Aufgabenblatt 6

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei der folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Rechnen mit komplexen Zahlen)* (a) Berechnen Sie die Real- und Imaginärteile der Zahlen: $(\sqrt{3}+i)^3\,,\quad \dfrac{2+3i}{1-2i}\,,\quad \dfrac{1}{(1+i\sqrt{6})^2}\,,\quad \overline{(1+i)^2}\,.$

(b) Bestimmen Sie die Polarkoordinaten der folgenden komplexen Zahlen:
$i^3\,,\quad -6\,,\quad 2i+2\sqrt{3}\,,\quad -\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\,i\,.$

(c) Berechnen Sie $(1+i\sqrt{3})^{50}$ auf möglichst einfache Art. (4 Punkte)

Aufgabe 2. *(Gleichungen und Ungleichungen)* Bestimmen Sie jeweils die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, die die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen erfüllen und skizzieren Sie die Lösungsmengen:

(a) $1 < |z-2i| < 2\,,$ (b) $|z-i| > |z+i|\,,$ (c) $2z(z-4)+26=0\,,$

(d) $z^4 = 1\,,$ (e) $z^4+4=0\,.$ (6 Punkte)

Aufgabe 3. *(Zerlegung von Polynomen)* Zerlegen Sie die folgenden Polynome in nicht weiter zerlegbare Faktoren, und zwar einerseits über $\mathbb{R}$ und andererseits über $\mathbb{C}$.

(a) $p(x) = x^4 - 2x^2 - 15$ (b) $p(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ (Hinweis: $p(2) = 0$)

(c) $p(x) = x^4 + 4$. (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Cardanosche Formel)* Seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $D := q^2 + p^3 \neq 0$. Seien weiter $u = -q + \sqrt{D}$ und $v = -q - \sqrt{D}$. Rechnen Sie nach, dass $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ eine Nullstelle des Polynoms $f(z) = z^3 + 3pz + 2q$ ist. Welche Nullstelle erhält man konkret für $f(z) = z^3 - 3\sqrt[3]{5}\ z + 6$? Finden Sie ausserdem die drei reellen Nullstellen des Polynoms $f(z) = z^3 - 3\sqrt[3]{2}\ z - 2\,.$ (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Zwischenwertsatz)* (a) Seien f, g stetige Funktionen, definiert auf dem Intervall $[a, b]$, und es gelte $f(a) < g(a)$ und $f(b) > g(b)$. Beweisen Sie mit dem Zwischenwertsatz, dass es dann eine Stelle $x_0 \in [a, b]$ gibt, an der sich die Funktionsgraphen von f und g schneiden.

(b) Bestimmen Sie die Schnittstelle von $f(x) = 2 - e^{-x}$ und $g(x) = 4 - x^2$ (für $x \in [0, 2]$) mit einer Genauigkeit von mindestens 1/4, indem Sie auf $h(x) = f(x) - g(x)$ das Intervallhalbierungsverfahren anwenden (siehe Beispiel 2.4.9).

Hinweis zu (b): Ausnahmsweise mit Taschenrechner. (3 Punkte)

Und hier noch zwei Verständnisfragen zur Selbstkontrolle:

Frage 1. *(Reelle und imaginäre Achse)* Welche der folgenden Aussagen über die komplexe Zahl $z = a + ib$ sind korrekt?

(a) $|z|^2 = a^2 + (ib)^2$. ☐

(b) $|z|^2 = a^2 + b^2$. ☐

(c) Die Zahl z ist genau dann reell, wenn $z = \overline{z}$. ☐

(d) Die z ist genau dann rein imaginär, wenn $z = -\overline{z}$. ☐

Frage 2. *(Komplexe Wurzeln)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Jede negative reelle Zahl hat genau zwei rein imaginäre Quadratwurzeln. ☐

(b) Jedes Polynom dritten Grades hat in $\mathbb{C}$ genau drei verschiedene Nullstellen. ☐

(c) Ist $z_0 \in \mathbb{C}$ eine doppelte Nullstelle eines reellen Polynoms dritten Grades, dann muss z_0 sogar reell sein. ☐

(d) Die Mitternachtsformel für quadratische Gleichungen gilt auch über den komplexen Zahlen. ☐

Abgabe der Aufgaben: Donnerstag, den 28. Oktober 2021, bis 12.30 Uhr als .pdf via ADAM bei Ihrem Tutor bzw. Ihrer Tutorin.