1.3 Kombinatorik, binomischer Lehrsatz, Eulerformel

Zusammenfassung: *Mit vollständiger Induktion kann man viele interessante Aussagen beweisen. Hier sind weitere Beispiele: der binomische Lehrsatz, der die bekannten binomischen Formeln verallgemeinert, und die Eulersche Polyederformel.*

Erinnern wir zuerst an die Definition der Binomialkoeffizienten, die in der Kombinatorik eine wichtige Rolle spielen.

1.3.1 Definition Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$. Das Symbol $\binom{n}{k}$ (ausgesprochen: "n über k") bezeichnet die Anzahl der Möglichkeiten, eine Teilmenge von k aus n verschiedenen Elementen auszuwählen. Unter der Teilmenge mit 0 Elementen versteht man dabei die leere Menge, hier gibt es nur eine Möglichkeit. Also ist $\binom{n}{0} = 1$ für alle n.

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ nennt man *Binomialkoeffizienten*, weil sie als Koeffizienten in der verallgemeinerten binomischen Formel auftreten. Beispielsweise ist $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$ und $\binom{3}{3} = 1$. Und es gibt $\binom{49}{6} = 13983816$ Möglichkeiten, aus 49 verschiedenen Zahlen 6 auszuwählen. Dies kann man mithilfe der folgenden Beziehung berechnen. Für alle $k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Denn der Zähler des ersten Bruchs gibt an, wieviele geordnete Listen von k aus n Elementen es gibt, und im Nenner steht die Anzahl $k!$ der Möglichkeiten, eine Liste von k verschiedenen Symbolen umzuordnen. Man beachte hierbei die Konvention $0! = 1$.

Zum Beispiel ist $\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$. Oder $\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!}$. Weiter ergibt sich direkt aus der Definition, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ folgendes gilt:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\,.$$

Die Binomialkoeffizienten lassen sich auch rekursiv erzeugen, genauer gilt die folgende *Rekursionsformel*:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq n\,.$$

Das kann man folgendermassen einsehen. Nehmen wir an, wir haben eines der n Symbole markiert, etwa mit einem $*$. Nun gibt es bei der Auswahl von k aus n Elementen zwei Möglichkeiten, entweder wir wählen das Symbol $*$ aus und ergänzen mit $k-1$ weiteren aus den restlichen $n-1$ Symbolen, oder wir legen das Symbol $*$ zur Seite und wählen k aus den restlichen $n-1$ aus. Im ersten Fall gibt es $\binom{n-1}{k-1}$ und im zweiten Fall $\binom{n-1}{k}$ Möglichkeiten, und zusammen folgt die Behauptung.

Im sogenannten *Pascalschen Dreieck* werden die Binomialkoeffizienten in einem dreieckigen Schema so angeordnet, dass jeweils die Zahl n die Zeile und die Zahl k

die Diagonale angibt, die von oben rechts nach unten links verläuft. Die angegebene Rekursionsformel bedeutet hier, dass sich der Koeffizient in Zeile n und Diagonale k berechnen lässt, indem man die zwei benachbarten Koeffizienten aus der Zeile darüber addiert.

$$\begin{array}{ccccccccc} &&&& 1 &&&& \\ &&& 1 && 1 &&& \\ && 1 && 2 && 1 && \\ & 1 && 3 && 3 && 1 & \\ 1 && 4 && 6 && 4 && 1 \\ &&&& \vdots &&&& \end{array}$$

1.3.2 Satz **binomischer Lehrsatz:** *Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \cdots + \binom{n}{n} b^n\,.$$

Beweis. Für $n = 2$ handelt es sich um die bekannte binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Für $n = 3$ lautet die Behauptung $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den binomischen Lehrsatz zu beweisen. Hier soll die Gelegenheit benutzt werden, die Methode der vollständigen Induktion daran nochmals vorzuführen.

Induktionsverankerung: Für $n = 1$ lautet die Behauptung

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b\,.$$

Dies ist offenbar korrekt.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Behauptung gilt für n, und schliessen daraus die Formel für $n+1$. Zu zeigen ist also:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k}\, b^k\,.$$

Um dies zu zeigen, starten wir mit der Induktionsvoraussetzung:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \cdots + b^n\,.$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit $(a+b)$ und erhalten:

$$(a+b)^{n+1} = \left(a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b + \binom{n}{2} a^{n-2}\, b^2 + \cdots + b^n\right)(a+b)\,.$$

Ausmultiplizieren liefert:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \cdots + \binom{n}{n} a b^n \quad +$$

$$\binom{n}{0}a^nb + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^n \quad + \quad b^{n+1}\,.$$

Nun fassen wir Terme mit gleichen Exponenten zusammen und verwenden die Rekursionsformel:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^nb + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + b^{n+1}\ .$$

Das war zu zeigen. q.e.d.

Aus dem binomischen Lehrsatz ergeben sich sofort interessante Beziehungen zwischen den Binomialkoeffizienten. Zum Beispiel liefert die Summe der Einträge jeder Zeile des Pascalschen Dreiecks eine Zweierpotenz, und die alternierende Zeilensumme ist jeweils Null.

1.3.3 Folgerung

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$$

Man kann die Methode der vollständigen Induktion auch auf vielfältige Weise einsetzen, um geometrische Aussagen zu beweisen. Hier ein prominentes Beispiel aus der Graphentheorie.

1.3.4 Definition Unter einem planaren Graphen versteht man eine Menge von Eckpunkten in der Ebene zusammen mit einer Auswahl von verbindenden Kanten, die sich nicht kreuzen dürfen. Schlaufen sind allerdings erlaubt. Der Graph heisst zusammenhängend, wenn er nicht in mehrere unverbundene Teilfiguren zerfällt.

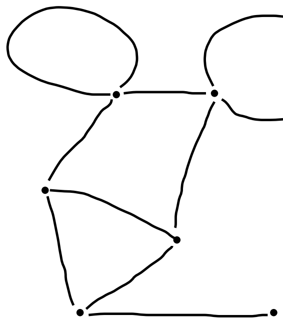
Ein planarer Graph zerlegt die Ebene in eine endliche Anzahl von zusammenhängenden Gebieten, wobei wir das äussere, unbeschränkte Gebiet mitzählen. Von Euler stammt die Beobachtung, dass zwischen den Anzahlen der Ecken, Kanten und Gebiete folgender Zusammenhang besteht:

1.3.5 Satz *Für jeden zusammenhängenden, planaren Graphen mit e Eckpunkten, k Kanten und f Gebieten gilt:*

$$e - k + f = 2\,.$$

Für Bäume mit $e = n$ Eckpunkten gilt zum Beispiel $k = n - 1$ (siehe Übungsaufgabe) und $f = 1$ (es gibt nur das äussere, unbeschränkte Gebiet). Also ist hier $e - k + f = n - (n-1) + 1 = 2$, wie behauptet.

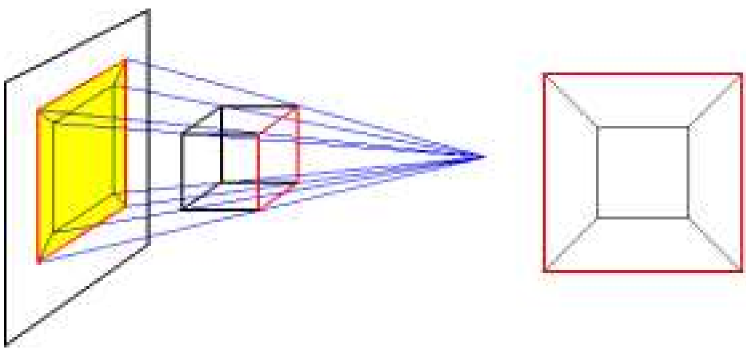
Hier ist ein Graph mit 6 Eckpunkten, 9 Kanten und 5 Gebieten.



Beweis. Beweisen wir diese Aussage durch vollständige Induktion über die Anzahl $n \in \mathbb{N}_0$ an Kanten. Zunächst die Verankerung: Hat der Graph keine Kante, dann besteht er aus nur einem Eckpunkt, und es gibt nur ein äusseres Gebiet. Also ist $e - k + f = 1 + 1 = 2$. Nehmen wir nun an, die Aussage sei richtig für alle Graphen mit $n \geq 0$ Kanten, und betrachten wir einen Graphen G mit $n + 1$ Kanten. Hat G nur einen Eckpunkt, dann sind alle Kanten Schlaufen. In diesem Fall entfernen wir eine der Schlaufen, und erhalten einen Graphen $\tilde{G}$, für den die Eulerformel richtig ist. Die Anzahlen von Schlaufen und Gebieten hat sich dabei jeweils um 1 reduziert. Die Eulerformel gilt also auch für G. Hat der Graph G mindestens zwei Eckpunkte, gibt es mindestens eine Kante mit verschiedenen Endpunkten, weil der Graph zusammenhängend ist. Wir wählen eine solche Kante aus und kontrahieren sie zu einem Punkt. Dabei reduzieren sich die Anzahlen der Ecken und der Kanten jeweils um 1, die Anzahl der Gebiete aber bleibt unverändert. Auch in diesem Fall können wir schliessen, dass die Eulerformel für G richtig ist. q.e.d.

Die von Euler entdeckte Beziehung ist eigentlich bekannt unter dem Namen *Eulersche Polyederformel*. Unter einem Polyeder versteht man einen dreidimensionalen Körper, der von n-Ecken begrenzt wird, die aber nicht regelmässig zu sein brauchen. Man nennt ein Polyeder konvex, wenn die Seitenflächen nie nach innen einspringen. Besonders symmetrisch sind die fünf platonischen Körper, also Würfel, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder.

Projiziert man ein solches konvexes Polyeder mithilfe einer Lichtquelle, die man genügend nahe vor der Mitte einer ausgewählten Seitenflächen plaziert, auf eine Mattscheibe, sieht man einen zusammenhängenden, planaren Graphen.



Dabei wird die ganze Figur in die Projektion der ausgewählten, hier rot markierten Seitenfläche hineinprojiziert. Bei passender Wahl der Position der Lichtquelle hat der Graph gleichviele Eckpunkte und gleichviele Kanten wie das Polyeder, und die beschränkten Gebiete des Graphen entsprechen genau den Seitenflächen, die man nicht ausgewählt hatte. Zählt man das unbeschränkte äussere Gebiet der Mattscheibe noch mit, stimmt also die Anzahl an Gebieten des Graphen mit der Anzahl an Seitenflächen des Polyeders überein. Deshalb erhalten wir nun folgendes Resultat:

1.3.6 Folgerung *Für jedes konvexe Polyeder mit e Eckpunkten, k Kanten und f Seitenflächen gilt:*

$$e - k + f = 2\,.$$

Im Fall des Würfels sind diese Zahlen zum Beispiel $e = 8$, $k = 12$, $f = 6$.

Ein konvexes Polyeder, bei dem sämtliche Seitenflächen regelmässige n-Ecke sind und in jedem Eckpunkt genau m Seitenflächen zusammentreffen (für feste natürliche Zahlen $n, m \geq 3$), wird als *platonischer Körper* bezeichnet. Mit der Eulerformel können wir folgendes zeigen:

1.3.7 Folgerung *Es gibt nur 5 platonische Körper, nämlich Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.*

Beweis. Nehmen wir an, P sei ein konvexes Polyeder mit e Eckpunkten, k Kanten und f Seitenflächen, und sämtliche Seitenflächen seien regelmässige n-Ecke. Ausserdem sollten in jedem Eckpunkt genau m Seitenflächen zusammentreffen.

Es gibt insgesamt e Eckpunkte und durch jeden gehen nach Voraussetzung m Seitenflächen. Umgekehrt haben wir f Seitenflächen mit je n Eckpunkten. Zählen wir die Paar von Eckpunkten und dort anliegenden Seitenflächen, erhalten wir:

$$em = fn\,.$$

Entsprechend liefert doppeltes Abzählen der Paare von Kanten und anliegenden Seitenflächen: $2k = fn$. Setzen wir nun $e = \frac{nf}{m}$ und $k = \frac{nf}{2}$ in die Eulerformel ein, erhalten wir:

$$\frac{nf}{m} - \frac{nf}{2} + f = 2\,.$$

Daraus folgt: $4m = (2n - (n-2)m)f$. Das heisst insbesondere, weil m positiv ist, dass $2n > (n-2)m$ sein muss, und daher

$$3 \leq m < \frac{2n}{n-2}\,.$$

Nun folgt: $n < 6$. Es kommen also für die Seitenflächen nur Dreiecke, Quadrate oder Fünfecke in Frage. Nun kann man die jeweiligen Möglichkeiten für m durchprobieren und stellt fest, dass nur die genannten 5 Körper möglich sind. q.e.d.

1.4 Zahlensystem, (Über-)Abzählbarkeit

Zusammenfassung: *Wir vergleichen die Grössenordnungen unendlicher Mengen. Eine unendliche Menge, deren Elemente sich in einer numerierten Liste anordnen lassen, heisst abzählbar. Die Menge aller rationalen Zahlen ist zum Beispiel abzählbar. Aber die Menge aller beliebigen Dezimalzahlen ist wesentlich grösser, man spricht hier von einer überabzählbaren Menge.*

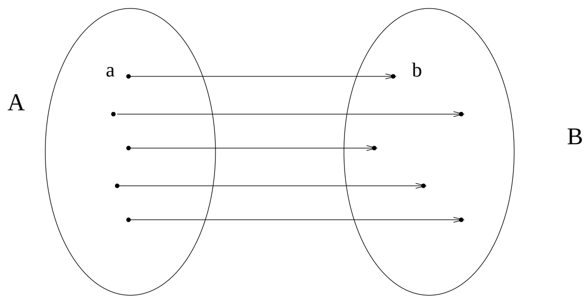
Ausgehend von der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ konstruiert man durch sukzessive Erweiterung der Zahlenbereiche schliesslich die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ umfasst zusätzlich zu $\mathbb{N}$ und 0 die negativen Zahlen, und $\mathbb{Q}$ bezeichnet die Menge der durch Brüche dargestellten Zahlen. Der Übergang von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ ist ein Prozess der Vervollständigung des Zahlenvorrats, und zwar werden sogenannte irrationale Zahlen hinzugefügt, so dass es damit möglich wird, alle Abstände auf einer Geraden oder in der euklidischen Ebene zu vermessen. Um zum Beispiel die Länge der Diagonale in einem Einheitsquadrat anzugeben, benötigt man eine Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist. Eine solche Zahl fehlt im Vorrat der rationalen Zahlen, wie schon ganz zu Anfang gezeigt wurde (siehe 1.1.2). Die irrationalen, reellen Zahlen lassen sich durch unendliche, nichtperiodische Dezimalentwicklungen beschreiben.

Allerdings ist die Vorstellung irreführend, man brauche nur einige wenige Lücken im Zahlenstrahl zwischen den rationalen Zahlen zu füllen. Tatsächlich gibt es nämlich wesentlich mehr irrationale Zahlen als rationale Zahlen. Diese Aussage soll nun präzisiert werden. Dazu brauchen wir zunächst einen Begriff dafür, die Grössenordnung unendlicher Mengen miteinander vergleichen zu können.

1.4.1 Definition Zwei Mengen A, B nennt man *gleichmächtig*, wenn es eine Zuordnung $f\colon A \to B$ gibt, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $f(a)$ aus B zuordnet, und zwar so, dass es zu jedem Element $b \in B$ genau ein Element $a \in A$ gibt mit $b = f(a)$. Die Zuordnung f wird dann als *bijektive Abbildung* oder als 1 : 1-*Zuordnung* von A nach B bezeichnet.



1.4.2 Beispiele 1. Eine Menge M ist genau dann endlich, wenn es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to M$ gibt. Dann hat M natürlich offenbar n Elemente, und die Abbildung besteht eigentlich darin, die Elemente von M durchzuzählen.

2. Zwei endliche Mengen sind genau dann gleichmächtig, wenn sie gleichviele Elemente enthalten.

3. $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ sind gleichmächtig, denn wir können die ganzen Zahlen folgendermassen anordnen: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$. Diese Liste entspricht der Abbildung $f(2k) = k$, $f(2k+1) = -k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

4. Es gibt auch echte Teilmengen von $\mathbb{N}$, die dennoch gleichmächtig sind wie $\mathbb{N}$, ein Beispiel ist die Menge der geraden Zahlen. Denn die Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \ldots\}$, $f(k) = 2k$ ist bijektiv.

1.4.3 Definition Eine unendliche Menge M heisst *abzählbar*, wenn sie gleichmächtig ist wie die Menge der natürlichen Zahlen. Ist dies nicht der Fall, so heisst M *überabzählbar*.

Die Menge der ganzen Zahlen ist, wie wir eben gesehen haben, abzählbar. Die Menge der positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}_{>0}$ ist ebenfalls abzählbar. Allerdings können wir die positiven rationalen Zahlen nicht einfach der Grösse nach durchnumerieren. (Wieso nicht?) Stattdessen schreiben wir die Brüche in den positiven Quadranten eines zweidimensionalen Koordinatensystems, und zwar den Bruch p/q an die Stelle mit $x = p$ und $y = q$. Nun notieren wir die Brüche in der Reihenfolge, die sich ergibt, wenn wir folgenden Weg verfolgen:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & & & & & & & & & \\
1/5 & \to & 2/5 & \to & 3/5 & \to & 4/5 & \to & 5/5 & & \ldots \\
\uparrow & & & & & & & & \downarrow & & \\
1/4 & \leftarrow & 2/4 & \leftarrow & 3/4 & \leftarrow & 4/4 & & 5/4 & & \ldots \\
 & & & & & & \uparrow & & \downarrow & & \\
1/3 & \to & 2/3 & \to & 3/3 & & 4/3 & & 5/3 & & \ldots \\
\uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \\
1/2 & \leftarrow & 2/2 & & 3/2 & & 4/2 & & 5/2 & & \ldots \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \\
1/1 & \to & 2/1 & & 3/1 & \to & 4/1 & & 5/1 & \to & 6/1\ldots
\end{array}
$$

Wir erhalten eine Liste von Brüchen mit vielen Wiederholungen. Streichen wir darin noch sämtliche Wiederholungen, so bleibt eine Liste aller positiven rationalen Zahlen übrig. Diese Liste kann man auch als bijektive Zuordnung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Q}_{>0}$ auffassen.

Man kann nun - ähnlich wie im Beispiel $\mathbb{Z}$ - weiter schliessen:

1.4.4 Satz *Die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Im Gegensatz dazu ist die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar und es gibt viel mehr irrationale als rationale Zahlen.

1.4.5 Beispiele Alle rationalen Vielfachen von $\sqrt{2}$ sind irrational. Allgemeiner sind alle Zahlen der Form $\pm\frac{n}{m}\sqrt{p}$ ($n, m \in \mathbb{N}$, p Primzahl) irrational.

Erinnern wir kurz an die Beschreibung der reellen Zahlen durch *Dezimalentwicklungen*. Ist eine Zahl rational, so ist ihre Dezimalentwicklung entweder endlich oder periodisch. Etwa ist $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$. Die Entwicklung muss nicht unbedingt eindeutig sein, zum Beispiel hat die Zahl $\frac{1}{10}$ die beiden Darstellungen $0,1$ oder $0,0\overline{9}$ und $0,12 = 0,11\overline{9}$. Ist eine Zahl irrational, so ist ihre Dezimalentwicklung eindeutig festgelegt und zwar ist sie in diesem Fall unendlich und nicht periodisch.

1.4.6 Beispiel Die Zahl $0,101001000100001\ldots$ ist irrational, denn ihre Dezimalentwicklung ist unendlich und nichtperiodisch.

Wir können also sagen, dass rationale Zahlen in gewissem Sinne endlichen Listen von Ziffern entsprechen, während irrationale Zahlen durch unendliche Listen von Ziffern festgelegt werden. Es ist also plausibel, dass es wesentlich mehr irrationale als rationale Zahlen gibt. Um dies zu beweisen, halten wir zuerst folgendes fest:

1.4.7 Lemma *Sind $M \subset L$ Mengen von Zahlen und ist M überabzählbar, dann ist auch L überabzählbar.*

Beweis. Denn wäre L abzählbar, könnte man die Elemente von L in einer Liste aufzählen. Wenn man nun in dieser Aufzählung alle Elemente wegstreicht, die nicht zu M gehören, bleibt eine Liste der Elemente von M übrig. Damit wäre auch M abzählbar im Widerspruch zur Annahme. q.e.d.

1.4.8 Satz *Die Menge $[0, 1]$ der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 ist überabzählbar und damit erst recht die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen.*

Beweis. Betrachten wir die Teilmenge $M \subset [0, 1[$ der Zahlen mit einer Dezimalentwicklung, die nur aus Einsen oder Nullen besteht. Nach dem Lemma reicht es zu zeigen, dass M überabzählbar ist. Wir zeigen die Behauptung durch Widerspruch. Angenommen, die Menge M wäre abzählbar. Dann gäbe es eine Möglichkeit, die Zahlen in M durchzunumerieren und zu einer Liste anzuordnen. Gehen wir nun von einer solchen fiktiven Liste $r_1, r_2, r_3, \ldots$ aus. Wir schreiben die Dezimalentwicklungen (aus Nullen und Einsen) dieser Zahlen untereinander. Die Liste könnte so aussehen:

$$\begin{array}{rcl}
r_1 & = & 0,\textcolor{red}{0}\ 0\ 0\ 0\ldots\ldots\ldots \\
r_2 & = & 0,1\ \textcolor{red}{1}\ 1\ 1\ldots\ldots\ldots \\
r_3 & = & 0,1\ 0\ \textcolor{red}{1}\ 0\ldots\ldots\ldots \\
r_4 & = & 0,1\ 0\ 0\ \textcolor{red}{0}\ldots\ldots\ldots \\
 & \vdots & \qquad\qquad\ddots \\
r_j & = & 0,r_{j1}r_{j2}r_{j3}r_{j4}\ldots\textcolor{red}{r_{jj}}\ldots \\
 & \vdots &
\end{array}$$

Nun schauen wir uns die Diagonale in diesem Ziffernschema an und bilden daraus wiederum eine Dezimalzahl. Hier wäre das konkret: $0,\textcolor{red}{0110\ldots r_{jj}\ldots}$. Schliesslich ändern wir alle Ziffern nach dem Komma. Und zwar ersetzen wir alle Nullen durch

Einsen und umgekehrt alle Einsen durch Nullen. So erhalten wir eine neue Zahl $a = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots \in]0, 1[$. Wenn die Liste mit den angegebenen Zahlen beginnt, haben wir konkret $a = 0, 1001 \ldots$ Vergleichen wir a nun mit den Zahlen aus der Liste. a stimmt nicht mit r_1 überein, denn bereits an der ersten Stelle hinter dem Komma stehen verschiedene Ziffern. a stimmt auch nicht mit r_2 überein, denn jeweils die zweite Stelle hinter dem Komma ist verschieden, usw. Also kommt a nicht in der Liste der Zahlen $r_1, r_2, r_3, \ldots$ vor. Diese Liste sollte aber *alle* Dezimalentwicklungen aus Nullen und Einsen enthalten. Das ist ein Widerspruch. q.e.d.

1.4.9 FOLGERUNG *Es gibt überabzählbar viele irrationale Zahlen.*

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe nur abzählbar viele irrationale Zahlen. Wir wissen schon, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist. Man könnte also beide Typen von Zahlen in Listen aufzählen und dann daraus eine Liste sämtlicher reeller Zahlen herstellen, indem man immer abwechselnd eine irrationale und eine rationale Zahl gemäss den Teillisten aufführt. Damit wäre auch $\mathbb{R}$ abzählbar, ein Widerspruch. q.e.d.