Teoremi sulle successioni monotone

Come abbiamo già visto, una successione si dice monotòna se essa è crescente, debolmente crescente, decrescente o debolmente crescente. Se una successione è monotòna, o definitivamente monotòna, valgono per essa i seguenti teoremi:

Teorema 1: Se una successione crescente (strettamente o debolmente) o definitivamente crescente (strettamente o debolmente) è limitata superiormente, allora essa è convergente, cioè ammette limite.

Teorema 2: Se una successione decrescente (strettamente o debolmente) o definitivamente decrescente (strettamente o debolmente) è limitata inferiormente, allora essa è convergente, cioè ammette limite.

Teorema 3: Se una successione crescente (strettamente o debolmente) o definitivamente crescente (strettamente o debolmente) è illimitata superiormente, essa diverge positivamente, cioè tende a più infinito.

Teorema 4: Se una successione decrescente (strettamente o debolmente) o definitivamente decrescente (strettamente o debolmente) è illimitata inferiormente, essa diverge negativamente, cioè tende a meno infinito.

Possiamo quindi riassumere i teoremi precedenti, dicendo che una successione monotòna ammette sempre limite, sia che essa sia limitata, sia che non lo sia.

Il seguente teorema è molto utile, e permette di calcolare limiti di successioni che non saremmo in grado di calcolare altrimenti, o che risulterebbero particolarmente difficili:

Teorema del confronto

Siano a_n, b_n, c_n tre successioni numeriche tali che si abbia:

$$a_n \leq b_n \leq c_n, \forall n \in N$$

sapendo, inoltre, che le successioni a_n e c_n tendono allo stesso limite l, cioè che:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l$$

si può concludere che anche la successione b_n, compresa tra esse per ogni n, tenda allo stesso limite l:

Esempio: Calcoliamo il seguente limite di successioni: $\lim_{n\to+\infty}[1n \cdot \sin(n)]$

Notiamo che il limite, così come si presente, non può essere calcolato, in quanto non esiste il limite per n che tende all'infinito di $\sin(n)$. Ricordiamo, però, che il seno è una funzione compresa sempre tra -1 e 1; possiamo sfruttare questa ipotesi per dedurre che la nostra successione è compresa tra $-1/n$ e $1/n$, infatti si ha:

$$-1\leq\sin(n)\leq1\Rightarrow-\frac{1}{n}\leq\frac{\sin(n)}{n}\leq\frac{1}{n}$$

Siamo nelle ipotesi del teorema del confronto: infatti, abbiamo una disuguaglianza che riguarda tre successioni, delle quali conosciamo il limite per n che tende all'infinito di quelle ai lati della disuguaglianza; infatti, sappiamo che:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)=0$$

Per il teorema del confronto, possiamo concludere che anche la successione $\sin(n)/n$ tende a zero, per n che tende all'infinito.

Il teorema del confronto si può estendere anche al caso di successioni divergenti:

Teorema del confronto (successioni divergenti)

Siano a_n e b_n due successioni numeriche tali che si abbia:

$$a_n\leq b_n,\forall n\in\mathbb{N}$$

Possiamo considerare i due seguenti casi:

- Se a_n diverge positivamente, cioè tende all'infinito, allora anche b_n diverge positivamente, cioè, in simboli:

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=+\infty\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}b_n=+\infty$$

- Se b_n diverge negativamente, cioè tende a meno infinito, allora anche a_n diverge negativamente, cioè:

$$\lim_{n\to+\infty}b_n=-\infty\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}a_n=-\infty$$

- Se b_n è limitata dall'alto, allora anche a_n è limitata dall'alto;
- Se a_n è limitata dal basso, allora anche b_n è limitata dal basso.

Vediamo, ora, altri due teoremi che ci permettono di semplificare molti il calcolo dei limiti:

Teorema (criterio del rapporto)

Sia a_n una successione numerica, positiva. Se esiste il limite del rapporto tra un termine e il suo precedente e vale l, cioè:

$$\text{se } \exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=l$$

possiamo determinare il limite della successione a_n in base al valore di l, e in particolare:

- se $0\leq l<1$, allora la successione a_n tende a zero:

$$l\in[0;1)\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n=0$$

- se, invece, $l<1$, allora la successione a_n diverge positivamente:

$$l\in(1;+\infty)\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$$

Osserviamo che, nel caso in cui il limite del rapporto sia proprio 1, il teorema non ci da informazioni sul limite della successione, e infatti, non possiamo concludere nulla.

Teorema (criterio della radice)

Sia a_n una successione numerica, positiva. Se esiste il limite della radice n-esima di a_n e vale l cioè:

$$\text{se } \exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}=l$$

possiamo determinare il limite della successione a_n in base al valore di l, e in particolare:

- se $0\leq l<1$, allora la successione a_n tende a zero:

$$l\in[0;1)\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n=0$$

- se, invece, $l>1$, allora la successione a_n diverge positivamente:

$$l\in(1;+\infty)\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$$

Anche in questo caso, non possiamo concludere nulla nel caso in cui il limite della radice sia 1.