Aufgabenblatt 11

Aufgabe 1

a)

Koeffizientenmatrix, Rang 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I*0.5}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & 1.5 & 2.5 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{4*II+III}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & 1.5 & 2.5 \\ 0 & 9 & -4 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II/9 und III+4*I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & 1.5 & 2.5 \\ 0 & 1 & -4/9 & 1/9 \\ 0 & -1 & 6 & 11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{III+-2*I und III/3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0.5 & 1.5 & 2.5 \\ 0 & 1 & -4/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$x_3 = 2$

$x_2 - \frac{4}{9}x_3 = \frac{1}{9} \Rightarrow x_2 = 1$

$x_1 - 0.5x_2 + 1.5x_3 = 2.5 \Rightarrow x_1 = 2.5 - 3 + 0.5 = 0$

b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III und II vertauschen und I/2}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.5 & 0.5 & 1 & 3 \\ -5 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II+5*I und III+I}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.5 & 0.5 & 1 & 3 \\ 0 & -1.5 & 10.5 & 6 & 15 \\ 0 & -0.5 & 3.5 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II/-1.5 und III+II/-3}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.5 & 0.5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & -4 & 10 \\ 0 & -0.5 & 3.5 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III + II/2}}$$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.5 & 0.5 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -7 & -4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, also nur Rang 2 und zwei Variablen frei wählbar.

$x_4, x_3 \in \mathbb{R}$

$x_2 = 10 + 7x_3 + 4x_4$

$x_1 = 8 + 3x_3 + 3x_4$

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \times | \forall x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Aufgabe 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & -8 \\ -1 & 3 & \alpha & \beta \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II-2I}]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \\ 4 & -5 & 2 & -8 \\ -1 & 3 & \alpha & \beta \end{array}\right) \text{IV +I-II und} \xrightarrow[\text{III}]{} \text{streichen}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \\ 0 & 0 & \alpha + 11 & \beta + 12 \end{array}\right)$$

a)

leer, falls $\alpha = -11$ und $\beta \neq -12$, da dann die unterste Zeile $(0 \quad 0 \quad 0 \mid \beta + 12 \neq 0)$ wäre und da $\beta + 12 \neq 0$ gilt, und es daher keine Lösung gäbe.

b)

einelementig, falls $\alpha \neq -11$ und $\beta \in \mathbb{R}$, da dann $\alpha + 11 \neq 0$ und die letzte Zeile dann so aussehen würde: $(0 \quad 0 \quad \alpha + 11 \neq 0 \mid \beta + 12)$. Dies liefert eine reelle Lösung.

c)

unendlich, falls $\alpha = -11$ und $\beta = -12$, da dann die erweiterte Matrix mit der letzten Zeile $(0 \quad 0 \quad 0 \mid 0)$ auf Rang 2 wechselt, das Gleichungssystem aber 3 Unbekannten hat. Das heisst $x_3 \in \mathbb{R}$ ist frei wählbar.

Aufgabe 3

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$p(x) * 5x = 5ax^4 + 5bx^3 + 5cx^2 + 5dx = f(x)$

$F(x) = ax^5 + \frac{5}{4}bx^4 + \frac{5}{3}cx^3 + \frac{5}{2}dx^2$

Gelten muss:

$-a + b - c + d = -1$

$8a + 4b + 2c + d = 5$

$12a + 4b + c = 2$

$F(1) - F(-1) = a + \frac{5}{4}b + \frac{5}{3}c + \frac{5}{2}d - (-a + \frac{5}{4}b - \frac{5}{3}c + \frac{5}{2}d) = 2a + \frac{10}{3}c = 8$

Erweiterte Matrix des Gleichungssystems:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & \frac{10}{3} & 0 & 8 \end{array}\right) \overrightarrow{\text{I und IV vertauschen}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & \frac{10}{3} & 0 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 5 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overrightarrow{\text{I/2 und II +8IV}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & 4 \\ 0 & 12 & -6 & 9 & -3 \\ 12 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overrightarrow{\text{II/12 und III +12IV}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0.75 & -0.25 \\ 0 & 16 & -11 & 12 & -10 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \overrightarrow{\text{III-16II und IV + I}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0.75 & -0.25 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 1 & 3 \end{array}\right) \overrightarrow{\text{III/-3 und IV-II}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0.75 & -0.25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{6} & 0.25 & 3.25 \end{array}\right) \overrightarrow{\text{IV -(7/6)II}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0.75 & -0.25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 3.25 + \frac{7^2}{18} \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV*4}]{}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0.75 & -0.25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 13 + \frac{196}{18} \end{array}\right)$$

$d = 13 + \frac{196}{18} = 23.\overline{8}$

$c = \frac{7}{3}$

$b = -0.25 + \frac{7}{6} - 0.75 * 23.\overline{8} = -17$

$a = 4 - \frac{35}{9} = 0.\overline{1}$

$p(x) = 0.\overline{1}x^3 - 17x^2 + \frac{7}{3}x + 23.\overline{8}$