2.2 Grenzwerte von Funktionen

Zusammenfassung: *Ein zentraler Begriff der Mathematik ist der Begriff der Abbildung oder Funktion, und dieses Konzept taucht in den verschiedensten Zusammenhängen auf. Wir betrachten jetzt Funktionen in einer reellen Variablen, untersuchen ihre Umkehrbarkeit und Grenzwerte an gewissen Stellen.*

Unter einer reellwertigen Funktion in einer reellen Variablen versteht man eine Funktion der Form $f\colon D \to W$, wobei der Definitionsbereich D und die Wertemenge W jeweils Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind. Häufig verzichtet man auch auf die Angabe von W. Eine solche Funktion können wir bekanntlich in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem graphisch darstellen. Der *Graph* der Funktion f ist definiert als

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x) \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}^2 .$$

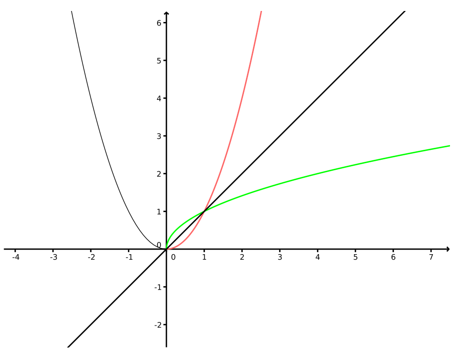
Man trägt also jeweils zu $x \in D$ den Punkt mit den Koordinaten $(x, f(x))$ in das Koordinatensystem ein.

2.2.1 Satz *Eine Funktion $f\colon D \to W$ ist genau dann bijektiv (also eine 1-1-Zuordnung), wenn f umkehrbar ist. Das bedeutet, es gibt eine Funktion $g\colon W \to D$, die sogenannte Umkehrfunktion von f, mit der Eigenschaft, dass $g(f(x)) = x$ für alle $x \in D$ und $f(g(y)) = y$ für alle $y \in W$. Sind $D, W \subset \mathbb{R}$, so erhält man den Graphen von g durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden, das heisst der Geraden, definiert durch $y = x$ in $\mathbb{R}^2$.*

2.2.2 Bemerkung *Ist die Funktion f streng monoton steigend auf $M \subset D$, d.h. $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$, $x_i \in M$, dann ist $f\colon M \to f(M)$ umkehrbar. Entsprechendes gilt, falls f auf M streng monoton fallend ist, d.h. falls umgekehrt $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$, $x_i \in M$.*

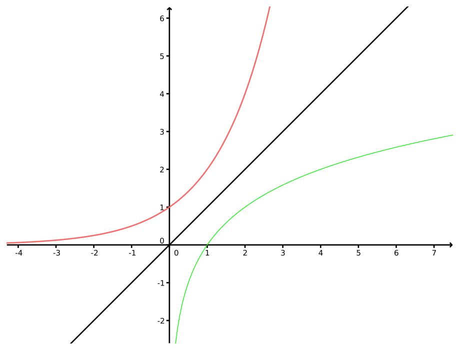
Schauen wir uns dazu einige Beispiele an.

2.2.3 Beispiele 1. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist auf $]-\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0, \infty[$ streng monoton steigend und nimmt nur Werte ≥ 0 an. Die Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt{x}$ (hier grün eingezeichnet) ist die Umkehrfunktion für den monoton wachsenden Teil von f (hier rot eingezeichnet).

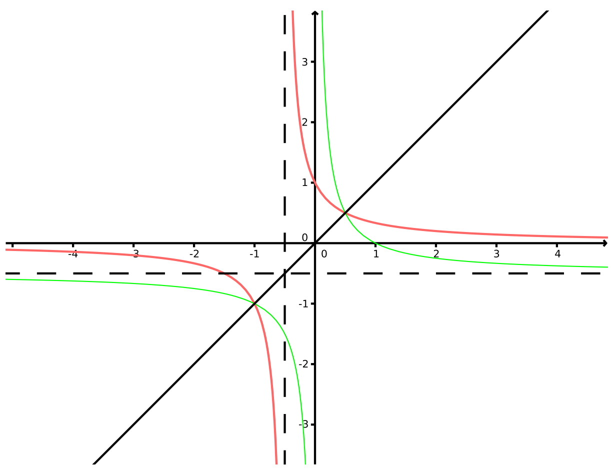


2. Die Funktion $f(x) = x^3$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, und die Umkehrung, nämlich das Ziehen der dritten Wurzel, $g(x) = \sqrt[3]{x}$, ist sogar für alle x definiert.

3. Die Funktion $f(x) = 2^x$ ist wiederum auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend, nimmt aber nur positive Werte an. Die Umkehrfunktion, der Logarithmus zur Basis 2, ist deshalb nur für positive Zahlen definiert, nimmt aber beliebige Werte an. Man erhält den Graphen von g (grün) durch Spiegelung des Graphen von f (rot) an der Winkelhalbierenden.



4. Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f\colon D \to W$, definiert durch $f(x) = \frac{1}{2x+1}$. Diese Funktion ist bijektiv. Der Graph von f (rot) ist eine Hyperbel mit Asymptoten bei $x = -\frac{1}{2}$ und $y = 0$. Durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden erhalten wir wieder eine Hyperbel (grün), diesmal mit Asymptoten bei $y = -\frac{1}{2}$ und $x = 0$.



Um die Umkehrfunktion $g\colon W \to D$ von f genauer zu bestimmen, setzen wir $f(x) = \frac{1}{2x+1} = y$ und lösen nach x auf. Das führt auf die Beziehung $x = \frac{1-y}{2y}$, und wir erhalten $g(y) = \frac{1-y}{2y}$. Nach Umbenennung der Variablen wird daraus die Vorschrift $g(x) = \frac{1-x}{2x}$.

Sei jetzt f eine reellwertige Funktion, definiert auf dem Definitionsbereich D. Sei weiter x_0 ein Punkt im Abschluss von D, das heisst, es gebe Folgen von Punkten aus D, die gegen x_0 konvergieren.

2.2.4 Definition Man sagt, die Funktion f habe an der Stelle x_0 den Grenzwert y_0, falls für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D, die gegen x_0 konvergiert, die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y_0 konvergiert. Ist dies der Fall, schreibt man

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0\,.$$

Dabei ist auch $x_0 = \infty$ oder $x_0 = -\infty$ zugelassen.

In den Beispielen 3. und 4. aus 2.2.3 sehen wir folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0\,, \quad \lim_{x\to\infty} 2^x = \infty\,, \quad \lim_{x\to 0} \log_2(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to\infty} \log_2(x) = \infty\,,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x+1} = 0\,, \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-x}{2x} = -\frac{1}{2}\,.$$

Man kann die Überlegungen verfeinern, indem man rechts- oder linksseitige Grenzwerte betrachtet. Damit ist folgendes gemeint.

2.2.5 Definition Man spricht vom rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x\searrow x_0} f(x) = y_0\,,$$

wenn für jede Folge $x_n > x_0$, die von oben gegen x_0 konvergiert, die Funktionswerte $f(x_n)$ gegen y_0 konvergieren. Entsprechend ist der linksseitige Grenzwert

$$\lim_{x\nearrow x_0} f(x) = y_0\,,$$

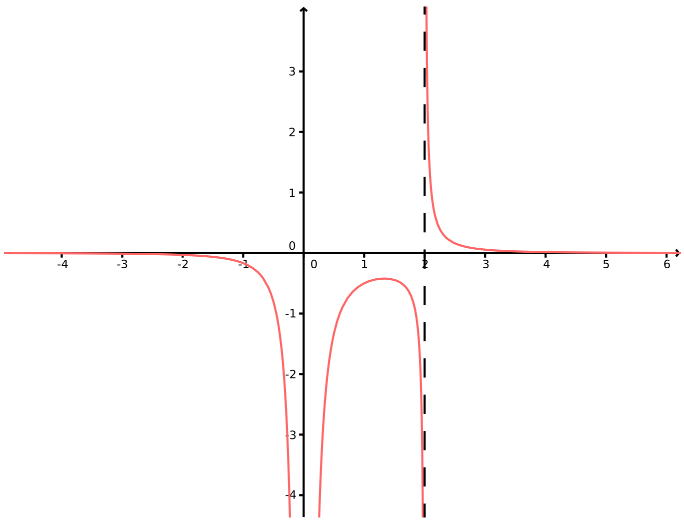
wenn für jede Folge $x_n < x_0$, die von unten gegen x_0 konvergiert, die Funktionswerte $f(x_n)$ gegen y_0 konvergieren.

2.2.6 Bemerkung *Existieren an einer Stelle x_0 sowohl der rechts- als auch der linksseitige Grenzwert von f und stimmen sie überein, dann ist dies auch der beidseitige Grenzwert. Stimmen sie aber nicht überein, so kann es keinen beidseitigen Grenzwert geben.*

2.2.7 Beispiele

- Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{2x^2(x-2)}$ (für $x \neq 0, 2$) konvergiert für x gegen 0 nach $-\infty$. Aber es gibt keinen beidseitigen Grenzwert an der Stelle $x = 2$, denn

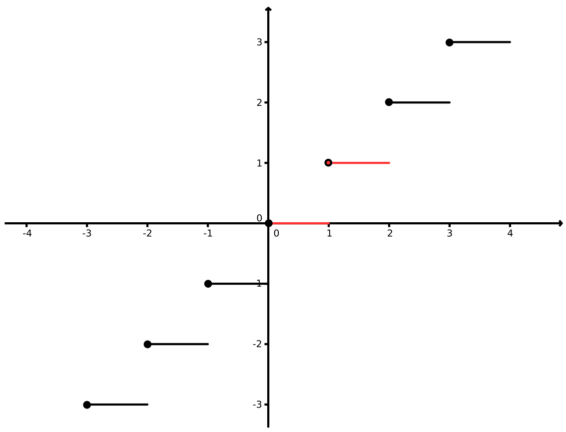
$$\lim_{x\searrow 2} \frac{1}{2x^2(x-2)} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\nearrow 2} \frac{1}{2x^2(x-2)} = -\infty\,.$$



- Ein ähnliches Phänomen zeigte sich schon im vierten Beispiel 2.2.3.

$$\lim_{x \nearrow -1/2} \frac{1}{2x+1} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow -1/2} \frac{1}{2x+1} = \infty \,.$$

- Ist x eine reelle Zahl, so bezeichnet die Gaussklammer $[x]$ von x die grösste ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Also ist zum Beispiel $[2.45] = 2$, $[-3.56] = -4$, $[\sqrt{2}] = 1$ und $[\pi] = 3$.



Der Graph von f sieht aus wie eine Treppe mit unendlich vielen Stufen, jeweils der Breite und Höhe 1. An der Stelle $x = 1$ gibt es keinen beidseitigen Grenzwert, denn

$$\lim_{x \nearrow 1} [x] = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 1} [x] = 1 \,.$$

Entsprechendes gilt für alle ganzzahligen Stellen. Man sagt, es liegen dort Sprungstellen vor.

Für die Grenzwerte von Funktionen gelten entsprechende Aussagen wie für die Grenzwerte von Folgen, also Verträglichkeit mit den Grundrechenarten, Verträglichkeit mit der Relation $\leq$, und es gibt wiederum einen Vergleichssatz.

2.2.8 SATZ *Seien f, g, h drei reellwertige Funktionen, die alle auf dem offenen Intervall $I = (a, b)$ definiert sind, und sei $x_0 \in [a, b]$. Gilt $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in I$ und $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$, so folgt auch $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = y_0$.*

2.2.9 BEISPIELE 1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} (1 - \dfrac{2}{x^2+1}) = 1.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x^2+1}{x-3x^3} = -\dfrac{1}{3}.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-1}{x} = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-x^2}{x+1} = -\infty.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$. Um dies einzusehen, schreiben wir die Differenz folgendermassen um:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

5. Aber $\lim\limits_{x\to\infty} (x+1-\sqrt{x}) = +\infty$. Denn: $x+1-\sqrt{x} > x-\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$

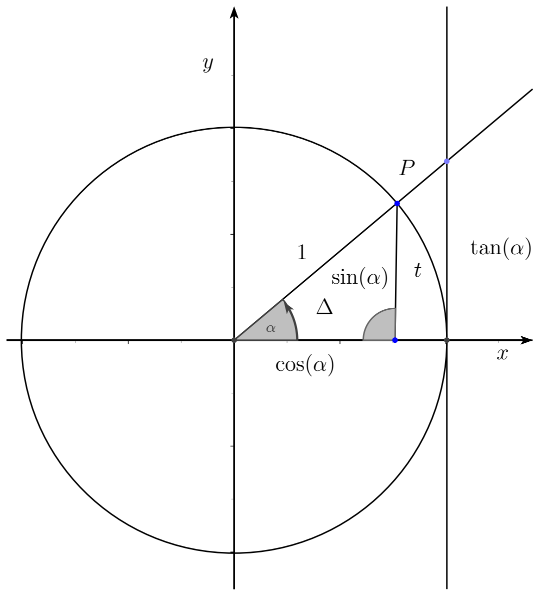
2.3 ELEMENTARE FUNKTIONEN

Zusammenfassung: *Aus den rationalen Funktionen, den trigonometrischen Funktionen, sowie den Exponentialfunktionen kann man durch Verknüpfung mithilfe der Grundrechenarten, durch Umkehrung, sowie durch Zusammensetzung neue Funktionen bilden. Dabei ist der Definitionsbereich eventuell geeignet zu verkleinern. So entsteht ein reicher Vorrat an Funktionen, die man als elementar bezeichnet.*

Die trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus und Tangens wurden zunächst in Abhängigkeit von Winkeln als Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken definiert. Ist Δ ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge a, b und Hypotenuse der Länge c, und bezeichnet $0 < \alpha < 90°$ den Winkel, der der Seite a gegenüberliegt, dann ist

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}\,, \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}\,, \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\,.$$

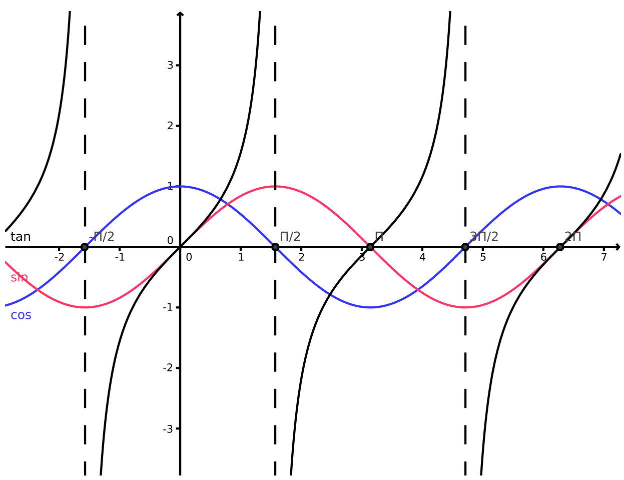
Eine andere Interpretation dieser Grössen erhält man, wenn man Δ so wählt, dass $c = 1$ ist, und dann Δ in den Kreis von Radius 1 um den Nullpunkt einzeichnet wie hier.



Jetzt erweisen sich die Werte $x = \cos(\alpha)$ und $y = \sin(\alpha)$ als die Koordinaten des Punktes P auf dem Einheitskreis, dessen Ortsvektor mit der positiven x–Achse den Winkel α bildet. Und auf diese Weise lässt sich die Definition von Sinus und Cosinus auf alle Winkel ausdehnen. Mit dem Satz von Pythagoras folgt sofort, dass für alle Winkel α gilt:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,.$$

Der Tangens tritt in diesem Bild auf als Länge des Abschnitts auf der Tangente an den Punkt $(1,0)$ an den Einheitskreis, der durch diesen Winkel markiert wird. Misst man jetzt den Winkel nicht im Gradmass, sondern im Bogenmass, d.h. durch die Länge t des Bogens, der durch den Winkel α aus dem Einheitskreis ausgeschnitten wird, dann kann man Sinus und Cosinus als Funktionen einer reellen Zahl $t \in \mathbb{R}$ interpretieren. Etwa ist $360° = 2\pi$, $180° = \pi$, $90° = \pi/2$, $60° = \pi/3$, etc. Man erhält folgende Funktionen:



2.3.1 Bemerkung *Die Cosinusfunktion ergibt sich durch Verschiebung der Sinusfunktion nach links um* $\frac{\pi}{2}$, *denn* $\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ *für alle Winkel* α. *Die Tangens-*

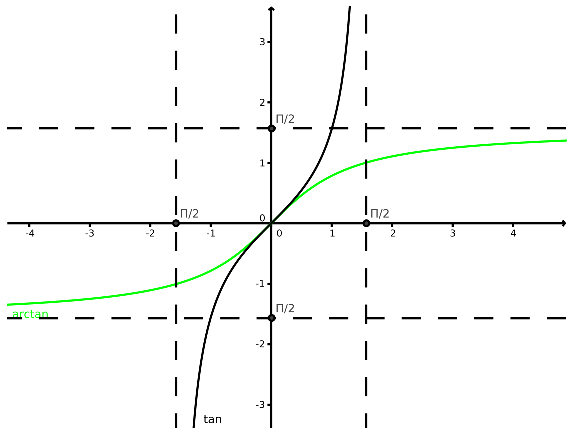
funktion ist gegeben durch

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,.$$

Sie ist definiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x) \neq 0$, das heisst für $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ (für alle $n \in \mathbb{Z}$).

Die Umkehrfunktionen von Sinus, Cosinus und Tangens werden als Arcusfunktionen bezeichnet, weil man jeweils einer Zahl eine Bogenlänge zuordnet. Dabei versteht man üblicherweise unter arcsin die Umkehrung der Sinusfunktion auf dem Abschnitt $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und unter arccos die Umkehrung der Cosinusfunktion auf dem Abschnitt $[0, \pi]$. Auf dem offenen Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist die Tangensfunktion monoton steigend, und nimmt dort als Werte alle reellen Zahlen an. Die entsprechende Umkehrfunktion ist der Arcustangens:

$$\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\,.$$



Wir haben hier die wichtigen Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Durch Kombination der trigonometrischen Funktionen und ihrer Umkehrungen mit rationalen Funktionen entsteht ein grosses Spektrum an Funktionen mit sehr unterschiedlichem Verhalten.

2.3.2 Beispiele 1. Der Graph der Funktion $f(x) = \arctan(\frac{1}{x^2})$ (für $x \neq 0$) hat die Gestalt eines Hügels. Die Funktion ist gerade, d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle x, also ist der Graph symmetrisch zur y-Achse. Ausserdem ist f auf dem Bereich $x > 0$ streng monoton fallend, weil $1/x^2$ monoton fallend und der Arcustangens monoton steigend ist. Schliesslich haben wir die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\,, \quad \text{denn } \lim_{x\to\infty} \tfrac{1}{x^2} = 0 \text{ und } \arctan(0) = 0.$$

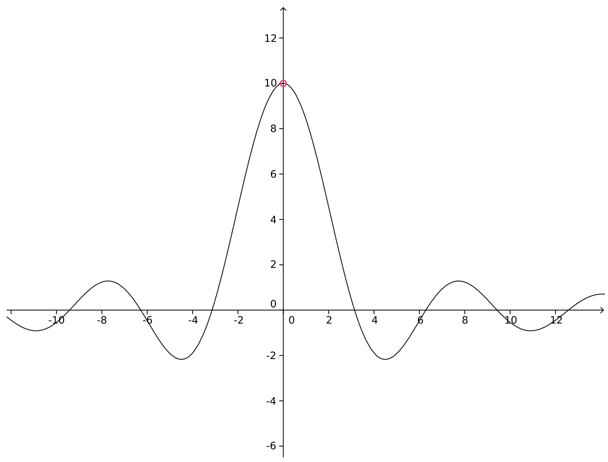
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}\,, \quad \text{denn } \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x^2} = \infty \text{ und } \lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \tfrac{\pi}{2}.$$

2. Die Funktion $f(x) = x\sin(x)$ (für $x \geq 0$) beschreibt eine Schwingung, deren Amplitude mit wachsendem x linear zunimmt. Hier ist

$$\lim_{x\to 0}(x\sin(x)) = 0\,,$$

denn $|x\sin(x)| \leq |x|\ \forall x$, weil die Sinusfunktion nur Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt. Aber $\lim_{x\to\infty}\sin(x)$ und $\lim_{x\to\infty} x\sin(x)$ existieren nicht.

3. Die Funktion $f(x) = 10\frac{\sin(x)}{x}$ (für $x \neq 0$) hat bei $x = 0$ eine Definitionslücke. Es handelt sich um eine gedämpfte Schwingung.



Wir können f bei $x = 0$ stetig durch den Wert $f(0) = 10$ fortsetzen, denn:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1\,.$$

Um dies einzusehen, lesen wir aus der Bedeutung des Tangens am Einheitskreis die folgende Ungleichung ab:

$$|x| \leq |\tan(x)| = \left|\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right| \qquad \text{für } x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

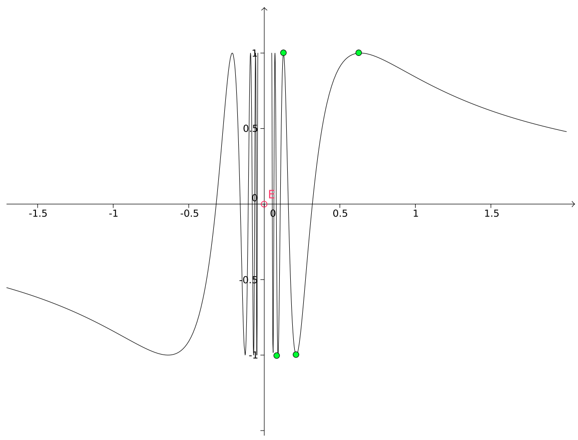
Daraus folgt $|\sin(x)| \geq |x\cdot\cos(x)|$ und wir erhalten für $\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$:

$$|\cos(x)| \leq \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq 1\,.$$

Mit dem Vergleichssatz folgt nun die Behauptung.

Bei der folgenden Funktion beobachten wir, dass es noch andere Probleme mit Grenzwerten gibt als nur Sprungstellen.

2.3.3 Beispiel Die Funktion $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ (für $x \neq 0$) hat keinen Grenzwert bei $x = 0$. Denn $f(x)$ kommt für kleine x-Werte jedem y-Wert zwischen -1 und $+1$ beliebig nahe. Schauen wir uns das etwas genauer an. Auf der Nullfolge $a_n := \frac{2}{(2n+1)\pi}$ (für $n \in \mathbb{N}_0$) von x-Werten, nimmt die Funktion f immer abwechselnd den Wert $+1$ und -1 an. Also hat die Folge $f(a_n)$ hier keinen Grenzwert.



Kommen wir jetzt zu den Exponentialfunktionen. Ist $a \in \mathbb{R}, a > 1$ vorgegeben, so definiert man die Exponentialfunktion a^x zur Basis a zunächst rekursiv für natürliche Exponenten:

$$a^0 := 1, \quad a^1 := a, \quad a^{n+1} = a \cdot a^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann dehnt man die Definition auf negative ganze Zahlen aus: $a^{-n} := \frac{1}{a^n} \quad$ für $n \in \mathbb{N}$. Und schliesslich setzt man für rationale Exponenten fest:

$$a^{p/q} := (\sqrt[q]{a})^p \quad \text{für } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}.$$

Diese Festlegung hängt nicht davon ab, wie der rationale Exponent dargestellt ist. Denn angenommen $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, so ist $(\sqrt[q]{a})^p = (\sqrt[q']{a})^{p'}$, wie man mithilfe der Potenzgesetze für ganze Exponenten und der Eindeutigkeit der Wurzeln zeigen kann. Ausserdem gilt

$$a^{p/q} > 1 \quad \text{für alle } p, q \in \mathbb{N}.$$

Denn da die Funktion $f_p \colon x \mapsto x^p$ und die Funktion $g_q \colon x \mapsto \sqrt[q]{x}$ (für positive x) beide streng monoton wachsend sind, folgt aus $a > 1$ zunächst $\sqrt[q]{a} > \sqrt[q]{1} = 1$ und dann $a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p > 1$, wie behauptet.

Die Exponentialfunktion lässt sich auch auf beliebige reelle Exponenten fortsetzen. Dazu kann man zu einer gegebenen reellen Zahl x eine Folge $x_n \in \mathbb{Q}$ wählen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und setzt $a^x := \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$. Für jede reelle Zahl $a > 1$ erhalten wir eine streng monoton wachsende Funktion $\exp_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0},\ x \mapsto a^x$, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist und nur positive Werte annimmt, und es gilt

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0\,.$$

Für beliebige Exponenten gilt das bekannte Potenzgesetz:

$$a^0 = 1 \quad \text{und} \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ausserdem ist $(a^x)^y = a^{x\cdot y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\,.$

Eine besonders wichtige Rolle spielt die Exponentialfunktion zur Basis e, der sogenannten *Eulerschen Zahl*. Man verwendet hier die Notation $\exp(x) := e^x$.

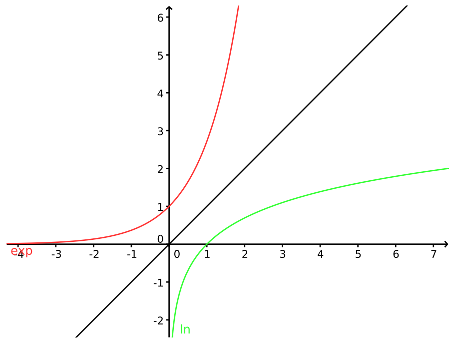
2.3.4 Bemerkung *Wie bereits erwähnt, können wir e definieren durch*

$$e := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \quad \text{und} \quad e^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n \quad \text{für } x\in\mathbb{R}\,.$$

Ausserdem gilt:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \quad \text{und} \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\,.$$

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $exp(x) = e^x$ nennt man den natürlichen Logarithmus und verwendet die Notation ln. Die Funktion $\ln\colon \mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$ ist nur definiert für positive Zahlen.



Durch Umkehrung der Potenzgesetze ergibt sich für Logarithmen folgendes Gesetz:

$$\ln(1) = 0 \quad \text{und} \quad \ln(x\cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Ausserdem ist $\ln(e) = 1$ und $\ln(x^y) = y\cdot\ln(x) \quad \forall x, y > 0\,.$

Die Logarithmusfunktion ist streng monoton wachsend und es gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\ln(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0}\ln(x) = -\infty\,.$$

2.3.5 Bemerkung *Der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Exponentialfunktionen ist folgender: Für jede Basis $a > 1$ gilt:*

$$a^x = e^{x\ln a} \quad \text{für alle } x\in\mathbb{R}.$$

Beweis. Dies folgt aus den Rechenregeln für Potenzen, denn für $x\in\mathbb{R}$ gilt $e^{x\ln(a)} = e^{\ln(a)x} = (e^{\ln(a)})^x = a^x$ wie behauptet. q.e.d.

Mithilfe der Exponentialfunktion können wir exponentielles Wachstum, aber auch Abklingvorgänge beschreiben. Zum Beispiel wird der Zerfall einer radioaktiven Substanz durch

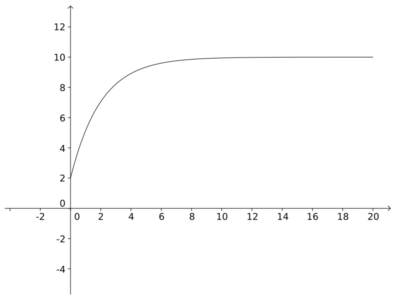
$$f(t) = K_0 e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0)$$

beschrieben. Dabei ist t die Zeit, K_0 bezeichnet die zum Zeitpunkt $t = 0$ vorliegende Menge und $\lambda > 0$ ist die Zerfallsrate.

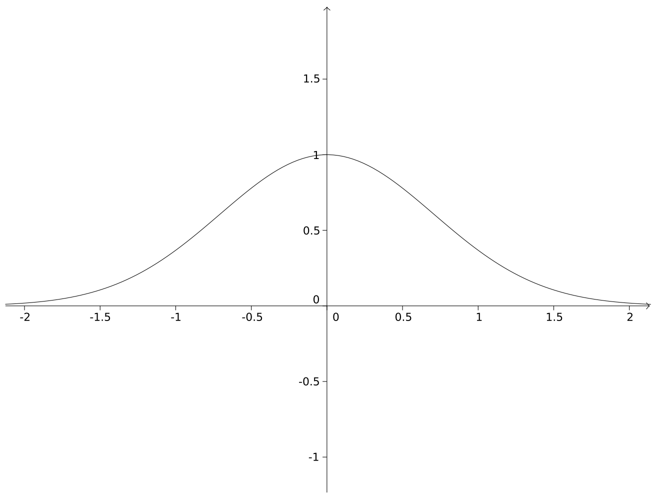
Ein Wachstumsprozess, bei dem eine Sättigung eintritt, lässt sich durch eine Funktion der folgenden Form modellieren:

$$f(t) = a(1 - e^{-\lambda t}) + b \quad (t \geq 0)\,.$$

Hier handelt es sich um eine monoton steigende Funktion, die zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Wert b startet und für t gegen ∞ den Grenzwert $a + b$ hat.



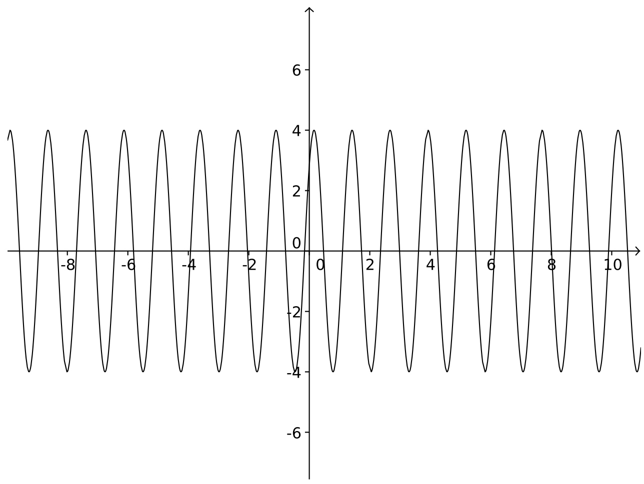
Der Prototyp der sogenannten Normalverteilung ist die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ (für beliebige x). Der Graph wird auch als Gausssche Glockenkurve bezeichnet und erinnert an den Querschnitt einer Glocke. Das Maximum nimmt f an bei $x = 0$, nämlich $f(0) = 1$. Ausserdem ist $\lim_{\pm\infty} e^{-x^2} = 0\,.$



Mithilfe der Sinusfunktion kann man Schwingungsvorgänge modellieren. Eine harmonische Schwingung wird durch eine Funktion der Form

$$f(t) = A\sin(\omega 2\pi t + \varphi) \quad (t \in \mathbb{R})$$

beschrieben. Dabei ist $A > 0$ die Amplitude, $\omega > 0$ die Anzahl Schwingungen pro Zeiteinheit und φ die Phasenverschiebung der Schwingung.

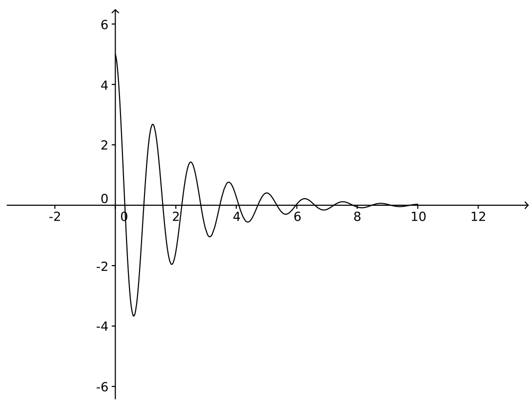


Zum Beispiel könnte $f(t)$ die vertikale Auslenkung einer schwingenden Saite zum Zeitpunkt t angeben. Auch die Auslenkung einer Feder durch eine daran befestigte Masse wird durch eine solche Funktion beschrieben.

Eine Kombination von Cosinus und Exponentialfunktion wird verwendet, um gedämpfte Schwingungen darzustellen:

$$f(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t) \quad (t \geq 0)\,.$$

Hier ist $\lambda > 0$ eine Dämpfungsrate, und der Faktor $e^{-\lambda t}$ sorgt für eine allmähliche Abnahme der Amplitude der Schwingung, während die Frequenz unverändert bleibt.



2.4 Stetigkeit

Zusammenfassung: *Man nennt eine Funktion stetig, wenn sie an jeder Stelle gegen ihren eigenen Funktionswert konvergiert. In dieser Situation treten keine Sprungstellen auf, jeder Funktionswert ist bereits durch seine Nachbarwerte eindeutig bestimmt. Eine stetige Funktion, definiert auf einem abgeschlossenen Intervall, nimmt dort Maximum und Minimum an. Der Zwischenwertsatz besagt unter anderem, dass wenn eine Funktion auf einem Intervall das Vorzeichen wechselt, sie in diesem Intervall sicher mindestens eine Nullstelle hat.*

Anschaulich gesprochen ist eine Funktion auf einem Bereich stetig, wenn kleine Änderungen des Argumentes x zu kleinen Änderungen des Funktionswertes führen. Dabei betrachten wir hier nur Funktionen auf *offenen* Definitionsbereichen. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ heisst *offen*, wenn D eine Vereinigung von offenen Intervallen ist.

2.4.1 Definition Eine Funktion f, definiert auf einer offenen Teilmenge D, heisst stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Die Funktion f heisst *stetig*, falls f an jeder Stelle des Definitionsbereichs stetig ist.

Eine andere äquivalente Charakterisierung der Stetigkeit ist die folgende:

2.4.2 Satz *Eine Funktion f ist stetig an der Stelle $x_0 \in D$, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass*

$$|x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in D.$$

Beweis. Wir zeigen nur, dass aus der ϵ-δ-Eigenschaft die Stetigkeit folgt. Nehmen wir an, x_n ist eine Folge von Punkten in D, die gegen x_0 konvergiert. Zu $\epsilon > 0$ wählen wir δ wie im Satz. Nach der Grenzwertdefinition gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Also gilt für die Folge der Funktionswerte $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Das bedeutet aber gerade, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. q.e.d.

2.4.3 Beispiele

- Jede Funktion der Form $f(x) = ax+b$ (für feste $a, b \in \mathbb{R}$) ist überall stetig. Denn $|f(x)-f(x_0)| = |a| \cdot |x-x_0| < \epsilon$, wenn $|x-x_0| < \epsilon/|a| = \delta$.
- Wie schon erwähnt, hat die Funktion $f(x) = [x]$ an allen ganzzahligen $x \in \mathbb{Z}$ Sprungstellen. Die Funktion hat also abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.
- Sei $f(x) = |x+1| - 3 = \begin{cases} x - 2 & \text{für } x \geq -1 \\ -x - 4 & \text{für } x < -1 \end{cases}$.

  Der Graph dieser Funktion hat eine Knickstelle bei $x_0 = -1$. Dort ist aber

  $$\lim_{x \searrow -1} f(x) = \lim_{x \nearrow -1} f(x) = -3 = f(-1)\,.$$

  Also passen die beiden Teile zusammen, und f ist bei x_0 stetig.
- Die Funktion $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ kann man stetig nach $x_0 = 2$ fortsetzen durch $f(2) = 4$.

Stetigkeit vererbt sich auf Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten (dort wo diese definiert sind), wie sich sofort aus den entsprechenden Sätzen für Grenzwerte ergibt. Man kann zeigen, dass auch die Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens sowie die Exponentialfunktionen stetig sind. Ausserdem gilt:

2.4.4 Satz *Eine aus stetigen Funktionen zusammengesetzte Funktion ist stetig.*

Beweis. Sind $f\colon D_2 \to W_2$ und $g\colon D_1 \to W_1$ stetige Funktionen und ist $W_1 \subset D_2$, so können wir die Funktionen f und g zusammensetzen:

$$f \circ g\colon D_1 \to W_2, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Man spricht auch von der Komposition der Funktionen f und g. Sei jetzt $x_0 \in D_1$. Wegen der Stetigkeit von g gilt für jede Folge (x_n) in D_1, die gegen x_0 konvergiert: $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0)$. Aus der Stetigkeit von f folgt nun wiederum $\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = f(g(x_0))$. Also ist auch die zusammengesetzte Funktion $f \circ g$ wieder stetig. q.e.d.

Ohne Beweis halten wir noch fest:

2.4.5 SATZ *Sind I, J Intervalle und ist $f\colon I \to J$ eine bijektive, stetige Funktion, so ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} wieder stetig. Also sind zum Beispiel die Wurzelfunktionen $\sqrt[n]{\ }$ $(n \in \mathbb{N})$, die Arcusfunktionen und die Logarithmen stetig.*

2.4.6 FOLGERUNG *Sämtliche elementaren Funktionen sind stetig, überall dort, wo sie keine Definitionslücken haben.*

Diese Tatsache lässt sich vielseitig verwenden, um Grenzwerte von zusammengesetzten Funktionen zu bestimmen. Hier einige Beispiele:

2.4.7 BEISPIELE • $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}} = 1$.

• $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan(\dfrac{2x^3-x+1}{x^2+4}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Denn es gilt $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-x+1}{x^2+4} = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$.

• $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\pi) = 0$, denn $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-1}{x^2+1}\pi = \pi$, Sinus ist stetig und $\sin(\pi) = 0$.

Für das Verhalten von stetigen Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen gelten bemerkenswerte Aussagen. Der *Zwischenwertsatz* besagt folgendes:

2.4.8 SATZ *Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig und $[x_1, x_2] \subset D$. Angenommen, $f(x_1) < y_0 < f(x_2)$ oder $f(x_1) > y_0 > f(x_2)$, dann gibt es ein $x_0 \in [x_1, x_2]$ mit $f(x_0) = y_0$.*

Beweis. Hinter dieser Aussage steht das Axiom der Vollständigkeit der Menge der reellen Zahlen. Für Funktionen, die nur für rationale Zahlen definiert sind, ist die Aussage nicht richtig. Wir betrachten nur den ersten Fall. Weiter können wir durch Verschiebung der Funktion f um den Wert y_0 die Frage darauf reduzieren, eine Nullstelle von f zu finden. Nehmen wir also an: $f(x_1) < 0 < f(x_2)$. Eine Strategie zur Konstruktion einer Nullstelle x_0 besteht darin, das Intervall $[x_1, x_2]$ fortgesetzt zu halbieren und nur jeweils die Hälfte zu behalten, über der f das Vorzeichen wechselt. Man erhält eine Intervallschachtelung, und die Grenzen der Intervalle bilden je eine aufsteigende und eine fallende Folge, die gegen denselben Grenzwert x_0 konvergieren. Wegen der Stetigkeit muss $f(x_0) = 0$ gelten. q.e.d.

2.4.9 Beispiel Das Polynom $p(x) = x^5 - 3x + 1$ besitzt eine Nullstelle zwischen $x_1 = -2$ und $x_2 = -1$, denn $p(-2) = -25 < 0$ und $p(-1) = 3 > 0$. Wenden wir nun das Intervallhalbierungsverfahren an, um eine solche Nullstelle genauer zu bestimmen.

Das Startintervall ist das Intervall $I_1 = [-2; -1]$. Der Mittelpunkt des Intervalls liegt bei $x = -1.5$ und $p(-1.5) = -2.09375 < 0$. Also wechselt das Polynom zwischen -1.5 und -1 das Vorzeichen, in der rechten Intervallhälfte gibt es also eine Nullstelle. Darum ersetzen wir das Ausgangsintervall nun durch $I_2 = [-1.5; -1]$. Weil $p(-1.25) = 1.698 > 0$ ist, findet der Vorzeichenwechsel von p in linken Intervallhälfte von I_2 statt, und wir setzen $I_3 = [-1.5; -1.25]$ usw. Nach sechs Schritten finden wir, dass es eine Nullstelle zwischen -1.4375 und -1.40625 gibt. Man kann das Verfahren entsprechend weiter fortsetzen, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Das hier angegebene Polynom p besitzt noch zwei weitere Nullstellen, und zwar eine im Intervall $[0; 1]$ und eine im Intervall $[1; 2]$. Auch diese Nullstellen kann man natürlich mit dem Intervallhalbierungsverfahren beliebig genau berechnen.

Der folgende Satz ist weniger leicht zu beweisen, und wir verzichten hier auf den Beweis:

2.4.10 Satz *Auf einem abgeschlossenen Intervall* $[a, b]$ *ist jede stetige Funktion beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum an.*

Aus beiden Sätzen zusammen ergibt sich:

Folgerung: *Eine stetige Funktion bildet ein abgeschlossenes Intervall wieder auf ein abgeschlossenes Intervall ab.*

Beweis. Ist nämlich m das Minimum und M das Maximum von f auf dem Intervall $[a, b]$, so nimmt f nach dem Zwischenwertsatz alle Werte zwischen m und M an. Also folgt $f([a, b]) = \{f(x) \mid a \leq x \leq b\} = [m, M]$. q.e.d.

Bei unstetigen Funktionen bzw. bei stetigen Funktionen auf offenen Intervallen gelten die hier gemachten Aussagen möglicherweise nicht. Zum Beispiel ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem offenen Intervall $(0; 1)$ stetig, aber nicht beschränkt. Sie nimmt hier kein Maximum an.

Die schon erwähnte Gaussfunktion, die einer reellen Zahl x die grösste ganze Zahl $[x]$ zuordnet, die kleiner oder gleich x ist, nimmt auf dem Intervall $[0, 1]$ die Werte 0 und 1 an. Der Wertebereich ist also kein abgeschlossenes Intervall mehr.