifica in modo semplice la dimensione dello spazio in cui vengono studiati questi oggetti, riconducibili ad un insieme di punti. Ad esempio, un punto su una retta necessita di una sola coordinata, un punto nel piano è individuato da una coppia ordinata di numeri reali, mentre nello spazio da una terna.

Per descrivere oggetti più complessi, però, non è sufficiente l'uso delle geometrie note, come quella euclidea, in quanto non sono adeguate a rappresentarne la complessità. Perciò, in tali situazioni, si ricorre alla geometria frattale, che a differenza di come si possa pensare, non viene usata solo per descrivere oggetti matematici astratti, ma trova applicazione anche nella descrizione di oggetti e fenomeni naturali. Un elemento fondamentale della geometria frattale è la dimensione frattale, ossia il numero che misura il grado di irregolarità e interruzioni di un oggetto, considerato in qualsiasi scala. Sebbene l'oggetto possa essere rappresentato in uno spazio convenzionale a due o tre dimensioni, la sua dimensione non è necessariamente un intero. Si pensi, ad esempio, ad un cubo solido, quest'ultimo non presenta spazi vuoti nella sua struttura, mentre se si immagina la struttura di un oggetto spugnoso: pur occupando uno spazio tridimensionale, non lo occupa interamente. Di conseguenza si può immaginare che la sua dimensione sia strettamente maggiore di quella di un piano, ma strettamente inferiore di quella di un solido, dunque un valore non intero.

Per comprendere ciò, possiamo associare la definizione di dimensione al numero minimo N di oggetti che servono per ricoprire l'oggetto iniziale di volume P . Se ciò è possibile, si dice che l'oggetto è autosimile, mentre il rapporto P/N è il fattore di scala o la risoluzione. Si può dimostrare che esiste una relazione precisa tra il rapporto lineare di similitudine k , la dimensione D dell'oggetto e le N parti in cui l'oggetto è suddiviso. Partendo da un oggetto euclideo di dimensione intera, si può generalizzare il procedimento per definire una qualsiasi dimensione D .

Consideriamo, ad esempio, una retta, (ossia un oggetto che si sviluppa in una sola dimensione $D=1$) di lunghezza $L=a$ e la dividiamo in k parti ottenendo N parti simili all'oggetto di partenza. Ognuna di esse avrà una lunghezza $L' = \frac{a}{k}$. Perciò il rapporto lineare di similitudine tra le lunghezze è:

$$k = \frac{L}{L'} = N.$$

Invece, considerando ora, un rettangolo, (ossia un oggetto che si sviluppa in due dimensioni $D=2$) di lati a e b e dividendoli entrambi per k , otteniamo N subunità simili all'oggetto di partenza ciascuno di area $A' = \frac{a}{k} * \frac{b}{k} = a * \frac{b}{k^2}$, ossia abbiamo ottenuto N parti autosomiglianti. Quindi, partendo dal rapporto di superficie, il rapporto di similitudine è:

$$k^2 = \frac{A}{A'} = N \Rightarrow k = N^{\frac{1}{2}}.$$

Considerando, invece, un parallelepipedo, (ossia un oggetto che si sviluppa in tre dimensioni $D=3$), dividendo i suoi lati a , b , e c per k otteniamo un nuovo volume V' pari a: $V' = \frac{a}{k} * \frac{b}{k} * \frac{c}{k} = a * b * c * \frac{1}{k^3}$. Per cui il rapporto tra il volume iniziale V e V' che ci fornisce il rapporto di similitudine:

$$k^3 = \frac{V}{V'} = N \Rightarrow k = N^{\frac{1}{3}}.$$

Perciò, generalizzando tale relazione di similitudine per qualunque numero D si ottiene:

$$k^D = \frac{P}{P'} = N \Rightarrow k = N^{\frac{1}{D}}.$$

da cui si ricava

$$D = \log_k N \quad (2)$$

Ha senso allora riferirsi al numero D individuato dalla (2) come alla dimensione frattale di P . Per come costruita, la dimensione frattale coincide con l'usuale dimensione intera dello spazio euclideo per oggetti *regolari*.

Per oggetti frattali, la dimensione D può anche essere non intera e se questo valore si avvicina ad 1 vuol dire che la sua struttura assomiglierà, con l'aumentare delle iterazioni, ad una linea, mentre quando si avvicina a 2, la sua struttura tenderà a ricoprire uniformemente una superficie.

Un esempio di frattale è il "*Tappeto di Sierpiński*" (Fig.2). Per costruire il tappeto di Sierpiński è necessario rimuovere da un quadrato nel piano, suddiviso in nove piccoli quadrati congruenti, quello centrale. Tale procedimento si ripete in ognuno degli 8 quadrati rimanenti e si continua a dividere ciascuno degli 8 quadrati in 9 quadratini sempre togliendo il quadratino centrale. Il tappeto di Sierpiński è la figura che si ottiene come limite di queste iterazioni. Consideriamo ora l'area di questa figura: supponiamo che l'area del quadrato iniziale sia A ; alla prima iterazione rimuoviamo un'area di $\frac{A}{9}$ ed otteniamo una figura di area

$$A_1 = \frac{8}{9} A;$$

alla seconda iterazione, rimuoviamo un nono dell'area degli otto quadrati rimanenti, ossia un nono di A_1 . Quindi, l'area rimanente è

$$A_2 = \frac{8}{9} A_1 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 A;$$

alla terza iterazione, rimuoviamo un nono dell'area dei sessantaquattro quadrati rimanenti, ossia un nono di A_2 . Quindi, l'area rimanente è

$$A_3 = \frac{8}{9}A_2 = \left(\frac{8}{9}\right)^3 A;$$

all' n -esima iterazione, rimuoviamo un nono dell'area di 8^{n-1} quadrati rimanenti, ossia un nono di A_{n-1} . Quindi, l'area rimanente è

$$A_n = \frac{8}{9}A_{n-1} = \left(\frac{8}{9}\right)^n A.$$

Dal momento che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n = 0,$$

possiamo concludere che l'area del tappeto di Sierpiński è zero. Mentre, poiché con l'aumentare delle iterazioni il tappeto diventa sempre più frastagliato, il perimetro divergerà.

La dimensione frattale del tappeto di Sierpiński, considerando la (2), è la seguente:

$$D = \log_3 8 = \frac{\ln 8}{\ln 3} \simeq 1,893$$

dove, il numero di copie N dell'oggetto di partenza è 8, mentre k è 3, avendo suddiviso ogni lato del quadrato di partenza in tre parti. Per questa caratteristica il tappeto di Sierpiński è un frattale considerato intermedio tra la prima e la seconda dimensione.

La “*Spugna di Menger*” (Fig.3) è l'analogo in 3 dimensioni del tappeto di Sierpiński. La spugna di Menger fu descritta per la prima volta dal matematico austriaco Karl Menger nel 1926 e presenta un numero infinito di cavità. Si ottiene partendo da un "cubo madre", il quale viene suddiviso in 27 cubi identici più piccoli. Dopodiché si rimuove il cubo centrale e i 6 cubi che hanno una faccia in comune con esso. Ne consegue una rimanenza di 20 cubi. Questo procedimento può essere poi iterato, con la conseguenza che il numero di cubi sarà alla fine 20^n , dove n è il numero di iterazioni effettuate sul cubo madre. La dimensione frattale, seguendo sempre la (2), è perciò la seguente:

$$D = \log_3 20 = \frac{\ln 20}{\ln 3} \simeq 2,727$$

Anche in questo caso, analogamente al tappeto di Sierpiński, il volume della spugna di Menger tenderà a 0, mentre la sua area ad infinito. Il frattale, in questo caso, è quindi intermedio tra la seconda e la terza dimensione.

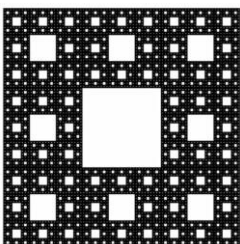


Figura 2 Tappeto di Sierpiński

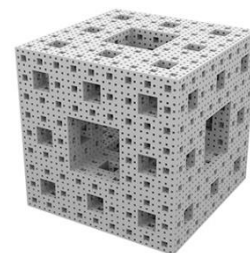


Figura 1 Spugna di Menger

5. Riflessioni conclusive

Dopo aver esaminato le proprietà e le caratteristiche dei frattali si può dunque concludere affermando che gli oggetti della nostra esperienza quotidiana non hanno di per sé i bordi lisci o le forme regolari di un cono, di un cerchio, di una sfera o di una retta come accade nella geometria euclidea. Il mondo in realtà è rugoso, increspato, di forma irregolare. Può sembrare strano, ma fino a non molto tempo fa non esisteva una geometria capace di descrivere i fenomeni naturali di tal fatta, ciò è stato possibile solo in seguito grazie anche all'introduzione della geometria dei frattali. Le nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, i profili delle coste non sono cerchi. I frattali sono degli insiemi, apparentemente caotici, ma che in realtà sono governati da semplici regole matematiche. La geometria frattale ha dunque rivoluzionato il modo di osservare e di approcciarsi matematicamente alla natura, rivelando un mondo molto più complesso di ciò che appare; e di cui Leonardo Da Vinci ne fu un brillante osservatore, anticipando di quasi 500 anni la nascita della geometria frattale stessa. Secondo alcuni critici Leonardo fu un uomo che «non comprese appieno il vero metodo scientifico [...] e che] non possedeva una metodologia né una filosofia di fondo» [10]. Lo stesso Leonardo si definiva in fondo un “omo senza lettere” e certamente non lo si può considerare un precursore del metodo scientifico così come lo intendiamo oggi (per una riflessione sul ruolo scientifico di Leonardo si veda [11]). Ciononostante, è stato un uomo brillante, sagace, capace di andare oltre le conoscenze canoniche e intuire in maniera acuta le leggi insite nella natura, attraverso anche uno spirito ludico, ma sicuramente basato sulla curiosità di scoprire e capire il mondo che lo circondava.

Bibliografia

- [1] B. Mandelbrot, *Gli oggetti frattali*, Einaudi, Torino 2000
- [2] Leonardo da Vinci, *Trattato della Pittura*, cap. 910 “Precetti di piante e verdure”, Carabba editore, 1947
- [3] Christophe Eloy, “Leonardo’s rule, self-similarity and wind-induced stresses in trees”
- [4] L. Granieri, *Il problema del trasporto ottimale di massa*, Scienze e Ricerche, n. 4, febbraio 2015, pp. 85-88
- [5] Shinozaki K, Yoda K, Hozumi K, Kira T. 1964a. “A quantitative analysis of plant form - the pipe model theory”, *Japanese Journal of Ecology* B: 97-105
- [6] Marina Silva, “Allometric scaling of body length: elastic or Geometric similarity in mammalian design”, Department of Biology, University of Prince Edward Island
- [7] Leonardo da Vinci, *Trattato della Pittura*, cap.813 “Della ramificazione delle piante”, Carabba editore, 1947
- [8] *I manoscritti di Leonardo da Vinci della Reale biblioteca di Windsor: Dell'anatomia*, fogli B, foglio 20, Roux e Viarengo editori, Torino, 1801
- [9] B. Mandelbrot, *Nel Mondo dei frattali*, Di Renzo Editore, Roma, 2005
- [10] KLINE, M. 1991, *Storia del pensiero matematico, I-II*, Einaudi, Torino (Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford University Press, New York 1972).
- [11] L. Borzacchini, *La Solitudine di Leonardo*, Dedalo, 2019.