

Aufgabenblatt 3

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei der folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. (*Binomialkoeffizienten*) (a) Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

$$\binom{10}{7}, \binom{101}{99}, \binom{7}{3}, \binom{16}{4}.$$

(b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einem Stapel von 8 Büchern 3, 4 oder 5 auszuwählen?

(c) Wieviele Lösungen der Gleichung $x + y + z = 10$ gibt es, wobei $x, y, z \in \mathbb{N}_0$ sein sollen? (4 Punkte)

Aufgabe 2. (*Induktion*) Beweisen Sie durch vollständige Induktion über n :

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (b) \quad \binom{n}{k} \leq 2^{n-1} \quad \forall k, n \in \mathbb{N}, k \leq n.$$

$$(c) \sum_{m=k}^n \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad \forall k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n. \quad (6 \text{ Punkte})$$

Aufgabe 3. (*Polytope*) Sei P ein konvexes Polytop mit 7 Eckpunkten und nur Dreiecken als Seitenflächen.

(a) Zeigen Sie, dass P genau 10 Seitenflächen haben muss. Wieviele Kanten gibt es?

(b) Zeichnen Sie mindestens zwei Schlegeldiagramme, die zu einem solchen Polytop passen.

Hinweis zu (b): Es gibt genau 5 kombinatorisch verschiedene mögliche Schlegeldiagramme von diesem Typ. (4 Punkte)

Aufgabe 4. (*Schachproblem*) Der König befinde sich in der unteren linken Ecke des Schachbretts und soll zur oberen rechten Ecke bewegt werden. Wie viele mögliche Wege gibt es, wenn der König sich nur jeweils einen Schritt nach rechts oder einen Schritt nach oben bewegen darf und das Schachbrett 8×8 Felder hat? (3 Punkte)

Aufgabe 5. (*Binomialkoeffizienten*) Beweisen Sie:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3 \text{ Punkte})$$

Und hier noch zwei Verständnisfragen zur Selbstkontrolle:

Frage 1. (*Irrationale Zahlen*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- (a) Die Summe von je zwei irrationalen Zahlen ist immer irrational. ☐
- (b) Jede Summe aus einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist irrational. ☐
- (c) Alle Zahlen der Form $\frac{n}{\sqrt{2}}$ (für $n \in \mathbb{N}$) sind irrational. ☐

Frage 2. (*Abzählbarkeit*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- (a) Im Intervall $[1, 2]$ der Zahlen zwischen 1 und 2 gibt es überabzählbar viele irrationale Zahlen. ☐
- (b) Es gibt Intervalle, in denen keine rationalen Zahlen liegen. ☐
- (c) In jedem Zahlenintervall liegen sowohl rationale, als auch irrationale Zahlen. ☐

Abgabe der Aufgaben: Donnerstag, den 7. Oktober 2021, bis 12.30 Uhr als .pdf via ADAM bei Ihrem Tutor bzw. Ihrer Tutorin.