4.2 Lokale Extrema und Mittelwertsatz

Zusammenfassung: *Mithilfe der Ableitung lässt sich der Verlauf einer Funktion gut analysieren. Wir formulieren ein Kriterium zur Bestimmung lokaler Extrema oder Sattelpunkte und wenden dies auf einige Beispiele an.*

In diesem Kapitel bezeichne f stets eine reellwertige Funktion, definiert auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Unter einem lokalen Extremum von f versteht man folgendes:

4.2.1 Definition Man sagt, f habe an der Stelle $x_0 \in (a, b)$ ein *lokales Maximum*, falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Entsprechend liegt in $x_0 \in (a, b)$ ein *lokales Minimum* vor, falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Gilt sogar die Ungleichung $f(x_0) > f(x)$ für alle x mit $0 < |x - x_0| < \delta$, dann spricht man von einem *isolierten lokalen Maximum*. Ein *isoliertes lokales Minimum* ist entsprechend definiert.

4.2.2 Satz *Hat f in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum und ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, so gilt:*

$$f'(x_0) = 0\,.$$

Man nennt die Nullstellen der Ableitung von f auch die kritischen Stellen von f.

Beweis. Nehmen wir zunächst an, f habe in x_0 ein lokales Maximum, und $\delta > 0$ sei so gewählt, dass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Für $x < x_0$ gilt dann $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ und für $x > x_0$ gilt $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0\,.$

Zusammen folgt $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0\,.$ q.e.d.

4.2.3 Beispiele

- Das Polynom $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ hat die kritischen Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Denn $p'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. An der Stelle x_1 hat p ein isoliertes lokales Maximum und bei x_2 hat p ein isoliertes lokales Minimum.
- Hier ist eine differenzierbare Funktion, die auf einem ganzen Intervall ihr Minimum annimmt, aber nicht überall konstant ist:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}\,.$$

Die kritischen Stellen dieser Funktion liegen nicht isoliert, sondern sie bilden ein Intervall, nämlich das Intervall $[0, 1]$.

- Schliesslich kann es auch vorkommen, dass die kritischen Stellen zwar kein Intervall bilden, sich aber an einer Stelle häufen, wie im folgenden Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

  Die Funktion f ist auch bei $x = 0$ differenzierbar und $f'(0) = 0$. Ausserdem hat die Ableitung f' unendlich viele weitere Nullstellen, die sich bei $x = 0$ häufen.

4.2.4 Satz *(von Rolle) Sei jetzt f auf $[a, b]$ differenzierbar und seien $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann existiert ein $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit $f'(x_0) = 0$. Das heisst also insbesondere: zwischen je zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion liegt mindestens eine kritische Stelle.*

Beweis. Ist f auf $[x_1, x_2]$ konstant, so ist $f'(x) = 0$ für alle x und daher nichts zu zeigen. Nehmen wir jetzt an, f sei nicht konstant. Dann über- oder unterschreiten die Funktionswerte auf $[x_1, x_2]$ den Wert $f(x_1) = f(x_2) = c$. Weil f stetig ist, nimmt f auf $[x_1, x_2]$ sowohl Maximum als auch Minimum an, und mindestens eine dieser Stellen muss von x_1 und x_2 verschieden sein. Also hat f zwischen x_1 und x_2 mindestens ein lokales Extremum und damit auch eine kritische Stelle. q.e.d.

Hier eine erste Anwendung dieses Satzes.

4.2.5 Beispiel Das Polynom $f(x) = x^5 - 5x + 1$ hat höchstens drei reelle Nullstellen. Denn $f'(x) = 5x^4 - 5 = 0$ genau dann, wenn $x^4 = 1$. Das Polynom f hat also in $\mathbb{R}$ die kritischen Stellen $x = \pm 1$. Da zwischen je zwei Nullstellen mindestens eine kritische Stelle liegt, kann es insgesamt höchstens drei reelle Nullstellen geben.

Nun eine allgemeinere Schlussfolgerung aus dem Satz von Rolle.

4.2.6 Folgerung **(Mittelwertsatz)** *Sei f auf $[a, b]$ differenzierbar und seien $x_1 < x_2 \in [a, b]$. Dann existiert ein $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit*

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} .$$

Mit anderen Worten: Es gibt eine Stelle x_0 zwischen x_1 und x_2, an der die Tangente an den Graphen von f parallel ist zu der Sekante durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$.

Beweis. Der Mittelwertsatz folgt durch Anwendung des Satzes von Rolle auf die Funktion g auf $[a, b]$, definiert durch

$$g(x) := f(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) .$$

q.e.d.

Daraus können wir folgendes schliessen:

4.2.7 Bemerkung *Sei wiederum f auf $I = [a, b]$ differenzierbar. Dann gilt:*

- *Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f auf I streng monoton wachsend.*
- *Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist f auf I konstant.*
- *Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f auf I streng monoton fallend.*

Aus dieser Beobachtung ergeben sich folgende Kriterien für die Bestimmung lokaler Extrema einer vorgelegten Funktion.

4.2.8 Satz *Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, und $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) = 0$.*

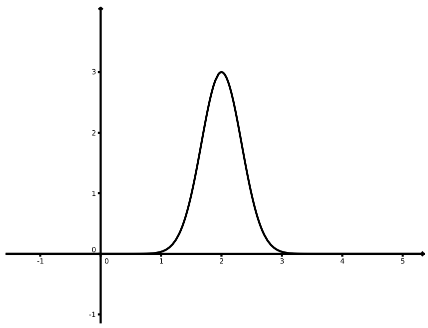
- *Wechselt f' bei x_0 das Vorzeichen von $-$ nach $+$, das heisst, ist $f'(x) < 0 < f'(y)$ für alle $x < x_0 < y$, die nahe genug bei x_0 liegen, dann hat f an der Stelle x_0 ein isoliertes lokales Minimum.*
- *Wechselt f' bei x_0 das Vorzeichen von $+$ nach $-$, das heisst, ist $f'(x) > 0 > f'(y)$ für alle $x < x_0 < y$, die nahe genug bei x_0 liegen, dann hat f an der Stelle x_0 ein isoliertes lokales Maximum.*
- *Wechselt f' bei x_0 das Vorzeichen nicht und ist $f'(x) \cdot f'(y) > 0$ für alle $x < x_0 < y$, die nahe genug bei x_0 liegen, dann hat f an der Stelle x_0 einen Sattelpunkt.*

Wir wenden dies nun an, um den qualitativen Verlauf einiger Funktionen zu bestimmen, also *Kurvendiskussionen* zu machen.

4.2.9 Beispiel Seien $x_0, \sigma > 0$ vorgegeben. Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

ist eine Modifikation der Gaussschen Glockenkurve. Sie beschreibt eine sogenannte *Normalverteilung* und wird in der Statistik häufig verwendet.

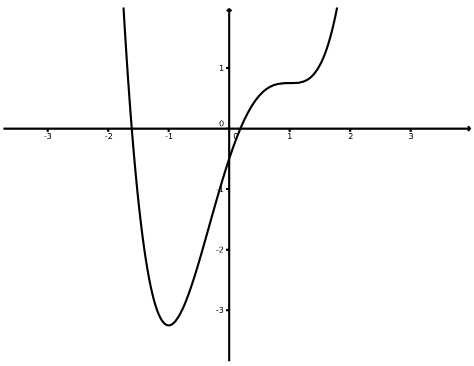


Mit der Kettenregel ergibt sich $f'(x) = -\frac{(x - x_0)}{\sigma^3} \exp(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2})$. Da die Werte der Exponentialfunktion stets positiv sind, folgt $f'(x) > 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) < 0$ für $x > x_0$. Also ist f auf dem Bereich $(-\infty, x_0]$ streng monoton wachsend und auf $[x_0, \infty)$ streng monoton fallend. An der Stelle $x = x_0$ hat f sein Maximum. Zugleich ist dies die einzige kritische Stelle von f, denn f' hat nur eine Nullstelle. Ausserdem ist $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$, die x-Achse ist also eine Asymptote des Graphen.

4.2.10 Beispiel Betrachten wir jetzt das Polynom vierten Grades, definiert durch

$$p(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

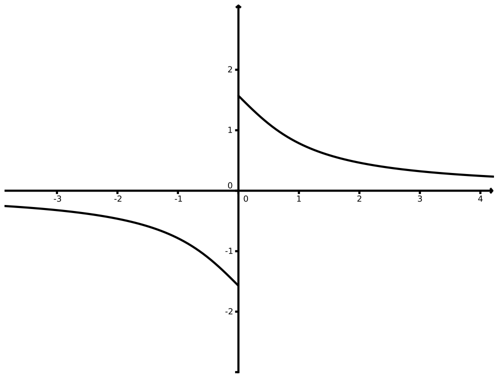
Hier ist $p'(x) = 3(x-1)^2(x+1)$. Die Nullstellen der Ableitung sind also $x = \pm 1$, und $p'(x) \geq 0$ für alle $x > -1$ und $p'(x) < 0$ für $x < -1$. Das bedeutet, dass die Funktion auf dem Bereich $(-\infty, -1]$ monoton fallend ist, und auf dem Bereich $[-1, \infty)$ monoton steigend. Bei $x = -1$ liegt also ein (sogar absolutes) Minimum vor, der Funktionswert ist $p(-1) = -13/4$. Bei $x = 1$ haben wir einen Sattelpunkt, weil p' dort nicht das Vorzeichen wechselt, der Funktionswert ist hier $p(1) = 3/4$. Ausserdem ist $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4(\frac{3}{4} - \frac{1}{x} - \frac{3}{2}\frac{1}{x^2} + 3\frac{1}{x^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^4}) = \infty$. Mit diesen Angaben können wir nun den Funktionsgraphen skizzieren.



4.2.11 Beispiel Sei $f(x) = \arctan(1/x)$ für $x \neq 0$. Hier ist $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \neq 0 \; \forall x$, es gibt also keine lokalen Extrema. Die Ableitung ist stets negativ, also ist f sowohl im Bereich $x < 0$ also auch im Bereich $x > 0$ streng monoton fallend. Die Grenzwerte sind

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x\nearrow 0} f(x) = -\frac{\pi}{2}\,, \quad \lim_{x\searrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}\,, \quad \lim_{x\to 0} f'(x) = -1\,.$$

Also hat f keine stetige Fortsetzung nach $x = 0$, obwohl die Ableitung sich fortsetzen liesse.



4.3 Höhere Ableitungen, Konvexität, Newtonverfahren

Zusammenfassung: *Die zweite Ableitung kann man verwenden, um das Kriterium zur Bestimmung lokaler Extrema neu zu formulieren. Ausserdem gibt die zweite Ableitung einer Funktion Auskunft über die lokale Krümmung des Funktionsgraphen. Schliesslich stellen wir das Newtonverfahren vor. Dabei handelt es sich um einen Algorithmus zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen differenzierbarer Funktionen.*

Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf einem Intervall I, so erhalten wir eine neue Funktion auf I, nämlich f'. Ist f' an der Stelle $x_0 \in I$ wiederum differenzierbar, so sagt man, f sei in x_0 *zweimal differenzierbar* und schreibt

$$f''(x_0) = \frac{d}{dx} f'(x_0)\,.$$

Existiert die zweite Ableitung in jedem Punkt von I, heisst f zweimal differenzierbar. Entsprechend definiert man durch Iteration die n-te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$) und notiert dafür

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} f(x_0)\,.$$

Folgende Bezeichnungen sind gebräuchlich und gelegentlich nützlich:

$$C^n(I) := \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \text{ } n\text{-mal differenzierbar und } f^{(n)} \text{ stetig auf } I\}$$

Das folgende Symbol schliesslich bezeichnet die beliebig oft differenzierbaren Funktionen

$$C^\infty(I) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(I) = \{f\colon I \to \mathbb{R} \mid f \in C^n(I) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Zu den C^∞-Funktionen gehören zum Beispiel die Polynome, die Exponentialfunktion, die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus und Produkte dieser Funktionen. Es gibt aber auch differenzierbare Funktionen, deren Ableitung nicht mehr überall differenzierbar ist. Hierzu einige Beispiele:

- Die Betragsfunktion ist stetig, aber nicht differenzierbar an der Stelle $x = 0$. Also liegt sie in $C^0(\mathbb{R})$, aber nicht in $C^1(\mathbb{R})$.

- Die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ x^3 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ ist überall differenzierbar, auch bei $x = 0$. Die Ableitung von f lautet $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \geq 0 \\ 3x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$. Allerdings hat die Funktion f' nun eine Knickstelle bei $x = 0$ und ist deshalb dort nicht differenzierbar, denn $\lim_{x\nearrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \neq 2 = \lim_{x\searrow 0} \frac{2x}{x}$. Also liegt die Funktion f in $C^1(\mathbb{R})$, aber nicht in $C^2(\mathbb{R})$.

- Die folgende schon mehrfach erwähnte Funktion liefert ein Beispiel dafür, dass die Ableitung einer differenzierbaren Funktion nicht überall stetig zu sein braucht. Sei nämlich $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ ergibt sich die Ableitung aus Produkt- und Kettenregel als $f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$. Für $x = 0$ können wir die Regeln nicht anwenden, sondern müssen auf den Differenzenquotienten zurückgreifen:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0\,.$$

Dies folgt aus dem Vergleichssatz, da $0 \leq |x \cdot \sin(\frac{1}{x})| \leq x$ für alle $x > 0$. Also ist f überall differenzierbar. Aber die Ableitung f' ist an der Stelle $x = 0$ nicht stetig, denn der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f'(x)$ existiert nicht, weil $\lim_{x\to 0}\cos(\frac{1}{x})$ nicht existiert.

Die zweite Ableitung kann bei Kurvendiskussionen hilfreich sein.

4.3.1 Satz *Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) = 0$.*

- *Ist $f''(x_0) < 0$, so hat f bei x_0 ein isoliertes lokales Maximum.*
- *Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f bei x_0 ein isoliertes lokales Minimum.*
- *Ist $f''(x_0) = 0$ und ist $f'(x)$ in der Nähe von x_0 immer positiv (oder immer negativ), dann hat f bei x_0 einen Sattelpunkt.*

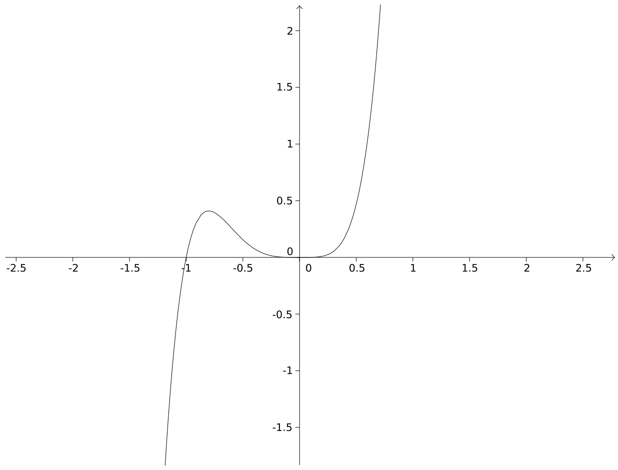
Beweis. Wir begründen nur die zweite Behauptung: Weil f'' nach Voraussetzung stetig ist und $f''(x_0) > 0$, muss auch $f''(x) > 0$ sein für alle x nahe genug bei x_0. Denn nach dem ϵ-δ-Kriterium der Stetigkeit 2.4.2, gibt es zu $\epsilon = \frac{1}{2}|f''(x_0)|$ ein $\delta > 0$, so dass $|f''(x) - f''(x_0)| < \epsilon = \frac{1}{2}|f''(x_0)|$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Und daraus folgt

$$f''(x) > f''(x_0) - \frac{1}{2}|f''(x_0)| = \frac{1}{2}f''(x_0) > 0\,.$$

Also ist f' auf dem Abschnitt $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ streng monoton steigend, wechselt also bei der Nullstelle x_0 das Vorzeichen, und zwar von $-$ nach $+$. Nach Satz 4.2.8 hat f also bei x_0 ein isoliertes lokales Minimum. q.e.d.

Bei der Beurteilung von Punkten mit $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ ist Vorsicht geboten. Diese Stellen sind nicht unbedingt immer Sattelpunkte. Dazu ein Beispiel:

4.3.2 Beispiel Die Funktion $f(x) = 5x^4(x+1)$ hat die Ableitung $f'(x) = 25x^4 + 20x^3 = x^3(25x+20)$ und $f''(x) = 100x^3 + 60x^2$. Die kritischen Punkte von f sind also $x_1 = 0$ und $x_2 = -4/5$. Es gilt $f'(0) = 0 = f''(0)$. Aber es handelt sich bei $x_1 = 0$ nicht um einen Sattelpunkt, sondern um ein lokales Minimum, denn f' wechselt an dieser Stelle das Vorzeichen von $-$ nach $+$. An der Stelle x_2 ist $f''(-4/5) = -20(4/5)^2 < 0$. Dort liegt also ein lokales Maximum vor.

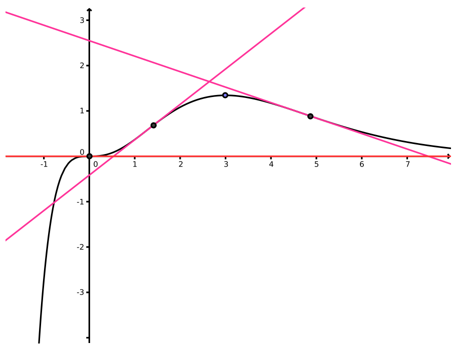


4.3.3 Bemerkung *Hat f'' an der Stelle x_0 eine isolierte Nullstelle und wechselt f'' bei x_0 das Vorzeichen, dann wechselt der Graph an der Stelle x_0 von einer Seite der Tangenten auf die andere. Deshalb werden diese Punkte auch als die Wendepunkte von f bezeichnet. Zur Begründung kommen wir später (siehe 4.3.8).*

4.3.4 Beispiel Sei
$$f(x) = x^3 e^{-x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$
Diese Funktion hat nur eine Nullstelle bei $x = 0$. Es ist

$$f'(x) = (3x^2 - x^3)e^{-x} = (3 - x)x^2 e^{-x} \quad \text{und} \quad f''(x) = (6x - 6x^2 + x^3)e^{-x}\,.$$

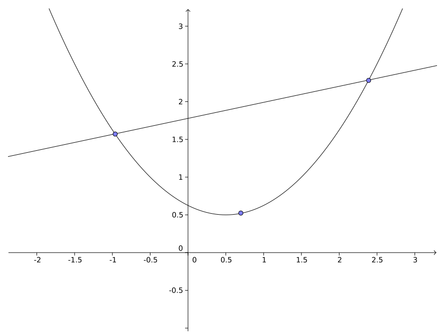
Also hat f' die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$. Weil $f''(0) = 0$ ist und $f'(x) > 0$ für kleine $x \neq 0$, liegt bei $x_1 = 0$ ein Sattelpunkt vor. Weiter ist $f''(3) = -9e^{-3} < 0$, also hat f bei $x_2 = 3$ ein isoliertes lokales Maximum.



Die zweite Ableitung hat die drei Nullstellen $x = 0$ und $x = 3 \pm \sqrt{3}$. Weil hier jeweils f'' das Vorzeichen wechselt, handelt es bei allen drei Stellen um Wendepunkte. Schliesslich gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ (nach der l'Hospitalschen Regel), und $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} -x^3 e^x = -\infty$.

Aus dem Vorzeichen der zweiten Ableitung können wir Rückschlüsse darüber ziehen, ob der Graph der Funktion in einem bestimmten Abschnitt nach oben oder unten gewölbt ist.

4.3.5 Definition Eine Funktion f, definiert auf einem Intervall I, heisst *konvex* (bzw. *konkav*), wenn für jede Wahl von $x_1 < x_2 < x_3 \in I$ der Punkt $(x_2, f(x_2))$ des Funktionsgraphen unterhalb (bzw. oberhalb) der Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_3, f(x_3))$ liegt.

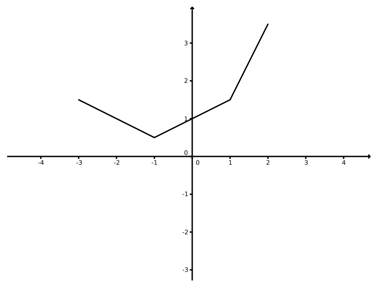


Das heisst:

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}\,(x - x_1)\,.$$

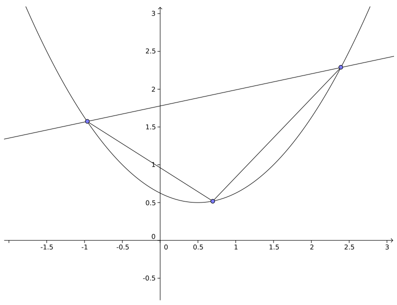
Es ist auch erlaubt, dass der Graph stückweise mit der Sekanten übereinstimmt. Liegt aber der Graph jeweils echt unterhalb (bzw. oberhalb) der Sekanten, nennt man die Funktion *strikt* konvex (bzw. *strikt* konkav). Ist f differenzierbar, so kann man dies auch so ausdrücken, dass der Graph von f echt oberhalb (bzw. unterhalb) jeder Tangenten an den Graphen liegt.

4.3.6 Beispiel Die Funktion, definiert durch $f(x) = \begin{cases} -x/2 & \text{für } -3 < x < -1 \\ x/2 + 1 & \text{für } -1 \leq x < 1 \\ 2x - 1/2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \end{cases}$ hat mehrere Knickstellen, die Funktion ist also nicht überall differenzierbar. Aber wir können dennoch feststellen, dass f konvex ist.



4.3.7 Satz *Sei f auf $I = [a, b]$ zweimal differenzierbar und $f''(x) > 0$ für alle x. Dann ist f strikt konvex. Ist dagegen $f''(x) < 0$ für alle x, so ist f strikt konkav.*

Beweis. Angenommen $f''(x) > 0$ für alle x. Dann ist f' streng monoton wachsend. Betrachten wir nun drei Stellen $x_1 < x_2 < x_3$ im Intervall I und verbinden wir die entsprechenden Punkte auf dem Funktionsgraphen mit drei Sekanten.



Nach dem Mittelwertsatz gibt es Stellen $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ und $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ mit

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{und} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Weil $\xi_1 < \xi_2$ und f' monoton wachsend ist, folgt $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$. Das bedeutet aber gerade, dass der Punkt $(x_2, f(x_2))$ unterhalb der Sekante von $(x_1, f(x_1))$ nach $(x_3, f(x_3))$ liegt wie behauptet. q.e.d.

4.3.8 Folgerung *Hat f'' an der Stelle x_0 eine isolierte Nullstelle und wechselt f'' bei x_0 das Vorzeichen, dann wechselt der Graph an der Stelle x_0 von einer Seite der Tangenten auf die andere.*

Beispielsweise ist die Parabelfunktion, gegeben durch $f(x) = x^2$, auf jedem abgeschlossenen Intervall konvex. Dasselbe gilt auch für die Exponentialfunktion. Dagegen sind die Quadratwurzelfunktion und die Logarithmusfunktion nicht konvex, sondern konkav.

Zum Abschluss dieses Kapitels sei noch ein Algorithmus zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen stetig differenzierbarer Funktionen beschrieben, das sogenannte *Newtonverfahren*. Wir beschränken uns hier auf den Fall einer konvexen Funktion und halten zuerst folgendes fest:

4.3.9 Bemerkung *Eine stetige, strikt konvexe Funktion nimmt auf einem abgeschlossenen Intervall sein Minimum an genau einer Stelle an.*

Hier nun das Newtonverfahren:

4.3.10 Satz *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$. Wir definieren rekursiv eine Folge durch*

$$x_0 := b \quad \text{und} \quad x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann konvergiert die Folge der x_n in $[a,b]$ gegen eine Nullstelle von f.

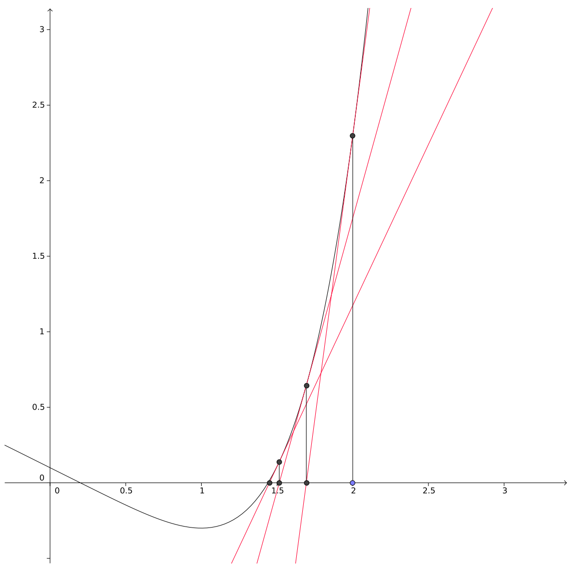
Entsprechendes gilt auch, wenn $f(a) > 0 > f(b)$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$. Hier muss man allerdings mit dem Startwert $x_0 = a$ beginnen und die Nullstelle von links approximieren.

Die Idee zu diesem Verfahren ist die folgende: Ausgehend von einer Stelle x_0 wird die Tangente an den Graphen von f bei x_0 gebildet und der Schnittpunkt x_1 mit der x-Achse berechnet. Dann bildet man die Tangente bei x_1 und schneidet diese Tangente wiederum mit der x-Achse, um x_2 zu erhalten, und so weiter. Die Gleichung der Tangente bei x_n lautet

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)\,.$$

Also erfüllt der Schnittpunkt x_{n+1} mit der x-Achse die Gleichung $0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$. Wenn man dies umformt, erhält man genau die angegebene Rekursionsformel.

4.3.11 Beispiel Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^5 - 5x + 1$ (siehe 4.2.5). Weil $f(1) = -3 < 0$ und $f(2) = 23 > 0$, wechselt f auf dem Intervall $[1, 2]$ das Vorzeichen und es muss dort eine Nullstelle geben. Ausserdem ist $f''(x) = 20x^3 > 0$ für alle $x \in [1, 2]$. Die Voraussetzungen des Satzes sind also erfüllt, wir können das Newtonverfahren anwenden.



Das Verfahren, ausgehend vom Startwert $x_0 = 2$, liefert hier im sechsten Schritt $x_6 \approx 1,4405$, und diese Näherung der Nullstelle ist bereits bis auf 3 Kommastellen genau. Die Funktion hat noch zwei weitere Nullstellen, und zwar eine im Intervall $[-2, -1]$ und eine weitere im Intervall $[0, 1]$. Diese Nullstellen kann man auf entsprechende Art mit dem Newtonverfahren approximativ bestimmen.

Beweis. Kommen wir nun zur Begründung dafür, warum das Verfahren funktioniert. Nach Voraussetzung ist f strikt konvex, das heisst, die Ableitung f' ist streng monoton wachsend. Ausserdem wechselt die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ das Vorzeichen. Der Minimalwert von f auf $[a, b]$ ist $\leq f(a) < 0$, wird also an einer Stelle $m < b$ angenommen. Die Funktion f fällt von a bis m und wächst streng monoton von m bis b, denn $f'(x) > 0$ für alle $x > m$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also genau eine Nullstelle t von f zwischen m und b, und $f(x) > 0$ für alle $x > t$.

Ist $x_n \in [t, b]$, so ist $f'(x_n) > 0$ und die Tangente zur Stelle x_n schneidet die x-Achse zwischen t und x_n, weil der Graph von f oberhalb der Tangente liegt. Also ist $x_{n+1} \in [t, b]$ wohldefiniert und $x_{n+1} < x_n$. Die Folge x_n ist also streng monoton fallend und nach unten beschränkt durch t. Deshalb hat sie einen Grenzwert. Für diesen Grenzwert c ergibt sich aus der Rekursionsformel und der Stetigkeit von f und f':

$$c = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n - \frac{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim_{n\to\infty} f'(x_n)} = c - \frac{f(c)}{f'(c)}\,.$$

Also muss $f(c) = 0$ sein, das heisst $c = t$. q.e.d.

Allgemeiner funktioniert das Newtonverfahren für $f \in C^2([a, b])$ auch dann, wenn auf $[a, b]$ ein Vorzeichenwechsel von f stattfindet und $f''(x) \neq 0$ ist für alle x, solange man den Startwert auf der passenden Seite der vermuteten Nullstelle wählt. Wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist und ein Wendepunkt der Funktion im Intervall liegt, dann kann es sein, dass die Näherungsschritte gar nicht definiert sind (weil man durch Null teilen müsste) oder das Verfahren nicht konvergiert. Dazu hier noch ein Beispiel:

4.3.12 Beispiel Die Funktion

$$f(x) = x^3 - 2x + 2$$

hat die Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 2$ und $f''(x) = 6x$. Es gibt also einen Wendepunkt bei $x = 0$. Wählt man jetzt als Startwert für das Newtonverfahren den Punkt $x_0 = 1$, dann liefert das Verfahren als nächste Stelle den Punkt $x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 0$ und dann wiederum $x_2 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = 1 = x_0$. Die Folge der Näherungswerte springt also zwischen den beiden Punkten x_0 und x_1 hin und her, und das Newtonverfahren konvergiert hier nicht.