Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden I — Dr. A. A'Campo-Neuen
Herbstsemester 2021 — 7. Oktober 2021

Aufgabenblatt 4

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei der folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Grenzwerte)* (a) Sei $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^3+1}}$. Finden Sie zu $\epsilon = 10^{-3}$ und zu $\epsilon = 10^{-6}$ jeweils ein konkretes $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Zeigen Sie jetzt mit der Grenzwertdefinition, dass die Folge a_n gegen 0 konvergiert.

(b) Schreiben Sie die folgenden Dezimalentwicklungen jeweils zunächst als unendliche Reihe und bestimmen Sie dann deren Grenzwert: $1,\overline{359}$ und $1,35\overline{9}$. (4 Punkte)

Aufgabe 2. *(Grenzwertrechenregeln)* Berechnen Sie die Grenzwerte der angegebenen Folgen (für $n \in \mathbb{N}$, $n \to \infty$):

$$a_n = \frac{2n+n^2-3}{4n^2-6n+1}\,, \quad b_n = \frac{\sqrt{n^3+1}-n}{2n\sqrt{n}}\,, \quad c_n = \frac{6\cdot 4^n + (-1)^n 2^n}{8\cdot 3^n + 4^{n+1}}\,, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{k+1}}{(-5)^k}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3. *(Konvergenz von Reihen)* Beweisen Sie durch vollständige Induktion:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Bestimmen Sie nun den Grenzwert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Rekursive Folge)* Als Startwert der Folge wählen wir eine Zahl $a_0 > 3$. Weiter sei
$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{5}{a_n}\right) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$
Zeigen Sie, dass die Folge a_n monoton fallend und durch $\sqrt{5}$ nach unten beschränkt ist. Schliessen Sie nun, dass die Folge konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Aufgabenblatt 1, Aufgabe 1(a). (4 Punkte)

Aufgabe 5. *(Vergleich von Folgen)* Zeigen Sie mithilfe der Bernoullischen Ungleichung (siehe S. 14)
$$(1-\frac{1}{n})^n(1+\frac{1}{n})^n \geq 1 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$
Bestimmen Sie nun $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n$.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ ist. (2 Punkte)

Und hier noch zwei Verständnisfragen zur Selbstkontrolle:

Frage 1. *(Konvergenz)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Wenn eine Zahlenfolge gegen einen Grenzwert konvergiert, wird der Abstand von a_n zum Grenzwert mit wachsendem n immer kleiner. ☐

(b) Gibt es ein offenes Intervall $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, das bis auf endlich viele Ausnahmen alle Folgenglieder a_n enthält, dann konvergiert die Folge a_n gegen a. ☐

(c) Gibt es ein offenes Intervall $(a-\epsilon, a+\epsilon)$, das unendlich viele der Folgenglieder a_n nicht enthält, dann konvergiert die Folge a_n nicht gegen a. ☐

Frage 2. *(Vertauschbarkeit von Grenzwertprozessen)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - 1\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-m}{m}\right)^k = \frac{m}{2m-1} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$ ☐

(b) $$\sum_{k=0}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{m} - 1\right)^k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m} - 1\right)^k.$$ ☐

(c) $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \frac{1}{2}\,.$ ☐

Abgabe der Aufgaben: Donnerstag, den 14. Oktober 2021, bis 12.30 Uhr als .pdf via ADAM bei Ihrem Tutor bzw. Ihrer Tutorin.