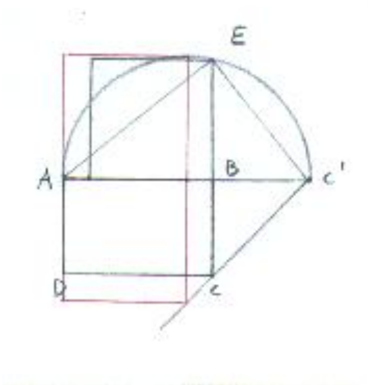
Alcuni problemi geometrici di minimo o di massimo risolti in modo sintetico

Massimo Fantin 2004

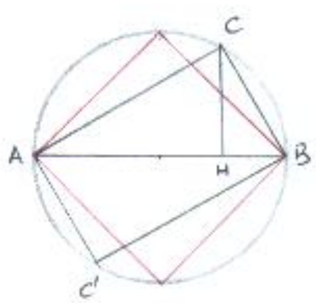
1) Tra tutti i rettangoli di uguale perimetro trovare quello di area massima.



Sia ABCD un rettangolo generico di perimetro 2p, si prolunghi AB del segmento BC' =BC in modo che AC' = p. Si tracci la semicirconferenza di diametro AC' e si prolunghi BC fino ad incontrare in E la semicirconferenza. Il triangolo AC'E è rettangolo in E perché inscritto nella semicirconferenza pertanto per il 2° teorema di Euclide ABCD=EB^2. Il quadrato EB^2 è massimo quando è massimo il lato EB, cioè quando è uguale al raggio. In tal caso AB = BC = p/2.

Il rettangolo di perimetro 2p di area massima è il quadrato di lato p/2.

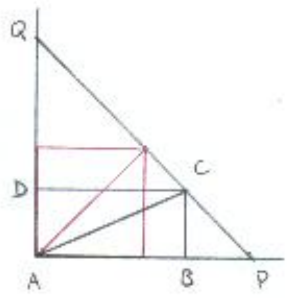
2) Tra tutti i rettangoli di uguale diagonale trovare quello di area massima.



Tutti i rettangoli di uguale diagonale sono inscrivibili nella circonferenza di diametro pari alla diagonale. Il rettangolo viene diviso in due triangoli rettangoli uguali. L'area di ciascun triangolo rettangolo è massima quando è massima l'altezza cioè quando questa è uguale al raggio.

Il rettangolo di data diagonale ha area massima quando è il quadrato.

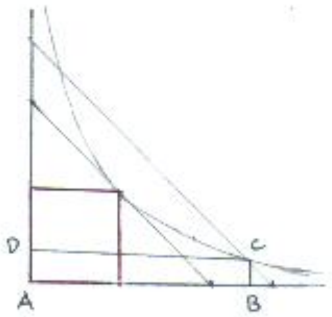
3) Tra tutti i rettangoli di ugual perimetro trovare quello di diagonale minima.



Sia ABCD il rettangolo generico di perimetro 2p. Prolunghiamo i lati AB e AD dalla parte di B e di D, tracciamo il luogo di punti C tali che ABCD abbia perimetro 2p. Esso è un segmento di retta PQ che forma con il vertice A un triangolo rettangolo di cateti AP = AQ = p. La diagonale del rettangolo dato costituisce il segmento congiungente il punto A con il punto generico C del luogo PQ. La lunghezza di tale diagonale è minima quando AC è perpendicolare al luogo PQ.

Il rettangolo di perimetro 2p e di minima diagonale è il quadrato di lato p/2.

4) Tra tutti i rettangoli di uguale area trovare quello di minimo perimetro.

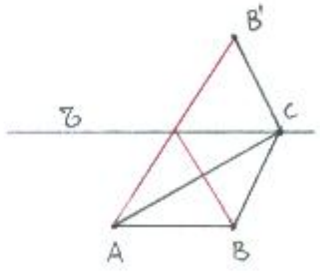


Sia ABCD il rettangolo generico di area data a^2. Se prolunghiamo i lati AB e AD dalle parti di B e di D, il luogo dei punti C dei rettangoli di area a^2 con i lati sui detti prolungamenti è un iperbole equilatera mentre, per ogni punto C il luogo dei punti C per i quali è costante il perimetro è un segmento di retta inclinato di 45° rispetto ai due prolungamenti tracciati. Pertanto il rettangolo di minimo perimetro è quello per cui, detta retta è alla minima distanza dal vertice A

Il rettangolo di area a^2 che ha minima area è il quadrato di lato a.

5) Tra tutti i triangoli di data base e di data area trovare quello di minimo

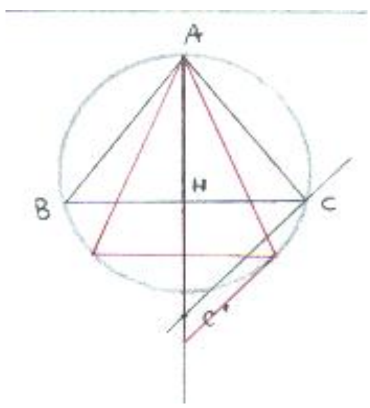
perimetro.



Sia AB la base data , Tutti i triangoli di base AB e aventi data area avranno altezza costante e pertanto il vertice C si troverà su una retta r parallela ad AB. Tracciamo il punto B' simmetrico di B rispetto alla retta r . Si avrà che BC=B'C inoltre per cercare il minimo perimetro possiamo non considerare tra tutti i triangoli dati, la base AB essendo costante. Ci limitiamo a minimizzare AC+CB ma per quanto detto AC+CB=AC+CB' che è una spezzata di estremi A e B' da parti opposte della retta r. Il minimo percorso tra due punti è dato dal segmento di retta congiungente gli estremi cioè AB' , che interseca in P la retta r. Per la simmetria di B' si ha che P è il punto medio del segmento ovvero AP=PB'.

Tra tutti i triangoli di data base e di data area quello di perimetro minimo è l'isoscele.

6) Tra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza determinare quello che rende massima la somma tra l'altezza relativa alla base e la metà della base.

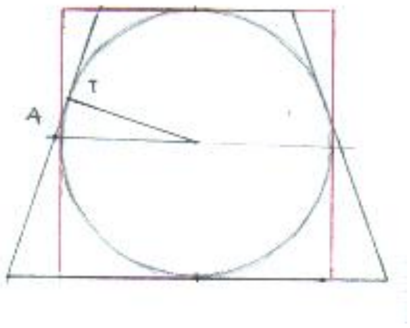


Sia ABC il triangolo isoscele di base BC inscritto nella circonferenza di raggio r . Per costruire un segmento di lunghezza pari alla somma tra l'altezza AH e metà della base riportiamo la metà della base HC in HC' tracciando la retta CC' inclinata di 45° .

Massimizzare la somma tra l'altezza e metà della base equivale massimizzare il segmento AC'. Per fare questo tracciamo la tangente alla circonferenza parallela a CC' cioè inclinata di 45° il punto C che rende massimo AC' è quello per cui AOC=135° essendo = il centro della circonferenza.

Il triangolo isoscele inscritto ad una circonferenza che rende massima la somma tra l'altezza e metà della base è quello per cui la base è Ö 2 volte il raggio del cerchio circoscritto

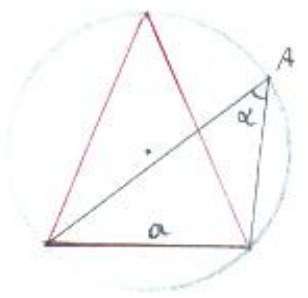
7) Tra tutti i trapezi isosceli circoscritti ad una circonferenza di raggio dato



L'area del trapezio è uguale all'area del rettangolo di base pari alla media delle basi e altezza pari all'altezza del trapezio. Visto che al variare dei trapezi circoscritti l'altezza rimane sempre uguale al diametro della circonferenza, l'area è minima quando è minima la base. Essendo tale base pari alla distanza tra i punti medi A e A' e tali punti appartengono ai lati obliqui che sono tangenti alla circonferenza. La base è minima quando tale distanza è pari al diametro, questo si ha quando il punto di tangenza T coincide con A.

Tra tutti i trapezi circoscritti ad una data circonferenza quello di area minima è il quadrato.

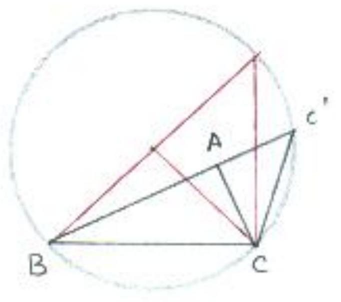
8) Tra tutti i triangoli aventi costanti un angolo e il lato opposto determinare quello di area massima.



Tali triangoli, per il noto teorema dell'angolo alla circonferenza sono inscritti in una circonferenza, pertanto visto che tali triangoli hanno tutti la stessa base, quello di area massima avrà massima altezza.

Tra tutti i triangoli aventi costante un angoli e il lato opposto quello di area massima è l'isoscele.

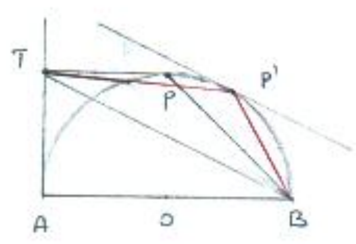
9) Tra tutti i triangoli rettangoli aventi costante un lato e l'angolo opposto determinare quello di perimetro massimo.



Sia ABC il generico triangolo di lato BC costante. Prolunghiamo il lato BA di un segmento AC' =AC. Il triangolo CAC' è isoscele per costruzione pertanto gli angoli alla base sono uguali e, per il teorema dell'angolo esterno pari alla metà dell'angolo BAC che è costante. Da ciò si deduce che BC'C è costante pertanto il triangolo BCC' è inscritto in una circonferenza e BC'=BA+AC, dato inoltre che il terzo lato del triangolo è costante per massimizzare il perimetro è sufficiente massimizzare BC', ma BC' è la corda di una circonferenza che è massima quando tale corda è il diametro e in tal caso il centro della circonferenza la divide in due parti uguali.

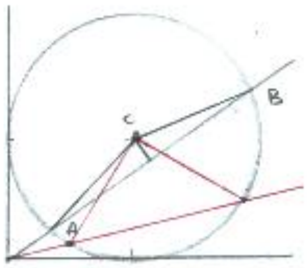
Tra tutti i triangoli aventi dati un lato e l'angolo opposto quello di perimetro massimo è l'isoscele.

10) E' data la semicirconferenza di diametro AB=2r, da A si conduca la semiretta AT tangente alla semicirconferenza, in modo che AT=r e che T sia nel semipiano individuato dalla retta AB e contenente la semicirconferenza . Determinare la posizione del punto P sulla semicirconferenza in modo che sia massima l'area del quadrilatero ABPT.



Il quadrilatero ABPT viene diviso in due triangoli ABT che non dipende dalla posizione del punto P e pertanto è costante, e TBP.
Per massimizzare l'area del quadrilatero basta massimizzare l'area del triangolo TBP, se di esso consideriamo base il lato TB che è costante al variare di P , l'area sarà massima quando è massima l'altezza PH. Per trovare il punto P che massimizza tale altezza conduciamo la retta parallela a TB tangente alla circonferenza, L'altezza PH perpendicolare alla tangente passa per il centro della circonferenza pertanto per trovare il punto di tangenza basta condurre dal centro la perpendicolare a TB fino ad intersecare la circonferenza

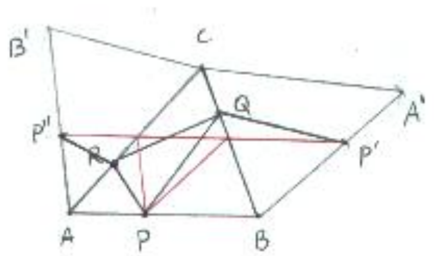
11) E' data una circonferenza di raggio r tangente a due semirette perpendicolari OX, OY, detto C il centro della circonferenza determinare l'angolo tra OC e la semiretta OZ in modo che sia massima l'area del triangolo CAB, essendo A e B le intersezioni di OZ con la circonferenza.



Si osserva che il triangolo ACB per ogni retta OZ è isoscele essendo AC = CB = r, pertanto l'area massima si avrà quando AC e CB sono perpendicolari, ma in tal caso detto H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa AB si avrà CH= AH = HB pari al lato di un quadrato di diagonale r. Mentre CO è la diagonale del quadrato di lato r. Da ciò si deduce che CH è doppio di CO e quindi COH è la metà di un triangolo equilatero.

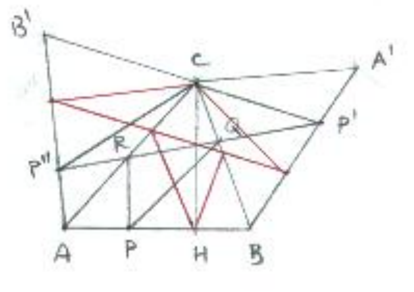
12) Problema di Fasano: Inscrivere in un triangolo acutangolo il triangolo di perimetro minimo.

Prima parte : Dato il triangolo acutangolo ABC , per ogni punto P appartenente al lato AB costruiamo il triangolo PQR inscritto di perimetro minimo.



Per fare questo costruiamo i triangoli ACB' e BCA' rispettivamente simmetrici di ABC rispetto a AC ed BC. I simmetrici del punto P siano P' e P''. Il perimetro del triangolo PQR inscritto ad ABC e equivalente alla spezzata P''RQP' essendo P''R=PR e PR=QP' per le simmetrie. Tutte queste spezzate hanno in comune gli estremi, pertanto la spezzata di lunghezza minima è il segmento congiungente P' P'' e di conseguenza i punti R e Q che rendono minimo il perimetro sono quelli di intersezione con i lati di ABC.

Seconda parte : Tra tutti i triangoli PQR costruiti come illustrato nella prima parte determiniamo la posizione del punto P in modo che sia minimo il perimetro.



Consideriamo i triangoli CP'P" essi sono isosceli infatti CP"=CP' perché entrambi segmenti simmetrici di CP inoltre l'angolo P'CP" è costante infatti P'CP"= P"CA + ACB + BCP' ma BCP'= B'CP" perché entrambi simmetrici delle stesso angolo BCP. Pertanto P'CP" = B'CP" + P"CA + ACB = 2ACB. Visto che la base del triangolo CP'P" è equivalente al perimetro del triangolo PRQ trovato nella prima parte, cerchiamo tra tutti questi triangoli isosceli e di uguale angolo al vertice quello di base minima, è quello di minimi lati uguale cioè di minimo CP' e CP" ma visto che questi sono equivalenti a CP, CP è minimo quando è perpendicolare ad AB. Si prenderà P come piede dell'altezza relativa al lato AB. L'operazione può essere ripetuta per i tre vertici.

Tra tutti i triangoli inscritti in un triangolo acutangolo ABC quello di perimetro minimo congiunge i piedi delle altezze.

Se il triangolo non è acutangolo il triangolo di minimo perimetro inscritto degenera nell'altezza rispetto al lato maggiore.