Aufgabenblatt 8

Aufgabe 1

a) $f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{e^x}$

$f'(x) = \frac{(2x+2)e^x - e^x(x^2+2x-3)}{e^{2x}} = \frac{e^x((\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x))}{e^{2x}} = e^{-x}((\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x))$

$f''(x)) = -e^x((\sqrt{5}+x)(\sqrt{5}-x)) * e^{-x}(2x * 2\sqrt{5})$

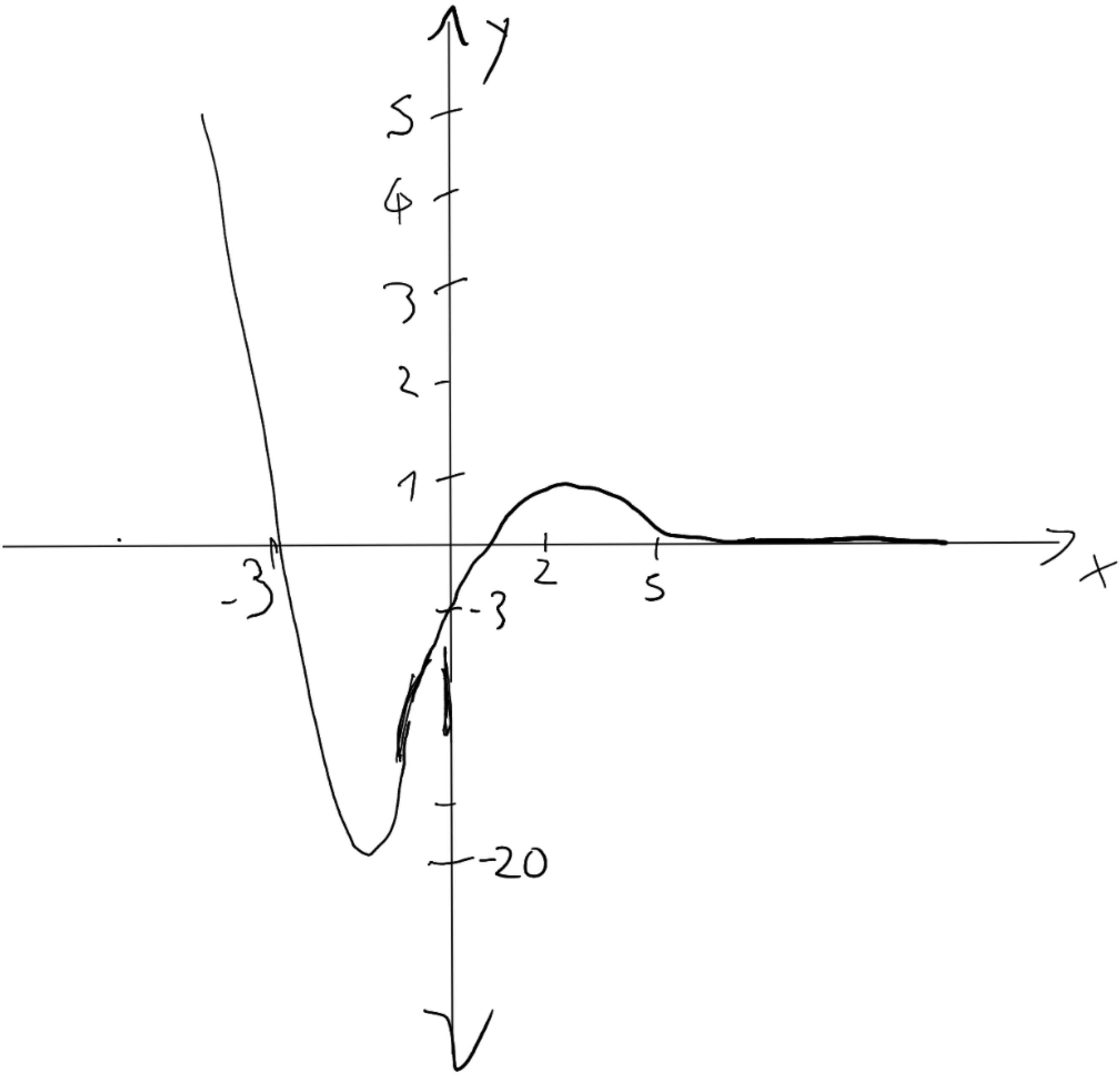
Kritische Stellen/Nullstellen der Ableitung: $\pm\sqrt{5}$

Bei $x = \sqrt{5}$ $f''(\sqrt{5}) = 0$

f' wechselt von + auf - ⇒isoliertes lokales Maximum

Bei $x = -\sqrt{5}$ $f''(-\sqrt{5}) = 0$

f' wechselt von - auf + ⇒isoliertes lokales Minimum



Nullstellen:

1 und 3

Grenzwerte:

$\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)(x+3)}{e^x} = 0$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)(x+3)}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+2}{e^x} = \infty$

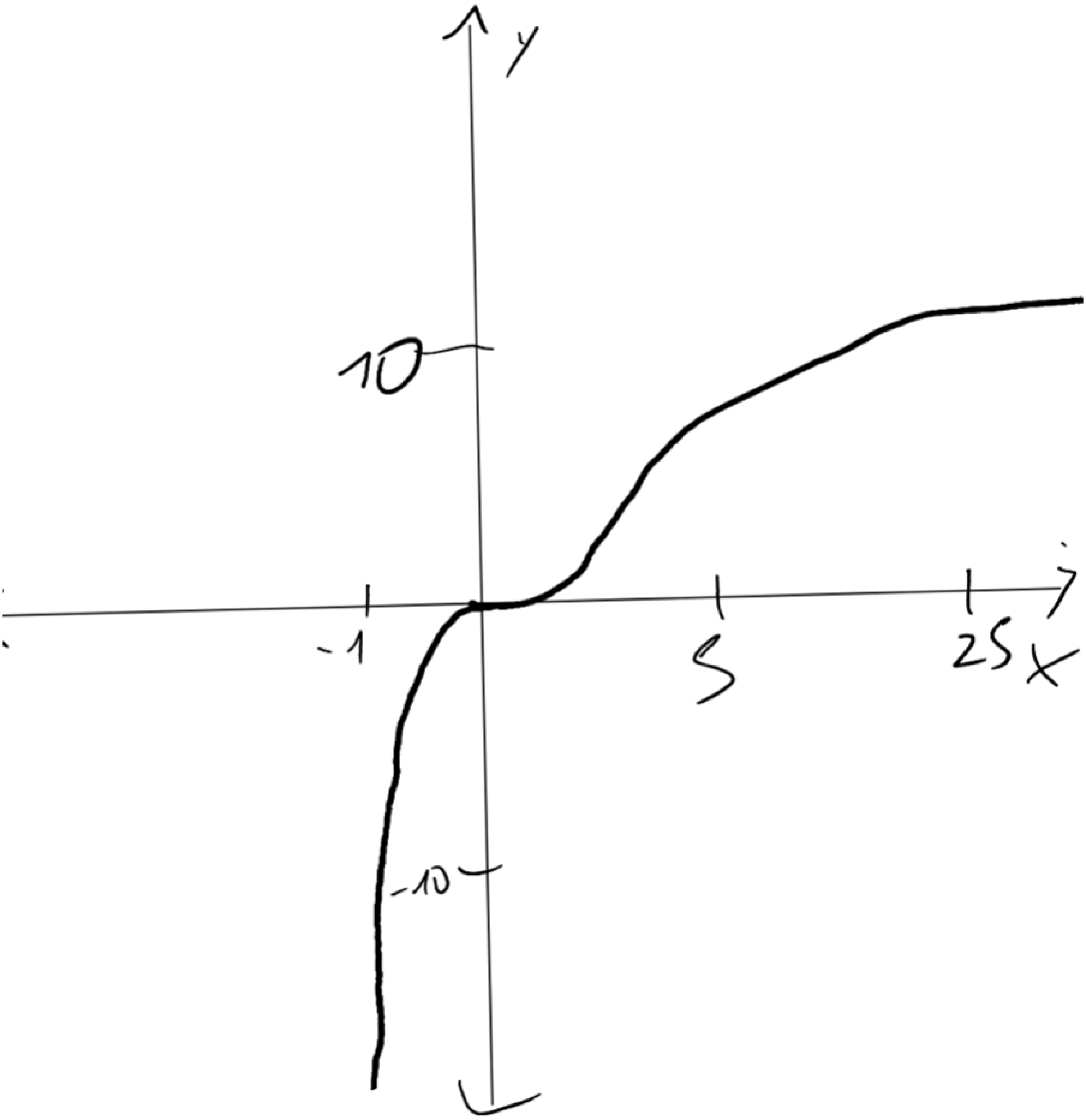
b) $f(x) = \ln(x^3+1)$

$f'(x) = \frac{3x^2}{x^3+1}$

$f''(x) = \frac{6x(x^3+1)-(3x^2)^2}{x^6+2x^3+1}$

Kritische Stellen:

Bei $x=0$: $f''(0)=0$ Wechselt nicht das Vorzeichen, also Sattelpunkt.



Nullstellen: 0

Grenzwerte:

$\lim_{x\to\infty} \ln(x^3+1) = \infty$

$\lim_{x\to-\infty} \ln(x^3+1) = \lim_{x\to-\infty} \ln(x) = undefined$

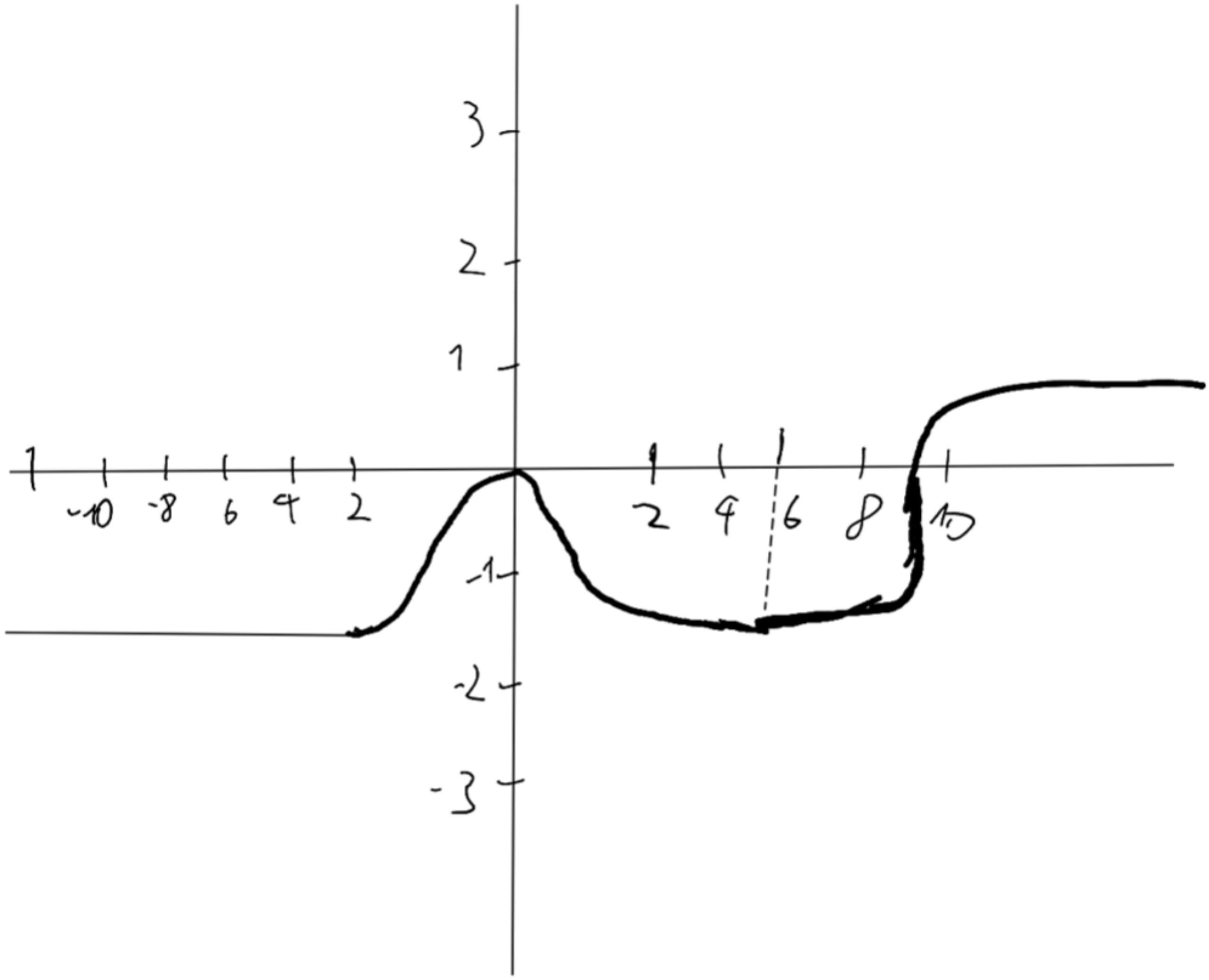
$\lim_{x\searrow-1} \ln(x^3+1) = \lim_{x\searrow 0} \ln(x) = -\infty$

c) $f(x) = \arctan(x^3 - 9x^2)$

$f'(x) = \frac{3x(x-6)}{1+(x^3-9x^2)^2}$

Kritische Stellen: $0, 6$

Bei $x = 0$: f' wechselt von positiv auf negativ, also isoliertes lokales Maximum
Bei $x = 6$: wechselt von negativ auf positiv, also isoliertes lokales Minimum



Nullstellen: $0, 9$
$\lim_{x \to \infty} \arctan(x^3 - 9x^2) = \infty$
$\lim_{x \to -\infty} \arctan(x^3 - 9x^2) = -\infty$

Aufgabe 2
a) $f(x) = cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$
$f'(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$
$f''(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$

$\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$
Bei $x = 0$: f'' wechselt Vorzeichen, dass heisst dort befindet sich ein Wendepunkt. Da f'' immer positiv ist, ist f strikt konvex.

b) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
$f'(x)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$f''(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+x^2}}$
f'' hat keine (reelle) Nullstellen, also keine Wendepunkte. Da f'' immer positiv ist, ist f strikt konvex.

c) $f(x) = \frac{1}{\sigma}\exp(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2})$
$f'(x) = -\frac{(x-x_0)}{\sigma^3}\exp(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2})$
$f''(x) = \dfrac{(x-x_0)^2 \mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^5} - \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^3}$
Wendepunkt bei $x = x_0$, da dort $f'' = 0$ (und es das Vorzeichen wechselt).
Da $f'' > 0$ gilt, ist f strikt konvex.

Aufgabe 3:
$f(x) = x^7 - \frac{7}{2}x^2 + 2$
$f'(x) = 7x^6 - 7x \Leftrightarrow f'(x) = 0$ bei $x = 0$ und da $x^5 = 1$ auch bei $x = 1$, dass heisst maximal 3 Nullstellen, nach Rolle.
$f''(x) = 42x^5 - 7$
$f(-1) = -1 - \frac{7}{2} + 2 = -2.5 < 0$
$f(-0.5) > 0$
Da $f'' < 0$ im Intervall $[-1, -0.5]$ ist die Funktion konkav, alo nur eine Nullstelle x_* in diesem Intervall.
Newtonverfahren:

1. Erste Tangente: $y = f(-0.5) + f'(-0.5)(x - (-0.5))$ ⇒ $x = -0.81$
2. Zweite Tangente: $y = f(-0.81) + f'(-0.81)(x - (-0.81))$ ⇒ $x = -0.7413$
3. Dritte Tangente: $y = f(-0.7413) + f'(-0.7413)(x - (-0.7413))$ ⇒ $x = -0.734$

$f(0.2) > 0$ und $f(0.8)$ und eine Nullstelle von f', also maximal 2 Nullstellen von f:

1. Erste Tangente: $y = f(0.2) + f'(0.2)(x - 0.2)$ ⇒ $x = 1.529$
2. Zweite Tangente: $y = f(1.529) + f'(1.529)(x - 1.529)$ ⇒= $x = 1.359$
3. Dritte Tangente: $y = f(1.359) + f'(1.359)(x - 1.359)$ ⇒ $x = 1.2405$
4. Vierte Tangente: $y = f(1.2405) + f'(1.2405)(x - 1.2405)$ ⇒ $x = 1.173$
5. 5. Tangente: $y = f(1.173) + f'(1.173)(x - 1.173)$ ⇒ $x = -0.734$ ⇒ $x = 1.1491$
6. 6. Tangente: $y = f(1.1491) + f'(1.1491)(x - 1.1491)$ ⇒ $x = -0.734$ ⇒ $x = 1.1461$
   $f(0.8) < 0$
   $f(0.5) > 0$

1. Erste Tangente: $y = f(0.8) + f'(0.8)(x - 0.8)$ ⇒ $x = 0.792$
   Geraten...