Kapitel 5

Integralrechnung

Der Ausgangspunkt für die Entwicklung der Integralrechnung ist das Problem der Berechnung krummlinig begrenzter Flächen. Bereits in der Antike gelang es Archimedes, den Flächeninhalt eines Kreises und den Flächeninhalt unter einem Parabelabschnitt mithilfe von Ausschöpfungen zu bestimmen. Seit der Antike haben sich viele Mathematiker (u.a. Kepler und Fermat) mit der Berechnung spezieller Flächeninhalte auseinandergesetzt. Im 17. Jahrhundert fanden dann G.W.Leibniz, I.Newton und Johann Bernoulli unabhängig voneinander heraus, dass man die Integration stetiger Funktionen als das Suchen einer Stammfunktion und damit als Umkehrung der Differentiation auffassen kann. Dadurch vereinfachte sich die Berechnung der bis dahin bekannten Flächeninhalte radikal und reduzierte sich auf die Anwendung einiger einfacher Regeln, und es entstand das Integralkalkül.

Dabei stand für Newton der Aspekt der Suche nach einer Stammfunktion im Vordergrund, während Leibniz das Integral primär als eine Approximation der Fläche unter einem Funktionsgraphen durch eine Summe über geeignete Rechtecke auffasste. Der Ansatz von Leibniz wurde im 19. Jahrhundert von Bernhard Riemann präzisiert. Wir werden hier den Integralbegriff vorstellen, wie er im 19. Jahrhundert von Bernhard Riemann definiert wurde.

5.1 Riemann-Integral

Zusammenfassung: *Wir definieren das Integral einer Funktion als Grenzwert von Riemannsummen. Handelt es sich um eine Funktion, die nur positive Werte annimmt, dann misst das Integral den Inhalt der Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse. Es gibt Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind. Ist aber eine Funktion auf einem Intervall $[a,b]$ bis auf endlich viele Sprungstellen stetig, so ist sie über $[a,b]$ integrierbar. Ändert man den Wert der Funktion an einer Stelle beliebig ab, bleibt das Integral trotzdem unverändert.*

Für die Definition des Integrals benötigen wir einige Vorbereitungen. Sei dazu $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine nach oben und unten beschränkte Funktion. Unter einer *Teilung* des Intervalls $[a,b]$ verstehen wir eine Menge von *Stützstellen*

$$T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a,b]\,,$$

wobei $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ und $n \in \mathbb{N}$ ist. Die *Feinheit* der Teilung T ist definiert als

$$||T|| := \max\{x_k - x_{k-1} \mid k = 1, \ldots, n\}\,.$$

Die *Riemann-Summe* von f zur Teilung T und den Messpunkten $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ lautet

$$R_T(f) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \,.$$

Hier werden (falls $f(\xi_k) \geq 0$) die Flächen der Rechtecke über den Teilintervallen $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ der Höhe $f(\xi_k)$ aufsummiert. Eigentlich müsste man die Wahl der Messpunkte mit in die Abkürzung $R_T(f)$ aufnehmen. Wir verzichten hier darauf, um die Notation möglichst einfach zu halten. Ist f stetig und wählt man als Messpunkte jeweils die Stellen ξ_k, an denen f sein Maximum (bzw. sein Minimum) auf I_k annimmt, so ist die zugehörige Riemann-Summe die *Obersumme* (bzw. die *Untersumme*) zur Teilung T.

Ist jetzt $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilungen mit $\lim_{n\to\infty} ||T_n|| = 0$, so würde man das Integral von f über $[a, b]$ gern als den Grenzwert der zugehörigen Riemann-Summen, also als

$$\lim_{n\to\infty} R_{T_n}(f)$$

definieren. Hier ergeben sich aber gleich zwei Fragen: Existiert dieser Grenzwert überhaupt? Und wenn ja, hängt der Grenzwert von der Wahl der Teilungen und der jeweiligen Messpunkte ab?

Um die Existenz und Eindeutigkeit sicherzustellen, muss man an die Funktion Bedingungen stellen. Dazu definieren wir die *Schwankungssumme* von f zur Teilung T als

$$D_T(f) := \sum_{k=1}^{n} \Delta(f)_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \text{Obersumme} - \text{Untersumme}\,,$$

wobei $\Delta(f)_k := \sup\{f(x) \mid x \in I_k\} - \inf\{f(x) \mid x \in I_k\}$ die grösste Schwankung von f auf dem Intervall I_k angibt. Die Schwankungssumme von T ist gerade die Differenz zwischen Ober- und Untersumme zur Teilung T. Wir können festhalten, dass die Schwankungssumme bei Verfeinerung der Teilung T höchstens kleiner, aber nie grösser wird.

5.1.1 Definition Eine beschränkte Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ heisst Riemann-integrierbar über $[a, b]$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Teilung T von $[a, b]$ gibt mit $D_T(f) \leq \epsilon$.

5.1.2 Satz *Ist f Riemann-integrierbar über $[a, b]$ und T_j eine Folge von Teilungen von $[a, b]$ mit $\lim_{j\to\infty} ||T_j|| = 0$, so existiert der Grenzwert $\lim_{j\to\infty} R_{T_j}(f)$ in $\mathbb{R}$ und ist unabhängig von der Wahl der Folge T_j und der Messpunkte. Man schreibt dann*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{j\to\infty} R_{T_j}(f)\,.$$

Diese Schreibweise geht auf Leibniz zurück, der damit an die Summation über Rechtecksflächen "infinitesimaler Breite" dx erinnern wollte.

Zur Berechnung des Integrals einer integrierbaren Funktion kommen also zum Beispiel Obersummen oder Untersummen in Frage, man könnte aber als Messpunkte auch jeweils die Mittelpunkte der Teilintervalle wählen. Entscheidend ist nur, dass die Feinheit der betrachteten Teilungen gegen Null konvergiert.

Wir halten zunächst fest, dass alle auf einem abgeschlossenen Intervall stetigen Funktionen dort auch Riemann-integrierbar sind. Dazu brauchen wir folgende Tatsache, die wir hier ohne Beweis angeben:

5.1.3 Satz *Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auf $[a,b]$ sogar gleichmässig stetig. Das heisst, zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass*

$$|x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall x, y \in [a,b]\,.$$

5.1.4 Satz *Jede auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ stetige Funktion ist über $[a,b]$ Riemann-integrierbar.*

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann setzen wir $\epsilon_0 := \frac{\epsilon}{b-a}$ und wählen $\delta > 0$ so dass $|f(x)-f(y)| < \epsilon_0$ für alle x, y mit $|x-y| < \delta$. Sei weiter $T = \{x_0, \ldots, x_n\}$ eine Teilung des Intervalls $[a,b]$ mit $||T|| < \delta$. Dann gilt $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ für alle k, und daher $\Delta(f)_k = \max\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\} - \min\{f(x) \mid x_{k-1} \le x \le x_k\} < \epsilon_0$. Daraus folgt für die Schwankungssumme $D_T(f) = \sum_{k=1}^n \Delta(f)_k (x_k - x_{k-1}) < \epsilon_0(b-a) = \epsilon$. Also erfüllt f die Definition der Riemann-Integrierbarkeit. q.e.d.

Es gibt aber auch Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind. Dazu hier ein Beispiel.

5.1.5 Beispiel Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Es gilt $f(x) = \lim_{k\to\infty}(\lim_{n\to\infty}(\cos(k!\,\pi\, x))^{2n})$ für alle x. Jedes Teilintervall von $[0,1]$ enthält sowohl rationale als auch irrationale Punkte, die als Messpunkte zur Auswahl stehen. Also beträgt die Schwankungssumme $D_T(f) = 1$ für jede Teilung T von $[0,1]$. Deshalb ist f nicht Riemann-integrierbar. Der Bereich, der zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse liegt, ist so ausgefranst, dass es uns in diesem Rahmen nicht gelingt, ihm einen sinnvollen Flächeninhalt zuzuordnen.

Nun wollen wir das Integral mithilfe von Riemannsummen in zwei Beispielen explizit berechnen.

5.1.6 Beispiele (1) Sei $a > 0$ fest gewählt und bezeichne f die Parabelfunktion auf $[0,a]$, gegeben durch $f(x) = x^2$. Die Parabelfunktion ist stetig und daher integrierbar. Zur Berechnung des Integrals wählen wir Teilungen in jeweils gleichbreite Abschnitte. Die Teilung T_n (für $n \in \mathbb{N}$) bestehe aus den Stützstellen

$$x_k := a \cdot \frac{k}{n} \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Im Intervall I_k wählen wir jeweils den rechten Randpunkt als Messpunkt. Dann lautet die dazugehörige Riemann-Summe:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a}{n} f(x_k) = \sum_{k=1}^n \frac{a}{n}(a\frac{k}{n})^2 = \frac{a^3}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{a^3}{n^3}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{a^3}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})\,.$$

Daraus ergibt sich

$$\int_0^a x^2 dx = \lim_{n\to\infty} R_{T_n}(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{a^3}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) = \frac{a^3}{3}\,.$$

(2) Betrachten wir nun die Hyperbelfunktion. Sei $a > 1$ fest gewählt. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in [1, a]$ ist ebenfalls stetig und daher integrierbar. Wir wollen zeigen:

$$\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \ln(a)\,.$$

Man kann diese Tatsache sogar als Definition des natürlichen Logarithmus verwenden, und so ist es auch historisch gewesen. Der Mathematiker Napier entdeckte bei dem Versuch, die Hyperbel zu integrieren, dass die Fläche unter der Hyperbel auf dem Abschnitt $[1, a]$ übereinstimmt mit der Fläche unter der Hyperbel auf dem Abschnitt $[c, ac]$ für alle $c > a$. (Die Streckung des Abschnitts $[1, a]$ auf der x-Achse wird wettgemacht durch die entsprechende Stauchung der Funktionswerte.) In Integralnotation heisst das:

$$\int_c^{ac} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^a \frac{1}{x}\,dx\,.$$

Denn ist $T = \{1, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Teilung von $[1, a]$, dann liefert Multiplikation mit dem Faktor c eine Teilung $cT = \{c, c \cdot x_1, \ldots, c \cdot x_n\}$ von $[c, ac]$. Die entsprechenden Riemann-Untersummen stimmen überein, denn: $R_{cT}(f) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{cx_k}(cx_k - cx_{k-1}) = R_T(f)$. Die Behauptung folgt jetzt durch Grenzübergang $||T|| \to 0$.

Die Beobachtung von Napier ist eigentlich nichts anderes als das Logarithmengesetz:

$$\ln(ac) - \ln(c) = \int_c^{ac} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \ln(a)\,.$$

Ausserdem gilt offenbar $\int_1^1 \frac{1}{x} = 0 = \ln(1)$. Durch diese Eigenschaften ist der natürliche Logarithmus bereits (bis auf Konstante) eindeutig festgelegt.

Jetzt wollen wir das Integral für $a > 1$ mithilfe von Riemannsummen explizit bestimmen. Dazu sei T_n die Teilung mit den Stützstellen $x_k = (\sqrt[n]{a})^k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Wählen wir als Messpunkte jeweils die Punkte x_{k-1}, so erhalten wir folgende Riemann-Obersumme:

$$R_{T_n}(f) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_{k-1}}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (\frac{x_k}{x_{k-1}} - 1) = n(\sqrt[n]{a} - 1)\,.$$

Nun ergibt sich aus der Stetigkeit der Funktion $g(x) = a^x$:

$$\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = g'(0) = \ln(a)\,.$$

Also ist wie behauptet:

$$\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = \ln(a)\,.$$

Wir halten nun einige wichtige Eigenschaften fest, die mehr oder weniger direkt aus den Definitionen folgen.

5.1.7 SATZ *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ Riemann-integrierbar. Dann sind auch $f+g$, $\lambda \cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ fest), $f \cdot g$ und $|f|$ Riemann-integrierbar. Ausserdem gelten die folgenden Aussagen:*

Linearität: $$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\,, \qquad \int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

Monotonie: *Aus $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ folgt* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$

Betragsregel: $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx\,.$$

Additivität der Intervalle: $$\int_a^t f(x)dx + \int_t^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \ \forall t \in (a,b)\,.$$

Man trifft deshalb auch die Vereinbarung $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Die Integrierbarkeit von $|f|$ folgt zum Beispiel daraus, dass $D_T(|f|) \le D_T(f)$ für alle Teilungen T von $[a,b]$. Und die Monotonie des Integrals ergibt sich daraus, dass $R_T(f) \le R_T(g)$ für jede Teilung T, falls $f(x) \le g(x)$ für alle x. Die übrigen Aussagen sind ähnlich einfach einzusehen. Nur die Integrierbarkeit von Produkten erfordert eine etwas längere Argumentation.

Nach Konstruktion misst das Integral über $[a,b]$ einer Funktion, deren Graph ganz oberhalb der x-Achse verläuft, den Inhalt der Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse über dem Abschnitt $[a,b]$. Bei einer beliebigen Funktion f gibt das Integral über $|f|$ die Gesamtfläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse an, also die Summe der Teilflächen oberhalb und unterhalb der x-Achse. Das Integral über f dagegen gibt die Differenz der Teilflächen oberhalb der x-Achse und unterhalb der x-Achse an. Ausserdem gilt:

Folgerung 1: *Ändert man den Funktionswert einer Riemann-integrierbaren Funktion an endlich vielen Stellen, so erhält man wieder eine Riemann-integrierbare Funktion, und der Wert des Integrals bleibt dabei unverändert.*

Beweis. Nehmen wir an, wir wollen den Wert der Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ an der Stelle $t \in (a,b)$ durch den Wert $f(t) + \lambda$ ersetzen ($\lambda \in \mathbb{R}$). Dann können wir die neue Funktion schreiben als $f + \lambda \cdot g$, wobei $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = t \\ 0 & \text{für } x \neq t \end{cases}$. Die Funktion g ist integrierbar auf $[a,b]$. Denn zu $\epsilon > 0$ können wir die Teilung $T = \{a, t-\frac{\epsilon}{2}, t+\frac{\epsilon}{2}, b\}$ wählen und erhalten $D_T(g) = \epsilon$. Für die zugehörigen Riemann-Summen gilt $R_T(g) \le \epsilon$, und deshalb $\int_a^b g(x)dx = 0$. Also ist auch die Funktion $f + \lambda \cdot g$ integrierbar, und $\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))dx = \int_a^b f(x)dx$. q.e.d.

Folgerung 2: *Sei $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine Teilung des Intervalls $[a,b]$. Ist die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf $[a,b]\setminus T$ stetig und existieren endliche rechts- und linksssei-*

tige Grenzwerte $\lim_{x \searrow x_k} f(x)$ *und* $\lim_{x \nearrow x_k} f(x)$ *für alle* k*, so ist* f *auf* $[a,b]$ *Riemann-integrierbar.*

Beweis. Wir betrachten die Funktion f auf den Teilintervallen $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Auf dem Inneren von I_k ist f stetig, und aufgrund der Voraussetzung über das Verhalten am Rand können wir f stetig auf die Randpunkte fortsetzen und die resultierende Funktion f_k über I_k integrieren. Da es für das Integral auf die Funktionswerte an den Randpunkten nicht ankommt, ist auch f auf I_k integrierbar. Mit der Additivität der Intervalle folgt jetzt die Behauptung. q.e.d.

5.1.8 Beispiele Zur Ergänzung noch zwei weitere Beispiele:

1. Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ ist auf dem Abschnitt $[0,1]$ nicht integrierbar, denn
$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \searrow 0} (\ln(1) - \ln(\epsilon)) = \infty\,.$$
Hier sind die Voraussetzungen von Folgerung 2 nicht erfüllt, $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty$.

2. Die Funktion $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ dagegen ist auf dem Abschnitt $[0, 1/\pi]$ integrierbar. Das Integral von f über $[\epsilon, 1/\pi]$ existiert, weil f dort stetig ist. Und $\int_0^\epsilon \sin(1/x)\,dx < 2\epsilon$ für alle $0 < \epsilon < 1/\pi$, weil der Sinus nur Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt und wir also den Graphen von f in ein Rechteck der Breite ϵ und der Höhe 2 einschliessen können. Lässt man nun ϵ gegen Null geht, erhält man die Behauptung.

5.2 Stammfunktionen und partielle Integration

Zusammenfassung: *Unter einer Stammfunktion einer stetigen Funktion* f *versteht man eine differenzierbare Funktion* F *mit* $F' = f$*. Betrachtet man das Integral von* f *als Funktion der oberen Grenze, erhält man eine Stammfunktion von* f*. Umgekehrt kann man das Integral von* f *über ein Intervall berechnen, indem man die Intervallgrenzen in eine Stammfunktion von* f *einsetzt und die Werte voneinander abzieht. Also ist das Integrieren in gewissem Sinne eine Umkehrung des Differenzierens. Wenn man die Produktregel für Ableitungen auf Stammfunktionen anwendet, findet man eine Regel für das Integrieren, die als partielle Integrationsregel bezeichnet wird. Wir illustrieren diese Regel hier anhand einiger Beispiele.*

Bevor wir zur Hauptaussage über Stammfunktionen kommen, formulieren wir hier zur Beweisvorbereitung den Mittelwertsatz der Integralrechnung:

5.2.1 Satz *Ist* f *stetig auf* $[a,b]$*, dann ist* $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = f(\tau)$ *für ein passendes* $\tau \in [a,b]$.

Beweis. Bezeichne m den minimalen und M den maximalen Wert, den f auf $[a,b]$ annimmt. Dann ist $m \le f(x) \le M$ für alle $x \in [a,b]$. Daraus folgt mit der Monotonie des Integrals

$$m \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M \cdot (b-a)\,.$$

Also ist $\eta := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ ein Wert zwischen m und M, und nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\tau \in [a,b]$ mit $f(\tau) = \eta$. q.e.d.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung lautet folgendermassen:

5.2.2 Satz *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion U, definiert durch*

$$U(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (\text{für alle } x \in [a,b])$$

eine Stammfunktion von f, das heisst $U' = f$. Ist umgekehrt F eine Stammfunktion von f, also $F' = f$, so gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)\,.$$

Man verwendet für das Einsetzen der Grenzen in die Stammfunktion auch die Notation:

$$F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a)\,.$$

Die Menge aller Stammfunktionen von f wird als das unbestimmte Integral *von f bezeichnet, und man schreibt dafür*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,.$$

Beweis. Sei zunächst $h > 0$. Dann ist

$$\frac{U(x+h)-U(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\tau_h)$$

für ein $\tau_h \in [x, x+h]$ (nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung). Da f stetig ist, folgt weiter $\lim_{h\to 0, h>0} f(\tau_h) = f(x)$. Entsprechendes gilt für $h < 0$. Dies zeigt, dass $U'(x) = f(x)$ für alle x.

Sei jetzt F eine weitere Stammfunktion von f. Dann ist $(F-U)' = 0$ und daher $F - U$ konstant. Es gibt also eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = U(x) + C$ für alle x. Also folgt $F(b) - F(a) = U(b) - U(a) = \int_a^b f(t)dt$. q.e.d.

Hier nun zwei Beispiele zur Flächenberechnung mithilfe von Stammfunktionen.

5.2.3 Beispiel Für die von den Graphen von $g(x) = 3x$ und $f(x) = x(x^2-1)$ (für $-2 \le x \le 2$) umschlossene Fläche A gilt:

$$A = \int_{-2}^0 (f(x) - g(x))\,dx + \int_0^2 (g(x) - f(x))\,dx\,,$$

wie man aus einer Skizze sieht. Weil f und g zwei gerade Funktionen sind, stimmen die beiden Teilflächen überein und wir erhalten:

$$A = 2\int_0^2 (g(x)-f(x))\,dx = 2\int_0^2 (3x - x^3 + x)\,dx = [4x^2 - x^4/2]\Big|_0^2 = 8\,.$$

5.2.4 Beispiel Die Funktionsgraphen von $f(x) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}(x-1)^2$ und $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$ schneiden sich bei $x = \pm 2$. Die dazwischen liegende, von den Graphen umschlossene Fläche können wir folgendermassen berechnen:

$$\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-2}^{2} [\frac{5}{4} - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{x^{1/3}}{\sqrt[3]{2}}]\, dx = [-\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + x - \frac{3x^{4/3}}{4\sqrt[3]{2}}]\Big|_{-2}^{2} = \frac{8}{3}.$$

Hier ist eine Zusammenstellung einiger wichtiger Stammfunktionen.

$f(x)$	$F(x) = \int f(x)\, dx$
$x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x \neq 0$	$\frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1}$
$e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{\lambda}\, e^{\lambda x}$
$\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$	$\ln(\lvert x \rvert)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}, \quad \cos(x) \neq 0$	$\tan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \lvert x \rvert < 1$	$\arcsin(x)$
$\frac{1}{c+x^2}, \quad c > 0$	$\frac{1}{\sqrt{c}} \arctan(\frac{x}{\sqrt{c}})$
$\frac{1}{1-x^2}, \quad x^2 \neq 1$	$\frac{1}{2} \ln \frac{\lvert 1+x \rvert}{\lvert 1-x \rvert}$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

Es gibt auch elementare Funktionen, die keine elementare Stammfunktion besitzen. In diesem Fall liefern die Integrale neue Funktionen. Hier einige Beispiele:

5.2.5 Beispiele

- Die Funktion $\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ nennt man Integralsinus.
- Die Funktion $\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\, dt$ wird Integralexponentialfunktion genannt.
- Die Funktion $\mathrm{Li}_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt$ für $-\infty < x < 1$ heisst Dilogarithmus.

Aus den Rechenregeln für das Differenzieren ergeben sich weitere Regeln für das Integrieren. Hier ist die Folgerung aus der Produktregel:

5.2.6 Satz *(Regel der partiellen Integration)* *Für $f, g \in C^1[a,b]$ gilt:*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = -\int_a^b f'(x)g(x)dx + f(x)g(x)\Big|_a^b .$$

Dabei ist $f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Beweis. Nach der Produktregel für Ableitungen gilt: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$. Das heisst, $f \cdot g$ ist eine Stammfunktion für $f'g + fg'$. Daraus folgt:

$$\int_a^b (f'g + fg')(x)\, dx = f(x)g(x)|_a^b .$$

Durch Umformung ergibt sich daraus die Behauptung. q.e.d.

5.2.7 Beispiele 1. $\displaystyle\int_a^b x^2 \cdot e^{3x}\, dx = -\frac{2}{3}\int_a^b x \cdot e^{3x}\, dx + \frac{1}{3}x^2 e^{3x}|_a^b = \frac{2}{9}\int_a^b e^{3x}\, dx - \frac{2}{9}xe^{3x}|_a^b + \frac{1}{3}x^2 e^{3x}|_a^b$.
Also ist $F(x) = (\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27})e^{3x}$ eine Stammfunktion für $f(x) = x^2 e^{3x}$.

2. Für $0 < a < b$:

$$\int_a^b \ln(x)\, dx = \int_a^b 1 \cdot \ln(x)\, dx = -\int_a^b x \cdot \frac{1}{x} dx + x\ln(x)|_a^b = x(\ln(x) - 1)|_a^b .$$

3. $\displaystyle\int_a^b \sin^2(x)\, dx = -\int_a^b \cos(x)(-\cos(x))\, dx - \sin(x)\cos(x)|_a^b$.
Wegen $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ folgt hieraus:

$$\int_a^b \sin^2(x)\, dx = \frac{1}{2}(x - \cos(x)\sin(x))|_a^b .$$

Insbesondere ist also:

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\, dx = \frac{\pi}{2} .$$

4. Für $f(x) = \arctan(x)$ und $g(x) = \frac{1}{2}(x^2+1)$ erhält man:

$$\int_0^c x \cdot \arctan(x)\, dx = -\int_0^c \frac{x^2+1}{2(x^2+1)}\, dx + \frac{1}{2}(x^2+1)\arctan(x)|_0^c .$$

Nun folgt:

$$\int_0^c x \cdot \arctan(x)\, dx = -\frac{c}{2} + \frac{1}{2}(c^2+1)\arctan(c) .$$