Infinitesimi

Definizione. Una funzione f(x) si dice infinitesima per x → c, finito o infinito, se il limite della funzione, per x → c, è zero:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0$$

Si dice anche che f(x) è un infinitesimo per x → c.

Alcuni esempi di funzioni infinitesime sono le seguenti:

- La funzione f(x) = x, per x → 0, in quanto si ha:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to} x=0$$

- La funzione f(x) = x – 1, per x → 1, in quanto si ha:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(x-1)=1-1=0$$

- La funzione $f(x)=\sqrt{x}$, per x → 0, in quanto si ha:

$$\lim x\to 0 f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0$$

- La funzione $f(x)=1-\cos x$, per x → 0, in quanto si ha:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(1-\cos x)=1-1=0$$

- La funzione f(x) = 1/x, per x → ∞, in quanto si ha:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\infty}=0$$

Molto spesso, occorre confrontare due funzioni infinitesime per stabilire quale di esse tenda a zero più velocemente, e questa operazione si applica, di solito, calcolando il limite del rapporto di tali funzioni.

Consideriamo, per esempio, due funzioni infinitesime per x → c f(x) e g(x), e il loro rapporto f(x)/g(x); sappiamo che, per x → c, entrambe tendono a zero, quindi il limite del rapporto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

si presenta nella forma indeterminata [0/0].

Eliminando questa indeterminazione, e calcolando il valore del limite, possono presentarsi tre casi:

- Se il limite del rapporto è zero, cioè se si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

significa che la funzione f(x) tende a zero più velocemente di g(x), e pertanto f(x) viene definita infinitesimo di ordine superiore a g(x).

- Se il limite del rapporto è infinito, cioè se si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$$

significa che la funzione g(x) tende a zero più rapidamente di f(x), quindi f(x) viene definita **infinitesimo di ordine inferiore** a g(x), poiché tende a zero più lentamente.

- Se, invece, il limite del rapporto è un valore diverso da zero o da infinito, cioè se si ha:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=l,\ l\neq 0$$

si dice che f(x) e g(x) sono infinitesimi dello stesso ordine, in quanto, per $x \to c$, tendono a zero con la stessa rapidità.

- Nel caso in cui, invece, il limite del rapporto delle due funzioni non esiste si dice che gli infinitesimi non sono confrontabili.

Ordine di un infinitesimo

Consideriamo due funzioni f(x) e φ(x), entrambe infinitesime per $x \to c$. Se il limite del rapporto tra f(x) e la potenza n-esima di φ(x) è un valore diverso da zero, cioè se:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{[\phi(x)]^n}=l,\ l\neq 0$$

si dice che f(x) è un infinitesimo di ordine n ($n > 0$) rispetto a φ(x), assunto come infinitesimo campione, o principale.

Esempio: Uno dei limiti notevoli principali riguarda il coseno di un angolo, ed è il seguente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Se consideriamo il numeratore e il denominatore come due funzioni separate, possiamo considerare la funzione come rapporto di due funzioni infinitesime. Poiché al denominatore abbiamo x alla seconda, e il limite del rapporto tende al un valore finito diverso da zero, possiamo affermare che la funzione al numeratore, $f(x) = 1 - \cos x$, è un infinitesimo di ordine due.

Scrittura fuori dal segno di limite

Consideriamo una funzione $f(x)$ che, per $x \to c$, tende ad un valore l diverso da zero:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=l, l\neq 0$$

Possiamo dire, quindi, che la differenza tra la funzione stessa e il suo limite è una funzione infinitesima, poiché si ha:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=l \Rightarrow \lim_{x\to 0}[f(x)-l]=0$$

Se chiamiamo la funzione $\delta(x) = f(x) - l$, otteniamo la seguente relazione, che prende il nome di scrittura fuori al segno di limite:

$$f(x)=\delta(x)+l$$

Parte principale di un infinitesimo

Consideriamo una funzione $f(x)$ infinitesima di ordine n:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{[\phi(x)]^n}=l, l\neq 0$$

Come abbiamo visto in precedenza, possiamo scrivere la funzione $f(x)$ con la scrittura fuori dal segno di limite, cioè:

$$\phi(x)=\frac{f(x)}{[\phi(x)]^n}-l \Rightarrow f(x)=l\cdot[\phi(x)]^n+\delta(x)\cdot[\phi(x)]^n$$

La funzione $f(x)$ è stata riscritta come somma di due infinitesimi, che prendono il nome, rispettivamente, parte principale e parte complementare della funzione:

$$l\cdot[\phi(x)]^n \to \text{ parte principale}$$

$$\delta(x)\cdot[\phi(x)]^n \to \text{ parte principale}$$