Aufgabenblatt 5

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei der folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Umkehrfunktion)* Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen f mit Definitionsbereich D den Wertebereich W und die Umkehrfunktion $g\colon W \to D$. Skizzieren Sie die jeweiligen Funktionsgraphen.

(a) $f(x) = \tan(\frac{x-\pi}{2})\,, \quad D = \{x \mid 0 < x < 2\pi\};$

(b) $f(x) = 5 - 2^{-x}\,, \quad D = \{x \mid x \geq 0\}.$ (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Grenzwerte von Funktionen)* Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sqrt{5}\,x^2 - 3}{4 + x^2}\,, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{3 - 2^x - 10^x}{1 + 10^x}\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}\,, \quad \lim_{x\to\infty} \arctan(\frac{x^2 - x^3 + 1}{x^2 + x})\,.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Modellierung)* Finden Sie jeweils eine elementare Funktion f, die zu den folgenden Vorgaben passt:

(a) $f\colon \mathbb{R}\setminus\{\pm 1\} \to \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ habe eine Nullstelle bei $x = 3$ und es gelte $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x\nearrow -1} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\searrow -1} f(x) = \infty$.

(b) f sei auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, streng monoton fallend für $x < 1$ und streng monoton steigend für $x > 1$, und der Wertebereich sei das halboffene Intervall $[0, 2[$.

(c) f sei definiert auf $[0, 1]$, habe dort 5 Nullstellen und der Wertebereich sei $[-3, 3]$.

(d) f sei definiert für $x \geq 0$, streng monoton fallend, $f(0) = 5$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$.

(4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Stetigkeit)* Können Sie die folgenden Funktionen jeweils an der Definitionslücke stetig fortsetzen? Falls ja, wie?

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{für } x < 1 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$, (b) $f(x) = \sin(\frac{1}{x^2})$ für $x \neq 0$)

(c) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ (für $x \neq 0$), (d) $f(x) = [2x] - x$ (für $-1 < x < 1$, $x \neq 0$).

(4 Punkte)

Aufgabe 5. *(Vergleichssatz)* Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Pythagoras:

$$1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2}, \quad \text{falls } |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Berechnen Sie nun den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$. (3 Punkte)

Und hier noch zwei Verständnisfragen zur Selbstkontrolle:

Frage 1. *(Grenzwerte von Funktionen)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Wenn eine Funktion an einer Stelle x_0 keinen Grenzwert hat, liegt dort eine Sprungstelle vor. ☐

(b) Wenn der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert an einer Stelle existieren und übereinstimmen, dann ist dies auch der beidseitige Grenzwert. ☐

(c) Es kann vorkommen, dass der rechtsseitige Grenzwert existiert, der linksseitige Grenzwert aber nicht. ☐

Frage 2. *(Rechnen mit unendlich)* Nehmen wir an, f, g sind Funktionen mit

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty.$$

Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Das Produkt $f \cdot g$ konvergiert gegen ∞ für $x \to \infty$. ☐

(b) Der Quotient f/g konvergiert gegen ∞ für $x \to \infty$. ☐

(c) $\lim_{x \to \infty}(f(x) - g(x)) = 0$. ☐

(d) Es kann vorkommen, dass der Quotient f/g gegen 0 konvergiert für $x \to \infty$. ☐

Abgabe der Aufgaben: Donnerstag, den 21. Oktober 2021, bis 12.30 Uhr als .pdf via ADAM bei Ihrem Tutor bzw. Ihrer Tutorin.