Aufgabenblatt 9

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei der folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Flächenberechnung)* Skizzieren Sie jeweils den Graphen von f und berechnen Sie dann den Gesamtflächeninhalt des Gebietes, das zwischen der x-Achse und dem Graphen von f eingeschlossen ist.

(a) $f(x) = 1 - |x| + \frac{1}{2}x$ für $-2 \leq x \leq 2$,

(b) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ für $-1 \leq x \leq 2$. (4 Punkte)

Aufgabe 2. *(Stammfunktionen)* Sei $c > 0$ gegeben. Überprüfen Sie folgende Stammfunktionen, indem Sie jeweils die Ableitungen berechnen:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ für $x^2 \neq 1$, (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{c+x^2} = \frac{1}{\sqrt{c}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{c}})$,

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$ für $|x| < 1$,

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh}(x)$ für $x > 1$, wobei $\operatorname{arcosh}\colon \mathbb{R}_{>1} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine Umkehrfunktion von cosh bezeichnet.

Hinweise: Zu (d): Es gilt $\cosh^2(x) - \sinh(x)^2 = 1$ für alle x, wobei $\sinh(x) = \cosh'(x)$. (Wieso?) Ausserdem bei (c) und (d) Umkehrregel für Ableitungen verwenden.

(6 Punkte)

Aufgabe 3. *(Partielle Integration)* Sei $a > 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie mit partieller Integration folgende Integrale:

$$\int_0^\pi (x^2+1)\,\sin(x)\,dx\,, \qquad \int_1^a x^n \ln(x)\,dx\,, \qquad \int_0^a \sinh^2(x)\,dx\,.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Riemannsummen)* Sei $a > 0$ vorgegeben.

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion: $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Berechnen Sie nun mithilfe von Riemannsummen das Integral $\int_0^a x^3\,dx$.

(3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Eindeutigkeit der Logarithmusfunktion)* Sei $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$ und $f(xy) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y > 0$. Schliessen Sie hieraus, dass f mit dem natürlichen Logarithmus übereinstimmt.

Hinweis: Leiten Sie das Logarithmengesetz auf beiden Seiten nach x ab (wobei Sie y als konstant betrachten). (3 Punkte)

Und hier noch zwei Verständnisfragen zur Selbstkontrolle:

Frage 1. *(Riemannsummen)* Sei f eine integrierbare Funktion auf $[a, b]$, und sei eine Folge von Zerlegungen des Intervalls gewählt, deren Feinheit gegen Null geht. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Die entsprechenden Riemannobersummen konvergieren gegen das Integral von f über $[a, b]$. ☐

(b) Die Differenz zwischen Riemannobersumme und Riemannuntersumme für die entsprechenden Zerlegungen konvergiert gegen Null. ☐

(c) Die entsprechenden Riemannobersummen konvergieren gegen denselben Grenzwert wie die entsprechenden Riemannuntersummen. ☐

Frage 2. *(Stammfunktionen)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Jede integrierbare Funktion hat eine Stammfunktion. ☐

(b) Jede stetige Funktion hat eine Stammfunktion. ☐

(c) Jede elementare Funktion hat eine elementare Stammfunktion. ☐

Abgabe der Aufgaben: Donnerstag, den 18. November 2021, bis 12.30 Uhr als .pdf via ADAM bei Ihrem Tutor bzw. Ihrer Tutorin.