L'infinito: un'idea straordinaria messa in versi e definata con precisione in Matematica

Prof. Emanuele Castagna

27 aprile 2020

Premessa In questo breve lavoretto, consideriamo lo splendido capolavoro di Giacomo Leopardi, giustamente conosciuto da tutti e studiato nelle scuole, dal titolo "L'infinito". A parte la poesia squisita, che suscita emozioni "infinite" e la perfezione stilistica dei versi, noi vogliamo concentrarci sull'idea raggiunta dal poeta ed espressa nei suoi versi, di infinità ed infinito. Spesso siamo drastici nelle affermazioni, almeno noi che scriviamo, dicendo che l'uomo chiede alla figura sbagliata di parlargli d'infinito: il poeta è colui che lo percepisce a livello intuitivo, ma se vogliamo avere idee chiare su cosa sia l'infinito e sentirne parlare con cognizione di causa, bisognerebbe chiedere al Matematico. Il Leopardi, comunque, esprime bene nei suoi versi l'idea essenziale che descrive l'infinito o, per essere più precisi, descrive uno degli aspetti più intuitivi ed eccezionali dell'infinità. Vogliamo ora procedere in questo modo: prima ci leggiamo tutto il sonetto (ed è ammesso ed auspicabile che lo possiate gustare viaggiando con la nostra fantasia negli spazi illimitati... magari rileggendolo più volte), poi introdurremo il concetto di successione (numerica) e daremo la definizione di limite finito (successione convergente) o infinito (successione divergente), per come la si intende in Matematica. In ultimo compareremo l'idea del Leopardi con quella della Matematica, osservando d'un tratto che esse meravigliosamente coincidono. Buona lettura.

L'infinito di G.Leopardi

Sempre caro mi fu quest'ermo colle,
e questa siepe, che da tanta parte
dell'ultimo orizzonte il guardo esclude.
Ma sedendo e mirando, interminati
spazi di là da quella, e sovrumani
silenzi, e profondissima quete
io nel pensier mi fingo, ove per poco
il cor non si spaura. E come il vento
odo stormir tra queste piante, io quello
infinito silenzio a questa voce
vo comparando: e mi sovvien l'eterno,
e le morte stagioni, e la presente
e viva, e il suon di lei. Così tra questa
immensità s'annega il pensier mio:
e il naufragar m'è dolce in questo mare.

Sono 15 versi densi di significato: si oscilla dai sentimenti di affetto legato alla consuetudine di un luogo (verso 1), cosa che possiamo comprendere bene, ogni volta che ci allontaniamo dalla terra natia e ne sentiamo la nostalgia (e qui sarebbe facile fare un bel collegamento con il Foscolo!); all'idea di *limitazione* che è rappresentata dalla siepe (verso 2). Una limitazione dello sguardo, per il Leopardi, che però può essere anche letta come una limitazione della condizione umana, nella finitezza del proprio corpo, pensando che l'uomo aspira sempre a qualcosa di metafisico (e qui, altro bel riferimento a Dante!). Si fa riferimento alla potenza evocativa dell'immaginazione, della fantasia e del pensiero (versi 4, 5 e 6): ci sono questi interminati spazi oltre la siepe, che si conoscono per via della propria rappresentazione mentale e silenzi e "profondissima quiete" (una quiete che si estende al livello cosmico -tutti noi immaginiamo il silezio assoluto come se fosse la mancanza di suono tra le stelle nel cielo o, ancora, più mestamente, il silenzio assoluto della morte, quando tutto finisce). C'è il senso di paura dovuto al perdersi in questa immagine di "tutto immenso" e quindi senza un termine di paragone, un appiglio per la propria ragione... e vedete? in questo momento passa nella mente di colui che vive queste emozioni tutta la vita in un attimo: (da verso 11 in poi) apparte sullo sfondo l'idea di eternità, il passare delle stagioni, che è un evento periodico e quindi "senza fine" ed il presente, che è l'unica cosa che si vive con certezza (e qui ci sarebbe anche un bel pensiero al "carpe diem" di Catullo, oppure al pensiero sul tempo di Sant'Agostino ed ancora alla "Canzona di Bacco di Lorenzo il Magnifico) [1]. La chiusa poi è di una intensità eccezionale: in tutto questo senso di immensità non solo ci si perde, ma addirittura ci si *annega.* Come si può facilmente immaginare, si annega quando si viene sopraffatti dalle acque, quando le stesse ci portano via e non abbiamo più forza per resistere... mentre le acque ci sommergono, noi non abbiamo più possibilità di salvezza: ed è proprio qui che si legge la grandezza di Leopardi! non è la paura che lo aggredisce, d'altra parte, quando uno annega è probabile che venga anche sopraffatto dal terrore, specie se si accorge o, per lo meno, intuisce cosa sta per accadere! invece no, egli afferma "il naufragar m'è dolce in questo mare".
Bellissimo.

Successioni e limiti Introduciamo ora il concetto di successione e successione numerica, che sarà utile per uniformare il linguaggio e capire di cosa stiamo parlando nel prosieguo. Iniziamo con un esempio: sia dato l'insieme di elementi $A = \{a, b, c\}$. Come insieme, elencare i suoi elenti nell'ordine scritto prima, oppure scambiare qualche elemento all'interno delle parentesi (graffe) non fa alcun effetto: avendo sempre gli stessi elementi che lo costitutiscono, l'insieme rimane sempre lo stesso. Ben altra cosa è se noi *elenchiamo con ordine* gli elementi stessi: dare la sequenza a, b, c non è la stessa cosa della sequenza b, c, a. In effetti, se queste lettere fossero quelle che identificano dei corridori che partecipano ad una gara e la sequenza dovesse essere l'ordine di arrivo al traguardo, nel primo caso a vincerebbe la medaglia d'oro, mentre nel secondo solo il bronzo. Quindi, quando noi ci riferiremo ad una sequenza ordinata di elementi, ovvero a quella che in matematica si chiama anche *successione,* dovremo fare in modo di *conservare l'informazione* sulla posizione degli elementi nell'elenco che vien fatto.

[1] Ma quanta ricchezza ha espresso la poesia italiana!

C'è un metodo molto semplice per fare questo: basta utilizzare il concetto di *funzione.* Per proseguire senza difficoltà, dato che questo lavoretto vuole essere "autocontenuto", ricordiamo la definizione di funzione.

Definizione 1 *Dato un insieme A di elementi ed un insieme B, non necessariamente distinto da A, chiamiamo* ***funzione*** *una legge associativa univoca che per ogni elemento dell'insieme A associa un unico elemento di B.*

Ricordiamo altresí che gli insiemi A e B sono parte essenziale della definizione di funzione e non basta definire la legge associativa per conoscere la funzione (anche perché a seconda di quali siano gli insiemi A e B, la funzione può assumere caratteristiche diverse, pur mantenendo la stessa legge associativa). Importantissimo è il fatto, e lo enfatizziamo opportunamente, che la legge associativa sia *univoca.*

A questo punto vediamo che succede se si considera una funzione dall'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ all'insieme degli elementi di un dato insieme A, ad esempio quello prima. In modo molto intuitivo stabiliamo la seguente scrittura:

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ n & \mapsto & f(n) = x_n \end{array}$$

che sta a significa che al numero n naturale corrisponde l'unico elemento x_n che sta in A. Per esempio, il primo "elenco ordinato" di elementi di A, dato prima, ovvero la sequenza a, b, c può essere vista come la funzione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & A \\ 1 & \mapsto & a \\ 2 & \mapsto & b \\ 3 & \mapsto & c \end{array}$$

con l'ovvio significato che il primo posto è occupato dall'elemento a che corrisponde al numero 1, ecc... in pratica abbiamo conservato l'informazione sull'ordine dei posti di assegnazione degli elementi di A sfruttando l'ordinamento naturale dell'insieme $\mathbb{N}$. A questo punto si capisce appieno la seguente definizione

Definizione 2 *Si chiama* ***successione*** *una qualsiasi funzione dall'insieme dei numeri naturali ad un insieme di elementi A. Se l'insieme A è costituito da numeri, allora la successione si dirà* numerica.

In genere, invece di mantenere la scrittura $f : \mathbb{N} \to A$, $x_n = f(n)$ si preferisce scrivere direttamente ogni elemento della successione con a_n, da intendersi che stiamo lavorando con gli elementi dell'insieme A e che l'elemento a_n occupa la postizione $n-$esima nell'ordine di successione. Per esempio, se $A = \mathbb{N}$ e scriviamo $a_4 = 23$ è da intendersi che il quarto posto di una successione, i cui elementi sono numeri naturali, è occupato dal numero 23.

Limiti di una successione Va da sé che essendo l'insieme $\mathbb{N}$ illimitato superiormente, dato che si può superare ogni numero pensato comunque grande, aggiungendo semplicemente uno, le successioni avranno, in linea di principio, anche esse un numero illimitato di elementi da elencare! Però è anche evidente che se l'insieme A è costituito da un numero finito di elementi, allora l'eleco di suoi elementi dati in successione deve necessariamente ripertere gli stessi elementi di A. Ad esempio, se l'insieme A fosse costitutito solo dal un elemento, ad esempio $A = \{1\}$ allora ogni successione che consideri A come *insieme sostegno* deve essere del tipo $1, 1, 1, \dots$ in modo indefinito. Una successione di questo tipo la chiameremo *costante.* D'altra parte se A avesse solo due elementi, ad esempio $A = \{1, 2\}$ allora le successioni possibili già potrebbero presentare casi interessanti. Immaginiamo la successione $1, 2, 1, 2 \dots$ e così via: in pratica i posti dispari pari a 1 e quelli pari a 2, iniziando come primo elemento con a_1. Questa successione è ben diversa da quest'altra $1, 2, 2, 2, 1, 1, 1, \dots$ proseguendo adesso solo con tanti 1. Non sono diversi per gli elementi utilizzati nello scrivere la successione, ma proprio per come sono stati disposti! della seconda successione possiamo dire che *da un certo punto in poi* è diventata costante, mentre della prima questa cosa non la si può dire. Ebbene, è fondamentale isolare questo concetto di "cosa che capita -per sempre- da un certo punto in poi", tanto importante che siamo indotti a dare la seguente definizione.

Definizione 3 *Data una successione a_n, se esiste un indice $\bar{n}$ a partire dal quale tutti gli elementi della successione godono di una determinata proprietà, allora diremo che tale proprietà è* ***definitivamente verificata.***

In simbolismo matematico possiamo tradurre questa frase in questo modo [2] sia $\mathcal{P}$ una proprietà, se $\exists\, \bar{n} : \forall n > \bar{n}$ vale $\mathcal{P}$ sugli elementi di a_n, allora $\mathcal{P}$ è definitivamente verificata.

Consideriamo ora la successione dei reciproci dei numeri naturali, a partire da 1, ovvero

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

questa è chiaramente una successione di numeri che stanno diventando vieppiù piccoli: per convincersene non occorre far altro di pensa al numeratore ad una torta ed ai denominatori al numero di persone tra le quali si divide questa torta! in questo modo la frazione stessa identifica immeditamente la "grandezza" della fetta che viene data ad ogni partecipante della suddivisione: se la torta viene divisa tra 5 persone, chiaramente ciascuna di esse riceverà una fetta più grande di quanto ne riceverebbe se la torta dovessere essere divisa (in parti uguali) tra 10 partecipanti [3]. Cosa possiamo dire di altro su questa successione? sicuramente che essa non avrà mai elementi con numeri negativi e che *non arriverà mai a zero.* Vediamo di giustificare queste due affermazioni: in primis, dato che i numeri naturali non sono numeri con segno, sono quindi da intendersi tutti "positivi" (se allarghiamo gli insiemi dei numeri, ad esempio, dapprima considerando i *numeri segnati* ovvero l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$, per poi arrivare all'*insieme delle frazioni,* ovvero l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ dove "vivono" gli elementi della successione dei reciproci) e quindi anche i loro reciproci devono essere intesi come numeri positivi. Inoltre, una frazione

[2] Ricordiamo i due simboli $\exists$ che si legge **esiste** e $\forall$ che si legge **per ogni**.
[3] Nel caso precipuo sarebbe grande il doppio!

é nulla se e solo se il suo numeratore è zero: nel nostro caso, invece, tutti i numeratori sono uguali ad 1. Ci troviamo quindi di fronte ad una situazione "strana": questa successione numerica produce numeri sempre più piccoli ma che non arrivano mai ad diventare zero! D'altra parte zero è proprio un *limite inferiore* invalicabile, poiché "dall'altro lato" iniziano i numeri negativi!

Un attimo di riflessione prima di procedere oltre... la faccenda si fa intrigante, poiché già una delle successoni numeriche più semplici in assoluto, *la successione dei reciproci dei numeri naturali,* porta ad un concetto delicatissimo che è quello di "limite infinitesimo".

Ora raccogliamo le idee ed i frutti delle nostre riflessioni. Dire che i numeri diventano vieppiù piccoli si potrebbe interpretare in quest'altro modo: se noi pensiamo ad un numero "abbastanza piccolo", allora in quella successione ci deve essere qualche elemento che è più piccolo di quello che avevamo pensato! e dato che il pensiero nostro è libero di rappresentare quantità sempre più piccole, allora, dire che quella successione produce numeri sempre più piccoli, ma che non diventano mai "zero", significa che riusciremo sempre a trovare qualche elemento della successione che è minore del numero arbitrariamente piccolo avevamo pensato. Se poi, la successione diventa *definitivamente minore* di ogni numero arbitrariamente piccolo fissato, allora diremo che la **successione è infinitesima,** ovvero che *tende a diventare nulla* pur mai raggiungendo lo zero. In questo caso si dice anche che il **limite della successione è zero.**

Traduciamo il tutto in linguaggio simbolico. Sia data una successione a_n ed una quantità arbitrariamente piccola [4] ϵ, se $\exists \bar{n}$ tale per cui $\forall n > \bar{n}$ si abbia $a_n < \epsilon$, allora diciamo che la successione *converge a zero,* oppure che è infinitesima e racchiudiamo tutta questa definizione in questo modo:

$$a_n \longrightarrow 0.$$

In breve una successione è infinitesima se definitivamente i suoi elementi diventano più piccoli di qualsiasi quantità arbitrariamente piccola.

Osservazione: Se consideriamo la successione $a_n = 3 + \frac{1}{n} = \frac{3n+1}{n}$ questa è evidentemente una successione che a tre, aggiunge una quantità che diventa sempre più piccola e vicino a zero: per tale motivo possiamo dire, almeno a livello intuitivo, che

$$a_n \longrightarrow 3$$

intendendo che *definitivamente* la successione produce tutti numeri che differiscono da 3 per una quantità arbitrariamente piccola: diremo che la successione a_n **converge** a tre, ovvero che il suo limite è tre.

La divergenza Consideriamo ora un altro tipo di successione... ed andrebbe bene anche la successione dei numeri naturali, in prima considerazione, ma non volendo confondere le idee considerando i numeri naturali sia come elementi della successione, sia come posto che occupano nell'elencazione ordinata, consideriamo la successione formata prendendo il doppio di un numero naturale. Ovvero consideriamo la successione:

$$a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6, \ldots,\ a_n = 2 \cdot n, \ldots.$$

[4] Ormai è abitufine, nella comunità matematica, di indicare le quantità arbitrariamente piccole con la lettere dell'alfabeto graco ϵ.

Evidentemente questa successione produce numeri vieppiù grandi e, questo, senza limitazione alcuna. L'intuizione, comunque, ora deve portarci ad una descrizione dal contorno ben definito della situazione. Perché diciamo che questa successione genera numeri sempre più grandi senza alcuna *limitazione superiore?* Anche in questo caso, a pensar bene, potremmo fare quest'altra affermazione incontrovertibile: se una successione sta diventando grande senza limitazioni è perché, avendo pensato ad una "quantità" smisuratamente grande, allorora tra gli elementi di quella successione ci sono anche quantità maggiori di quella che noi avevamo pensato smisuratamente grande!. Anche in questo caso, dato che il pensiero nostro è libero di rappresentare quantità sempre più grandi, allora dire che la successione produce numeri sempre più grandi, significa che riusciremo sempre a trovare qualche elemento della successione che è maggiore del numero arbitrariamente grande che avevamo in mente. Se poi, dato un numero arbitrariamente grande, la successione diventa *definitivamente* maggiore di tale numero, allora diremo che essa **diverge,** od ancora che *tende all'infinito* [5].

Traduciamo, anche in questo caso, il tutto in linguaggio simbolico. Sia data una successione a_n ed una quantità arbitrariamente grande N, se $\exists\,\bar{n}$ tale per cui $\forall\, n > \bar{n}$ si abbia $a_n > N$ allora diciamo che la successione *diverge* all'infinito, oppure che è infinita e racchiudiamo tutta questa definizione in questa scrittura:

$$a_n \longrightarrow +\infty.$$

In breve una successione è infinita se definitivamente i suoi elementi diventano più grandi di una quantità arbitrariamente grande.

Osservazine: Non è il fine di questo piccolo lavoro descrivere completamente tutti i comportamenti possibili di una successione numerica: basti, per ora, sapere che oltre alla convergenza ad un numero (infinitesima se questo numero è zero) ed alla divergenza all'infinito positivo (od anche negativo, se la successione diventa più piccola, definitivamente, di un numero arbitrariamente grande in negativo), c'è anche la possibilità che il limite non esista affatto, poiché *definitivamente* la successione né diventa più grande/più piccola di un numero arbitrariamente grande in positivo/negativo, né si avvicina ad un valore ben determinato, a meno di una quantità arbitrariamente piccola [6].

L'infinito di Leopardi e l'infinito in Matematica Siamo giunti alla fine di questa breve lezione di introduzione al concetto di infinito e, come avevamo anticipato, faremo vedere che l'intuizione del Poeta è stata perfetta ed ha centrato in pieno il nucleo fondamentale della definizione di infinità. Quando il Leopardi parla della siepe, noi stiamo parlando di indice $\bar{n}$ che "dell'ultimo orizzonte il guardo esclude", ovvero limita la successione fino ad un certo punto, tagliando fuori *la coda* della successione. Quando parla di "spazi di là da quella", riferendosi alla siepe, sta parlando di quello che avviene oltre l'indice $\bar{n}$. L'idea di infinito, insomma, si delinea se noi fissiamo una barriera e riusciamo ad andare sempre oltre tale barriera: e questo lo si deve poter fare per qualsiasi posizione "arbitrariamente" lontana a cui si pone la barriera (siepe). Stiamo, in ultima analisi, dicendo che **definitivamente** riusciamo a superare la barriera imposta

[5] Bisogna però capire bene che **l'infinito non è un numero**, quindi dire che "tende" non significa che si avvicina ad una quantità ben definita, bensì che *sfugge* a qualsiasi controllo.

[6] Come si dice in gergo **non entra definitivamente in un intorno arbitrariamente piccolo di alcun numero.**

dalla siepe che, già di per sé, potrebbe essere posta molto lontana da noi! Ma anche l'infinitesimo è racchiuso nelle idee di Leopardi, infatti dire che si fissa una quantità arbitrariamente piccola, significa che noi vediamo una siepe che è vicinissima a noi (vicina tanto, ma non è dato sapere quanto vicina, dato che ha una distanza piccolissiama da noi "arbitrariamente"). Dire che la successione converge a zero, vuol fire che essa "sta sempre definitivamente al di qua" di tale siepe/barriera [7]. Insomma, tra la siepe e lo zero, si può sempre trovare tutta la successione tranne che per un numero finito di elementi (dal primo all'$\bar{n}-$esimo). D'altra parte la successione formata con i reciproci di una successione infinita è infinitesima e, viceversa, formando la successione con i reciproci di una successione infinitesima, si ottiene una successione infinita. Potremmo sintetizzare la situazione in queste due scritture, intendendo con q una *quantità* qualsiasi

$$q \to \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q} \to 0$$

ovvero

$$\frac{1}{q \to \infty} \to 0$$

e, viceversa

$$q \to 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{q} \to \infty$$

ovvero

$$\frac{1}{q \to 0} \to \infty.$$

Detto in termini molto laschi "l'inverso di zero è l'infinito e l'inverso dell'infinito è lo zero": chiaramente non stiamo dicendo che si possa fare davvero $\frac{1}{0}$, dato che la divisione per zero non si può fare, né tantomento $\frac{1}{\infty}$ dato che l'infinito nemmeno è un numero! Si deve intendere sempre tutto il discorso di applicazione di un *processo al limite*. Questo giustifica anche l'affermazione che l'infinito alla Leopardi parla sostanzialmente dei limiti per come concepiti e definiti, oggigiorno, in Matematica

[7] Mentre per il limite infinito "sta al di là", per come avevamo già chiarito.