Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden I — Dr. A. A'Campo-Neuen
Herbstsemester 2021 — 10. Dezember 2021

Aufgabenblatt 13

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei der folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Spatvolumen)* Seien $u = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 1/2 \\ x \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(a) Für welche Wahl von $x \in \mathbb{R}$ sind die drei Vektoren u, v, w linear abhängig?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ spannen u, v, w ein Spat auf, dessen Volumen mit dem Volumen eines Würfels der Seitenlänge 2 übereinstimmt? (4 Punkte)

Aufgabe 2. *(Vektorprodukt)* Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$.

(a) Rechnen Sie nach, dass $\langle u \times v, e_j \rangle = \det(u, v, e_j)$ für $j = 1, 2, 3$.

(b) Schliessen Sie daraus $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w) \quad \forall w \in \mathbb{R}^3$ (siehe Bemerkung 7.4.6).

(c) Zeigen Sie nun: $u \times v = -(v \times u)$ und $\langle u, v \times w \rangle = \langle w, u \times v \rangle = \langle v, w \times u \rangle \quad \forall w \in \mathbb{R}^3$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Lineare Unterräume)* Welche der folgenden Teilmengen sind lineare Unterräume der angegebenen Vektorräume und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) $U = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \cup \left\{ \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

(b) Der Durchschnitt der Ebene im $\mathbb{R}^3$, definiert durch $x+y+z = 0$, mit der x-y-Ebene.

(c) Im $\mathbb{R}^3$ die Menge der Vektoren v, die mit der z-Achse einen Winkel von $45°$ bilden.

(d) $U = \{A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2} \mid \det(A) = 0\}$.

(e) $U = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{Mat}_{2\times 2}$.

(f) Die Polynome p von Grad 3 mit lokalem Maximum oder Minimum bei $x = 0$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4. *(Interpolationsaufgaben)* Seien x_1, x_2, x_3 verschiedene reelle Zahlen.

(a) Rechnen Sie folgendes nach: $\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$.

(b) Schliessen Sie nun, dass es zu jeder Wahl von Zahlen y_1, y_2, y_3 genau ein quadratisches Polynom p gibt mit $p(x_j) = y_j$ für $j = 1, 2, 3$. (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Unipotente Matrizen)* Sei A eine $n \times n$-Matrix der Form $A = E + B$, wobei $b_{ij} = 0$ für alle $i \geq j$.

(a) Zeigen Sie: $B^n = 0$ und $A^{-1} = E + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k B^k$.

(b) Berechnen Sie nun die Inverse folgender Matrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(3 Punkte)

Und hier noch zwei Verständnisfragen zur Selbstkontrolle:

Frage 1. *(Determinante)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Die Determinante einer 2×2-Matrix verschwindet genau dann, wenn die beiden Spaltenvektoren dieselbe Gerade erzeugen. ☐

(b) Die Determinante einer 2×2-Matrix ist positiv genau dann, wenn die beiden Spaltenvektoren einen spitzen Winkel bilden. ☐

(c) Die Determinante einer 3×3-Matrix ist ungleich Null genau dann, wenn die drei Spaltenvektoren eine räumliche Figur erzeugen. ☐

(d) Die Determinante einer 3×3-Matrix ist positiv genau dann, wenn die drei Spaltenvektoren zur Dreifingerregel der rechten Hand passen. ☐

Frage 2. *(Vektorräume)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) In jedem Vektorraum gibt es ein Vektorprodukt. ☐

(b) Die Lösungsmengen homogener linearer Gleichungssysteme sind Vektorräume. ☐

(c) Die Menge der Matrizen vom Typ $n \times n$ bilden einen Vektorraum. ☐

(d) Die quadratischen Polynome bilden einen linearen Unterraum des Vektorraums aller Polynome. ☐

Abgabe der Aufgaben: Donnerstag, den 16. Dezember 2021, bis 12.30 Uhr als .pdf via ADAM bei Ihrem Tutor bzw. Ihrer Tutorin.