5.3 Substitutionsregel, rationale Funktionen und uneigentliche Integrale

Zusammenfassung: *Aus der Kettenregel für das Differenzieren ergibt sich die Substitutionsregel fürs Integrieren, die hier auf etliche Beispiele angewendet wird. Ausserdem wird beschrieben, wie man für rationale Funktionen durch sukzessive Zerlegung in Partialbrüche elementare Stammfunktionen finden kann. Und schliesslich folgt noch der Begriff des uneigentlichen Integrals. In manchen Fällen ist es nämlich möglich, auch über Polstellen hinweg zu integrieren oder die Integrationsgrenzen nach unendlich auszudehnen.*

Die folgende Integrationsregel, die aus der Kettenregel folgt, wird sich als sehr nützlich erweisen:

5.3.1 Satz *(Substitutionsregel)* *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi\colon [r,s] \to [a,b]$ stetig differenzierbar mit $\varphi(r) = a$ und $\varphi(s) = b$. Dann gilt:*

$$\int_a^b f(u)du = \int_r^s f(\varphi(x))\varphi'(x)dx\,.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f. Dann folgt mit der Kettenregel

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad \text{für } x \in [r,s].$$

Also ist $F \circ \varphi$ eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ und daher gilt

$$\int_r^s f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x))|_r^s = F(\varphi(s)) - F(\varphi(r)) = F(b) - F(a)\,. \quad \text{q.e.d.}$$

Man kann sich die Substitutionsregel leichter merken, wenn man die Leibniznotation für Ableitungen verwendet. Setzen wir im Satz $u = \varphi(x)$ und schreiben $\varphi'(x) = \frac{du}{dx}$, dann lautet jetzt die Substitutionsregel:

$$\int_a^b f(u)du = \int_r^s f(\varphi(x))\frac{du}{dx}\,dx\,.$$

Noch kürzer dürfen wir schreiben:

$$du = \frac{du}{dx}\,dx\,.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$dx = \frac{dx}{du}\,du\,,$$

denn wir können ja umgekehrt in dem durch x ausgedrückten Integral $x = \varphi^{-1}(u)$ substituieren, und nach der Regel für die Ableitungen von Umkehrfunktionen ist

$$\frac{dx}{du} = (\varphi^{-1})'(u) = \frac{1}{\varphi'(x)} = \frac{1}{\frac{du}{dx}}\,.$$

5.3.2 BEISPIELE 1. Zur Bestimmung des Integrals $\int_{\frac{2}{3}}^{a}(2-3x)^4dx$ verwenden wir die Substitution $u=\varphi(x)=2-3x$. Hier ist $\frac{du}{dx}=-3$ und daher $du=-3\,dx$ oder $dx=-\frac{1}{3}\,du$. Also liefert die Substitutionsregel:

$$\int_{\frac{2}{3}}^{a}(2-3x)^4dx=-\frac{1}{3}\int_{0}^{2-3a}u^4\,du=-\frac{1}{15}(2-3a)^5\,.$$

2. Um das Integral $\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{2x-c}$ (für $c\notin[x_1,x_2]$) zu bestimmen, substitutieren wir $u=\varphi(x)=2x-c$. Dann ist $du=2\,dx$, und die Substitutionsregel liefert:

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{2x-c}=\frac{1}{2}\int_{2x_1-c}^{2x_2-c}\frac{du}{u}=\frac{1}{2}(\ln|2x-c|)\Big|_{x=x_1}^{x=x_2}.$$

3. Im folgenden Beispiel liefert die Substitution $u=\varphi(x)=x-1$ für $1\notin[x_1,x_2]$ das Resultat:

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{(x-1)^3}=\int_{x_1-1}^{x_2-1}\frac{du}{u^3}=\frac{-1}{2(x-1)^2}\Big|_{x=x_1}^{x=x_2}.$$

4. Mithilfe der Substitution $u=x^2+4$ und $du=2x\,dx$ findet man

$$\int_{0}^{c}\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx=\int_{4}^{c^2+4}\frac{du}{\sqrt{u}}=2\sqrt{c^2+4}-1\,.$$

5. Wir untersuchen jetzt das Integral $\int_{x_1}^{x_2}x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}dt$. Hier eignet sich die Substitution $u=\varphi(x)=\frac{1}{2}x^2$. Wegen $\varphi'(x)=x$ ist $du=x\,dx$ und es folgt

$$\int_{x_1}^{x_2}x\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\int_{\frac{1}{2}x_1^2}^{\frac{1}{2}x_2^2}e^{-u}du=e^{-\frac{1}{2}x_1^2}-e^{-\frac{1}{2}x_2^2}\,.$$

6. Ist $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar und hat g auf $[a,b]$ keine Nullstellen, so gilt:

$$\int_{a}^{b}\frac{g'(x)}{g(x)}\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)}\frac{du}{u}=\ln\frac{g(b)}{g(a)}\,.$$

Dies ergibt sich aus der Substitution $u=g(x)$. Wendet man dies Prinzip auf $g(x)=-\cos(x)$ an, so erhält man beispielsweise:

$$\int_{a}^{b}\tan(x)\,dx=-\int_{a}^{b}\frac{\sin(x)}{(-\cos(x))}dx=\ln\frac{\cos(a)}{\cos(b)}\,.$$

5.3.3 Beispiel Wir wollen jetzt die Fläche F eines Kreises von Radius r berechnen. Dazu wählen wir das Koordinatensystem so, dass der Nullpunkt der Mittelpunkt des vorgegebenen Kreises ist. Für die Punkte (x, y) auf der Kreislinie gilt $x^2 + y^2 = r^2$ und daher $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, falls $y \geq 0$. Also ist

$$F = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx\,.$$

Substituieren wir $\varphi(t) = -r\cos(t)$ für x, so liefert die Substitutionsregel wegen $\varphi'(t) = r\sin(t)$:

$$F = 2\int_0^{\pi} r^2 \sin^2(t)\, dt = r^2\pi\,.$$

Hier ist noch ein Beispiel, bei dem sowohl die Substitutionsregel als auch die partielle Integration zur Anwendung kommt.

5.3.4 Beispiel Um eine Stammfunktion für arctan zu finden, beginnen wir mit einer partiellen Integration und erhalten:

$$\int_a^b \arctan(x)\, dx = \int_a^b 1 \cdot \arctan(x)\, dx = -\int_a^b \frac{x}{1+x^2}\, dx \; + x\arctan(x)|_a^b\,.$$

Nun substituieren wir im Integral auf der rechten Seite der Gleichung $u = 1 + x^2$. Weil $\frac{du}{dx} = 2x$ ist, liefert dies das folgendes Resultat:

$$\int_a^b \arctan(x)\, dx = -\frac{1}{2}\int_{1+a^2}^{1+b^2} \frac{du}{u} \; + x\arctan(x)\Big|_a^b = (-\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + x\arctan(x))\Big|_a^b\,.$$

Zum Abschluss dieses Paragraphen wollen wir die Integration rationaler Funktionen kurz beschreiben. Wir halten fest:

5.3.5 Satz *Jede rationale Funktion f lässt sich elementar integrieren.*

Sei $f = \frac{p}{q}$ der Quotient von zwei Polynomen p und q. Wir können annehmen, dass q normiert ist, d.h. den Leitkoeffizient 1 hat. Falls $\operatorname{grad} q \leq \operatorname{grad} p$, so kann man durch Polynomdivision Polynome p_1 und p_2 finden, so dass $p = p_1 q + p_2$ und $\operatorname{grad} p_2 < q$, und erhält

$$f = \frac{p}{q} = p_1 + \frac{p_2}{q}\,.$$

Die Integration des Polynoms p_1 führt wieder auf ein Polynom, ist also unproblematisch. Deshalb betrachten wir jetzt nur noch rationale Funktionen, bei denen der Nennergrad echt grösser ist als der Zählergrad.

Die Strategie zur Bestimmung der Stammfunktion einer solchen rationalen Funktion besteht darin, sie zunächst aufzuspalten in eine Summe aus rationalen Funktionen mit einfacheren Nennern (den sogenannten Partialbrüchen) und diese wiederum nach eventueller weiterer Aufspaltung durch passende Substitutionen auf folgende drei Grundtypen zurückzuführen:

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u|\,, \quad \int \frac{du}{u^n} = \frac{-1}{(n-1)\,u^{n-1}} \text{ (für } n \in \mathbb{N}_{>1}), \quad \int \frac{du}{u^2+c^2} = \frac{1}{c}\arctan(\frac{u}{c})\,.$$

Hier zunächst drei Beispiele für Funktionen mit Nenner von Grad 2:

5.3.6 Beispiele 1. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+9} = \int \frac{dx}{(x-3)^2} = -\frac{1}{x-3} + K\,,$

2. Mit Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+2x-3} &= \int \frac{dx}{(x+3)(x-1)} = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+3} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} \\ &= \frac{1}{4}(\ln(|x-1|) - \ln(|x+3|)) + K = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{|x-1|}{|x+3|}\right) + K\,.\end{aligned}$$

3. Mit quadratischer Ergänzung:

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + K.$$

Die Partialbruchzerlegung wird im folgenden Satz präzisiert. Dabei verwendet man die Zerlegung des Nennerpolynoms in lineare bzw. quadratische Faktoren, die wir bereits im Zusammenhang mit Polynomen über komplexen Zahlen kennengelernt hatten.

5.3.7 Satz *Seien p, q Polynome,* $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q$. *Sei weiter*

$$q(x) = \prod_{j=1}^{n}(x-x_j)^{n_j} \cdot \prod_{k=1}^{m} q_k^{m_k}\,,$$

wobei $x_1, \ldots, x_n$ die verschiedenen reellen Nullstellen von q und q_k die verschiedenen normierten quadratischen Faktoren mit komplexen Nullstellen von q bezeichnen. Dann existieren Polynome p_j mit $\operatorname{grad} p_j < n_j$ *und $\tilde{p}_k$ mit* $\operatorname{grad}\tilde{p}_k < 2m_k$*, so dass*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{p(x)}{(x-x_j)^{n_j}} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\tilde{p}_k(x)}{q_k^{m_k}}\,.$$

Beweis. Diesen Satz kann man durch vollständige Induktion beweisen. Zeigen wir hier nur einen Spezialfall, nämlich die Abspaltung eines Summanden zugehörig zu einer einfachen Nullstelle x_1. Das heisst, wir nehmen an $q(x) = (x-x_1)q_1(x)$, wobei q_1 ein Polynom ist mit $q_1(x_1) \neq 0$. Jetzt machen wir den Ansatz:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x-x_1)q_1(x)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)}\,,$$

wobei A eine Zahl und p_1 ein noch zu bestimmendes Polynom ist mit $\operatorname{grad} p_1 < \operatorname{grad} q_1$. Der Ansatz ist erfüllt, wenn für alle x gilt:

$$Aq_1(x) + (x - x_1)p_1(x) = p(x)\,.$$

Setzen wir zunächst $x = x_1$ ein, erhalten wir $A = \frac{p(x_1)}{q(x_1)}$. Nun ist also A schon bestimmt. Ausserdem hat das Polynom $p(x) - Aq_1(x)$ eine Nullstelle bei $x = x_1$. Also ist es teilbar durch $(x - x_1)$, und das gesuchte Polynom p_1 findet man, indem man diese Polynomdivision ausführt. q.e.d.

5.3.8 Beispiel Sei $f(x) = \dfrac{x}{(x+2)^2(x+1)}$. Das Nennerpolynom hat also eine doppelte und eine einfache Nullstelle und der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet hier:

$$\frac{x}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}\,.$$

Diese Gleichung ist genau dann für alle $x \neq -1, -2$ erfüllt, wenn

$$x = A(x+2)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+1) =$$

$$(A+B)x^2 + (4A + 3B + C)x + (4A + 2B + C)\,.$$

Setzen wir $x = -1$ ein, finden wir $A = -1$. Setzen wir $x = -2$ ein, folgt $C = 2$. Und weil auf der linken Seite kein x^2-Term vorkommt, muss schliesslich $A + B = 0$ sein, d.h. $B = 1$. Nun können wir die Stammfunktion von f für $x \neq 1, -2$ ablesen:

$$\int f(x)\,dx = -\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x+2} + 2\int \frac{dx}{(x+2)^2} = \ln\frac{|x+2|}{|x+1|} - 2\frac{1}{x+2} + K\,.$$

Hier noch ein Beispiel für eine rationale Funktion mit quadratischem Nenner ohne reelle Nullstellen:

5.3.9 Beispiel Sei $f(x) = \dfrac{1-x}{x^2+x+1}$. Zur Substitution $u = x^2 + x + 1$ gehört $\frac{du}{dx} = 2x + 1$. Daher zerlegen wir f folgendermassen:

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2+x+1} = \frac{-1}{2}\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}\,.$$

Das erste Teilintegral können wir mithilfe der Substitution $u = x^2+x+1$ bestimmen:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln(|u|) + K = \ln(|x^2+x+1|) + K\,.$$

Das zweite Teilintegral finden wir unter den gerade behandelten Beispielen. Zusammen erhalten wir

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = -\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \sqrt{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + K\,.$$

In manchen Fällen ist es möglich, auch über Pole von Funktionen hinweg zu integrieren oder die Intervallgrenzen nach unendlich auszudehnen und doch einen endlichen Integralwert zu erhalten. Damit ist gemeint, dass einer der folgenden Grenzwerte existiert und endlich ist:

$$\int_a^\infty f(t)dt := \lim_{x\to\infty}\int_a^x f(t)dt \qquad \text{oder} \qquad \int_{-\infty}^b f(t)dt := \lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(t)dt$$

und falls f auf $[a,b)$ bzw. $(a,b]$ stetig, aber unbeschränkt ist:

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt \qquad \text{oder} \qquad \int_a^b f(t)dt := \lim_{x\to a}\int_x^b f(t)dt\,.$$

Diese Grenzwerte werden als *uneigentliche Integrale* bezeichnet. Dazu einige Beispiele:

- $\int_0^\infty e^{-t}dt = \lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}dt = \lim_{x\to\infty}(1-e^{-x}) = 1.$
- $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x}) = 1\,,$
  aber $\lim_{\epsilon\searrow 0}\int_\epsilon^1 \frac{1}{t^2}\,dt = (-1+\frac{1}{\epsilon}) = \infty$. Das entsprechende Integral existiert also nicht.
- Auch hier existiert das uneigentliche Integral nicht:
  $$\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to\infty}\ln(x) = \infty\,.$$
- $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{\epsilon\to 0} 2(1-\sqrt{\epsilon}) = 2\,.$
- Aber $\lim_{x\to 0}\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \infty.$
- Hier ein beidseitiger Grenzwert:
  $$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}(\arctan(R)-\arctan(-R)) = \pi\,.$$
- Zum Vergleich:
  $$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}(1-\frac{1}{1+R}) = 1\,.$$
  Aber über den Pol dieser Funktion bei -1 kann man nicht hinweg integrieren. Das Integral
  $$\int_{-1+\epsilon}^0 \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = (\frac{1}{\epsilon}-1)$$
  hat keinen endlichen Grenzwert für $\epsilon\to 0$.
- Ohne Beweis: Die Fläche unter der Gaussschen Glockenkurve beträgt:
  $$A = \int_{-\infty}^\infty \exp(-\frac{x^2}{2})\,dx = \sqrt{2\pi}\,.$$

5.4 Exkurs: Taylorentwicklung und Integration

Zusammenfassung: *Jede stetige Funktion ist Riemann-integrierbar, besitzt also eine Stammfunktion auf jedem abgeschlossenen Intervall im Definitionsbereich. Aber diese Stammfunktion braucht nicht elementar zu sein. Die Integranden* $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ *oder* $f(x) = e^{-x^2}$ *zum Beispiel haben keine elementaren Stammfunktionen. Man verwendet vielmehr das Integral, um damit neue Funktionen zu definieren. Die beiden genannten Funktionen lassen sich aber durch konvergente Potenzreihen darstellen, und diese Reihenentwicklung eröffnet eine andere explizite Beschreibung des Integrals durch summandenweise Integration.*

Hier zunächst einige Beispiele für solche Darstellungen von Funktionen durch Potenzreihen:

5.4.1 Beispiele

- Die Exponentialfunktion hat folgende Reihenentwicklung

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Genauer konvergiert die angegebene Reihe für jedes fest gewählte x gegen den Wert e^x. Bricht man die Reihe nach einer bestimmten Anzahl von Summanden ab, erhält man einen Näherungswert für e^x, und verwendet man genügend viele Summanden, kann man jede gewünschte Genauigkeit erreichen. Auf diese Weise ist die näherungweise Berechnung der Funktionswerte der Exponentialfunktion auf die Berechnung von Polynomen zurückgeführt.

- Die Reihenentwicklung der Sinusfunktion lautet:

$$\sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- Und hier ist noch die Reihenentwicklung des Cosinus:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

5.4.2 Satz *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine C^∞ Funktion und sei $x_0 \in I$ fest gewählt. Nehmen wir an, dass die Funktion f sich auf dem Intervall I durch eine konvergente Potenzreihe darstellen lässt, also*

$$f(x_0 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{für alle } x_0 + x \in I.$$

Dann sind die Koeffizienten der Reihe eindeutig bestimmt. Es gilt nämlich

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Man spricht hier von der Taylorentwicklung *der Funktion f um den Entwicklungspunkt x_0.*

Beweis. In den angegebenen Beispielen können wir leicht nachprüfen, dass die Koeffizienten a_n tatsächlich die behauptete Form haben. Gehen wir davon aus, dass man bei der Reihe Summation und Differentiation vertauschen darf, dann ergibt sich durch vollständige Induktion:

$$f^{(m)}(x_0 + x) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-m+1)\, x^{n-m}\,.$$

Setzen wir nun $x = 0$ ein, wird daraus $f^{(m)}(x_0) = a_m m!$, wie behauptet. Der subtile Punkt ist das Vertauschen von Ableiten und Grenzwertbildung der Reihe. Das ist hier erlaubt, weil die Konvergenz der Reihe sogar *gleichmässig* ist, also an benachbarten Stellen x vergleichbar schnell. Auf diese Konvergenzfragen werde ich im 3. Semester genauer eingehen. q.e.d.

5.4.3 Beispiel Die Taylorentwicklung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ lautet:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots \quad \text{für alle } |x| < 1\,.$$

Für $x > 1$ konvergiert diese Reihe nicht, $x = 1$ dagegen darf man noch einsetzen und erhält dann eine Reihenentwicklung für $\ln(2)$, nämlich:

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots\,.$$

Der folgende Satz beschreibt den Fehler, den man macht, wenn man eine Funktion durch ihr Taylorpolynom (bis zum Grad n) approximiert, durch das sogenannte *Taylorsche Restglied* (hier in Integralform).

5.4.4 Satz *Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ mindestens $(n+1)$-mal stetig differenzierbar und sei $x_0 \in I$ fest gewählt. Dann gilt für alle $x_0 + x \in I$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$:*

$$f(x_0 + x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, x^k + R_{n+1}(x)\,, \quad \text{wobei}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + t)\, dt\,.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über n. Für $n = 0$ ist zu zeigen:

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + \int_0^x f'(x_0 + t)\, dt = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0 + x} f'(s)\, ds\,.$$

Dies stimmt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Nehmen wir nun an, die Aussage sei für n gezeigt. Dann lautet also das Restglied

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(x_0+t)\,dt\,.$$

Mit partieller Integration wird daraus

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(x_0+t)\,dt - f^{(n+1)}(x_0+t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_{t=0}^{t=x} =$$

$$R_{n+2}(x) + f^{(n+1)}(x_0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,. \qquad \text{q.e.d.}$$

Wenn das Restglied auf dem ganzen Intervall für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert, dann wird also die Funktion f auf I durch seine Taylorreihe dargestellt. Das ist zum Beispiel bei der Exponentialfunktion der Fall.

5.4.5 Beispiel Für $f(x) = e^x$ und $x_0 = 0$ ist

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{1}{n!}\left|\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt\right| \le e^x\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Aber es gibt auch C^∞-Funktionen, die nicht durch ihre Taylorreihen dargestellt werden. Kommen wir nun wieder auf die eingangs genannten Funktionen zurück, die keine elementare Stammfunktion haben.

- Die Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ lässt sich stetig nach 0 fortsetzen durch den Wert 1, denn $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$. Ausserdem besitzt f eine Taylorentwicklung. Dazu brauchen wir nur die Sinusreihe einzusetzen:

  $$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \ldots\,.$$

  Wegen der angedeuteten gleichmässigen Konvergenz der Taylorreihe darf man bei der Integration die Grenzwertbildung der Reihe und die Integration miteinander vertauschen. Durch summandenweise Integration ergibt sich nun:

  $$\int_0^x f(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}\,dx = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!} =$$

  $$x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} \ldots\,.$$

- Die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ hat eine Taylorentwicklung, die sich durch Einsetzen in die Exponentialreihe ergibt, nämlich:

  $$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\,.$$

  Das Integral lautet also:

  $$\int_0^x e^{-x^2}\,dx = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}\,.$$