

**Vorlesung:
Mathematische Methoden I**

A. A'CAMPO-NEUEN

Universität Basel, Herbstsemester 2021

LITERATUR ZU MATHEMATISCHE METHODEN I UND II

Mathematik für Naturwissenschaftler:

In den folgenden Büchern, mit Ausnahme der Pearson-Bücher, werden sowohl Differential- und Integralrechnung als auch Lineare Algebra behandelt.

- George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Analysis 1 und Analysis 2. Lehr- und Übungsbuch, Pearson Verlag, 2013 bzw. 2014. *Deckt zusammen den Stoff von zwei Semestern ab. Enthält eine Fülle von Zeichnungen und viele Beispiele, die ausführlich behandelt werden, sowie numerische Anwendungen.*
- Karl-Heinz Goldhorn und Hans-Peter Heinz, Mathematik für Physiker 1, Grundlagen aus Analysis und Linearer Algebra, Springer-Verlag 2007. *Enthält den Stoff für die ersten beiden Semester; umfangreicher Aufgabenteil; zu jedem Kapitel gibt es einen Ergänzungsteil mit Details zu Beweisen oder weiterführenden Bemerkungen und Beispielen, die man je nach Interesse noch zusätzlich lesen kann.*
- Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler in 3 Bänden, Vieweg-Verlag 2001. *Niveau elementarer. Sehr ausführliche Darstellung mit vielen Beispielen. Elementare Rechnungen in allen Schritten ausgeführt, viele Aufgaben mit Lösungen, insofern gut zum Selbststudium geeignet. Nachteil: Jeder Band enthält nur den Stoff eines Semesters, die Anschaffung ist also relativ teuer.*
- Lothar Papula, Klausur- und Übungsaufgaben zu Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg-Verlag. *Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung zu Papulas Lehrbuch, Band 1-3, und zwar mit sehr ausführlichen Lösungen! Gut geeignet, um Routineverfahren einzuüben.*

Differential- und Integralrechnung:

Die folgenden Bücher sind für Mathematik- und Physikstudenten geschrieben und behandeln die Differential- und Integralrechnung jeweils in mehreren Bänden.

- Klaus Jänich, Mathematik 1. Geschrieben für Physiker, Springer-Lehrbuch 2005. *Umfasst den Stoff für die ersten beiden Semester, Darstellung erfrischend locker, Tempo gelegentlich hoch, viele Zeichnungen. Aufgabenteil gegliedert in theoretische und anwendungsbezogene Aufgaben.*
- Otto Forster, Analysis 1, 2 und 3, Vieweg-Verlag, Braunschweig 1979/81. *Standardlehrbuch, knapp formuliert, trotzdem alles Wesentliche enthalten. Auch zu diesen Büchern gibt's separate Aufgabenbände mit ausführlichen Lösungen!*
- Konrad Königsberger, Analysis 1 und 2, Springer-Lehrbuch, Berlin 1993. *Etwas ausführlicher, enthält viele Beispiele, die durch Zeichnungen anschaulich werden.*
- Wolfgang Walter, Analysis I und II, Springer-Lehrbuch, Berlin 1989/90. *Sehr ausführlich, zusätzlich interessante historische Anmerkungen und physikalische*

Beispiele. Es gibt einen Anhang mit Lösungen und Lösungshinweisen zu ausgewählten Aufgaben.

- E. Hairer und G. Wanner, *Analysis by Its History*, Springer Verlag, Berlin 1996. *Anregende historische Darstellung, sehr schön illustriert.*

Anwendungen in der Biologie:

- Jan Prüß, Roland Schnaubelt, Rico Zacher, *Mathematische Modelle in der Biologie*, Birkhäuser Verlag, Basel 2008. *Es werden Differentialgleichungen vorgestellt, die u.a. das Wachstum von Populationen, die Ausbreitung von Infektionen, Genetische Prozesse oder chemische Reaktionen modellieren.*

Formelsammlungen:

- Bronstein et al., *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 2005. *Ein echtes Kompendium, allerdings nicht ganz billig.*
- *Formelsammlung Mathematik*, Binomi-Verlag. *Kurz gefasste Ausgabe, die aber deutlich über die schulüblichen Sammlungen hinausgeht, erfreulich preiswert.*
- *Formeln, Tabellen, Begriffe. Mathematik – Physik – Chemie*, Orell-Füssli-Verlag, 4. Auflage 2013. *Klassiker schon im Gymnasium.*
- *Fundamentum Mathematik und Physik*, Orell-Füssli-Verlag, 2001. *Sehr elementar, deshalb nur zum Einstieg geeignet.*

INHALTSVERZEICHNIS

| | | |
|-----|--|-----|
| 1 | Mathematisches Handwerkszeug | 6 |
| 1.1 | Aussagen, Beweise | 6 |
| 1.2 | Vollständige Induktion | 11 |
| 1.3 | Kombinatorik, binomischer Lehrsatz, Eulerformel | 15 |
| 1.4 | Zahlensystem, (Über-)Abzählbarkeit | 20 |
| 2 | Funktionen und Grenzwerte | 24 |
| 2.1 | Folgen und Grenzwerte | 24 |
| 2.2 | Grenzwerte von Funktionen | 32 |
| 2.3 | Elementare Funktionen | 36 |
| 2.4 | Stetigkeit | 43 |
| 3 | Komplexe Zahlen und Polynome | 47 |
| 3.1 | Komplexe Zahlen | 47 |
| 3.2 | Polynome über den komplexen Zahlen | 54 |
| 4 | Differentialrechnung | 58 |
| 4.1 | Differenzierbarkeit | 58 |
| 4.2 | Lokale Extrema und Mittelwertsatz | 67 |
| 4.3 | Höhere Ableitungen, Konvexität, Newtonverfahren | 71 |
| 5 | Integralrechnung | 78 |
| 5.1 | Riemann-Integral | 78 |
| 5.2 | Stammfunktionen und partielle Integration | 83 |
| 5.3 | Substitutionsregel, rationale Funktionen und uneigentliche Integrale | 87 |
| 5.4 | Exkurs: Taylorentwicklung und Integration | 93 |
| 6 | Exkurs: Fouriertheorie | 96 |
| 6.1 | Kreisfunktionen und Integrale | 96 |
| 6.2 | Harmonische Schwingungen und Fourieranalyse | 98 |
| 7 | Lineare Algebra | 102 |
| 7.1 | Lineare Gleichungssysteme und Matrizen | 102 |
| 7.2 | Rechnen mit Matrizen | 111 |
| 7.3 | Determinanten | 115 |
| 7.4 | Geometrische Bedeutung der Determinante | 121 |
| 7.5 | Vektorräume | 124 |
| 7.6 | Lineare Abhängigkeit, Basis und Dimension | 131 |
| 7.7 | Exkurs: Stochastische Matrizen | 138 |

EINLEITUNG

Mathematische Methoden spielen bei der Lösung vieler alltäglicher Probleme eine Rolle, ohne dass uns das immer bewusst ist, und sie tragen entscheidend zur Entwicklung der Technik bei, die uns selbstverständlich umgibt. Deshalb ist es vor allem für Naturwissenschaftler unerlässlich, die grundlegenden mathematischen Konzepte kennenzulernen, sich in die mathematische Sprache einzuleben und eine gewisse Sicherheit im Umgang mit mathematischen Methoden zu erlernen.

Unter den Naturwissenschaften ist die Physik am stärksten mit der Mathematik verflochten. Mathematische und physikalische Begriffsbildungen haben sich immer wieder gegenseitig inspiriert und beeinflusst. Zum Beispiel beruht das Konzept der Ableitung einer Funktion, so wie sie Newton entwickelt hat, auf der Untersuchung der momentanen Geschwindigkeit eines bewegten Körpers, und die Vektorrechnung hatte ihren Ausgangspunkt in der Untersuchung von Kräften. Zur Formulierung der modernen Physik ist sehr anspruchsvolle Mathematik unerlässlich.

Auch in der Biologie kommen mathematische Methoden zum Einsatz. Zum Beispiel wird in der Evolutionsbiologie das Wachstum von Populationen mithilfe gekoppelter Differentialgleichungen modelliert. Auch die Entwicklung von Epidemien lassen sich so beschreiben. In der Strukturbiologie verwendet man zur Untersuchung des räumlichen Aufbaus von Makromolekülen wie Proteinen, DNA oder RNA sowohl Röntgenkristallographie als auch NMR Spektroskopie. Aus den Messungen lassen sich unter anderem mithilfe der Fouriertransformation Rückschlüsse auf die atomare Struktur ziehen.

Die Computer Science hat mit der Mathematik vor allem die systematische Arbeitsweise und das logische Zerlegen von Problemen zur Entwicklung schrittweiser Lösungsverfahren, der Algorithmen, gemeinsam. Ein elementares Beispiel eines solchen Lösungsverfahrens in der Mathematik ist der sogenannte euklidische Algorithmus, mit dem der grösste gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen bestimmt werden kann, ohne die Zahlen dafür in Primfaktoren zerlegen zu müssen.

Kapitel 1

Mathematisches Handwerkszeug

1.1 AUSSAGEN, BEWEISE

Zusammenfassung: Die mathematische Arbeitsweise besteht darin, Vermutungen in Form von Aussagen zu entwickeln, die überprüft und bewiesen oder als falsch verworfen werden. Hier werden erste Beispiele für Aussagen und Beweise gegeben. Beim direkten Beweis führt man die Aussage auf akzeptierte einfachere Aussagen zurück. Beim Widerspruchsbeweis geht man vom Gegenteil der vermuteten Aussage aus und leitet daraus einen Widerspruch her.

In der Mathematik beschäftigt man sich in der Regel mit Aussagen, die nur entweder wahr oder falsch sein können. Hier einige Beispiele für Aussagen:

- Mathematik ist eine kreative Wissenschaft.
- $1 + 1 = 2$.
- In jedem Dreieck schneiden sich die drei Winkelhalbierenden in einem Punkt, und zwar dem Inkreismittelpunkt.
- Jede Primzahl ausser 2 ist ungerade.

Die erste Aussage halte ich selbstverständlich für wahr, aber es handelt sich in der Tat um eine subjektiv gefärbte Aussage, über deren Wahrheitsgehalt es unterschiedliche Meinungen geben kann. Die übrigen Aussagen dagegen sind typische wahre mathematische Aussagen. Unabhängig davon, ob eine solche Aussage wahr oder falsch ist, kann man ihre Negation bilden, also das logische Gegenteil. Hier ist die Negation der vierten Aussage: *Es gibt eine gerade Primzahl, die von 2 verschieden ist*. Dies ist nun eine falsche Aussage. Oder man kann mehrere Aussagen logisch miteinander verknüpfen (durch “und” bzw. “oder”). Hier ein Beispiel: *Die Anzahl der Studierenden im Saal ist durch 3 oder durch 5 teilbar*. Und die Negation dieser Aussage lautet: *Die Anzahl der Studierenden im Hörsaal ist weder durch 3 noch durch 5 teilbar*.

Wie kann man nun entscheiden, ob eine vorgelegte Aussage wahr oder falsch ist? Schauen wir uns dazu einige Beispiele an.

Vermutung: Jede Zahl der Form $2^{(2^n)} + 1$, wobei n eine natürliche Zahl ist, ist eine Primzahl.

Um den Wahrheitsgehalt dieser Aussage zu prüfen, setzen wir einige Werte ein und erhalten für $n = 1$ die Zahl $2^2 + 1 = 5$, für $n = 2$ die Zahl $2^4 + 1 = 17$ und für $n = 3$ die Zahl $2^8 + 1 = 257$, wiederum eine Primzahl. Auch für $n = 4$ findet man

eine Primzahl, nämlich $2^{16} + 1 = 65537$. Aber wie der Mathematiker Euler 1732 zeigen konnte, ergibt sich für $n = 5$ keine Primzahl, es ist nämlich

$$2^{(2^5)} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417.$$

Die Vermutung erweist sich damit als falsch, und zwar durch Angabe eines *Gegenbeispiels*.

Die berühmte (starke) Goldbachvermutung, die nach dem Mathematiker Goldbach (1690-1764) benannt ist, sieht noch einfacher aus und lautet:

Vermutung: Jede gerade Zahl $a > 2$ kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.

Zum Beispiel sind $8 = 3 + 5$, $12 = 5 + 7$ und $18 = 5 + 13 = 7 + 11$. Es wurde bereits bewiesen, dass die Goldbachvermutung für Zahlen $a < 26 \cdot 10^{17}$ richtig ist. Aber es ist noch immer eine offene Frage, ob die Aussage auch für beliebig grosse gerade Zahlen a stimmt. Auf die Lösung dieses Problems wurde sogar zeitweise ein Preisgeld von einer Million Dollar ausgesetzt, das aber mangels Lösung nicht ausgezahlt werden konnte. Schauen wir uns nun eine weitere Aussage an:

Vermutung: Sind a und b zwei positive Zahlen, so gilt stets:

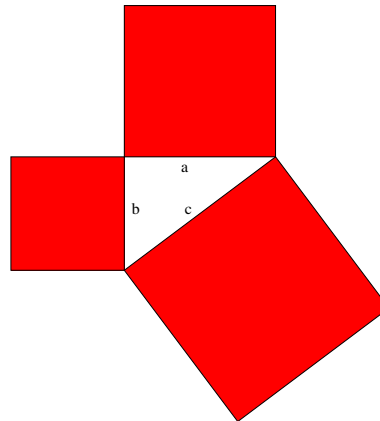
$$(a + b)^2 > a^2 + b^2.$$

Diese Aussage ist wahr. Um dies nachzuweisen, reicht es natürlich nicht, einige Werte exemplarisch einzusetzen. Hier benötigen wir ein Argument, das für alle in Frage kommenden Werte von a und b funktioniert. Wir können etwa die binomische Formel verwenden und argumentieren, dass in dem Ausdruck $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ der mittlere Term stets echt positiv ist, wenn $a, b > 0$ sind. Oder wir können die Behauptung geometrisch begründen, indem wir ein Quadrat der Seitenlänge $a + b$ aufzeichnen und die auf naheliegende Weise darin enthaltenen Quadrate der Seitenlänge a bzw. b markieren. Offenbar füllen die beiden kleineren Quadrate das grosse Quadrat nicht vollständig aus, der Flächeninhalt des grossen Quadrats ist also echt grösser als die Summe der Inhalte der Teilquadrate.

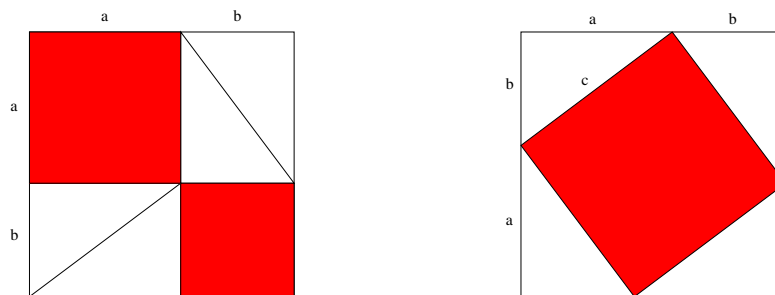
Ich möchte nun zwei Beweisstrategien anhand von Beispielen erläutern.

Direkter Beweis: Eine behauptete mathematische Aussage wird begründet, indem man sie nach den Gesetzen der Logik aus möglichst wenigen Grundannahmen, den *Axiomen*, und aus bereits akzeptierten Aussagen herleitet. Hierzu ein prominentes Beispiel aus der euklidischen Geometrie, der Satz des Pythagoras.

1.1.1 SATZ Bei einem rechtwinkligen Dreieck Δ stimmt die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten a, b mit dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse c überein: $a^2 + b^2 = c^2$.



Für diesen Satz gibt es sehr viele verschiedene Beweise, von denen ich nur einen herausgreifen will. Bei diesem Beweis bildet man ein Quadrat der Seitenlänge $a + b$ und zerlegt es auf zwei verschiedene Arten.



Die erste Zerlegung besteht darin, je ein Quadrat der Seitenlänge a bzw. b einzuzichnen (s. Zeichnung) und die verbleibenden 2 Rechtecke wiederum zu unterteilen, so dass man insgesamt 4 zu Δ kongruente Dreiecke erhält. Bei der zweiten Zerlegung werden 4 zu Δ kongruente Dreiecke in den Ecken des grossen Quadrats plaziert, und zwar so, dass jeweils die Seiten a, b im Uhrzeigersinn aufeinanderfolgen. In der Mitte entsteht eine Raute der Seitenlänge c . Tatsächlich ist es sogar ein Quadrat, wie eine Bilanz der Winkel zeigt. Entfernt man jeweils die 4 Dreiecke, bleiben flächengleiche Figuren übrig, also gilt $a^2 + b^2 = c^2$. q.e.d.

Welche einfacheren Aussagen wurden in diesem Beweis verwendet? Wir haben benutzt, dass jedes rechtwinklige Dreieck mit denselben Kathetenlängen wie Δ bereits zu Δ kongruent ist. Und die Bilanz der Winkel beruht darauf, dass die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt.

Widerspruchsbeweis: Dieses Vorgehen geht von dem Grundprinzip aus, dass eine mathematische Aussage nur entweder wahr oder falsch sein kann, aber nicht beides zugleich. Dies macht man sich folgendermassen zunutze. Um eine behauptete Aussage zu zeigen, nimmt man zunächst an, ihr Gegenteil sei richtig und leitet daraus einen Widerspruch zu dieser Annahme oder zu bereits akzeptierten Tatsachen her. Die Negation der Behauptung erweist sich damit als falsch, also muss die Behauptung selbst richtig sein. Zur Erläuterung hier ein Beispiel:

1.1.2 SATZ Die positive Quadratwurzel aus 2 ist eine irrationale Zahl.

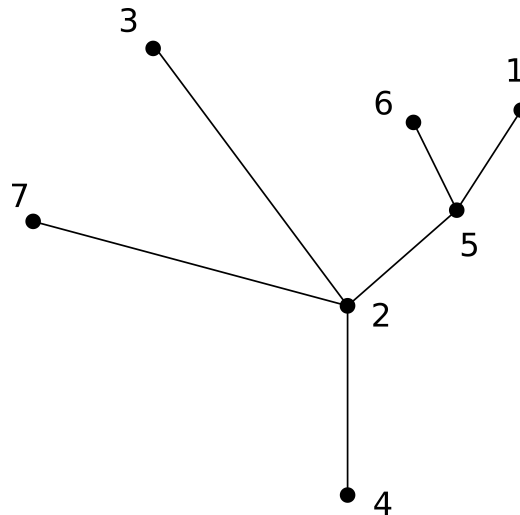
Beweis. Wir führen die Annahme des Gegenteils zum Widerspruch. Nehmen wir an, x sei eine positive rationale Zahl mit $x^2 = 2$. Die Zahl x lässt sich dann als gekürzter Bruch in der Form $x = p/q$ schreiben, wobei p, q teilerfremde natürliche Zahlen sind. Für die Zahlen p, q ergibt sich daraus $p^2/q^2 = 2$ und daher $p^2 = 2q^2$. Insbesondere ist also das Quadrat von p eine gerade Zahl. Das ist aber nur möglich, wenn auch p selbst bereits gerade ist. Wir schreiben p in der Form $p = 2s$ und erhalten $4s^2 = 2q^2$ und daraus $2s^2 = q^2$. Wie eben folgt, dass auch q gerade ist. Wenn aber sowohl p als auch q gerade sind, ist der Bruch p/q doch kürzbar im Widerspruch zur Annahme. Damit ist gezeigt: die positive Quadratwurzel aus 2 kann keine rationale Zahl sein! q.e.d.

Untersuchen wir nun exemplarisch eine Frage, bei der zuerst eine Vermutung entwickelt werden muss, bevor wir daran gehen können, die Vermutung zu beweisen.

1.1.3 DEFINITION Einen Graphen, bestehend aus mindestens zwei Punkten (so genannten Knoten) und verbindenden Kanten, nennen wir einen *Baum*, wenn es im Graphen keinen geschlossenen Kantenweg gibt und wenn der Graph zusammenhängend ist, d.h. wenn er nicht aus mehreren unverbundenen Teilfiguren besteht.

Sei jetzt $n > 2$ eine natürliche Zahl. Wir stellen uns folgende Frage:

Frage: Wieviele Bäume mit n durchnummerierten Knoten gibt es?



Genauer ist hier gemeint, dass die n Knoten mit den Zahlen von 1 bis n beschriftet sind. Und wir betrachten zwei solche Bäume als gleich, wenn jeweils dieselben Paare von Knoten durch eine Kante verbunden sind. Bei einer Zeichnung dürfen die Kanten beliebig lang dargestellt sein, die genaue Gestalt und die Position der Knoten ist unerheblich.

In diesem Sinn gibt es für $n = 3$ genau drei verschiedene Bäume mit nummerierten Knoten. Für $n = 4$ gibt es 16 verschiedene solche Bäume, und es ist schon

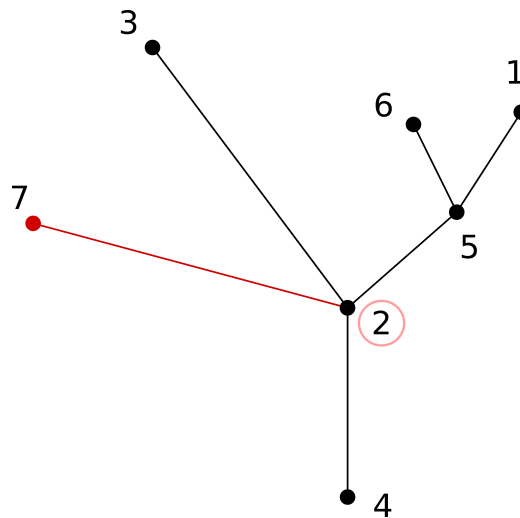
schwieriger, die Übersicht zu behalten. Um nun das Zählen der Möglichkeiten zu vereinfachen, entwickeln wir erst einen Code für Bäume mit numerierten Knoten, den sogenannten *Prüfer-Code*.

Und zwar verwenden wir als Code jeweils eine Liste von $n - 2$ Zahlen aus dem Zahlenvorrat $\{1, 2, \dots, n\}$ (wobei Wiederholungen erlaubt sind). Dafür halten wir zunächst folgendes fest (siehe Aufgabenblatt 1):

Beobachtung: Jeder Baum hat mindestens ein freies Ende, d.h. einen Knoten, von dem nur genau eine Kante ausgeht.

Wir ordnen einem gegebenen Baum mit n durchnummerierten Knoten einen Code zu, indem wir die folgenden Schritte so oft wiederholen, bis nur noch eine Kante übriggeblieben ist:

1. Wir suchen dasjenige freie Ende im Baum mit der höchsten Nummer und notieren uns die Nummer des eindeutig bestimmten Nachbarknotens dieses freien Endes.
2. Nun entfernen wir dies freie Ende mitsamt der davon ausgehenden Kante, und es bleibt ein Baum mit $n - 1$ Knoten übrig.



Bei diesem Baum ist der rot markierte Knoten das freie Ende mit der höchsten Nummer, sein Nachbarknoten hat die Nummer 2. Das nächsthöhere freie Ende ist am Knoten mit der Nummer 5 angeheftet usw. Der Code für diesen Baum lautet also $[2, 5, 2, 2, 5]$.

Man kann nun beweisen, dass jede geordnete Liste von $n - 2$ Zahlen aus dem Vorrat $\{1, \dots, n\}$ auch tatsächlich als Code vorkommt und sich aus dem Code der Baum wieder rekonstruieren lässt. Demonstrieren wir dies an unserem Beispiel: Wir lesen den Code $[2, 5, 2, 2, 5]$ von hinten nach vorn. Die letzte Nummer ist die 5. Also endete der Prozess mit einer Kante, die von Knoten Nummer 5 ausgeht. Der andere Knoten muss mit der kleinsten Zahl ≤ 7 beschriftet sein, die im Code fehlt, hier also einer 1. Ausserdem gibt es eine Kante, die bei Knoten Nummer 5 angeheftet ist, und zwar geht diese Kante von der Nummer 2 aus, die vor der 5 im Code steht. Weil die vorletzte Nummer eine 2 ist, gibt es ausserdem eine Kante, die beim Knoten Nummer

2 angeheftet ist, und der andere Knoten dieser Kante ist mit der kleinsten Zahl beschriftet, die im Code fehlt und die wir bei der Rekonstruktion bisher noch nicht verbraucht haben, hier also der Nummer 3. Die vorvorletzte Nummer ist wiederum eine 2. Also gibt es eine weitere Kante, die beim Knoten Nummer 2 angeheftet ist, und der andere Knoten dieser Kante ist mit der nächsten fehlenden Zahl beschriftet, hier also der Nummer 4. Das erneute Auftreten der 5 im Code verrät uns, dass bei Knoten Nummer 5 eine weitere Kante angeheftet ist, und zwar am anderen Ende beschriftet mit der nächsten fehlenden Zahl, der Nummer 6. Und die erste 2 schliesslich bedeutet, dass ein freies Ende mit der letzten noch fehlenden Nummer, der 7, an Knoten Nr. 2 angeheftet ist.

Es gibt also gleichviele Bäume mit numerierten Knoten wie Codes. Die Anzahl möglicher Codes lässt sich sehr leicht zählen, und wir erhalten folgende, verblüffend einfache Antwort auf die eingangs gestellte Frage, den Satz von Cayley:

1.1.4 SATZ *Es gibt genau n^{n-2} verschiedene Bäume mit n numerierten Knoten.*

1.2 VOLLSTÄNDIGE INDUKTION

Zusammenfassung: Hier geht es um eine Beweismethode für Aussagen, die für alle (oder für fast alle) natürlichen Zahlen gelten sollen. Die vollständige Induktion besteht aus der Induktionsverankerung, d.h. der Überprüfung der Aussage für die kleinste natürliche Zahl, und dem eigentlichen Induktionsschritt, bei dem aus der Gültigkeit der Aussage für eine gewisse natürliche Zahl n auf die Gültigkeit der Aussage für die nächste Zahl $n + 1$ geschlossen wird.

Zur Notation: Mit \mathbb{N} bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Soll die Zahl 0 auch noch zur Menge dazugehören, schreiben wir \mathbb{N}_0 . Das Symbol \forall ist eine Kurzschreibweise von "für alle". Wenn man sagen möchte, "für alle natürlichen Zahlen", kann man also kurz schreiben: $\forall n \in \mathbb{N}$.

Die Induktionsmethode beruht auf dem folgenden Prinzip:

Peanosches Induktionsaxiom: *Enthält eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ die Zahl 1 und enthält A mit jedem Element auch dessen Nachfolger, so umfasst A bereits ganz \mathbb{N} .*

Um zu zeigen, dass eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gültig ist, kann man daher folgendermassen vorgehen:

Induktionsverankerung: $\mathcal{A}(1)$ zeigen.

Induktionsschritt ($n \rightarrow n + 1$): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ zeigen: $\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n + 1)$.

Gelingen diese beiden Schritte, so ist die Aussage $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Dazu ein erstes Beispiel.

1. Behauptung: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist gleich n^2 , d.h.

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Induktionsverankerung: Für $n = 1$ wird behauptet $1 = 1^2$. Dies stimmt.

Schritt von n auf $n + 1$: Wir nehmen an, die Behauptung ist für n richtig, und wir müssen daraus schliessen, dass sie auch für $n + 1$ gilt. Genauer ist zu zeigen

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = (n + 1)^2.$$

Dazu gehen wir von der Induktionsvoraussetzung aus und formen solange um, bis die Induktionsbehauptung dasteht. Also starten wir mit

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2.$$

Nun addieren wir auf beiden Seiten die nächste ungerade Zahl, also $2(n + 1) - 1 = 2n + 1$ und erhalten:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = n^2 + (2n + 1).$$

Die rechte Seite können wir mit der binomischen Formel umschreiben in $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. Wir erhalten

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) = (n + 1)^2.$$

Dies war zu zeigen, wir sind also fertig. q.e.d.

Entsprechend kann man auch zeigen (siehe Aufgabenblatt 1):

2. Behauptung: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Wir können die Methode auch verwenden, um zu beweisen, dass eine gewisse Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_0$ oder für alle $n \in \mathbb{N}$ ab einer gewissen kleinsten Zahl n_0 gilt. Dazu müssen mit der Verankerung bei $n = 0$ bzw. bei $n = n_0$ beginnen. Hier einige Beispiele:

3. Behauptung: Sei q eine beliebige Zahl ungleich 1. Dann gilt:

$$1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Induktionsverankerung: Für $n = 0$ wird behauptet $1 = q^0 = \frac{q^1 - 1}{q - 1}$, was offenbar richtig ist.

Schritt von n auf $n + 1$: Wir nehmen an, die Behauptung ist für n richtig, und wir müssen daraus schliessen, dass sie auch für $n + 1$ gilt. Genauer ist zu zeigen:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}.$$

Wir starten wieder mit der Induktionsvoraussetzung, also der Behauptung für n :

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Wir addieren auf beiden Seiten q^{n+1} und erhalten:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \left(\sum_{k=0}^n q^k \right) + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1}.$$

Nun bringen wir die rechte Seite auf einen Hauptnenner und finden

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+1}(q - 1)}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}, \quad \text{wie behauptet.} \quad \text{q.e.d.}$$

4. Behauptung: $2^n > n + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2$.

Beweis. Induktionsverankerung: Für $n = 2$ wird behauptet $2^2 = 4 \geq 2 + 1$, was stimmt.

$n \rightarrow n + 1$: Zu zeigen ist: $2^{n+1} > n + 2$. Die Induktionsvoraussetzung lautet hier:

$$2^n > n + 1.$$

Multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit 2, folgt daraus

$$2^{n+1} > 2n + 2 > n + 2.$$

Zusammen ergibt sich also $2^{n+1} > n + 2$, wie behauptet. q.e.d.

Wichtig ist: *Ein Induktionsbeweis funktioniert nur dann, wenn sowohl die Verankerung als auch der Induktionsschritt gelingen.*

Hier zwei Beispiele dazu, dass man weder die Verankerung noch den Induktionsschritt weglassen kann.

1.2.1 BEISPIELE • Die Ungleichung $n! \leq 2^n + n$ stimmt für $n = 1, 2, 3$, ist aber falsch für alle natürliche Zahlen $n \geq 4$. Hier funktioniert also die Induktionsverankerung, aber nicht der Induktionsschritt.

- Versuchen wir die folgende Behauptung zu beweisen:

$$\sum_{k=2}^n k = \frac{n}{2}(n + 1) + 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 1.$$

Der Induktionsschritt funktioniert hier. Denn angenommen, die Aussage ist richtig für ein gegebenes n . Wir addieren zur Induktionsvoraussetzung auf beiden Seiten $(n + 1)$ hinzu und erhalten

$$\sum_{k=2}^n k + (n + 1) = \sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{n}{2}(n + 1) + 5 + (n + 1) = \frac{n + 1}{2}(n + 2) + 5.$$

Die Aussage stimmt dann also auch für $n+1$. Aber die Induktionsverankerung klappt nicht. Denn setzt man $n = 2$ ein, erhält man die Aussage

$$2 = \frac{2}{2}(2+1) + 5 = 8,$$

und das ist ja offensichtlich falsch.

Hier jetzt ein (erfolgreicher) Induktionsbeweis einer sehr nützlichen Ungleichung.

5. Behauptung (Bernoullische Ungleichung): Sei $t \in \mathbb{R}$, $t > -1$ fest gewählt. Dann gilt:

$$(1+t)^n \geq 1+nt \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Voraussetzung an t kann man nicht fallenlassen, denn zum Beispiel für $t = -3$ und $n \geq 5$ stimmt die entsprechende Ungleichung nicht.

Beweis. Induktionsverankerung: Für $n = 1$ lautet die Behauptung $(1+t)^1 \geq 1+1 \cdot t$, was offensichtlich richtig ist.

$n \rightarrow n+1$: zu zeigen ist

$$(1+t)^{n+1} \geq 1+(n+1)t.$$

Wir starten dafür wieder mit der Induktionsvoraussetzung

$$(1+t)^n \geq 1+nt.$$

Wir multiplizieren beide Seiten der Ungleichung mit dem Faktor $(1+t)$. Weil nach Voraussetzung $1+t > 0$ ist, bleibt dabei die Ungleichung erhalten und es folgt:

$$(1+t)^{n+1} = (1+t)^n(1+t) \geq (1+nt)(1+t).$$

Nun multiplizieren wir die rechte Seite aus und fassen neu zusammen:

$$(1+t)^{n+1} \geq (1+nt)(1+t) = 1+nt+t+nt^2 = 1+(n+1)t+nt^2.$$

Weil Quadrate nichtnegativ sind, wird der Ausdruck höchstens kleiner, wenn wir den Term nt^2 weglassen. Das heisst

$$1+(n+1)t+nt^2 \geq 1+(n+1)t.$$

Also folgt insgesamt $(1+t)^{n+1} \geq 1+(n+1)t$, wie behauptet. q.e.d.

1.3 KOMBINATORIK, BINOMISCHER LEHRSATZ, EULERFORMEL

Zusammenfassung: Mit vollständiger Induktion kann man viele interessante Aussagen beweisen. Hier sind weitere Beispiele: der binomische Lehrsatz, der die bekannten binomischen Formeln verallgemeinert, und die Eulersche Polyederformel.

Erinnern wir zuerst an die Definition der Binomialkoeffizienten, die in der Kombinatorik eine wichtige Rolle spielen.

1.3.1 DEFINITION Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ und $k \leq n$. Das Symbol $\binom{n}{k}$ (ausgesprochen: “ n über k ”) bezeichnet die Anzahl der Möglichkeiten, eine Teilmenge von k aus n verschiedenen Elementen auszuwählen. Unter der Teilmenge mit 0 Elementen versteht man dabei die leere Menge, hier gibt es nur eine Möglichkeit. Also ist $\binom{n}{0} = 1$ für alle n .

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ nennt man *Binomialkoeffizienten*, weil sie als Koeffizienten in der verallgemeinerten binomischen Formel auftreten. Beispielsweise ist $\binom{3}{1} = 3$, $\binom{3}{2} = 3$ und $\binom{3}{3} = 1$. Und es gibt $\binom{49}{6} = 13983816$ Möglichkeiten, aus 49 verschiedenen Zahlen 6 auszuwählen. Dies kann man mithilfe der folgenden Beziehung berechnen. Für alle $k \leq n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Denn der Zähler des ersten Bruchs gibt an, wieviele geordnete Listen von k aus n Elementen es gibt, und im Nenner steht die Anzahl $k!$ der Möglichkeiten, eine Liste von k verschiedenen Symbolen umzuordnen. Man beachte hierbei die Konvention $0! = 1$.

Zum Beispiel ist $\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 15$. Oder $\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6!}$. Weiter ergibt sich direkt aus der Definition, dass für alle $k, n \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$ folgendes gilt:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n, \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Die Binomialkoeffizienten lassen sich auch rekursiv erzeugen, genauer gilt die folgende *Rekursionsformel*:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{für alle } 1 \leq k \leq n.$$

Das kann man folgendermassen einsehen. Nehmen wir an, wir haben eines der n Symbole markiert, etwa mit einem $*$. Nun gibt es bei der Auswahl von k aus n Elementen zwei Möglichkeiten, entweder wir wählen das Symbol $*$ aus und ergänzen mit $k-1$ weiteren aus den restlichen $n-1$ Symbolen, oder wir legen das Symbol $*$ zur Seite und wählen k aus den restlichen $n-1$ aus. Im ersten Fall gibt es $\binom{n-1}{k-1}$ und im zweiten Fall $\binom{n-1}{k}$ Möglichkeiten, und zusammen folgt die Behauptung.

Im sogenannten *Pascalschen Dreieck* werden die Binomialkoeffizienten in einem dreieckigen Schema so angeordnet, dass jeweils die Zahl n die Zeile und die Zahl k

die Diagonale angibt, die von oben rechts nach unten links verläuft. Die angegebene Rekursionsformel bedeutet hier, dass sich der Koeffizient in Zeile n und Diagonale k berechnen lässt, indem man die zwei benachbarten Koeffizienten aus der Zeile darüber addiert.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & & &
 \end{array}$$

1.3.2 SATZ binomischer Lehrsatz: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n} b^n.$$

Beweis. Für $n = 2$ handelt es sich um die bekannte binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Für $n = 3$ lautet die Behauptung $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den binomischen Lehrsatz zu beweisen. Hier soll die Gelegenheit benutzt werden, die Methode der vollständigen Induktion daran nochmals vorzuführen.

Induktionsverankerung: Für $n = 1$ lautet die Behauptung

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b.$$

Dies ist offenbar korrekt.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Behauptung gilt für n , und schliessen daraus die Formel für $n+1$. Zu zeigen ist also:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.$$

Um dies zu zeigen, starten wir mit der Induktionsvoraussetzung:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n.$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit $(a+b)$ und erhalten:

$$(a+b)^{n+1} = \left(a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + b^n \right) (a+b).$$

Ausmultiplizieren liefert:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \dots + \binom{n}{n} a b^n +$$

$$\binom{n}{0}a^nb + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^n + b^{n+1}.$$

Nun fassen wir Terme mit gleichen Exponenten zusammen und verwenden die Rekursionsformel:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^nb + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \cdots + \binom{n+1}{n}ab^n + b^{n+1}.$$

Das war zu zeigen. q.e.d.

Aus dem binomischen Lehrsatz ergeben sich sofort interessante Beziehungen zwischen den Binomialkoeffizienten. Zum Beispiel liefert die Summe der Einträge jeder Zeile des Pascalschen Dreiecks eine Zweierpotenz, und die alternierende Zeilensumme ist jeweils Null.

1.3.3 FOLGERUNG

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$$

Man kann die Methode der vollständigen Induktion auch auf vielfältige Weise einsetzen, um geometrische Aussagen zu beweisen. Hier ein prominentes Beispiel aus der Graphentheorie.

1.3.4 DEFINITION Unter einem planaren Graphen versteht man eine Menge von Eckpunkten in der Ebene zusammen mit einer Auswahl von verbindenden Kanten, die sich nicht kreuzen dürfen. Schleifen sind allerdings erlaubt. Der Graph heisst zusammenhängend, wenn er nicht in mehrere unverbundene Teilfiguren zerfällt.

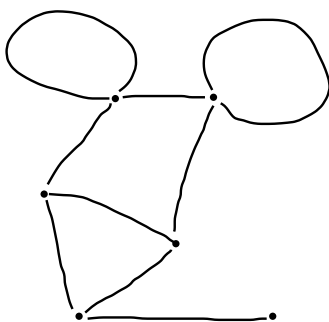
Ein planarer Graph zerlegt die Ebene in eine endliche Anzahl von zusammenhängenden Gebieten, wobei wir das äussere, unbeschränkte Gebiet mitzählen. Von Euler stammt die Beobachtung, dass zwischen den Anzahlen der Ecken, Kanten und Gebiete folgender Zusammenhang besteht:

1.3.5 SATZ Für jeden zusammenhängenden, planaren Graphen mit e Eckpunkten, k Kanten und f Gebieten gilt:

$$e - k + f = 2.$$

Für Bäume mit $e = n$ Eckpunkten gilt zum Beispiel $k = n - 1$ (siehe Übungsaufgabe) und $f = 1$ (es gibt nur das äussere, unbeschränkte Gebiet). Also ist hier $e - k + f = n - (n - 1) + 1 = 2$, wie behauptet.

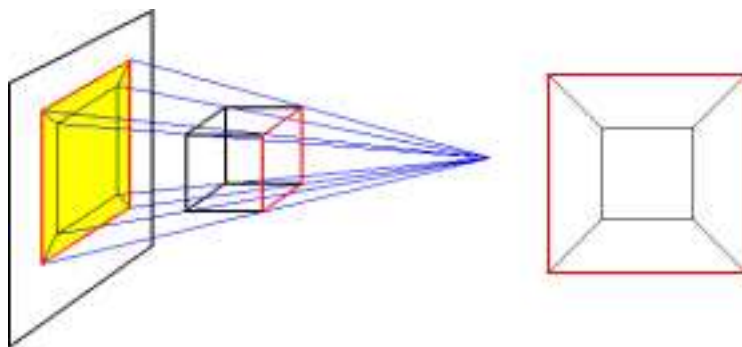
Hier ist ein Graph mit 6 Eckpunkten, 9 Kanten und 5 Gebieten.



Beweis. Beweisen wir diese Aussage durch vollständige Induktion über die Anzahl $n \in \mathbb{N}_0$ an Kanten. Zunächst die Verankerung: Hat der Graph keine Kante, dann besteht er aus nur einem Eckpunkt, und es gibt nur ein äusseres Gebiet. Also ist $e - k + f = 1 + 1 = 2$. Nehmen wir nun an, die Aussage sei richtig für alle Graphen mit $n \geq 0$ Kanten, und betrachten wir einen Graphen G mit $n + 1$ Kanten. Hat G nur einen Eckpunkt, dann sind alle Kanten Schleifen. In diesem Fall entfernen wir eine der Schleifen, und erhalten einen Graphen \tilde{G} , für den die Eulerformel richtig ist. Die Anzahlen von Schleifen und Gebieten hat sich dabei jeweils um 1 reduziert. Die Eulerformel gilt also auch für G . Hat der Graph G mindestens zwei Eckpunkte, gibt es mindestens eine Kante mit verschiedenen Endpunkten, weil der Graph zusammenhängend ist. Wir wählen eine solche Kante aus und kontrahieren sie zu einem Punkt. Dabei reduzieren sich die Anzahlen der Ecken und der Kanten jeweils um 1, die Anzahl der Gebiete aber bleibt unverändert. Auch in diesem Fall können wir schliessen, dass die Eulerformel für G richtig ist. q.e.d.

Die von Euler entdeckte Beziehung ist eigentlich bekannt unter dem Namen *Eulersche Polyederformel*. Unter einem Polyeder versteht man einen dreidimensionalen Körper, der von n -Ecken begrenzt wird, die aber nicht regelmässig zu sein brauchen. Man nennt ein Polyeder konvex, wenn die Seitenflächen nie nach innen einspringen. Besonders symmetrisch sind die fünf platonischen Körper, also Würfel, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder.

Projiziert man ein solches konvexes Polyeder mithilfe einer Lichtquelle, die man genügend nahe vor der Mitte einer ausgewählten Seitenflächen plaziert, auf eine Mattscheibe, sieht man einen zusammenhängenden, planaren Graphen.



Dabei wird die ganze Figur in die Projektion der ausgewählten, hier rot markierten Seitenfläche hineinprojiziert. Bei passender Wahl der Position der Lichtquelle hat

der Graph gleichviele Eckpunkte und gleichviele Kanten wie das Polyeder, und die beschränkten Gebiete des Graphen entsprechen genau den Seitenflächen, die man nicht ausgewählt hatte. Zählt man das unbeschränkte äussere Gebiet der Mattscheibe noch mit, stimmt also die Anzahl an Gebieten des Graphen mit der Anzahl an Seitenflächen des Polyeders überein. Deshalb erhalten wir nun folgendes Resultat:

1.3.6 FOLGERUNG *Für jedes konvexe Polyeder mit e Eckpunkten, k Kanten und f Seitenflächen gilt:*

$$e - k + f = 2.$$

Im Fall des Würfels sind diese Zahlen zum Beispiel $e = 8$, $k = 12$, $f = 6$.

Ein konvexes Polyeder, bei dem sämtliche Seitenflächen regelmässige n -Ecke sind und in jedem Eckpunkt genau m Seitenflächen zusammentreffen (für feste natürliche Zahlen $n, m \geq 3$), wird als *platonischer Körper* bezeichnet. Mit der Eulerformel können wir folgendes zeigen:

1.3.7 FOLGERUNG *Es gibt nur 5 platonische Körper, nämlich Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder.*

Beweis. Nehmen wir an, P sei ein konvexes Polyeder mit e Eckpunkten, k Kanten und f Seitenflächen, und sämtliche Seitenflächen seien regelmässige n -Ecke. Ausserdem sollten in jedem Eckpunkt genau m Seitenflächen zusammentreffen.

Es gibt insgesamt e Eckpunkte und durch jeden gehen nach Voraussetzung m Seitenflächen. Umgekehrt haben wir f Seitenflächen mit je n Eckpunkten. Zählen wir die Paar von Eckpunkten und dort anliegenden Seitenflächen, erhalten wir:

$$em = fn.$$

Entsprechend liefert doppeltes Abzählen der Paare von Kanten und anliegenden Seitenflächen: $2k = fn$. Setzen wir nun $e = \frac{nf}{m}$ und $k = \frac{nf}{2}$ in die Eulerformel ein, erhalten wir:

$$\frac{nf}{m} - \frac{nf}{2} + f = 2.$$

Daraus folgt: $4m = (2n - (n - 2)m)f$. Das heisst insbesondere, weil m positiv ist, dass $2n > (n - 2)m$ sein muss, und daher

$$3 \leq m < \frac{2n}{n-2}.$$

Nun folgt: $n < 6$. Es kommen also für die Seitenflächen nur Dreiecke, Quadrate oder Fünfecke in Frage. Nun kann man die jeweiligen Möglichkeiten für m durchprobieren und stellt fest, dass nur die genannten 5 Körper möglich sind. q.e.d.

1.4 ZAHLENSYSTEM, (ÜBER-)ABZÄHLBARKEIT

Zusammenfassung: Wir vergleichen die Grössenordnungen unendlicher Mengen. Eine unendliche Menge, deren Elemente sich in einer numerierten Liste anordnen lassen, heisst abzählbar. Die Menge aller rationalen Zahlen ist zum Beispiel abzählbar. Aber die Menge aller beliebigen Dezimalzahlen ist wesentlich grösser, man spricht hier von einer überabzählbaren Menge.

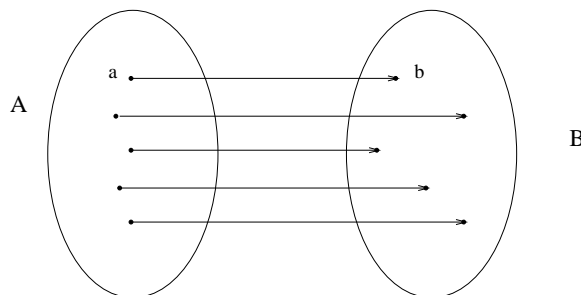
Ausgehend von der Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} konstruiert man durch sukzessive Erweiterung der Zahlenbereiche schliesslich die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Die Menge der ganzen Zahlen \mathbb{Z} umfasst zusätzlich zu \mathbb{N} und 0 die negativen Zahlen, und \mathbb{Q} bezeichnet die Menge der durch Brüche dargestellten Zahlen. Der Übergang von \mathbb{Q} zu \mathbb{R} ist ein Prozess der Vervollständigung des Zahlenvorrats, und zwar werden sogenannte irrationale Zahlen hinzugefügt, so dass es damit möglich wird, alle Abstände auf einer Geraden oder in der euklidischen Ebene zu vermessen. Um zum Beispiel die Länge der Diagonale in einem Einheitsquadrat anzugeben, benötigt man eine Zahl, deren Quadrat gleich 2 ist. Eine solche Zahl fehlt im Vorrat der rationalen Zahlen, wie schon ganz zu Anfang gezeigt wurde (siehe 1.1.2). Die irrationalen, reellen Zahlen lassen sich durch unendliche, nichtperiodische Dezimalentwicklungen beschreiben.

Allerdings ist die Vorstellung irreführend, man brauche nur einige wenige Lücken im Zahlenstrahl zwischen den rationalen Zahlen zu füllen. Tatsächlich gibt es nämlich wesentlich mehr irrationale Zahlen als rationale Zahlen. Diese Aussage soll nun präzisiert werden. Dazu brauchen wir zunächst einen Begriff dafür, die Grössenordnung unendlicher Mengen miteinander vergleichen zu können.

1.4.1 DEFINITION Zwei Mengen A, B nennt man *gleichmächtig*, wenn es eine Zuordnung $f: A \rightarrow B$ gibt, die jedem Element $a \in A$ genau ein Element $f(a)$ aus B zuordnet, und zwar so, dass es zu jedem Element $b \in B$ genau ein Element $a \in A$ gibt mit $b = f(a)$. Die Zuordnung f wird dann als *bijektive Abbildung* oder als *1 : 1-Zuordnung* von A nach B bezeichnet.



1.4.2 BEISPIELE 1. Eine Menge M ist genau dann endlich, wenn es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow M$ gibt. Dann hat M natürlich offenbar n Elemente, und die Abbildung besteht eigentlich darin, die Elemente von M durchzuzählen.

2. Zwei endliche Mengen sind genau dann gleichmächtig, wenn sie gleichviele Elemente enthalten.
3. \mathbb{Z} und \mathbb{N} sind gleichmächtig, denn wir können die ganzen Zahlen folgendermassen anordnen: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$. Diese Liste entspricht der Abbildung $f(2k) = k$, $f(2k + 1) = -k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
4. Es gibt auch echte Teilmengen von \mathbb{N} , die dennoch gleichmächtig sind wie \mathbb{N} , ein Beispiel ist die Menge der geraden Zahlen. Denn die Abbildung $f: \mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, \dots\}$, $f(k) = 2k$ ist bijektiv.

1.4.3 DEFINITION Eine unendliche Menge M heisst *abzählbar*, wenn sie gleichmächtig ist wie die Menge der natürlichen Zahlen. Ist dies nicht der Fall, so heisst M *überabzählbar*.

Die Menge der ganzen Zahlen ist, wie wir eben gesehen haben, abzählbar. Die Menge der positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}_{>0}$ ist ebenfalls abzählbar. Allerdings können wir die positiven rationalen Zahlen nicht einfach der Grösse nach durchnummerieren. (Wieso nicht?) Stattdessen schreiben wir die Brüche in den positiven Quadranten eines zweidimensionalen Koordinatensystems, und zwar den Bruch p/q an die Stelle mit $x = p$ und $y = q$. Nun notieren wir die Brüche in der Reihenfolge, die sich ergibt, wenn wir folgenden Weg verfolgen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 1/5 & \rightarrow & 2/5 & \rightarrow & 3/5 & \rightarrow & 4/5 & \rightarrow & 5/5 & \dots \\
 \uparrow & & & & & & & & \downarrow & \\
 1/4 & \leftarrow & 2/4 & \leftarrow & 3/4 & \leftarrow & 4/4 & & 5/4 & \dots \\
 & & & & & & \uparrow & & \downarrow & \\
 1/3 & \rightarrow & 2/3 & \rightarrow & 3/3 & & 4/3 & & 5/3 & \dots \\
 \uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
 1/2 & \leftarrow & 2/2 & & 3/2 & & 4/2 & & 5/2 & \dots \\
 & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
 1/1 & \rightarrow & 2/1 & & 3/1 & \rightarrow & 4/1 & & 5/1 & \rightarrow 6/1 \dots
 \end{array}$$

Wir erhalten eine Liste von Brüchen mit vielen Wiederholungen. Streichen wir darin noch sämtliche Wiederholungen, so bleibt eine Liste aller positiven rationalen Zahlen übrig. Diese Liste kann man auch als bijektive Zuordnung von \mathbb{N} nach $\mathbb{Q}_{>0}$ auffassen.

Man kann nun - ähnlich wie im Beispiel \mathbb{Z} - weiter schliessen:

1.4.4 SATZ Die Menge \mathbb{Q} aller rationalen Zahlen ist abzählbar.

Im Gegensatz dazu ist die Menge der reellen Zahlen nicht abzählbar und es gibt viel mehr irrationale als rationale Zahlen.

1.4.5 BEISPIELE Alle rationalen Vielfachen von $\sqrt{2}$ sind irrational. Allgemeiner sind alle Zahlen der Form $\pm \frac{n}{m} \sqrt{p}$ ($n, m \in \mathbb{N}$, p Primzahl) irrational.

Erinnern wir kurz an die Beschreibung der reellen Zahlen durch *Dezimalentwicklungen*. Ist eine Zahl rational, so ist ihre Dezimalentwicklung entweder endlich oder periodisch. Etwa ist $\frac{1}{7} = 0, \overline{142857}$. Die Entwicklung muss nicht unbedingt eindeutig sein, zum Beispiel hat die Zahl $\frac{1}{10}$ die beiden Darstellungen $0,1$ oder $0,0\overline{9}$ und $0,12 = 0,1\overline{19}$. Ist eine Zahl irrational, so ist ihre Dezimalentwicklung eindeutig festgelegt und zwar ist sie in diesem Fall unendlich und nicht periodisch.

1.4.6 BEISPIEL Die Zahl $0,101001000100001\dots$ ist irrational, denn ihre Dezimalentwicklung ist unendlich und nichtperiodisch.

Wir können also sagen, dass rationale Zahlen in gewissem Sinne endlichen Listen von Ziffern entsprechen, während irrationale Zahlen durch unendliche Listen von Ziffern festgelegt werden. Es ist also plausibel, dass es wesentlich mehr irrationale als rationale Zahlen gibt. Um dies zu beweisen, halten wir zuerst folgendes fest:

1.4.7 LEMMA Sind $M \subset L$ Mengen von Zahlen und ist M überabzählbar, dann ist auch L überabzählbar.

Beweis. Denn wäre L abzählbar, könnte man die Elemente von L in einer Liste aufzählen. Wenn man nun in dieser Aufzählung alle Elemente wegstreicht, die nicht zu M gehören, bleibt eine Liste der Elemente von M übrig. Damit wäre auch M abzählbar im Widerspruch zur Annahme. q.e.d.

1.4.8 SATZ Die Menge $[0,1]$ der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 ist überabzählbar und damit erst recht die Menge \mathbb{R} aller reellen Zahlen.

Beweis. Betrachten wir die Teilmenge $M \subset [0,1[$ der Zahlen mit einer Dezimalentwicklung, die nur aus Einsen oder Nullen besteht. Nach dem Lemma reicht es zu zeigen, dass M überabzählbar ist. Wir zeigen die Behauptung durch Widerspruch. Angenommen, die Menge M wäre abzählbar. Dann gäbe es eine Möglichkeit, die Zahlen in M durczunummerieren und zu einer Liste anzuordnen. Gehen wir nun von einer solchen fiktiven Liste r_1, r_2, r_3, \dots aus. Wir schreiben die Dezimalentwicklungen (aus Nullen und Einsen) dieser Zahlen untereinander. Die Liste könnte so aussehen:

$$\begin{array}{rcl} r_1 & = & 0, \textcolor{red}{0} 0 0 0 \dots\dots\dots \\ r_2 & = & 0, 1 \textcolor{red}{1} 1 1 \dots\dots\dots \\ r_3 & = & 0, 1 0 \textcolor{red}{1} 0 \dots\dots\dots \\ r_4 & = & 0, 1 0 0 \textcolor{red}{0} \dots\dots\dots \\ & \vdots & \qquad \qquad \qquad \ddots \\ r_j & = & 0, r_{j1}r_{j2}r_{j3}r_{j4}\dots\textcolor{red}{r}_{jj}\dots \\ & \vdots & \end{array}$$

Nun schauen wir uns die Diagonale in diesem Ziffernschema an und bilden daraus wiederum eine Dezimalzahl. Hier wäre das konkret: $0, \textcolor{red}{0110}\dots\textcolor{red}{r}_{jj}\dots$. Schliesslich ändern wir alle Ziffern nach dem Komma. Und zwar ersetzen wir alle Nullen durch

Einsen und umgekehrt alle Einsen durch Nullen. So erhalten wir eine neue Zahl $a = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots \in]0, 1[$. Wenn die Liste mit den angegebenen Zahlen beginnt, haben wir konkret $a = 0, 1001 \dots$. Vergleichen wir a nun mit den Zahlen aus der Liste. a stimmt nicht mit r_1 überein, denn bereits an der ersten Stelle hinter dem Komma stehen verschiedene Ziffern. a stimmt auch nicht mit r_2 überein, denn jeweils die zweite Stelle hinter dem Komma ist verschieden, usw. Also kommt a nicht in der Liste der Zahlen r_1, r_2, r_3, \dots vor. Diese Liste sollte aber *alle* Dezimalentwicklungen aus Nullen und Einsen enthalten. Das ist ein Widerspruch. q.e.d.

1.4.9 FOLGERUNG *Es gibt überabzählbar viele irrationale Zahlen.*

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe nur abzählbar viele irrationale Zahlen. Wir wissen schon, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist. Man könnte also beide Typen von Zahlen in Listen aufzählen und dann daraus eine Liste sämtlicher reeller Zahlen herstellen, indem man immer abwechselnd eine irrationale und eine rationale Zahl gemäss den Teillisten aufführt. Damit wäre auch \mathbb{R} abzählbar, ein Widerspruch. q.e.d.

Kapitel 2

Funktionen und Grenzwerte

2.1 FOLGEN UND GRENZWERTE

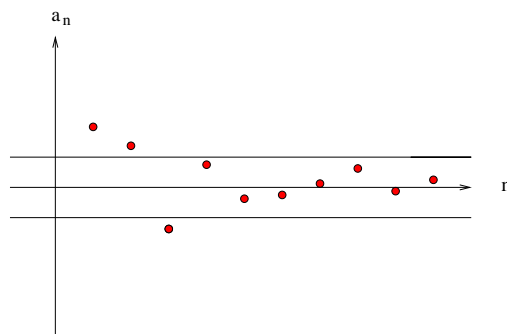
Zusammenfassung: Hier wird der für die Analysis zentrale Begriff der Konvergenz einer Zahlenfolge gegen einen Grenzwert definiert. Es werden Beispiele betrachtet und einige Rechenregeln im Zusammenhang mit Grenzwerten formuliert. Bemerkenswert ist auch das Monotoniekriterium für Konvergenz.

2.1.1 DEFINITION Eine Folge ist eine Zuordnung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, geschrieben als Liste (a_1, a_2, \dots) oder in der Form $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Hier sind ein paar Beispiele:

$$\left. \begin{array}{ll} 2, 4, 6, 8, \dots & a_n = 2n \\ 1, 4, 9, 16, \dots & a_n = n^2 \\ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots & a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots & a_n = \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \dots & a_n = \frac{(-1)^n}{2^n} \\ 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \dots & a_{2n} = \frac{1}{n+1}, a_{2n-1} = 1 \\ \frac{1}{1}, \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots & a_n = \frac{1}{n!} \end{array} \right\} \forall n \in \mathbb{N}$$

2.1.2 DEFINITION Man sagt, dass eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Anders gesagt: Tragen wir sämtliche Punkte (n, a_n) (für $n \in \mathbb{N}$) in ein kartesisches Koordinatensystem ein, so gilt: In jedem noch so dünnen Streifen um die x -Achse liegen alle markierten Punkte bis auf endlich viele Ausnahmen. Man nennt die Folge dann auch *Nullfolge*.



2.1.3 BEISPIELE 1. Die Folge der Stammbrüche $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0. Denn zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n_0 mit $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Daraus

folgt $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Konkret gilt dies z.B. für $\epsilon = 10^{-9}$ ab $n_0 = 10^9 + 1$.

2. Auch $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ konvergiert gegen 0, allerdings werden die Werte nicht immer kleiner, sondern sie oszillieren immer enger um den Wert 0.
3. Die Folge, gegeben durch $a_{2n} = \frac{1}{n+1}$ bzw. $a_{2n-1} = 1$ für $n \in \mathbb{N}$, konvergiert nicht gegen Null. Denn alle ungeraden Folgenglieder sind gleich 1. Also gibt es offenbar zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ kein passendes n_0 . Im entsprechenden ϵ -Streifen um die x -Achse liegen nur die geraden Folgenglieder, alle ungeraden Folgenglieder sind ausserhalb des Streifens.
4. Die Folge $(\frac{1}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, da $\frac{1}{n!} < \frac{1}{n}$ für alle n . Diese Folge konvergiert also noch schneller gegen Null, als die Folge der Stammbrüche.
5. Die Folge $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert ebenfalls gegen Null, allerdings langsamer als die Folge $\frac{1}{n}$. Denn zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ findet man sicher eine natürliche Zahl $n_0 > \frac{1}{\epsilon^2}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \epsilon.$$

Für $\epsilon = 10^{-2}$ zum Beispiel ist $n_0 = 10'001$ gross genug.

Vergleichen wir Fakultäten und Potenzen, stellen wir folgendes fest:

2.1.4 BEISPIEL Die Folge der Zahlen $a_n = \frac{n \cdot 3^n}{n!}$ ist eine Nullfolge.

Beweis. Wie man per Induktion zeigen kann, gilt die Abschätzung $n^2 \cdot 3^n < 81 \cdot n!$ für alle $n \geq 4$. Daraus folgt

$$0 < a_n = \frac{n \cdot 3^n}{n!} < \frac{81}{n}.$$

Wählt man jetzt zu einer vorgegebenen positiven Zahl ϵ eine natürliche Zahl n_0 , so dass $n_0 > \frac{81}{\epsilon}$, dann folgt $a_n < \frac{81}{n} \leq \frac{81}{n_0} < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Konkret ist für $\epsilon = 10^{-9}$ die verlangte Abschätzung erfüllt ab $n_0 = 81'000'000'001$. q.e.d.

2.1.5 DEFINITION Man sagt, eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn die Folge der Differenzen $a_n - a$ gegen 0 konvergiert. Ist dies der Fall, schreibt man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

2.1.6 BEISPIELE 1. Die Folge $a_n = \frac{1-n}{n}$ konvergiert gegen -1 , denn $|a_n + 1| = \frac{1-n}{n} + 1 = \frac{1}{n}$.

2. Die Folge $a_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$ konvergiert gegen 2. Denn:

$$\left| \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1} - 2 \right| = \frac{3}{n^2 + 1} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad n^2 > \frac{3}{\epsilon} - 1.$$

Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ findet man sicher eine Quadratzahl n_0^2 , die dies erfüllt, und die gewünschte Ungleichung gilt dann erst recht für alle $n \geq n_0$. Konkret ist zum Beispiel für $\epsilon = 10^{-6}$ die Zahl $n_0 = 2'000$ gross genug.

3. Sei jetzt $a > 1$ fest gewählt. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Denn wie in den Übungen gezeigt, ist $\sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wählt man jetzt zu $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 > \frac{a-1}{\epsilon}$, dann ist $0 < \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n} \leq \frac{a-1}{n_0} < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

2.1.7 DEFINITION Man sagt, eine Folge positiver Zahlen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere gegen unendlich, wenn die Folge $(1/a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 1/a_n = 0.$$

Das bedeutet, dass jede vorgegebene Schranke $M > 0$ von allen Folgengliedern a_n bis auf endliche viele Ausnahmen übertroffen wird.

Um zu entscheiden, ob bei einer Folge Konvergenz vorliegt und wenn ja, gegen welchen Wert, reicht es nicht, die ersten 10 bis 20 Werte per Taschenrechner zu ermitteln und zu schätzen. Berechnet man beispielsweise die Glieder der Folge, definiert durch $a_n = 1 + 10^{-9}n$, bis auf 6 Kommastellen genau, dann sind die ersten tausend Folgenglieder nicht von 1 zu entscheiden. Die Folge konvergiert aber keineswegs gegen 1, sondern die Zahlen a_n werden sogar beliebig gross.

2.1.8 SATZ Sei $q \in \mathbb{R}$. Ist $q > 1$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$. Ist $|q| < 1$, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Beweis. Nehmen wir zuerst an, dass $q > 1$. Dann liefert die Bernoullische Ungleichung (siehe 1.2):

$$q^n = (1 + (q - 1))^n \geq 1 + n(q - 1).$$

Weil $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + n(q - 1)) = \infty$, folgt nun sofort $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$. Sei jetzt $|q| < 1$. Ist $q = 0$, ist nichts zu zeigen. Ist $q \neq 0$, so ist $a = |1/q| > 1$ und daher wie eben gezeigt $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$. Das bedeutet nach Definition gerade, $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$. Also ist auch $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. q.e.d.

2.1.9 BEMERKUNG Der Grenzwert der Summe der Potenzen einer festen Zahl wird auch als geometrische Reihe bezeichnet. Für $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$ gilt:

$$1 + q + q^2 + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1 - q} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n q^k = \frac{q}{1 - q}.$$

Beweis. Wir haben bereits durch Induktion folgende Formel für die geometrische Summe bewiesen:

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} - 1 = \frac{q^{n+1} - q}{q - 1}.$$

Ausserdem ist wie eben gezeigt $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$. Daraus folgt sofort die Behauptung. q.e.d.

Hier einige konkrete Beispiele:

- Für $q = \frac{1}{2}$ erhalten wir $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdots = 2$.
- Für $q = -\frac{1}{2}$ ergibt sich $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cdots = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$.
- Für $q = \frac{1}{3}$ ergibt sich $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.
- Ist $|q| \geq 1$, so konvergiert die zugehörige geometrische Reihe nicht. Denn ist $q > 1$, so wachsen die Teilsummen über jede Schranke hinaus.
Für $q = -1$ lauten die Teilsummen $s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$.
Sie konvergieren also ebenfalls nicht. Ist schliesslich $q < -1$, so wachsen jedenfalls die Beträge der Teilsummen über alle Schranken hinaus.

Jede periodische Dezimalentwicklung ist eigentlich nichts anderes als eine geometrische Reihe. Konkret zum Beispiel:

$$0, \overline{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^k} = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9} \quad \text{und} \quad 0, \overline{12} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{12}{100^k} = 12 \frac{\frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{12}{99}$$

Jede Dezimalentwicklung einer positiven reellen Zahl a liefert eine monoton anwachsende Folge mit Grenzwert a , wenn wir jeweils die Angabe der Zahl bis auf n Kommastellen als Folgenglied a_n auffassen. Hier wiederum ein Beispiel:

$$0, 1001000010000001 \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{k^2}}$$

2.1.10 SATZ *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Nehmen wir an, eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere sowohl gegen a , als auch gegen b , und $a < b$. Ist $\epsilon > 0$ klein genug, so ist $a + \epsilon < b - \epsilon$. Genauer gilt dies, wenn $\epsilon < \frac{b-a}{2}$. Wählen wir, um sicher zu gehen, zum Beispiel $\epsilon = \frac{b-a}{4}$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, erfüllen fast alle Folgenglieder a_n bis auf endlich viele Ausnahmen die Ungleichung $|a_n - a| < \epsilon$. Nun ist

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\epsilon < a_n - a < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \epsilon < a_n < a + \epsilon.$$

Das Entsprechende gilt auch für b , das heisst $b - \epsilon < a_n < b + \epsilon$ für fast alle n . Weil ausserdem $a + \epsilon < b - \epsilon$, folgt daraus $a_n < a_n$ für fast alle n . Das ist aber unmöglich. q.e.d.

Die Grenzwertbildung ist mit den Grundrechenarten verträglich. Genauer gilt folgendes:

2.1.11 SATZ Sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen, so konvergieren auch die Folgen, gebildet aus den Summen, den Differenzen und den Produkten von a_n und b_n , und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \pm \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right) \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right).$$

Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ für fast alle n und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

Auf den Beweis dieser Grenzwertrechenregeln wollen wir verzichten. Stattdessen hier einige Beispiele:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \right)^k = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^k}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^k = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3n + 2}{2n^3 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3\frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^3}}{2 - \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{2}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt[n]{n^5} + 4n - 1}{\sqrt[n]{n^5} - \sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + 4\frac{1}{\sqrt[n]{n^3}} - \frac{1}{\sqrt[n]{n^5}}}{1 - \frac{1}{n^2}} = 3.$

Bei Quotienten von Nullfolgen kann sozusagen alles passieren, deshalb ist dort Vorsicht angebracht.

2.1.12 BEISPIELE • $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2/n}{1/(n+1)} = 2.$

- Sei $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n^2}$. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$

Auch bei Quotienten gegen unendlich gehender Folgen kann alles passieren.

2.1.13 BEISPIELE • Offenbar ist $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \lim_{n \rightarrow \infty} n! = \infty$. Aber die Fakultäten wachsen viel schneller, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(n-1)!} = 0.$$

- Ebenso ist $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$. Auch die Zweierpotenzen wachsen viel schneller wachsen als die natürlichen Zahlen. Genauer kann man durch Induktion zeigen, dass $\frac{2^n}{n} > n$ für $n \geq 5$. Also ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n} = \infty.$$

- Schliesslich ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n}}{\sqrt{n+1}} = 3.$$

Die Grenzwertbildung ist auch mit der Relation \leq verträglich.

2.1.14 SATZ Sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Diese Aussage wird allerdings falsch, wenn wir \leq durch $<$ ersetzen. Zum Beispiel ist $1 - \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n}$ für alle n , aber $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})$.

Beweis. Beweisen wir die Aussage des Satzes durch Widerspruch. Angenommen, der Grenzwert a der Folge a_n wäre echt grösser als der Grenzwert b der Folge b_n . Setzen wir $\epsilon := \frac{a-b}{4}$. Für dies ϵ ist sicher $b + \epsilon < a - \epsilon$. Für genügend grosse n müsste dann gelten:

$$b_n < b + \epsilon < a - \epsilon < a_n.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung. q.e.d.

Es gilt der folgende Vergleichssatz:

2.1.15 SATZ Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$, so folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$.

Beweis. Zu $\epsilon > 0$ wählen wir einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass sowohl $a - \epsilon \leq a_n \leq a + \epsilon$ als auch $a - \epsilon \leq c_n \leq a + \epsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Daraus folgt $a - \epsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq a + \epsilon$ und daher $|b_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist die Konvergenz der Folge (b_n) gegen a gezeigt. q.e.d.

Ein nützliches Konvergenzkriterium ist das folgende Monotoniekriterium. Dabei handelt es sich eigentlich um das Vollständigkeitsaxiom der Menge der reellen Zahlen.

2.1.16 BEMERKUNG Jede monoton steigende (bzw. fallende), nach oben (bzw. unten) beschränkte Zahlenfolge hat in \mathbb{R} einen Grenzwert.

Wie schon erwähnt, können wir jede Dezimalentwicklung einer positiven Zahl a als eine solche monoton wachsende Folge auffassen, die gegen a konvergiert. Hier ist ein weiteres Beispiel für eine monoton wachsende, beschränkte Folge:

2.1.17 BEMERKUNG Die Folge der Teilsummen $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ ist monoton steigend und durch 2 nach oben beschränkt, also existiert der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

Beweis. Durch vollständige Induktion kann man zeigen (siehe Übungsaufgabe):

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} < 2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist die Teilsummenfolge wie behauptet nach oben beschränkt. Ausserdem ist die Folge streng monoton wachsend, da $\frac{1}{k^2} > 0$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$. q.e.d.

Euler hat diese unendliche Reihe untersucht und festgestellt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Die Berechnung dieses Grenzwertes ist aber nicht einfach und muss zunächst auf später verschoben werden.

2.1.18 BEMERKUNG *Die harmonische Reihe:*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

hat keinen endlichen Grenzwert. Die Folge der Teilsummen $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ wächst über alle Schranken hinaus.

Beweis. Um das einzusehen, fassen wir folgende Stammbrüche jeweils zusammen und schätzen nach unten ab:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} & \geq & \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} & \geq & \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} & \geq & \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \\ & \vdots & \end{array}$$

Daraus folgt $s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}$ für alle n . Also kann die Folge der Teilsummen der harmonischen Reihe nicht nach oben beschränkt sein. q.e.d.

Für rekursiv definierte Folgen, die monoton wachsen und beschränkt sind, kann man den Grenzwert mithilfe der Rekursion konkreter bestimmen. Hierfür ein Beispiel.

2.1.19 BEISPIEL Die folgende rekursiv definierte Folge konvergiert gegen 2:

$$a_1 := \sqrt{2}, \quad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Durch vollständige Induktion zeigen wir zunächst: $a_n < a_{n+1} < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
 $n = 1$: zu zeigen ist $\sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} < 2$. Das ist äquivalent zu $2 < 2 + \sqrt{2} < 4$, und also offensichtlich richtig.

$n \rightarrow n+1$: Die Induktionsbehauptung für n lautet $a_n < \sqrt{2+a_n} < 2$. Daraus folgt: $\sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+\sqrt{2+a_n}} < \sqrt{2+2} = 2$. Das ist bereits die Behauptung für $n+1$.

Also ist die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt und hat nach dem Monotoniekriterium einen Grenzwert, etwa a . Aus der Rekursion folgt $a^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (2+a_n) = 2+a$, das bedeutet $a = 2$ oder $a = -1$. Weil ausserdem $a \geq a_1 = \sqrt{2}$ sein muss, erhalten wir $a = 2$. q.e.d.

Wir können nun auch eine Definition der Eulerschen Zahl e angeben.

2.1.20 SATZ Die Folge der Zahlen $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist monoton wachsend, die Folge der Zahlen $b_n := (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) ist monoton fallend und es gilt:

$$2 \leq (1 + \frac{1}{n})^n \leq (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \leq 4 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Folgen (a_n) und (b_n) sind konvergent und haben denselben Grenzwert, den man als die Eulersche Zahl e bezeichnet.

Die Folge der a_n lässt sich im Zusammenhang mit Zinseszinsrechnung folgendermassen interpretieren. Nehmen wir an, ein Kapital K werde während einer bestimmten Zinsperiode T zu 100% verzinst. Dann wird das Kapital nach Ablauf der Zeit T verdoppelt. Zahlt man stattdessen aber bereits nach der Hälfte der Zeit T den halben Zins aus und verzinst den Zwischenbetrag von $K \cdot (1 + \frac{1}{2})$ nach Ablauf des gesamten Zeitraums nochmals mit 50% Zins, beträgt das Kapital dann insgesamt $K(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2}) = K \cdot 2,25$.

Unterteilt man den Zeitraum T noch weiter in n Abschnitte ($n \in \mathbb{N}$) und wird das jeweilige Zwischenkapital am Ende jedes Teilabschnitts zu einem Zinssatz von $\frac{100}{n}\%$ verzinst, so beträgt das Kapital am Ende $K \cdot (1 + \frac{1}{n})^n$. Der Grenzwert $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$ gibt also an, um welchen Faktor sich ein Kapital bei kontinuierlicher Verzinsung vergrössern würde.

Auch die Folge der Zahlen b_n hat etwas mit Zinseszins zu tun. Wenn man ein Kapital bei einer Einteilung der Gesamtzeit in n Abschnitte bereits zu Beginn der Zeit erstmals verzinst und zusätzlich nach Ablauf jedes einzelnen Abschnitts, insgesamt also $(n+1)$ -mal, und dabei jeweils den Zinssatz $\frac{100}{n}$ verwendet, beträgt das Kapital einschliesslich Zinseszins nach Ablauf der Gesamtzeit $K \cdot (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.

Beweis des Satzes: Nehmen wir an, die Monotonie der Folgen (a_n) und (b_n) sei gezeigt. Dann ergeben sich die behaupteten Schranken durch Einsetzen von $n = 1$. Die mittlere Ungleichung folgt so:

$$(1 + \frac{1}{n})^{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^n \cdot (1 + \frac{1}{n}) > (1 + \frac{1}{n})^n.$$

Also ist die Folge (a_n) durch 4 nach oben beschränkt und daher konvergent. Aus den Grenzwertrechenregeln folgt jetzt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Der Beweis der Monotonie ist raffinierter, und wir verzichten hier darauf. q.e.d.

2.2 GRENZWERTE VON FUNKTIONEN

Zusammenfassung: Ein zentraler Begriff der Mathematik ist der Begriff der Abbildung oder Funktion, und dieses Konzept taucht in den verschiedensten Zusammenhängen auf. Wir betrachten jetzt Funktionen in einer reellen Variablen, untersuchen ihre Umkehrbarkeit und Grenzwerte an gewissen Stellen.

Unter einer reellwertigen Funktion in einer reellen Variablen versteht man eine Funktion der Form $f: D \rightarrow W$, wobei der Definitionsbereich D und die Wertemenge W jeweils Teilmengen von \mathbb{R} sind. Häufig verzichtet man auch auf die Angabe von W . Eine solche Funktion können wir bekanntlich in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem graphisch darstellen. Der *Graph* der Funktion f ist definiert als

$$\text{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}^2.$$

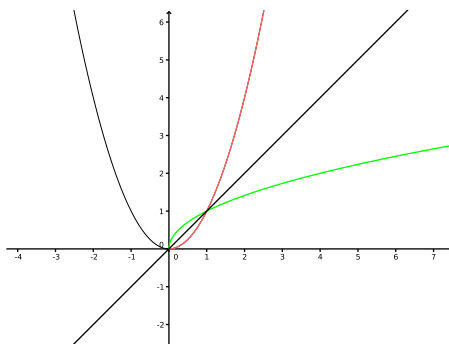
Man trägt also jeweils zu $x \in D$ den Punkt mit den Koordinaten $(x, f(x))$ in das Koordinatensystem ein.

2.2.1 SATZ Eine Funktion $f: D \rightarrow W$ ist genau dann bijektiv (also eine 1-1-Zuordnung), wenn f umkehrbar ist. Das bedeutet, es gibt eine Funktion $g: W \rightarrow D$, die sogenannte Umkehrfunktion von f , mit der Eigenschaft, dass $g(f(x)) = x$ für alle $x \in D$ und $f(g(y)) = y$ für alle $y \in W$. Sind $D, W \subset \mathbb{R}$, so erhält man den Graphen von g durch Spiegelung des Graphen von f an der Winkelhalbierenden, das heisst der Geraden, definiert durch $y = x$ in \mathbb{R}^2 .

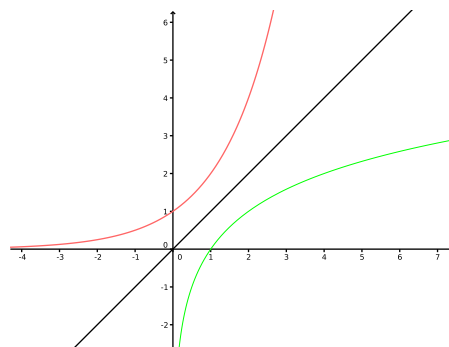
2.2.2 BEMERKUNG Ist die Funktion f streng monoton steigend auf $M \subset D$, d.h. $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$, $x_i \in M$, dann ist $f: M \rightarrow f(M)$ umkehrbar. Entsprechendes gilt, falls f auf M streng monoton fallend ist, d.h. falls umgekehrt $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1 < x_2$, $x_i \in M$.

Schauen wir uns dazu einige Beispiele an.

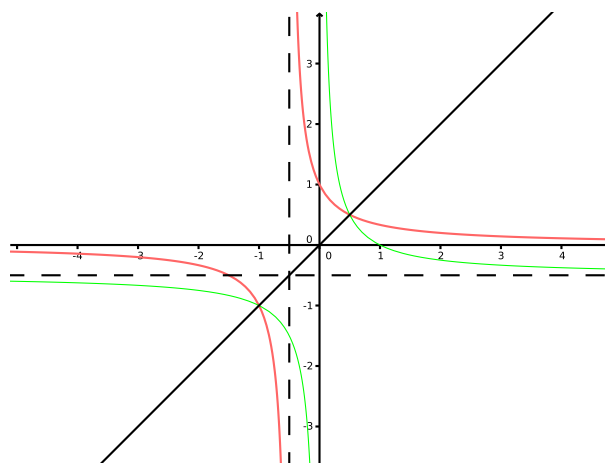
2.2.3 BEISPIELE 1. Die Funktion $f(x) = x^2$ ist auf $] -\infty, 0]$ streng monoton fallend und auf $[0, \infty[$ streng monoton steigend und nimmt nur Werte ≥ 0 an. Die Wurzelfunktion $g(x) = \sqrt{x}$ (hier grün eingezeichnet) ist die Umkehrfunktion für den monoton wachsenden Teil von f (hier rot eingezeichnet).



2. Die Funktion $f(x) = x^3$ ist auf ganz \mathbb{R} streng monoton wachsend, und die Umkehrung, nämlich das Ziehen der dritten Wurzel, $g(x) = \sqrt[3]{x}$, ist sogar für alle x definiert.
3. Die Funktion $f(x) = 2^x$ ist wiederum auf ganz \mathbb{R} streng monoton wachsend, nimmt aber nur positive Werte an. Die Umkehrfunktion, der Logarithmus zur Basis 2, ist deshalb nur für positive Zahlen definiert, nimmt aber beliebige Werte an. Man erhält den Graphen von g (grün) durch Spiegelung des Graphen von f (rot) an der Winkelhalbierenden.



4. Sei $D = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$, $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f: D \rightarrow W$, definiert durch $f(x) = \frac{1}{2x+1}$. Diese Funktion ist bijektiv. Der Graph von f (rot) ist eine Hyperbel mit Asymptoten bei $x = -\frac{1}{2}$ und $y = 0$. Durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden erhalten wir wieder eine Hyperbel (grün), diesmal mit Asymptoten bei $y = -\frac{1}{2}$ und $x = 0$.



Um die Umkehrfunktion $g: W \rightarrow D$ von f genauer zu bestimmen, setzen wir $f(x) = \frac{1}{2x+1} = y$ und lösen nach x auf. Das führt auf die Beziehung $x = \frac{1-y}{2y}$, und wir erhalten $g(y) = \frac{1-y}{2y}$. Nach Umbenennung der Variablen wird daraus die Vorschrift $g(x) = \frac{1-x}{2x}$.

Sei jetzt f eine reellwertige Funktion, definiert auf dem Definitionsbereich D . Sei weiter x_0 ein Punkt im Abschluss von D , das heisst, es gebe Folgen von Punkten aus D , die gegen x_0 konvergieren.

2.2.4 DEFINITION Man sagt, die Funktion f habe an der Stelle x_0 den Grenzwert y_0 , falls für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D , die gegen x_0 konvergiert, die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen y_0 konvergiert. Ist dies der Fall, schreibt man

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0.$$

Dabei ist auch $x_0 = \infty$ oder $x_0 = -\infty$ zugelassen.

In den Beispielen 3. und 4. aus 2.2.3 sehen wir folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log_2(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x+1} = 0, \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Man kann die Überlegungen verfeinern, indem man rechts- oder linksseitige Grenzwerte betrachtet. Damit ist folgendes gemeint.

2.2.5 DEFINITION Man spricht vom rechtsseitigen Grenzwert

$$\lim_{x \searrow x_0} f(x) = y_0,$$

wenn für jede Folge $x_n > x_0$, die von oben gegen x_0 konvergiert, die Funktionswerte $f(x_n)$ gegen y_0 konvergieren. Entsprechend ist der linksseitige Grenzwert

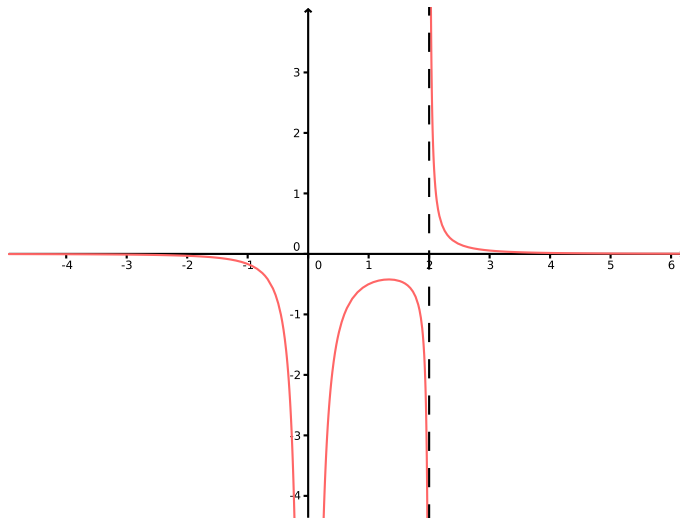
$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = y_0,$$

wenn für jede Folge $x_n < x_0$, die von unten gegen x_0 konvergiert, die Funktionswerte $f(x_n)$ gegen y_0 konvergieren.

2.2.6 BEMERKUNG *Existieren an einer Stelle x_0 sowohl der rechts- als auch der linksseitige Grenzwert von f und stimmen sie überein, dann ist dies auch der beidseitige Grenzwert. Stimmen sie aber nicht überein, so kann es keinen beidseitigen Grenzwert geben.*

2.2.7 BEISPIELE • Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2x^2(x-2)}$ (für $x \neq 0, 2$) konvergiert für x gegen 0 nach $-\infty$. Aber es gibt keinen beidseitigen Grenzwert an der Stelle $x = 2$, denn

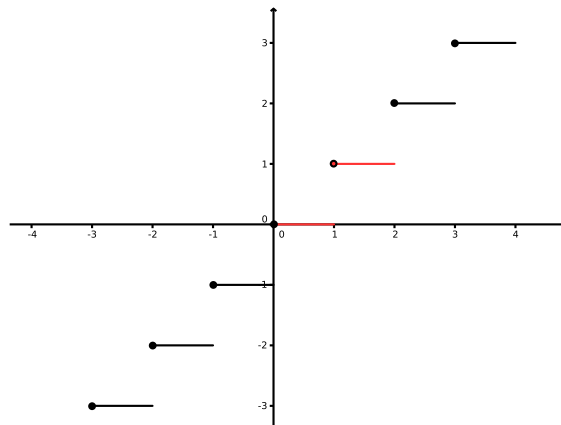
$$\lim_{x \searrow 2} \frac{1}{2x^2(x-2)} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \nearrow 2} \frac{1}{2x^2(x-2)} = -\infty.$$



- Ein ähnliches Phänomen zeigte sich schon im vierten Beispiel 2.2.3.

$$\lim_{x \nearrow -1/2} \frac{1}{2x+1} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow -1/2} \frac{1}{2x+1} = \infty .$$

- Ist x eine reelle Zahl, so bezeichnet die Gaussklammer $[x]$ von x die grösste ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Also ist zum Beispiel $[2.45] = 2$, $[-3.56] = -4$, $[\sqrt{2}] = 1$ und $[\pi] = 3$.



Der Graph von f sieht aus wie eine Treppe mit unendlich vielen Stufen, jeweils der Breite und Höhe 1. An der Stelle $x = 1$ gibt es keinen beidseitigen Grenzwert, denn

$$\lim_{x \nearrow 1} [x] = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 1} [x] = 1 .$$

Entsprechendes gilt für alle ganzzahligen Stellen. Man sagt, es liegen dort Sprungstellen vor.

Für die Grenzwerte von Funktionen gelten entsprechende Aussagen wie für die Grenzwerte von Folgen, also Verträglichkeit mit den Grundrechenarten, Verträglichkeit mit der Relation \leq , und es gibt wiederum einen Vergleichssatz.

2.2.8 SATZ Seien f, g, h drei reellwertige Funktionen, die alle auf dem offenen Intervall $I = (a, b)$ definiert sind, und sei $x_0 \in [a, b]$. Gilt $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ für alle $x \in I$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$, so folgt auch $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = y_0$.

2.2.9 BEISPIELE 1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x^2 + 1}\right) = 1.$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x - 3x^3} = -\frac{1}{3}.$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{x} = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^2}{x + 1} = -\infty.$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0.$ Um dies einzusehen, schreiben wir die Differenz folgendermassen um:

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

5. Aber $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1 - \sqrt{x}) = +\infty.$ Denn: $x+1 - \sqrt{x} > x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty.$

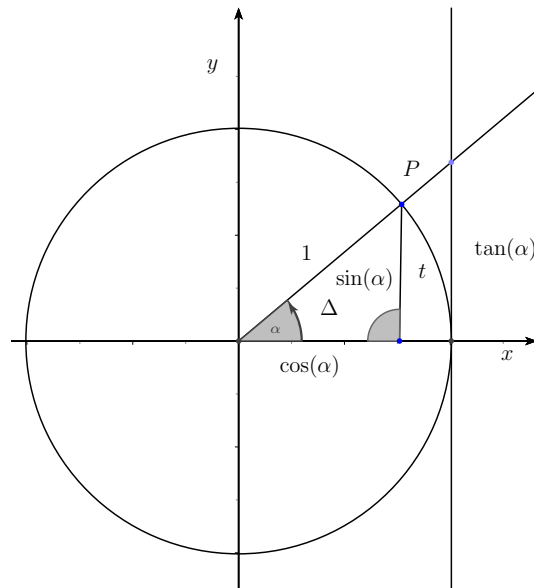
2.3 ELEMENTARE FUNKTIONEN

Zusammenfassung: Aus den rationalen Funktionen, den trigonometrischen Funktionen, sowie den Exponentialfunktionen kann man durch Verknüpfung mithilfe der Grundrechenarten, durch Umkehrung, sowie durch Zusammensetzung neue Funktionen bilden. Dabei ist der Definitionsbereich eventuell geeignet zu verkleinern. So entsteht ein reicher Vorrat an Funktionen, die man als *elementar* bezeichnet.

Die trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus und Tangens wurden zunächst in Abhängigkeit von Winkeln als Seitenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken definiert. Ist Δ ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten der Länge a, b und Hypotenuse der Länge c , und bezeichnet $0 < \alpha < 90^\circ$ den Winkel, der der Seite a gegenüberliegt, dann ist

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}, \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}, \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}.$$

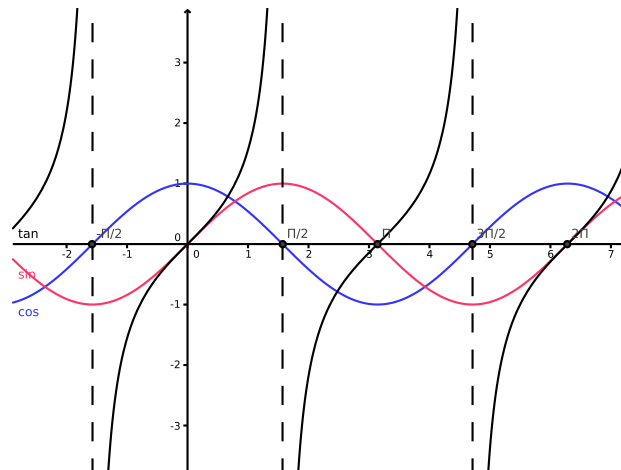
Eine andere Interpretation dieser Grössen erhält man, wenn man Δ so wählt, dass $c = 1$ ist, und dann Δ in den Kreis von Radius 1 um den Nullpunkt einzeichnet wie hier.



Jetzt erweisen sich die Werte $x = \cos(\alpha)$ und $y = \sin(\alpha)$ als die Koordinaten des Punktes P auf dem Einheitskreis, dessen Ortsvektor mit der positiven x -Achse den Winkel α bildet. Und auf diese Weise lässt sich die Definition von Sinus und Cosinus auf alle Winkel ausdehnen. Mit dem Satz von Pythagoras folgt sofort, dass für alle Winkel α gilt:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Der Tangens tritt in diesem Bild auf als Länge des Abschnitts auf der Tangente an den Punkt $(1, 0)$ an den Einheitskreis, der durch diesen Winkel markiert wird. Misst man jetzt den Winkel nicht im Gradmass, sondern im Bogenmass, d.h. durch die Länge t des Bogens, der durch den Winkel α aus dem Einheitskreis ausgeschnitten wird, dann kann man Sinus und Cosinus als Funktionen einer reellen Zahl $t \in \mathbb{R}$ interpretieren. Etwa ist $360^\circ = 2\pi$, $180^\circ = \pi$, $90^\circ = \pi/2$, $60^\circ = \pi/3$, etc. Man erhält folgende Funktionen:



2.3.1 BEMERKUNG Die Cosinusfunktion ergibt sich durch Verschiebung der Sinusfunktion nach links um $\frac{\pi}{2}$, denn $\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$ für alle Winkel α . Die Tangens-

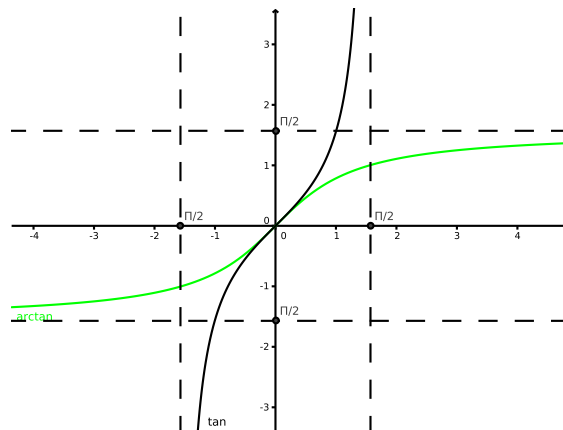
funktion ist gegeben durch

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Sie ist definiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x) \neq 0$, das heisst für $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ (für alle $n \in \mathbb{Z}$).

Die Umkehrfunktionen von Sinus, Cosinus und Tangens werden als Arcusfunktionen bezeichnet, weil man jeweils einer Zahl eine Bogenlänge zuordnet. Dabei versteht man üblicherweise unter \arcsin die Umkehrung der Sinusfunktion auf dem Abschnitt $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und unter \arccos die Umkehrung der Cosinusfunktion auf dem Abschnitt $[0, \pi]$. Auf dem offenen Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist die Tangensfunktion monoton steigend, und nimmt dort als Werte alle reellen Zahlen an. Die entsprechende Umkehrfunktion ist der Arcustangens:

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$



Wir haben hier die wichtigen Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

Durch Kombination der trigonometrischen Funktionen und ihrer Umkehrungen mit rationalen Funktionen entsteht ein grosses Spektrum an Funktionen mit sehr unterschiedlichem Verhalten.

2.3.2 BEISPIELE 1. Der Graph der Funktion $f(x) = \arctan(\frac{1}{x^2})$ (für $x \neq 0$) hat die Gestalt eines Hügels. Die Funktion ist gerade, d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle x , also ist der Graph symmetrisch zur y -Achse. Ausserdem ist f auf dem Bereich $x > 0$ streng monoton fallend, weil $1/x^2$ monoton fallend und der Arcustangens monoton steigend ist. Schliesslich haben wir die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \quad \text{denn } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ und } \arctan(0) = 0.$$

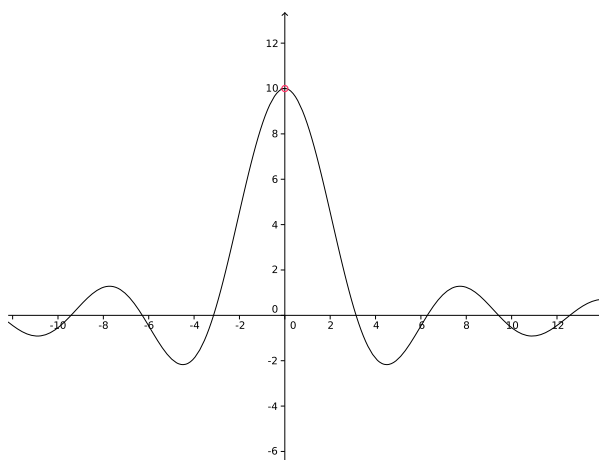
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{denn } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Die Funktion $f(x) = x \sin(x)$ (für $x \geq 0$) beschreibt eine Schwingung, deren Amplitude mit wachsendem x linear zunimmt. Hier ist

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin(x)) = 0,$$

denn $|x \sin(x)| \leq |x| \forall x$, weil die Sinusfunktion nur Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt. Aber $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(x)$ existieren nicht.

3. Die Funktion $f(x) = 10 \frac{\sin(x)}{x}$ (für $x \neq 0$) hat bei $x = 0$ eine Definitionslücke. Es handelt sich um eine gedämpfte Schwingung.



Wir können f bei $x = 0$ stetig durch den Wert $f(0) = 10$ fortsetzen, denn:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Um dies einzusehen, lesen wir aus der Bedeutung des Tangens am Einheitskreis die folgende Ungleichung ab:

$$|x| \leq |\tan(x)| = \left| \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right| \quad \text{für } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

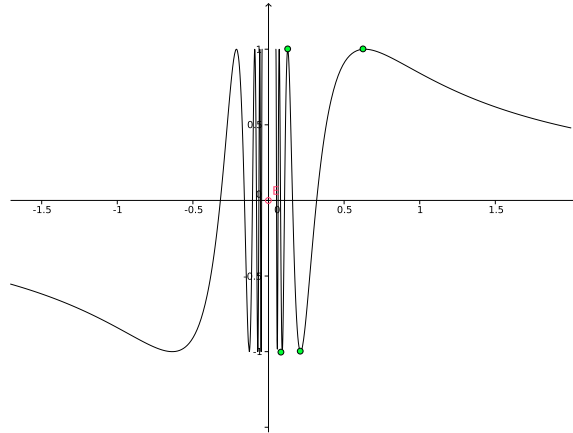
Daraus folgt $|\sin(x)| \geq |x \cdot \cos(x)|$ und wir erhalten für $\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$:

$$|\cos(x)| \leq \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \leq 1.$$

Mit dem Vergleichssatz folgt nun die Behauptung.

Bei der folgenden Funktion beobachten wir, dass es noch andere Probleme mit Grenzwerten gibt als nur Sprungstellen.

2.3.3 BEISPIEL Die Funktion $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ (für $x \neq 0$) hat keinen Grenzwert bei $x = 0$. Denn $f(x)$ kommt für kleine x -Werte jedem y -Wert zwischen -1 und $+1$ beliebig nahe. Schauen wir uns das etwas genauer an. Auf der Nullfolge $a_n := \frac{2}{(2n+1)\pi}$ (für $n \in \mathbb{N}_0$) von x -Werten, nimmt die Funktion f immer abwechselnd den Wert $+1$ und -1 an. Also hat die Folge $f(a_n)$ hier keinen Grenzwert.



Kommen wir jetzt zu den Exponentialfunktionen. Ist $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ vorgegeben, so definiert man die Exponentialfunktion a^x zur Basis a zunächst rekursiv für natürliche Exponenten:

$$a^0 := 1, \quad a^1 := a, \quad a^{n+1} = a \cdot a^n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Dann dehnt man die Definition auf negative ganze Zahlen aus: $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Und schliesslich setzt man für rationale Exponenten fest:

$$a^{p/q} := (\sqrt[q]{a})^p \quad \text{für } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}.$$

Diese Festlegung hängt nicht davon ab, wie der rationale Exponent dargestellt ist. Denn angenommen $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$, so ist $(\sqrt[q]{a})^p = (\sqrt[q']{a})^{p'}$, wie man mithilfe der Potenzgesetze für ganze Exponenten und der Eindeutigkeit der Wurzeln zeigen kann. Ausserdem gilt

$$a^{p/q} > 1 \quad \text{für alle } p, q \in \mathbb{N}.$$

Denn da die Funktion $f_p: x \mapsto x^p$ und die Funktion $g_q: x \mapsto \sqrt[q]{x}$ (für positive x) beide streng monoton wachsend sind, folgt aus $a > 1$ zunächst $\sqrt[q]{a} > \sqrt[q]{1} = 1$ und dann $a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p > 1$, wie behauptet.

Die Exponentialfunktion lässt sich auch auf beliebige reelle Exponenten fortsetzen. Dazu kann man zu einer gegebenen reellen Zahl x eine Folge $x_n \in \mathbb{Q}$ wählen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ und setzt $a^x := \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n}$. Für jede reelle Zahl $a > 1$ erhalten wir eine streng monoton wachsende Funktion $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, $x \mapsto a^x$, die auf ganz \mathbb{R} definiert ist und nur positive Werte annimmt, und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

Für beliebige Exponenten gilt das bekannte Potenzgesetz:

$$a^0 = 1 \quad \text{und} \quad a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Ausserdem ist $(a^x)^y = a^{x \cdot y} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Eine besonders wichtige Rolle spielt die Exponentialfunktion zur Basis e , der sogenannten *Eulerschen Zahl*. Man verwendet hier die Notation $\exp(x) := e^x$.

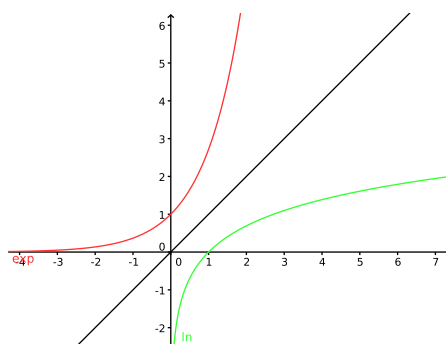
2.3.4 BEMERKUNG Wie bereits erwähnt, können wir e definieren durch

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Ausserdem gilt:

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \quad \text{und} \quad e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ nennt man den natürlichen Logarithmus und verwendet die Notation \ln . Die Funktion $\ln: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nur definiert für positive Zahlen.



Durch Umkehrung der Potenzgesetze ergibt sich für Logarithmen folgendes Gesetz:

$$\ln(1) = 0 \quad \text{und} \quad \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Ausserdem ist $\ln(e) = 1$ und $\ln(x^y) = y \cdot \ln(x) \quad \forall x, y > 0$.

Die Logarithmusfunktion ist streng monoton wachsend und es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty.$$

2.3.5 BEMERKUNG Der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Exponentialfunktionen ist folgender: Für jede Basis $a > 1$ gilt:

$$a^x = e^{x \ln a} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Dies folgt aus den Rechenregeln für Potenzen, denn für $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{x \ln(a)} = e^{\ln(a)x} = (e^{\ln(a)})^x = a^x$ wie behauptet. q.e.d.

Mithilfe der Exponentialfunktion können wir exponentielles Wachstum, aber auch Abklingvorgänge beschreiben. Zum Beispiel wird der Zerfall einer radioaktiven Substanz durch

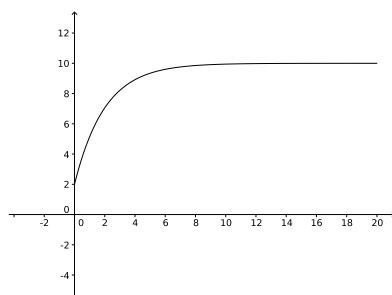
$$f(t) = K_0 e^{-\lambda t} \quad (t \geq 0)$$

beschrieben. Dabei ist t die Zeit, K_0 bezeichnet die zum Zeitpunkt $t = 0$ vorliegende Menge und $\lambda > 0$ ist die Zerfallsrate.

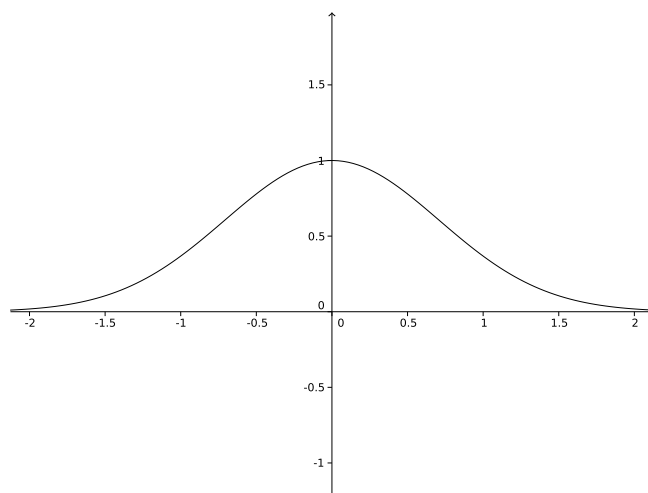
Ein Wachstumsprozess, bei dem eine Sättigung eintritt, lässt sich durch eine Funktion der folgenden Form modellieren:

$$f(t) = a(1 - e^{-\lambda t}) + b \quad (t \geq 0).$$

Hier handelt es sich um eine monoton steigende Funktion, die zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Wert b startet und für t gegen ∞ den Grenzwert $a + b$ hat.



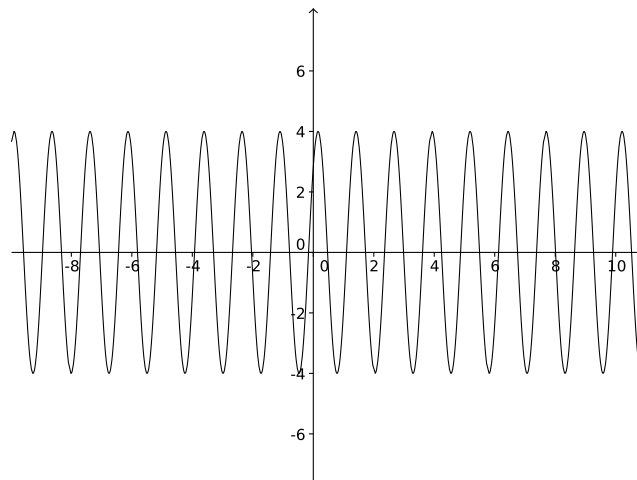
Der Prototyp der sogenannten Normalverteilung ist die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ (für beliebige x). Der Graph wird auch als Gaussche Glockenkurve bezeichnet und erinnert an den Querschnitt einer Glocke. Das Maximum nimmt f an bei $x = 0$, nämlich $f(0) = 1$. Ausserdem ist $\lim_{\pm\infty} e^{-x^2} = 0$.



Mithilfe der Sinusfunktion kann man Schwingungsvorgänge modellieren. Eine harmonische Schwingung wird durch eine Funktion der Form

$$f(t) = A \sin(\omega 2\pi t + \varphi) \quad (t \in \mathbb{R})$$

beschrieben. Dabei ist $A > 0$ die Amplitude, $\omega > 0$ die Anzahl Schwingungen pro Zeiteinheit und φ die Phasenverschiebung der Schwingung.

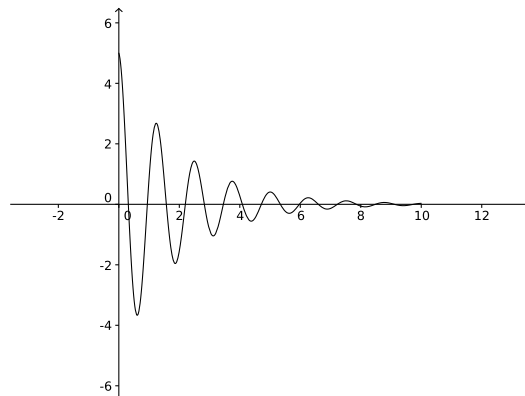


Zum Beispiel könnte $f(t)$ die vertikale Auslenkung einer schwingenden Saite zum Zeitpunkt t angeben. Auch die Auslenkung einer Feder durch eine daran befestigte Masse wird durch eine solche Funktion beschrieben.

Eine Kombination von Cosinus und Exponentialfunktion wird verwendet, um gedämpfte Schwingungen darzustellen:

$$f(t) = Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t) \quad (t \geq 0).$$

Hier ist $\lambda > 0$ eine Dämpfungsrate, und der Faktor $e^{-\lambda t}$ sorgt für eine allmähliche Abnahme der Amplitude der Schwingung, während die Frequenz unverändert bleibt.



2.4 STETIGKEIT

Zusammenfassung: Man nennt eine Funktion stetig, wenn sie an jeder Stelle gegen ihren eigenen Funktionswert konvergiert. In dieser Situation treten keine Sprungstellen auf, jeder Funktionswert ist bereits durch seine Nachbarwerte eindeutig bestimmt. Eine stetige Funktion, definiert auf einem abgeschlossenen Intervall, nimmt dort Maximum und Minimum an. Der Zwischenwertsatz besagt unter anderem, dass wenn eine Funktion auf einem Intervall das Vorzeichen wechselt, sie in diesem Intervall sicher mindestens eine Nullstelle hat.

Anschaulich gesprochen ist eine Funktion auf einem Bereich stetig, wenn kleine Änderungen des Argumentes x zu kleinen Änderungen des Funktionswertes führen. Dabei betrachten wir hier nur Funktionen auf *offenen* Definitionsbereichen. Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ heisst *offen*, wenn D eine Vereinigung von offenen Intervallen ist.

2.4.1 DEFINITION Eine Funktion f , definiert auf einer offenen Teilmenge D , heisst stetig an der Stelle $x_0 \in D$, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Die Funktion f heisst *stetig*, falls f an jeder Stelle des Definitionsbereichs stetig ist.

Eine andere äquivalente Charakterisierung der Stetigkeit ist die folgende:

2.4.2 SATZ Eine Funktion f ist stetig an der Stelle $x_0 \in D$, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \text{für alle } x \in D.$$

Beweis. Wir zeigen nur, dass aus der ϵ - δ -Eigenschaft die Stetigkeit folgt. Nehmen wir an, x_n ist eine Folge von Punkten in D , die gegen x_0 konvergiert. Zu $\epsilon > 0$ wählen wir δ wie im Satz. Nach der Grenzwertdefinition gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_0| < \delta$ für alle $n \geq n_0$. Also gilt für die Folge der Funktionswerte $|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Das bedeutet aber gerade, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$. q.e.d.

2.4.3 BEISPIELE • Jede Funktion der Form $f(x) = ax + b$ (für feste $a, b \in \mathbb{R}$) ist überall stetig. Denn $|f(x) - f(x_0)| = |a| \cdot |x - x_0| < \epsilon$, wenn $|x - x_0| < \epsilon/|a| = \delta$.

- Wie schon erwähnt, hat die Funktion $f(x) = [x]$ an allen ganzzahligen $x \in \mathbb{Z}$ Sprungstellen. Die Funktion hat also abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.
- Sei $f(x) = |x + 1| - 3 = \begin{cases} x - 2 & \text{für } x \geq -1 \\ -x - 4 & \text{für } x < -1 \end{cases}$.

Der Graph dieser Funktion hat eine Knickstelle bei $x_0 = -1$. Dort ist aber

$$\lim_{x \searrow -1} f(x) = \lim_{x \nearrow -1} f(x) = -3 = f(-1).$$

Also passen die beiden Teile zusammen, und f ist bei x_0 stetig.

- Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ kann man stetig nach $x_0 = 2$ fortsetzen durch $f(2) = 4$.

Stetigkeit vererbt sich auf Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten (dort wo diese definiert sind), wie sich sofort aus den entsprechenden Sätzen für Grenzwerte ergibt. Man kann zeigen, dass auch die Funktionen Sinus, Cosinus, Tangens sowie die Exponentialfunktionen stetig sind. Ausserdem gilt:

2.4.4 SATZ Eine aus stetigen Funktionen zusammengesetzte Funktion ist stetig.

Beweis. Sind $f: D_2 \rightarrow W_2$ und $g: D_1 \rightarrow W_1$ stetige Funktionen und ist $W_1 \subset D_2$, so können wir die Funktionen f und g zusammensetzen:

$$f \circ g: D_1 \rightarrow W_2, \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

Man spricht auch von der Komposition der Funktionen f und g . Sei jetzt $x_0 \in D_1$. Wegen der Stetigkeit von g gilt für jede Folge (x_n) in D_1 , die gegen x_0 konvergiert: $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0)$. Aus der Stetigkeit von f folgt nun wiederum $\lim_{n \rightarrow \infty} f(g(x_n)) = f(g(x_0))$. Also ist auch die zusammengesetzte Funktion $f \circ g$ wieder stetig. q.e.d.

Ohne Beweis halten wir noch fest:

2.4.5 SATZ Sind I, J Intervalle und ist $f: I \rightarrow J$ eine bijektive, stetige Funktion, so ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} wieder stetig. Also sind zum Beispiel die Wurzelfunktionen $\sqrt[n]{\cdot}$ ($n \in \mathbb{N}$), die Arcusfunktionen und die Logarithmen stetig.

2.4.6 FOLGERUNG Sämtliche elementaren Funktionen sind stetig, überall dort, wo sie keine Definitionslücken haben.

Diese Tatsache lässt sich vielseitig verwenden, um Grenzwerte von zusammengesetzten Funktionen zu bestimmen. Hier einige Beispiele:

2.4.7 BEISPIELE • $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} = 1.$

• $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{2x^3 - x + 1}{x^2 + 4}\right) = \frac{\pi}{2}.$

Denn es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{x^2 + 4} = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$

• $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \pi\right) = 0$, denn $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \pi = \pi$, Sinus ist stetig und $\sin(\pi) = 0$.

Für das Verhalten von stetigen Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen gelten bemerkenswerte Aussagen. Der *Zwischenwertsatz* besagt folgendes:

2.4.8 SATZ Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $[x_1, x_2] \subset D$. Angenommen, $f(x_1) < y_0 < f(x_2)$ oder $f(x_1) > y_0 > f(x_2)$, dann gibt es ein $x_0 \in [x_1, x_2]$ mit $f(x_0) = y_0$.

Beweis. Hinter dieser Aussage steht das Axiom der Vollständigkeit der Menge der reellen Zahlen. Für Funktionen, die nur für rationale Zahlen definiert sind, ist die Aussage nicht richtig. Wir betrachten nur den ersten Fall. Weiter können wir durch Verschiebung der Funktion f um den Wert y_0 die Frage darauf reduzieren, eine Nullstelle von f zu finden. Nehmen wir also an: $f(x_1) < 0 < f(x_2)$. Eine Strategie zur Konstruktion einer Nullstelle x_0 besteht darin, das Intervall $[x_1, x_2]$ fortgesetzt zu halbieren und nur jeweils die Hälfte zu behalten, über der f das Vorzeichen wechselt. Man erhält eine Intervallschachtelung, und die Grenzen der Intervalle bilden je eine aufsteigende und eine fallende Folge, die gegen denselben Grenzwert x_0 konvergieren. Wegen der Stetigkeit muss $f(x_0) = 0$ gelten. q.e.d.

2.4.9 BEISPIEL Das Polynom $p(x) = x^5 - 3x + 1$ besitzt eine Nullstelle zwischen $x_1 = -2$ und $x_2 = -1$, denn $p(-2) = -25 < 0$ und $p(-1) = 3 > 0$. Wenden wir nun das Intervallhalbierungsverfahren an, um eine solche Nullstelle genauer zu bestimmen.

Das Startintervall ist das Intervall $I_1 = [-2; -1]$. Der Mittelpunkt des Intervalls liegt bei $x = -1.5$ und $p(-1.5) = -2.09375 < 0$. Also wechselt das Polynom zwischen -1.5 und -1 das Vorzeichen, in der rechten Intervallhälfte gibt es also eine Nullstelle. Darum ersetzen wir das Ausgangsintervall nun durch $I_2 = [-1.5; -1]$. Weil $p(-1.25) = 1.698 > 0$ ist, findet der Vorzeichenwechsel von p in linken Intervallhälfte von I_2 statt, und wir setzen $I_3 = [-1.5; -1.25]$ usw. Nach sechs Schritten finden wir, dass es eine Nullstelle zwischen -1.4375 und -1.40625 gibt. Man kann das Verfahren entsprechend weiter fortsetzen, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Das hier angegebene Polynom p besitzt noch zwei weitere Nullstellen, und zwar eine im Intervall $[0; 1]$ und eine im Intervall $[1; 2]$. Auch diese Nullstellen kann man natürlich mit dem Intervallhalbierungsverfahren beliebig genau berechnen.

Der folgende Satz ist weniger leicht zu beweisen, und wir verzichten hier auf den Beweis:

2.4.10 SATZ *Auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ ist jede stetige Funktion beschränkt und nimmt ihr Minimum und Maximum an.*

Aus beiden Sätzen zusammen ergibt sich:

Folgerung: *Eine stetige Funktion bildet ein abgeschlossenes Intervall wieder auf ein abgeschlossenes Intervall ab.*

Beweis. Ist nämlich m das Minimum und M das Maximum von f auf dem Intervall $[a, b]$, so nimmt f nach dem Zwischenwertsatz alle Werte zwischen m und M an. Also folgt $f([a, b]) = \{f(x) \mid a \leq x \leq b\} = [m, M]$. q.e.d.

Bei unstetigen Funktionen bzw. bei stetigen Funktionen auf offenen Intervallen gelten die hier gemachten Aussagen möglicherweise nicht. Zum Beispiel ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem offenen Intervall $(0; 1)$ stetig, aber nicht beschränkt. Sie nimmt hier kein Maximum an.

Die schon erwähnte Gaussfunktion, die einer reellen Zahl x die grösste ganze Zahl $[x]$ zuordnet, die kleiner oder gleich x ist, nimmt auf dem Intervall $[0, 1]$ die Werte 0 und 1 an. Der Wertebereich ist also kein abgeschlossenes Intervall mehr.

Kapitel 3

Komplexe Zahlen und Polynome

3.1 KOMPLEXE ZAHLEN

Zusammenfassung: Durch die Einführung der imaginären Zahl i als Quadratwurzel aus -1 und die daraus resultierende Erweiterung des Zahlenvorrats erhält man den Zahlkörper der komplexen Zahlen, in dem jede Gleichung n -ten Grades eine Lösung hat. Interpretiert man die komplexen Zahlen als Punkte oder Ortsvektoren in der Gaußschen Zahlenebene, kann man die Addition dieser Zahlen als Vektoraddition und die Multiplikation mithilfe der Polarkoordinaten als Winkeladdition zusammen mit einer Multiplikation der Beträge verstehen.

Der Ausgangspunkt für die Erfindung der komplexen Zahlen war die Suche nach Lösungen für quadratische, kubische und allgemeiner Gleichungen n -ten Grades. Die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ (für $a \neq 0$) lauten nach der bekannten *Mitternachtsformel*

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

falls die *Diskriminante* $D := 4ac - b^2$ kleiner oder gleich Null ist. Ist $D > 0$, so hat die quadratische Gleichung keine reelle Lösung. Es gibt in \mathbb{R} keine Quadratwurzeln aus negativen Zahlen, weil alle Quadrate von reellen Zahlen grösser oder gleich Null sind.

Durch Einführung der komplexen Zahlen wird der Zahlenbereich so erweitert, dass darin alle quadratischen Gleichungen und darüberhinaus sogar Gleichungen beliebig hohen Grades Lösungen haben. Dazu postuliert man einfach die Existenz einer Quadratwurzel aus -1 , bezeichnet diese Quadratwurzel nach Euler mit dem Symbol i (für imaginäre Zahl) und rechnet mit Vielfachen von i oder sogar mit Ausdrücken der Form $a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) nach den bekannten Rechengesetzen der Algebra, erweitert um die Regel

$$i^2 = -1.$$

Zum Beispiel ist dann $(i\sqrt{2})^2 = i^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = (-1) \cdot 2 = -2$. Die Zahl $i\sqrt{2}$ ist also eine Quadratwurzel aus der negativen Zahl -2 .

Genauer definieren wir die Menge der *komplexen Zahlen* folgendermassen:

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Eine komplexe Zahl $z = a + ib$ wird durch die Angabe von zwei reellen Zahlen festgelegt, den *Realteil* $\operatorname{Re}(z) = a$ und den *Imaginärteil* $\operatorname{Im}(z) = b$. Und zwei komplexe

Zahlen stimmen nur genau dann überein, wenn sowohl die Real- als auch die Imaginärteile übereinstimmen. Ist der Imaginärteil einer Zahl gleich Null, schreiben wir anstelle von $a + i0$ auch einfach a . Wir identifizieren also die komplexen Zahlen der Form $a + i0$ mit den reellen Zahlen. Entsprechend schreiben wir auch statt $0 + ib$ einfach ib , falls $b \neq 0$ ist.

Die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen werden so definiert, dass die Verknüpfungen mit den von den reellen Zahlen her bekannten Rechenregeln verträglich sind und ausserdem $i^2 = -1$ gilt.

Daraus ergibt sich zwangsläufig für $z_1 = a_1 + ib_1$ und $z_2 = a_2 + ib_2$ die Definition: ($a_i, b_i \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) := (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) := (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

Zum Beispiel:

$$i^3 = -i, \quad (1+i)(1-i) = 1 - i^2 = 2, \quad (2+i)(1-3i) = 5 - 5i = 5(1-i).$$

Eine komplexe Zahl $z = a + ib$ ist ungleich Null, genau dann, wenn $a^2 + b^2 \neq 0$ ist. In diesem Fall gilt:

$$(a + ib) \frac{(a - ib)}{(a^2 + b^2)} = 1.$$

Also hat z dann ein multiplikatives Inverses und wir können schreiben

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}.$$

Hier einige Beispiele:

$$(1+i)^{-1} = \frac{1}{2}(1-i), \quad (1-\sqrt{2}i)^{-1} = \frac{1}{3}(1+\sqrt{2}i), \quad i^{-1} = -i.$$

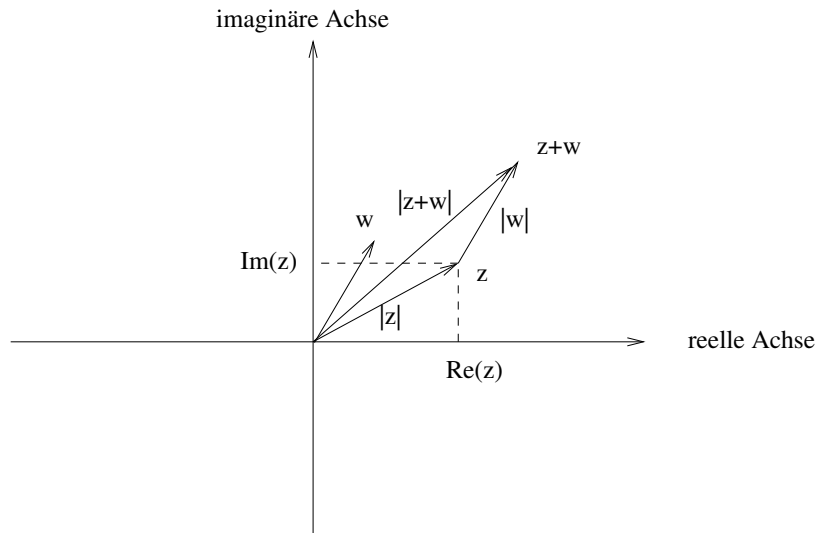
Fassen wir zusammen:

3.1.1 SATZ Die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen mit den Verknüpfungen $+$ und \cdot bildet einen sogenannten Körper. Das heisst, es gelten für die Addition und die Multiplikation dieselben Rechengesetze wie bei den reellen Zahlen, nämlich Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze. Ausserdem hat jede komplexe Zahl $z \neq 0$ ein multiplikatives Inverses.

Man erhält eine geometrische Beschreibung der komplexen Zahlen, wenn man sie mit den Punkten der sogenannten *Gaussschen Zahlenebene* identifiziert. Dazu fasst man den Real- bzw. Imaginärteil einer Zahl als die Koordinaten eines Punktes in einer Ebene mit kartesischem Koordinatensystem auf. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad z = a + ib \mapsto (a, b)$$

ist eine 1:1-Zuordnung, jeder komplexen Zahl entspricht genau ein Punkt der Ebene und umgekehrt. Auf der x -Achse liegen die Punkte, die den reellen Zahlen entsprechen, und auf der y -Achse liegen die Vielfachen von i , die sogenannten rein imaginären Zahlen. Man spricht deshalb auch von der *reellen* bzw. der *imaginären Achse*.



Der *Betrag* einer komplexen Zahl ist definiert als

$$|z| = |a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Er gibt gerade die Länge des Ortsvektors des entsprechenden Punktes in der komplexen Ebene an. Zum Beispiel ist

$$|1 + 2i| = \sqrt{5} \quad \text{und} \quad |4i - 1| = \sqrt{17}.$$

Für reelle Zahlen stimmt diese Definition mit der üblichen Definition des Betrages überein, denn

$$|a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Für den Betrag gelten die folgenden Rechenregeln für alle $z, w \in \mathbb{C}$:

1. $|z| \geq 0$, und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)
3. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

Beweis. Der erste Teil ergibt sich sofort aus der Interpretation des Betrages als Länge eines Ortsvektors.

Zu 2.: Die Addition komplexer Zahlen entspricht in der komplexen Zahlenebene der Addition der Ortsvektoren. Die Komposition der Ortsvektoren, die den Zahlen z und w entsprechen, liefert ein Dreieck in der Zahlenebene mit den Seitenlängen $|z|$, $|w|$ und $|z + w|$. Die Behauptung folgt nun aus der Tatsache, dass in einem ebenen

Dreieck jede Seite höchstens so lang ist wie die Summe der beiden anderen Seiten. Daher auch die Bezeichnung Dreiecksungleichung.

Zu 3.: Dazu setzen wir an $z = a + ib$ und $w = c + id$, setzen ein und rechnen nach. q.e.d.

3.1.2 DEFINITION Unter der zu einer komplexen Zahl $z = a + ib$ *Konjugierten* versteht man die Zahl $\bar{z} := a - ib$. An der Mitternachtsformel kann man ablesen, dass eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ (für $p, q \in \mathbb{R}$ mit $4q > p^2$) zwar keine reellen Lösungen, dafür aber zwei zueinander konjugierte komplexe Lösungen hat, nämlich $z_{1/2} = (-p \pm i\sqrt{4q - p^2})/2$.

In der Gaußschen Zahlenebene entspricht die komplexe Konjugation gerade der Spiegelung an der reellen Achse. Die Zuordnung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$, ist verträglich mit Addition und Multiplikation auf \mathbb{C} , das heisst:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \text{und} \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w} \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

Eine solche Abbildung wird als *Körperautomorphismus* bezeichnet. Mit der komplexen Konjugation lässt sich das Inverse einer Zahl einfach schreiben als:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{für alle } z \neq 0.$$

Nun wollen wir die Multiplikation komplexer Zahlen geometrisch beschreiben. Zunächst wieder einige Beispiele:

3.1.3 BEISPIELE Die Multiplikation mit einer reellen Zahl $r > 0$ bewirkt in der Gaußschen Zahlenebene eine Streckung (oder Stauchung) der Ortsvektoren um den Faktor $r > 0$. Die Multiplikation mit der Zahl i entspricht einer Drehung um 90° . Denn

$$i z = i(a + ib) = -b + ia.$$

Und die Multiplikation mit i^2 ist eine Drehung um 180° , also dasselbe wie die Multiplikation mit -1 .

Allgemeiner lässt sich die geometrische Bedeutung der Multiplikation in \mathbb{C} besser verstehen, wenn man komplexe Zahlen nicht in kartesischen Koordinaten sondern in *Polarkoordinaten* angibt. Dabei ordnen wir jeder Zahl $z = x + iy \neq 0$ ihren Betrag $|z|$ und einen Winkel, das sogenannte Argument $\arg(z)$, zu. Das Argument $\arg(z)$ ist der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Radialstrahl durch z , gemessen gegen den Uhrzeigersinn.

3.1.4 BEISPIEL Die Zahl i hat den Betrag $|i| = 1$ und $\arg(i) = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$. Die Zahl $1 + i$ hat die Polarkoordinaten $|1 + i| = \sqrt{2}$ und $\arg(1 + i) = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$. Für $z = -1 + i$ schliesslich ist $|z| = \sqrt{2}$ und $\arg(-1 + i) = 135^\circ = \frac{3\pi}{4}$.

Durch den Winkel $\varphi = \arg(z)$ und den Betrag $|z|$ ist die Zahl z schon eindeutig festgelegt. Denn x, y sind die Längen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse der Länge $r = |z|$. Also gilt nach der Definition von Sinus bzw. Cosinus:

$$x = r \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad y = r \sin(\varphi).$$

Umgekehrt können wir aus den kartesischen Koordinaten die Polarkoordinaten folgendermassen berechnen:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \arg(z) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{falls } x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{falls } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0 \text{ und } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0 \text{ und } y < 0 \end{cases}$$

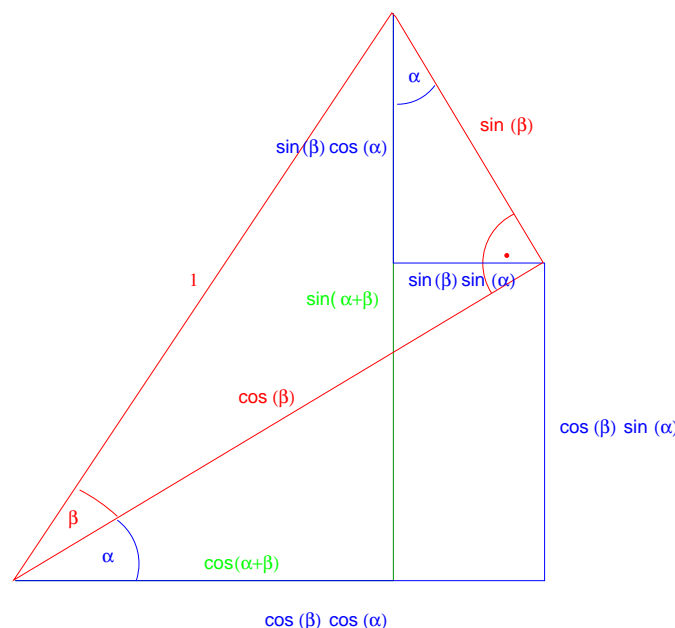
3.1.5 BEISPIELE Die Zahl $z = -1 + i\sqrt{3}$ hat den Betrag $|z| = 2$ und $\arg(z) = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$. Die Zahl $z = -3 - 4i$ hat den Betrag $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ und $\arg(z) = \arctan(4/3) + \pi \approx 233^\circ \approx 1.3\pi$.

Von grosser Bedeutung im Zusammenhang mit den komplexen Zahlen sind die sogenannten *Additionstheoreme* für Sinus und Cosinus:

3.1.6 SATZ Für alle Winkel $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad \text{und} \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta). \end{aligned}$$

Beweis. Die Herleitung dieser Aussagen ergibt sich aus der folgenden Zeichnung:



q.e.d.

Einige wichtige spezielle Werte von Sinus und Cosinus sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

| | 30° | 45° | 60° | 90° |
|-----|--------------|--------------|--------------|-----|
| sin | 1/2 | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{3}/2$ | 1 |
| cos | $\sqrt{3}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | 1/2 | 0 |
| tan | $1/\sqrt{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | — |

Wenden wir das Additionstheorem nun beispielsweise an auf die Winkel $\alpha = 45^\circ$ und $\beta = -30^\circ$, dann erhalten wir $\sin(15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$ und $\cos(15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$.

Kommen wir nun zurück zu den komplexen Zahlen. Hat eine komplexe Zahl z den Betrag r und das Argument $\arg(z) = \varphi$, so gilt: $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Die komplexe Zahl von Betrag 1 und mit Argument $15^\circ = \frac{\pi}{12}$ zum Beispiel lautet also $z = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1) + i \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$.

3.1.7 SATZ Sind z, w komplexe Zahlen ungleich Null, dann gilt:

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w).$$

Beweis. Nehmen wir an, $\arg(z) = \phi$ und $\arg(w) = \psi$. Dann ist $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ und $w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$. Für das Produkt der Zahlen erhalten wir also:

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi + i \sin \psi) =$$

$$|z| \cdot |w| \cdot (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + i(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi).$$

Nun können wir mit den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus schließen:

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)).$$

Daraus lesen wir ab: $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$. Dabei kann es sein, dass die Summe der Einzelwinkel über 2π hinausgeht. In diesem Fall ist gemeint, dass die Gleichheit der Winkel nach Abzug von 2π gilt. q.e.d.

Das bedeutet also: Man multipliziert komplexe Zahlen, indem man ihre Beträge multipliziert und die zugehörigen Winkel addiert.

Die reellen Funktionen Sinus und Cosinus stehen in engem Zusammenhang zu der komplexen Fortsetzung der Exponentialfunktion mithilfe der Exponentialreihe.

3.1.8 DEFINITION Für $x \in \mathbb{R}$ setzt man

$$e^{ix} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}.$$

Verwendet man nun, dass $i^2 = -1$ ist und sortiert nach geraden und ungeraden Exponenten um, erhält man

$$e^{ix} := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Wie wir später noch herleiten werden, konvergieren diese beiden Teilreihen gegen die trigonometrischen Funktionen:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Also stellen wir fest:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

Die Entdeckung dieser Beziehung geht auf Euler zurück und ist unter dem Namen *Eulersche Formel* bekannt. Zum Beispiel ist

$$e^{i\pi} = -1.$$

Hier einige weitere Beispiele:

$$i + 1 = \sqrt{2} e^{i\pi/4}, \quad -i = e^{i3\pi/2}, \quad i - 1 = \sqrt{2} e^{i3\pi/4}.$$

Es gilt folgendes:

- (a) Die Zahlen der Form $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, sind gerade die komplexen Zahlen von Betrag 1. Sie entsprechen also genau den Punkten auf der Kreislinie von Radius 1 in der komplexen Zahlenebene, dem sogenannten *Einheitskreis*.
- (b) $e^{i\varphi} = e^{i\psi} \Leftrightarrow \varphi - \psi = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- (c) $e^{-i\varphi} = (e^{i\varphi})^{-1} = \overline{e^{i\varphi}}$.
- (d) $e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$.

Durch vollständige Induktion folgt die *DeMoivresche Formel*

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Diesen Zusammenhang kann man verwenden, um auf einfache Art hohe Potenzen von komplexen Zahlen zu bilden. Hier ein Beispiel dazu:

$$(1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 (e^{i\pi/4})^8 = 2^4 \cdot e^{i8\pi/4} = 16.$$

3.2 POLYNOME ÜBER DEN KOMPLEXEN ZAHLEN

Zusammenfassung: Jede komplexe Zahl ausser Null hat in \mathbb{C} genau n verschiedene n -te Wurzeln, die man in Polarkoordinaten explizit angeben kann. Wir beschreiben auch die Lösungsformel für Gleichungen dritten Grades von Cardano. Schliesslich halten wir den Fundamentalsatz der Algebra fest, der besagt, dass in \mathbb{C} jedes Polynom von Grad n genau n Lösungen hat, wenn man die Vielfachheiten mitzählt. Das bedeutet, dass ein Polynom über \mathbb{C} vollständig in Linearfaktoren zerlegt werden kann. Und ein reelles Polynom besitzt immer eine Zerlegung in lineare oder quadratische Faktoren.

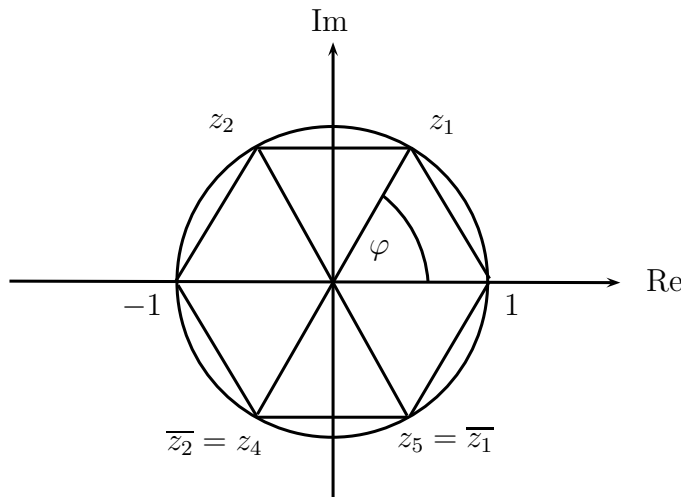
Mithilfe der Polarkoordinaten können wir für jede Wahl einer natürlichen Zahl n die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$, die sogenannten n -ten Einheitswurzeln angeben.

3.2.1 SATZ Zu $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $\varphi := \frac{2\pi}{n}$. Die Gleichung $z^n = 1$ hat genau n verschiedene Lösungen in \mathbb{C} , nämlich die Zahlen

$$z_k = e^{ik\varphi} = \cos\left(k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(k\frac{2\pi}{n}\right) \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Diese Zahlen liegen auf dem Einheitskreis und bilden die Eckpunkte eines regelmässigen n -Ecks. Man beachte, dass das n -Eck spiegelsymmetrisch zur reellen Achse liegt. Das bedeutet: Ist z eine n -te Einheitswurzel, so auch \bar{z} .

Für $n = 6$ erhält man:



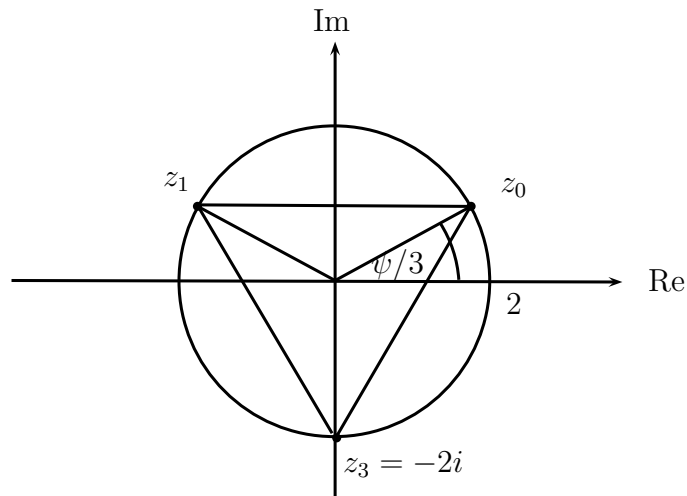
Beweis. Wir rechnen zuerst nach, dass die angegebenen Zahlen tatsächlich die Gleichung lösen: $z_k^n = (e^{ik\frac{2\pi}{n}})^n = e^{ik2\pi} = e^{i0} = 1$. Nehmen wir jetzt umgekehrt an, $z = re^{i\psi}$ sei eine Lösung. Also ist $z^n = r^n(e^{i\psi})^n = r^n e^{in\psi} = 1$. Das bedeutet, $r = 1$ und $n\psi = k2\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, oder $\psi = k \cdot \frac{2\pi}{n} = k \cdot \varphi$. Die Zahl z kommt also schon in unserer Liste vor. q.e.d.

3.2.2 BEISPIEL Die dritten Einheitswurzeln sind

$$z_0 = 1, \quad z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Folgerung: Die Gleichung $z^n = a$ (wobei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) hat in \mathbb{C} genau n verschiedene Lösungen. Ist nämlich $a = r \cdot e^{i\psi}$, so lauten die Lösungen $z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\psi+k2\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$. Diese Zahlen sind wiederum die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks, das gegenüber dem n -Eck gebildet aus den n -ten Einheitswurzeln um den Winkel $\frac{\psi}{n}$ um den Nullpunkt gedreht und mit dem Faktor $\sqrt[n]{r}$ multipliziert ist.

3.2.3 BEISPIELE • Die Lösungen der Gleichung $z^3 = 8i$ lauten $z_0 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$, $z_1 = 2 \cdot e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3})} = 2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$ und $z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$.



- Die Gleichung $z^3 = -1$ hat die Lösungen $z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_1 = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})} = -1$, $z_2 = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3})} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{z_0}$.

Schauen wir uns nun allgemeiner Gleichungen an der Form

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0,$$

wobei die Zahlen $a_j \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ festgewählt sind. Der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung ist also ein *Polynom* von Grad n in z . Ist $a_n = 1$, so spricht man von einem *normierten* Polynom.

Die Nullstellen der Polynome von Grad 2 beschreibt die Mitternachtsformel, und für die Fälle $n = 3, 4$ fanden italienische Mathematiker im 16. Jahrhundert entsprechende Formeln.

Die *Cardanosche Formel* für die reelle Lösung der kubischen Gleichung

$$x^3 + 3px + 2q = 0 \quad (p, q \in \mathbb{R})$$

für den Fall $D := q^2 + p^3 > 0$ lautet:

$$x_1 = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}.$$

In diesem Fall gibt es auch noch zwei zueinander konjugierte komplexe Lösungen, nämlich

$$x_{2/3} = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} - \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}).$$

Man findet die Formel für x_1 , wenn man folgenden Ansatz in die kubische Gleichung einsetzt: $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$.

3.2.4 BEISPIELE • Betrachten wir die Gleichung $x^3 + 6x + 2 = 0$. Hier ist $p = 2$ und $q = 1$, und $D = q^2 + p^3 = 9$. Die Formel von Cardano liefert die reelle Lösung $x_1 = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$. Ausserdem gibt es noch die komplexen Lösungen $x_{2/3} = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{-4}) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{-4})$.

- Wählen wir $p = 0$ und $q = -\frac{1}{2}$, kommen wir auf die Gleichung $x^3 - 1 = 0$. Hier ist $D = \frac{1}{4}$ und daher $x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 1$ und $x_{2/3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, wir finden also wieder die bereits oben berechneten dritten Einheitswurzeln.

Ist die Diskriminante $D = q^2 + p^3$ der kubischen Gleichung $x^3 + 3px + 2q = 0$ negativ, tauchen in der Formel “unmögliche” Quadratwurzeln aus negativen Zahlen auf, und das Zeichen $\sqrt[3]{}$ muss dann als mehrdeutige komplexe Wurzel interpretiert werden. In diesem Fall kommt man sogar auf drei verschiedene reelle Nullstellen!

Wählen wir zum Beispiel $q = 0$ und $p = -4$. Dann ist $q^2 + p^3 = -64$, und eine komplexe Quadratwurzel daraus ist $8i$. Die komplexen dritten Wurzeln der Zahl $w = 8i$ hatten wir oben bestimmt. Sie lauten $z_0 = \sqrt{3} + i$, $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = -2i$. Die dritten Wurzeln der Zahl $\overline{w} = -8i$ bekommt man durch Spiegelung an der reellen Achse. Sie lauten $\overline{z}_0 = \sqrt{3} - i$, $\overline{z}_1 = -\sqrt{3} - i$, $\overline{z}_2 = +2i$. Addieren wir jetzt gemäss der Cardanoschen Formel jeweils entsprechende dritte Wurzeln, erhalten wir reelle Zahlen, denn $x_k := z_k + \overline{z}_k = 2 \operatorname{Re}(z_k)$ für $k = 0, 1, 2$.

Konkret liefert das für unseren Fall:

$$z_0 + \overline{z}_0 = 2\sqrt{3}, \quad z_1 + \overline{z}_1 = -2\sqrt{3}, \quad z_2 + \overline{z}_2 = 0.$$

Tatsächlich sind diese drei Zahlen die Lösungen der kubischen Gleichung

$$x^3 - 12x = 0.$$

Für Gleichungen von Grad $n \geq 5$ gibt es keine entsprechenden allgemeinen Lösungsformeln. Aber man kann beweisen, dass jede solche Gleichung über den komplexen Zahlen Lösungen hat.

Fundamentalsatz der Algebra: Über \mathbb{C} hat jedes Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ eine Nullstelle.

Der Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ist schwierig und kann an dieser Stelle nicht gegeben werden, weil man dafür mehr Theorie benötigt. Per Induktion folgt durch Polynomdivision aus dem Fundamentalsatz sogar, dass jede Gleichung von Grad n genau n Lösungen hat, wenn man die Vielfachheiten mitzählt. Dazu zunächst ein Beispiel:

3.2.5 BEISPIEL Das Polynom $p(z) = z^3 - 4z + 3$ hat offenbar die Nullstelle $z_1 = 1$. Nun teilen wir p durch $(z - 1)$ und erhalten $p(z) = z^3 - 4z + 3 = (z - 1)(z^2 + z - 3)$. Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $z^2 + z - 3$ lauten $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Wir haben also drei Nullstellen von p gefunden, und p hat die Zerlegung:

$$p(z) = z^3 - 4z + 3 = (z - 1)(z^2 + z - 3) = (z - 1)\left(z + \frac{1 - \sqrt{13}}{2}\right)\left(z + \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right).$$

Allgemeiner beobachten wir:

3.2.6 BEMERKUNG Ist p ein Polynom von Grad $n \geq 2$ und $z_0 \in \mathbb{C}$, dann gibt es ein Polynom q von Grad $n - 1$ und eine Zahl $c \in \mathbb{C}$ mit

$$p(z) = q(z)(z - z_0) + c.$$

Genauer ist $c = p(z_0)$. Ist also z_0 eine Nullstelle von p , dann ist p teilbar durch $z - z_0$.

Beweis. Man findet q , indem man p wie oben ausgeführt durch $(z - z_0)$ teilt, und eventuell bleibt dann noch ein Rest c übrig. Einsetzen liefert $p(z_0) = c$. q.e.d.

Nun ergibt sich durch vollständige Induktion über den Grad des Polynoms:

3.2.7 SATZ Ist $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ ein Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ mit Koeffizienten $a_j \in \mathbb{C}$, dann gibt es komplexe Zahlen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ mit

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

Die Liste der z_j besteht aus sämtlichen Nullstellen des Polynoms p , dabei können Nullstellen auch mehrfach aufgelistet sein. Die Häufigkeit, mit der eine bestimmte Nullstelle in der Liste vorkommt, bezeichnet man als *Vielfachheit* der Nullstelle.

3.2.8 BEISPIELE 1. Das Polynom $p(z) = z^2 + a$ ($a \in \mathbb{R}, a > 0$) hat die Nullstellen $\pm i\sqrt{a}$, und wir können es als Produkt in der Form $p(z) = (z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a})$ schreiben.

2. Das Polynom $p(z) = z^3 - 1$ hat als Nullstellen in \mathbb{C} gerade die dritten Einheitswurzeln $z_0 = 1$, $z_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und

$$p(z) = z^3 - 1 = (z - 1)(z^2 + z + 1) = (z - 1)\left(z + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(z + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

3. Das Polynom $p(z) = z^4 + 3z^2 + 2$ hat die Nullstellen $\pm i$ und $\pm i\sqrt{2}$, es lässt sich also folgendermassen zerlegen:

$$p(z) = (z^2 + 1)(z^2 + 2) = (z - i)(z + i)(z - i\sqrt{2})(z + i\sqrt{2}).$$

4. In den bisherigen Beispielen gab es nur einfache Nullstellen. Hier ein Polynom mit einer doppelten und einer dreifachen Nullstelle:

$$p(z) = (z^2 - 4z + 4)(z^3 + 3z^2 + 3z + 1) = (z - 2)^2(z + 1)^3.$$

3.2.9 BEMERKUNG Sind alle Koeffizienten des Polynoms p reell, und ist $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle, so ist auch \overline{w} eine Nullstelle und zwar von derselben Vielfachheit. In diesem Fall lässt sich p (über \mathbb{R}) durch das quadratische reelle Polynom $q(x) = x^2 - (2\operatorname{Re}(w))x + |w|^2$ teilen.

3.2.10 FOLGERUNG Reelle Polynome von Grad $n > 0$ lassen sich über \mathbb{R} vollständig in ein Produkt aus Polynomen von Grad ≤ 2 zerlegen.

Kapitel 4

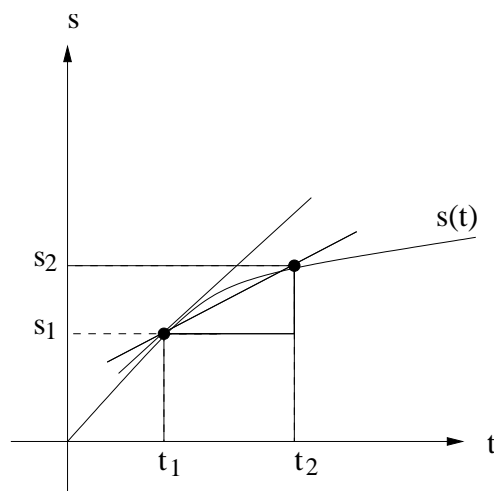
Differentialrechnung

4.1 DIFFERENZIERBARKEIT

Zusammenfassung: Das Konzept der Ableitung einer Funktion ist ein fundamentaler Begriff der neuzeitlichen Mathematik. Hier wird der Begriff als Grenzwert definiert, anhand von Beispielen erläutert und geometrisch interpretiert. Mithilfe der Ableitungsrechenregeln ist es möglich, die Ableitungen der elementaren Funktionen, dort wo sie existieren, auch effektiv zu berechnen.

Die Entwicklung der Differential- und Integralrechnung, oder wie die Begründer der Theorie es nannten, der calculus differentialis und integralis geht vor allem auf zwei bedeutende Mathematiker und Physiker des 17. Jahrhunderts zurück, nämlich Sir Isaac Newton (1642-1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Beide entwickelten die Theorie unabhängig voneinander und verwendeten unterschiedliche Schreibweisen, die bis heute parallel nebeneinander verwendet werden.

Newton entwickelte zunächst ein Konzept von Geschwindigkeit. Legt ein Fahrzeug in einer Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ einen Weg $\Delta s = s_2 - s_1$ zurück, so gibt der Quotient $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ die durchschnittliche Geschwindigkeit des Fahrzeugs auf dieser Strecke an. Um die momentan erreichte Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 zu beschreiben, geht man zu immer kürzeren Zeitintervallen Δt über. In heutiger Sprache heisst das, man macht einen Grenzübergang für $\Delta t \rightarrow 0$ und definiert die *Momentangeschwindigkeit* als $v(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Fassen wir den zurückgelegten Weg als eine Funktion $s(t)$ der Zeit auf, erhalten wir folgenden Graphen:



Aus der Graphik können wir ablesen, dass die Momentangeschwindigkeit auch eine weitere, geometrische Interpretation hat. Denn wir können den Differenzenquotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ auch als Steigung der Sekante an den Graphen von $s(t)$ auffassen. Durch den Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ erhalten wir dann die Steigung der Tangenten an den Graphen im Punkt (t_1, s_1) :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \tan \alpha,$$

wobei α den Winkel angibt, den die Tangente mit der Horizontalen bildet.

Hier nun die heutige Definition von Ableitung:

4.1.1 DEFINITION Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heisst *differenzierbar* an der Stelle $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall heisst $f'(x_0)$ die *Ableitung* von f an der Stelle x_0 . Die Gerade, gegeben durch die Gleichung $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist die *Tangente* an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Der Wert $f'(x_0)$ gibt also die Steigung der Tangente an.

Es werden auch andere Schreibweisen verwendet: Leibniz dachte sich die Ableitung als Quotient von infinitesimal kleinen Differenzen. Deshalb spricht man auch vom *Differentialquotienten* und schreibt statt $f'(x_0)$ auch

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \partial_x f(x_0).$$

Wird die Variable x als Zeit interpretiert, schreibt man statt x häufig t und verwendet die Notation von Newton für die Ableitung: $\dot{f}(t)$.

4.1.2 DEFINITION Die Funktion f heisst auf I differenzierbar, wenn f in jedem Punkt des Intervalls I differenzierbar ist. In diesem Fall liefert die punktweise Ableitung eine Funktion, nämlich $f': I \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$.

Nun einige erste Beispiele:

- Sei $c \in \mathbb{R}$ vorgegeben und $f(x) = cx$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{c(x-x_0)}{x-x_0} = c$. Die Ableitung ist also konstant gleich c . Man sieht dies auch direkt am Graphen von f . Denn hier handelt es sich um eine Gerade der Steigung c , die an jedem Punkt mit ihrer Tangente übereinstimmt.
- Die Parabelfunktion $f(x) = x^2$ ist überall differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = 2x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Denn $\frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0$ und daraus folgt $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$.

- Die Betragsfunktion $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ ist im Punkt $x = 0$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar. Denn es gelten

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} \frac{|x|}{x} = 1.$$

Da der links- und der rechtsseitige Grenzwert nicht übereinstimmen, kann es keine Ableitung geben. Und tatsächlich fällt es schwer, an den Graphen der Betragsfunktion im Nullpunkt eine Tangente zu zeichnen, denn dort liegt eine “Knickstelle” vor.

- Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ ist bei $x = 0$ nicht differenzierbar, denn im Nullpunkt hat die Tangente unendliche Steigung:

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

Für $x_0 > 0$ ist dagegen

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = f'(x_0).$$

- Die Funktion $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (für $x \neq 0$) lässt sich stetig nach 0 fortsetzen durch $f(0) = 0$. Denn nach dem Vergleichssatz ist $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, weil $|f(x)| \leq |x| \cdot \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$ für alle x . Aber die so fortgesetzte Funktion ist im Nullpunkt nicht differenzierbar. Denn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ existiert nicht (siehe Beispiel 2.3.3).

4.1.3 SATZ Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, definiert durch $\exp(x) = e^x$, ist überall differenzierbar und es gilt:

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Um dies einzusehen, kann man zunächst auf elementare Art die Ableitung im Nullpunkt bestimmen. Genauer gilt (siehe Übungsaufgabe):

$$\exp'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Die Steigung der Tangente an die Exponentialkurve im Punkt $(0, 1)$ ist also gleich 1.

Um die Ableitung an einer beliebigen Stelle x_0 zu bestimmen, führen wir nun die Variable $h := x - x_0$ ein. Dann ist

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h}.$$

Daher gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = e^{x_0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}. \quad \text{q.e.d.}$$

4.1.4 BEMERKUNG Entsprechend findet man für $a > 1$: $\frac{d}{dx}(a^x) = \lambda a^x$, wobei $\lambda = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$, das ist also die Steigung des Funktionsgraphen von \exp_a bei $x = 0$.

4.1.5 SATZ Die Funktion Sinus ist überall differenzierbar und es gilt

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Die Ableitung an der Stelle $x = 0$ stimmt überein mit einem speziellen Grenzwert, den wir bereits auf elementare Art bestimmt hatten. Es ist nämlich

$$\sin'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad (\text{siehe Beispiel 2.3.2}).$$

Um die Ableitung des Sinus an einer beliebigen Stelle x_0 zu bestimmen, setzen wir wie eben $h := x - x_0$ und verwenden das Additionstheorem:

$$\frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \sin(h)\cos(x_0) - \sin(x_0)}{h}.$$

Wir wissen ausserdem (siehe Übungsaufgabe):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

Zusammen folgt:

$$\sin'(x_0) = \sin(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = \cos(x_0).$$

q.e.d.

Eine äquivalente Umformulierung der Differenzierbarkeit lautet so:

4.1.6 SATZ Ist die Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar, dann gibt es eine Funktion $R: I \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in I$ gilt:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x), \quad \text{wobei} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0.$$

Hier ist $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ die Gleichung, die die Tangente an den Graphen von f im Punkt $x = x_0$, $y = f(x_0)$ beschreibt. Die "Restfunktion" R gibt an, wie stark der Verlauf von f von der Tangente abweicht.

Beweis. Die im Satz angegebene Dreigliedertwicklung für f können wir folgendermassen umschreiben:

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{für } x \neq x_0.$$

Die Bedingung $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$ ergibt sich also aus der Definition von $f'(x_0)$.
q.e.d.

4.1.7 BEISPIEL Die kubische Funktion $f(x) = x^3$ hat die Ableitung $f'(x_0) = 3x_0^2$. An der Stelle $x_0 = 1$ ist also $f(x_0) = 1$ und $f'(x_0) = 3$. Die Tangente an den Graphen von f an der entsprechenden Stelle hat also die Steigung 3 und wird beschrieben durch die Gleichung $y = 1 + 3(x - 1)$. Diese Tangente schneidet die y -Achse bei $y = -2$ und die x -Achse bei $x = 2/3$.

Die Dreigliedentwicklung an der Stelle $x_0 = 1$ lautet:

$$f(x) = x^3 = 1 + 3(x - 1) + (x^3 - 3x + 2).$$

Der dritte Term $R(x) = x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$ gibt jeweils die Differenz zwischen Funktionswert und Wert auf der Tangente an, und es gilt wie behauptet $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{R(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)(x + 2) = 0$. Wir können hier ausserdem ablesen, dass die Tangente den Graphen an der Stelle $x = -2$ ein weiteres Mal schneidet.

Aus der Existenz der Dreigliedentwicklung folgt sofort:

4.1.8 SATZ Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar, so ist f in x_0 auch stetig. Ist eine Funktion in einem Punkt unstetig so kann sie dort also auch nicht differenzierbar sein.

Ähnlich wie Stetigkeit vererbt sich auch Differenzierbarkeit auf Summen, Vielfache, Produkte, Quotienten (soweit sie definiert sind), Kompositionen und (unter bestimmten Voraussetzungen) auch auf Umkehrfunktionen. Deshalb sind die elementaren Funktionen fast überall differenzierbar. Genauer gelten folgende Regeln:

4.1.9 SATZ Sei $I = (a, b)$ ein offenes Intervall, und seien $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ auf I differenzierbare Funktionen.

1. Die Funktion $\alpha f + \beta g$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fest) ist ebenfalls differenzierbar auf I und es gilt:

$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

2. Die Produktfunktion $f \cdot g$ ist ebenfalls differenzierbar auf I , und es gilt die Produktregel:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

3. Die Funktion $\frac{f}{g}$, definiert auf der Menge $D = I \setminus \{x \in I \mid g(x) = 0\}$, ist auf ganz D differenzierbar, und es gilt die Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{für alle } x \in D.$$

4. Ist $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere differenzierbare Funktion mit $h(x) \in I$ für alle $x \in J$, so ist auch die Komposition $f \circ h: J \rightarrow \mathbb{R}$ auf J differenzierbar, und es gilt die Kettenregel:

$$f'(h(x)) = (f \circ h)'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x) \quad \text{für alle } x \in J.$$

5. Sei jetzt f streng monoton auf I . Wir fassen nun f als Funktion von I nach $J = f(I)$ auf und bezeichnen die Umkehrfunktion von f mit g . Dann ist g an jeder Stelle $x \in J$ mit $f'(g(x)) \neq 0$ differenzierbar und es gilt:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad \text{für alle } x \in J \text{ mit } f'(g(x)) \neq 0.$$

Beweis. Beweisen wir hier exemplarisch die Kettenregel. Dazu setzen wir zuerst $y := h(x)$ und $y_0 = h(x_0)$ in die Dreigliedentwicklung von g ein:

$$g(h(x)) = g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + R(y).$$

Wir setzen jetzt $r(y) = \frac{R(y)}{y - y_0}$ für $y \neq y_0$ und $r(y_0) = 0$. Damit schreiben wir die Dreigliedentwicklung um in:

$$g(h(x)) = g(h(x_0)) + (g'(y_0) + r(y))(y - y_0), \quad \text{wobei } \lim_{y \rightarrow y_0} r(y) = 0 \text{ ist.}$$

Einsetzen in den Differentialquotienten liefert:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(h(x)) - g(h(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (g'(y_0) + r(y)) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = g'(y_0) h'(x_0),$$

wie behauptet.

Die Ableitungsregel für Umkehrfunktionen ergibt sich aus der Beobachtung, dass beim Spiegeln des Funktionsgraphen an der Winkelhalbierenden die Tangente an einer bestimmten Stelle ebenfalls gespiegelt wird und dabei die Steigung m in die Steigung $\frac{1}{m}$ übergeht. q.e.d.

Hier einige Anwendungsbeispiele für die Ableitungsregeln:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\frac{d}{dx} x^n = n \cdot x^{n-1}$.
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\frac{d}{dx} x^{-n} = -n \cdot x^{-n-1}$, wie sich durch Anwendung der Quotientenregel aus dem vorigen Beispiel ergibt.
- Und noch ein Beispiel für die Anwendung der Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

- Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Dann gilt nach der Kettenregel für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dx} e^{\lambda x^2} = 2\lambda x e^{\lambda x^2}.$$

- Sei $a > 0$ festgewählt und $\exp_a(x) = a^x$. Dann finden wir:

$$\exp'_a(x) = \frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} e^{\ln(a)x} = \ln(a) \cdot e^{\ln(a)x} = \ln(a) \cdot a^x.$$

Insbesondere ist also (siehe Bemerkung 4.1.4):

$$\exp'_a(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a).$$

- Ebenfalls aus der Kettenregel folgt

$$\cos' = -\sin,$$

denn $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ und daher $\cos'(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$.

- Nun folgt wiederum aus der Quotientenregel für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

- Der natürliche Logarithmus ist auf ganz $\mathbb{R}_{>0}$ differenzierbar, und für alle $x > 0$ gilt:

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}.$$

Denn $\ln: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, und nach der Regel zur Umkehrfunktion erhalten wir: $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$.

- Ist $f(x) = \ln(\sqrt{x}+1)$ für $x > 0$, so ist nach der Kettenregel $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x+2\sqrt{x}}$.
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Denn nach der Umkehrregel gilt:

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Die Funktion \arctan ist also auf ganz \mathbb{R} differenzierbar.

- Ist $f(x) = \arctan(\frac{1}{x})$ für $x \neq 0$, folgt wiederum mit der Kettenregel

$$f'(x) = \frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Eine nützliche Konsequenz aus der Dreigliedrentwicklung differenzierbarer Funktionen ist ein Spezialfall der sogenannten *l'Hospital'schen Regel*. Dabei geht es um die Bestimmung von Grenzwerten von Quotienten, die bei naiver Anwendung der Regeln auf Ausdrücke der Form „ $\frac{0}{0}$ “ oder „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ führen würden. Die Regel ist nach dem Mathematiker l'Hospital benannt, der sie in einem Lehrbuch zur Infinitesimalrechnung erstmals publizierte, nachdem er sie von Johann Bernoulli gelernt hatte. Hier zunächst die spezielle Fassung, die wir mit den bisherigen Mitteln herleiten können.

4.1.10 SATZ Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei weiter $g(x) \neq 0$ für alle $x < b$. Ist $f(b) = g(b) = 0$ und $g'(b) \neq 0$, so gilt:

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(b)}{g'(b)}.$$

Beweis. Die Dreigliedrentwicklungen von f und g an der Stelle b lauten $f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + R_1(x)$ und $g(x) = g(b) + g'(b)(x-b) + R_2(x)$, wobei $\lim_{x \rightarrow b} \frac{R_1(x)}{x-b} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{R_2(x)}{x-b} = 0$. Weil $f(b) = g(b) = 0$ ist, folgt

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(b)(x-b) + R_1(x)}{g'(b)(x-b) + R_2(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(b) + R_1(x)/(x-b)}{g'(b) + R_2(x)/(x-b)} = \frac{f'(b)}{g'(b)}.$$

q.e.d.

Die l'Hospitalsche Regel gilt allgemeiner auch in dieser Fassung:

4.1.11 SATZ Seien $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $a < b \leq \infty$. Sei weiter $g(x) \neq 0 \neq g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$. Ist entweder

$$(I) \quad \lim_{x \nearrow b} f(x) = \lim_{x \nearrow b} g(x) = 0$$

oder

$$(II) \quad \lim_{x \nearrow b} f(x) = \lim_{x \nearrow b} g(x) = \infty,$$

so gilt:

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} (= \lambda),$$

falls der rechte Grenzwert existiert. Dabei ist auch $\lambda = \infty$ zugelassen.

Falls nötig, kann man auch mehrmals hintereinander die l'Hospitalsche Regel anwenden. Allerdings muss man dann daran denken, jeweils zu überprüfen, ob noch immer die Voraussetzungen erfüllt sind.

4.1.12 BEISPIELE Zunächst einige Beispiele zu Fall (I):

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{2} = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^3 + 27}{x^4 - 81} = \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{3x^2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{3}{4x} = -\frac{1}{4}.$
- $\lim_{x \nearrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{4x + 1}{3x^2 - 3} = 5 \lim_{x \nearrow 1} \frac{1}{3x^2 - 3} = \lim_{y \nearrow 0} \frac{1}{y} = -\infty.$

Beim dritten Beispiel könnte man versucht sein, die Regel ein zweites mal anzuwenden und Zähler und Nenner des Ausdrucks $\frac{4x+1}{3x^2-3}$ nochmals separat abzuleiten. Das geht hier aber nicht, denn die Voraussetzungen der l'Hospitalschen Regel sind gar nicht erfüllt!

Und nun einige Beispiele zu Fall (II):

- Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

Das bedeutet, dass die Exponentialfunktion für $x \rightarrow \infty$ schneller wächst als jedes Polynom!

- Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{nx^{n-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{nx^n} = 0.$$

Das bedeutet, dass die Logarithmusfunktion für $x \rightarrow \infty$ langsamer wächst als jedes Polynom!

- Und schliesslich noch eine letzte Anwendung:

$$\lim_{x \searrow 0} x \cdot (-\ln(x)) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(1/x)}{1/x} = \lim_{t \searrow \infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0.$$

4.2 LOKALE EXTREMA UND MITTELWERTSATZ

Zusammenfassung: Mithilfe der Ableitung lässt sich der Verlauf einer Funktion gut analysieren. Wir formulieren ein Kriterium zur Bestimmung lokaler Extrema oder Sattelpunkte und wenden dies auf einige Beispiele an.

In diesem Kapitel bezeichne f stets eine reellwertige Funktion, definiert auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$. Unter einem lokalen Extremum von f versteht man folgendes:

4.2.1 DEFINITION Man sagt, f habe an der Stelle $x_0 \in (a, b)$ ein *lokales Maximum*, falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Entsprechend liegt in $x_0 \in (a, b)$ ein *lokales Minimum* vor, falls ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Gilt sogar die Ungleichung $f(x_0) > f(x)$ für alle x mit $0 < |x - x_0| < \delta$, dann spricht man von einem *isolierten lokalen Maximum*. Ein *isoliertes lokales Minimum* ist entsprechend definiert.

4.2.2 SATZ Hat f in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum und ist f an der Stelle x_0 differenzierbar, so gilt:

$$f'(x_0) = 0.$$

Man nennt die Nullstellen der Ableitung von f auch die *kritischen Stellen* von f .

Beweis. Nehmen wir zunächst an, f habe in x_0 ein lokales Maximum, und $\delta > 0$ sei so gewählt, dass $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Für $x < x_0$ gilt dann $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ und für $x > x_0$ gilt $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$.

Zusammen folgt $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$. q.e.d.

4.2.3 BEISPIELE • Das Polynom $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ hat die kritischen Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Denn $p'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. An der Stelle x_1 hat p ein isoliertes lokales Maximum und bei x_2 hat p ein isoliertes lokales Minimum.

- Hier ist eine differenzierbare Funktion, die auf einem ganzen Intervall ihr Minimum annimmt, aber nicht überall konstant ist:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ (x - 1)^2 + 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}.$$

Die kritischen Stellen dieser Funktion liegen nicht isoliert, sondern sie bilden ein Intervall, nämlich das Intervall $[0, 1]$.

- Schliesslich kann es auch vorkommen, dass die kritischen Stellen zwar kein Intervall bilden, sich aber an einer Stelle häufen, wie im folgenden Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Die Funktion f ist auch bei $x = 0$ differenzierbar und $f'(0) = 0$. Ausserdem hat die Ableitung f' unendlich viele weitere Nullstellen, die sich bei $x = 0$ häufen.

4.2.4 SATZ (von Rolle) Sei jetzt f auf $[a, b]$ differenzierbar und seien $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann existiert ein $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit $f'(x_0) = 0$. Das heisst also insbesondere: zwischen je zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion liegt mindestens eine kritische Stelle.

Beweis. Ist f auf $[x_1, x_2]$ konstant, so ist $f'(x) = 0$ für alle x und daher nichts zu zeigen. Nehmen wir jetzt an, f sei nicht konstant. Dann über- oder unterschreiten die Funktionswerte auf $[x_1, x_2]$ den Wert $f(x_1) = f(x_2) = c$. Weil f stetig ist, nimmt f auf $[x_1, x_2]$ sowohl Maximum als auch Minimum an, und mindestens eine dieser Stellen muss von x_1 und x_2 verschieden sein. Also hat f zwischen x_1 und x_2 mindestens ein lokales Extremum und damit auch eine kritische Stelle. q.e.d.

Hier eine erste Anwendung dieses Satzes.

4.2.5 BEISPIEL Das Polynom $f(x) = x^5 - 5x + 1$ hat höchstens drei reelle Nullstellen. Denn $f'(x) = 5x^4 - 5 = 0$ genau dann, wenn $x^4 = 1$. Das Polynom f hat also in \mathbb{R} die kritischen Stellen $x = \pm 1$. Da zwischen je zwei Nullstellen mindestens eine kritische Stelle liegt, kann es insgesamt höchstens drei reelle Nullstellen geben.

Nun eine allgemeinere Schlussfolgerung aus dem Satz von Rolle.

4.2.6 FOLGERUNG (Mittelwertsatz) Sei f auf $[a, b]$ differenzierbar und seien $x_1 < x_2 \in [a, b]$. Dann existiert ein $x_0 \in (x_1, x_2)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Mit anderen Worten: Es gibt eine Stelle x_0 zwischen x_1 und x_2 , an der die Tangente an den Graphen von f parallel ist zu der Sekante durch die Punkte $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$.

Beweis. Der Mittelwertsatz folgt durch Anwendung des Satzes von Rolle auf die Funktion g auf $[a, b]$, definiert durch

$$g(x) := f(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad \text{q.e.d.}$$

Daraus können wir folgendes schliessen:

4.2.7 BEMERKUNG Sei wiederum f auf $I = [a, b]$ differenzierbar. Dann gilt:

- Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f auf I streng monoton wachsend.
- Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$, so ist f auf I konstant.
- Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f auf I streng monoton fallend.

Aus dieser Beobachtung ergeben sich folgende Kriterien für die Bestimmung lokaler Extrema einer vorgelegten Funktion.

4.2.8 SATZ Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) = 0$.

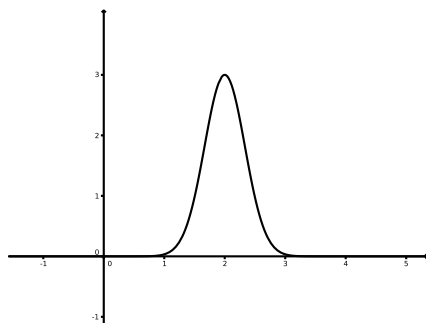
- Wechselt f' bei x_0 das Vorzeichen von $-$ nach $+$, das heisst, ist $f'(x) < 0 < f'(y)$ für alle $x < x_0 < y$, die nahe genug bei x_0 liegen, dann hat f an der Stelle x_0 ein isoliertes lokales Minimum.
- Wechselt f' bei x_0 das Vorzeichen von $+$ nach $-$, das heisst, ist $f'(x) > 0 > f'(y)$ für alle $x < x_0 < y$, die nahe genug bei x_0 liegen, dann hat f an der Stelle x_0 ein isoliertes lokales Maximum.
- Wechselt f' bei x_0 das Vorzeichen nicht und ist $f'(x) \cdot f'(y) > 0$ für alle $x < x_0 < y$, die nahe genug bei x_0 liegen, dann hat f an der Stelle x_0 einen Sattelpunkt.

Wir wenden dies nun an, um den qualitativen Verlauf einiger Funktionen zu bestimmen, also *Kurvendiskussionen* zu machen.

4.2.9 BEISPIEL Seien $x_0, \sigma > 0$ vorgegeben. Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

ist eine Modifikation der Gaußschen Glockenkurve. Sie beschreibt eine sogenannte *Normalverteilung* und wird in der Statistik häufig verwendet.

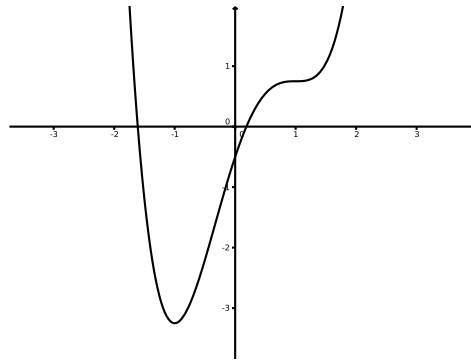


Mit der Kettenregel ergibt sich $f'(x) = -\frac{(x - x_0)}{\sigma^3} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$. Da die Werte der Exponentialfunktion stets positiv sind, folgt $f'(x) > 0$ für $x < x_0$ und $f'(x) < 0$ für $x > x_0$. Also ist f auf dem Bereich $(-\infty, x_0]$ streng monoton wachsend und auf $[x_0, \infty)$ streng monoton fallend. An der Stelle $x = x_0$ hat f sein Maximum. Zugleich ist dies die einzige kritische Stelle von f , denn f' hat nur eine Nullstelle. Ausserdem ist $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, die x -Achse ist also eine Asymptote des Graphen.

4.2.10 BEISPIEL Betrachten wir jetzt das Polynom vierten Grades, definiert durch

$$p(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

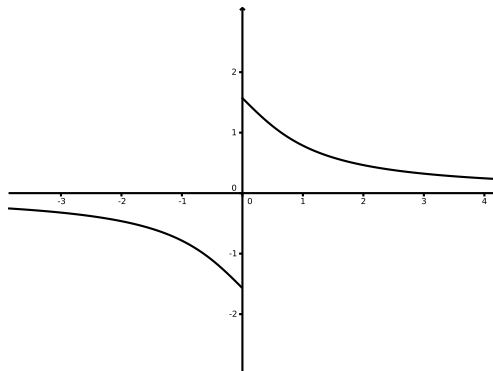
Hier ist $p'(x) = 3(x-1)^2(x+1)$. Die Nullstellen der Ableitung sind also $x = \pm 1$, und $p'(x) \geq 0$ für alle $x > -1$ und $p'(x) < 0$ für $x < -1$. Das bedeutet, dass die Funktion auf dem Bereich $(-\infty, -1]$ monoton fallend ist, und auf dem Bereich $[-1, \infty)$ monoton steigend. Bei $x = -1$ liegt also ein (sogar absolutes) Minimum vor, der Funktionswert ist $p(-1) = -13/4$. Bei $x = 1$ haben wir einen Sattelpunkt, weil p' dort nicht das Vorzeichen wechselt, der Funktionswert ist hier $p(1) = 3/4$. Ausserdem ist $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4(\frac{3}{4} - \frac{1}{x} - \frac{3}{2}\frac{1}{x^2} + 3\frac{1}{x^3} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^4}) = \infty$. Mit diesen Angaben können wir nun den Funktionsgraphen skizzieren.



4.2.11 BEISPIEL Sei $f(x) = \arctan(1/x)$ für $x \neq 0$. Hier ist $f'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \neq 0 \forall x$, es gibt also keine lokalen Extrema. Die Ableitung ist stets negativ, also ist f sowohl im Bereich $x < 0$ also auch im Bereich $x > 0$ streng monoton fallend. Die Grenzwerte sind

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \nearrow 0} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \searrow 0} f(x) = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -1.$$

Also hat f keine stetige Fortsetzung nach $x = 0$, obwohl die Ableitung sich fortsetzen liesse.



4.3 HÖHERE ABLEITUNGEN, KONVEXITÄT, NEWTONVERFAHREN

Zusammenfassung: Die zweite Ableitung kann man verwenden, um das Kriterium zur Bestimmung lokaler Extrema neu zu formulieren. Ausserdem gibt die zweite Ableitung einer Funktion Auskunft über die lokale Krümmung des Funktionsgraphen. Schliesslich stellen wir das Newtonverfahren vor. Dabei handelt es sich um einen Algorithmus zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen differenzierbarer Funktionen.

Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf einem Intervall I , so erhalten wir eine neue Funktion auf I , nämlich f' . Ist f' an der Stelle $x_0 \in I$ wiederum differenzierbar, so sagt man, f sei in x_0 *zweimal differenzierbar* und schreibt

$$f''(x_0) = \frac{d}{dx} f'(x_0).$$

Existiert die zweite Ableitung in jedem Punkt von I , heisst f zweimal differenzierbar. Entsprechend definiert man durch Iteration die n -te Ableitung ($n \in \mathbb{N}$) und notiert dafür

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d}{dx} f^{(n-1)}(x_0) = \frac{d^n}{dx^n} f(x_0).$$

Folgende Bezeichnungen sind gebräuchlich und gelegentlich nützlich:

$$C^n(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ } n\text{-mal differenzierbar und } f^{(n)} \text{ stetig auf } I\}$$

Das folgende Symbol schliesslich bezeichnet die beliebig oft differenzierbaren Funktionen

$$C^\infty(I) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C^n(I) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\}.$$

Zu den C^∞ -Funktionen gehören zum Beispiel die Polynome, die Exponentialfunktion, die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus und Produkte dieser Funktionen. Es gibt aber auch differenzierbare Funktionen, deren Ableitung nicht mehr überall differenzierbar ist. Hierzu einige Beispiele:

- Die Betragsfunktion ist stetig, aber nicht differenzierbar an der Stelle $x = 0$. Also liegt sie in $C^0(\mathbb{R})$, aber nicht in $C^1(\mathbb{R})$.
- Die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ x^3 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ ist überall differenzierbar, auch bei $x = 0$. Die Ableitung von f lautet $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \geq 0 \\ 3x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$. Allerdings hat die Funktion f' nun eine Knickstelle bei $x = 0$ und ist deshalb dort nicht differenzierbar, denn $\lim_{x \nearrow 0} \frac{3x^2}{x} = 0 \neq 2 = \lim_{x \searrow 0} \frac{2x}{x}$. Also liegt die Funktion f in $C^1(\mathbb{R})$, aber nicht in $C^2(\mathbb{R})$.
- Die folgende schon mehrfach erwähnte Funktion liefert ein Beispiel dafür, dass die Ableitung einer differenzierbaren Funktion nicht überall stetig zu sein braucht. Sei nämlich $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ ergibt sich die Ableitung aus Produkt- und Kettenregel als $f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$. Für $x = 0$ können wir die Regeln nicht anwenden, sondern müssen auf den Differenzenquotienten zurückgreifen:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Dies folgt aus dem Vergleichssatz, da $0 \leq |x \cdot \sin(\frac{1}{x})| \leq x$ für alle $x > 0$. Also ist f überall differenzierbar. Aber die Ableitung f' ist an der Stelle $x = 0$ nicht stetig, denn der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ existiert nicht, weil $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\frac{1}{x})$ nicht existiert.

Die zweite Ableitung kann bei Kurvendiskussionen hilfreich sein.

4.3.1 SATZ Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $x_0 \in D$ mit $f'(x_0) = 0$.

- Ist $f''(x_0) < 0$, so hat f bei x_0 ein isoliertes lokales Maximum.
- Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f bei x_0 ein isoliertes lokales Minimum.
- Ist $f''(x_0) = 0$ und ist $f'(x)$ in der Nähe von x_0 immer positiv (oder immer negativ), dann hat f bei x_0 einen Sattelpunkt.

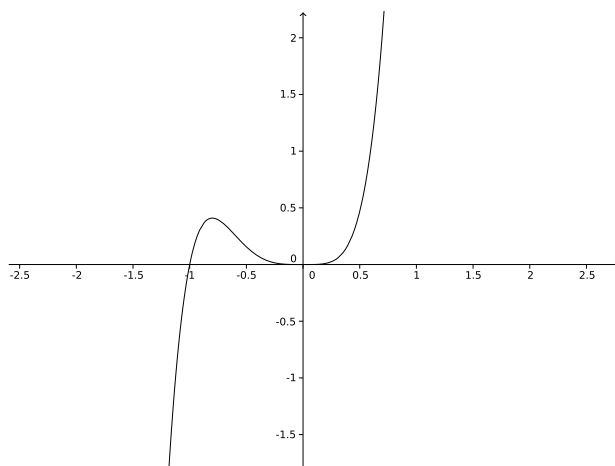
Beweis. Wir begründen nur die zweite Behauptung: Weil f'' nach Voraussetzung stetig ist und $f''(x_0) > 0$, muss auch $f''(x) > 0$ sein für alle x nahe genug bei x_0 . Denn nach dem ϵ - δ -Kriterium der Stetigkeit 2.4.2, gibt es zu $\epsilon = \frac{1}{2}|f''(x_0)|$ ein $\delta > 0$, so dass $|f''(x) - f''(x_0)| < \epsilon = \frac{1}{2}|f''(x_0)|$ für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$. Und daraus folgt

$$f''(x) > f''(x_0) - \frac{1}{2}|f''(x_0)| = \frac{1}{2}f''(x_0) > 0.$$

Also ist f' auf dem Abschnitt $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ streng monoton steigend, wechselt also bei der Nullstelle x_0 das Vorzeichen, und zwar von $-$ nach $+$. Nach Satz 4.2.8 hat f also bei x_0 ein isoliertes lokales Minimum. q.e.d.

Bei der Beurteilung von Punkten mit $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ ist Vorsicht geboten. Diese Stellen sind nicht unbedingt immer Sattelpunkte. Dazu ein Beispiel:

4.3.2 BEISPIEL Die Funktion $f(x) = 5x^4(x + 1)$ hat die Ableitung $f'(x) = 25x^4 + 20x^3 = x^3(25x + 20)$ und $f''(x) = 100x^3 + 60x^2$. Die kritischen Punkte von f sind also $x_1 = 0$ und $x_2 = -4/5$. Es gilt $f'(0) = 0 = f''(0)$. Aber es handelt sich bei $x_1 = 0$ nicht um einen Sattelpunkt, sondern um ein lokales Minimum, denn f' wechselt an dieser Stelle das Vorzeichen von $-$ nach $+$. An der Stelle x_2 ist $f''(-4/5) = -20(4/5)^2 < 0$. Dort liegt also ein lokales Maximum vor.



4.3.3 BEMERKUNG Hat f'' an der Stelle x_0 eine isolierte Nullstelle und wechselt f'' bei x_0 das Vorzeichen, dann wechselt der Graph an der Stelle x_0 von einer Seite der Tangenten auf die andere. Deshalb werden diese Punkte auch als die Wendepunkte von f bezeichnet. Zur Begründung kommen wir später (siehe 4.3.8).

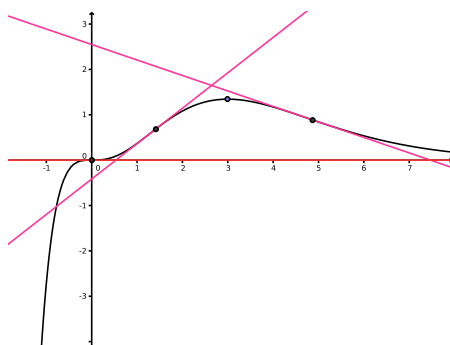
4.3.4 BEISPIEL Sei

$$f(x) = x^3 e^{-x} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktion hat nur eine Nullstelle bei $x = 0$. Es ist

$$f'(x) = (3x^2 - x^3)e^{-x} = (3 - x)x^2 e^{-x} \quad \text{und} \quad f''(x) = (6x - 6x^2 + x^3)e^{-x}.$$

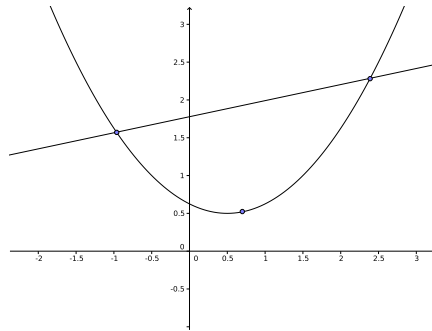
Also hat f' die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$. Weil $f''(0) = 0$ ist und $f'(x) > 0$ für kleine $x \neq 0$, liegt bei $x_1 = 0$ ein Sattelpunkt vor. Weiter ist $f''(3) = -9e^{-3} < 0$, also hat f bei $x_2 = 3$ ein isoliertes lokales Maximum.



Die zweite Ableitung hat die drei Nullstellen $x = 0$ und $x = 3 \pm \sqrt{3}$. Weil hier jeweils f'' das Vorzeichen wechselt, handelt es bei allen drei Stellen um Wendepunkte. Schliesslich gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ (nach der l'Hospitalischen Regel), und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 e^x = -\infty$.

Aus dem Vorzeichen der zweiten Ableitung können wir Rückschlüsse darüber ziehen, ob der Graph der Funktion in einem bestimmten Abschnitt nach oben oder unten gewölbt ist.

4.3.5 DEFINITION Eine Funktion f , definiert auf einem Intervall I , heisst *konvex* (bzw. *konkav*), wenn für jede Wahl von $x_1 < x_2 < x_3 \in I$ der Punkt $(x_2, f(x_2))$ des Funktionsgraphen unterhalb (bzw. oberhalb) der Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_3, f(x_3))$ liegt.



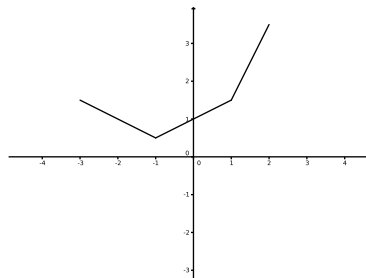
Das heisst:

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} (x_2 - x_1).$$

Es ist auch erlaubt, dass der Graph stückweise mit der Sekanten übereinstimmt. Liegt aber der Graph jeweils echt unterhalb (bzw. oberhalb) der Sekanten, nennt man die Funktion *strikt* konvex (bzw. *strikt* konkav). Ist f differenzierbar, so kann man dies auch so ausdrücken, dass der Graph von f echt oberhalb (bzw. unterhalb) jeder Tangenten an den Graphen liegt.

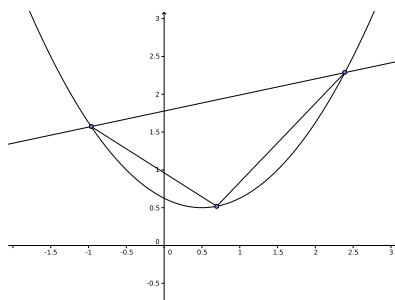
4.3.6 BEISPIEL Die Funktion, definiert durch $f(x) = \begin{cases} -x/2 & \text{für } -3 < x < -1 \\ x/2 + 1 & \text{für } -1 \leq x < 1 \\ 2x - 1/2 & \text{für } 1 \leq x < 2 \end{cases}$

hat mehrere Knickstellen, die Funktion ist also nicht überall differenzierbar. Aber wir können dennoch feststellen, dass f konvex ist.



4.3.7 SATZ Sei f auf $I = [a, b]$ zweimal differenzierbar und $f''(x) > 0$ für alle x . Dann ist f strikt konvex. Ist dagegen $f''(x) < 0$ für alle x , so ist f strikt konkav.

Beweis. Angenommen $f''(x) > 0$ für alle x . Dann ist f' streng monoton wachsend. Betrachten wir nun drei Stellen $x_1 < x_2 < x_3$ im Intervall I und verbinden wir die entsprechenden Punkte auf dem Funktionsgraphen mit drei Sekanten.



Nach dem Mittelwertsatz gibt es Stellen $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ und $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ mit

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad \text{und} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Weil $\xi_1 < \xi_2$ und f' monoton wachsend ist, folgt $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$. Das bedeutet aber gerade, dass der Punkt $(x_2, f(x_2))$ unterhalb der Sekante von $(x_1, f(x_1))$ nach $(x_3, f(x_3))$ liegt wie behauptet. q.e.d.

4.3.8 FOLGERUNG *Hat f'' an der Stelle x_0 eine isolierte Nullstelle und wechselt f'' bei x_0 das Vorzeichen, dann wechselt der Graph an der Stelle x_0 von einer Seite der Tangenten auf die andere.*

Beispielsweise ist die Parabelfunktion, gegeben durch $f(x) = x^2$, auf jedem abgeschlossenen Intervall konvex. Dasselbe gilt auch für die Exponentialfunktion. Dagegen sind die Quadratwurzelfunktion und die Logarithmusfunktion nicht konvex, sondern konkav.

Zum Abschluss dieses Kapitels sei noch ein Algorithmus zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen stetig differenzierbarer Funktionen beschrieben, das sogenannte *Newtonverfahren*. Wir beschränken uns hier auf den Fall einer konvexen Funktion und halten zuerst folgendes fest:

4.3.9 BEMERKUNG *Eine stetige, strikt konvexe Funktion nimmt auf einem abgeschlossenen Intervall sein Minimum an genau einer Stelle an.*

Hier nun das Newtonverfahren:

4.3.10 SATZ *Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit $f(a) < 0 < f(b)$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Wir definieren rekursiv eine Folge durch*

$$x_0 := b \quad \text{und} \quad x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann konvergiert die Folge der x_n in $[a, b]$ gegen eine Nullstelle von f .

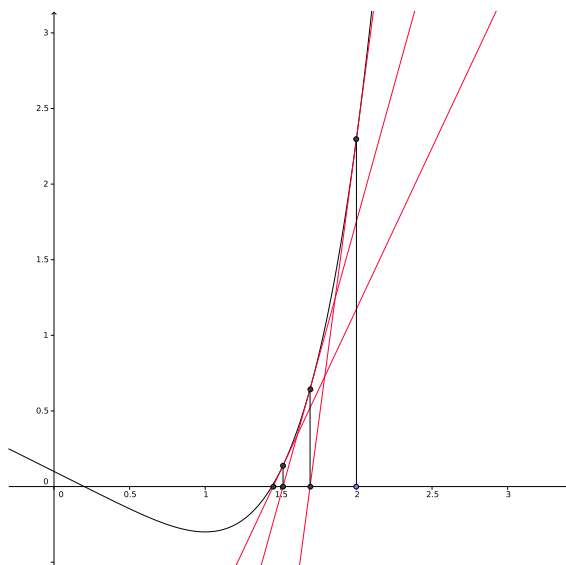
Entsprechendes gilt auch, wenn $f(a) > 0 > f(b)$ und $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Hier muss man allerdings mit dem Startwert $x_0 = a$ beginnen und die Nullstelle von links approximieren.

Die Idee zu diesem Verfahren ist die folgende: Ausgehend von einer Stelle x_0 wird die Tangente an den Graphen von f bei x_0 gebildet und der Schnittpunkt x_1 mit der x -Achse berechnet. Dann bildet man die Tangente bei x_1 und schneidet diese Tangente wiederum mit der x -Achse, um x_2 zu erhalten, und so weiter. Die Gleichung der Tangente bei x_n lautet

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n).$$

Also erfüllt der Schnittpunkt x_{n+1} mit der x -Achse die Gleichung $0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$. Wenn man dies umformt, erhält man genau die angegebene Rekursionsformel.

4.3.11 BEISPIEL Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^5 - 5x + 1$ (siehe 4.2.5). Weil $f(1) = -3 < 0$ und $f(2) = 23 > 0$, wechselt f auf dem Intervall $[1, 2]$ das Vorzeichen und es muss dort eine Nullstelle geben. Ausserdem ist $f''(x) = 20x^3 > 0$ für alle $x \in [1, 2]$. Die Voraussetzungen des Satzes sind also erfüllt, wir können das Newtonverfahren anwenden.



Das Verfahren, ausgehend vom Startwert $x_0 = 2$, liefert hier im sechsten Schritt $x_6 \approx 1,4405$, und diese Näherung der Nullstelle ist bereits bis auf 3 Kommastellen genau. Die Funktion hat noch zwei weitere Nullstellen, und zwar eine im Intervall $[-2, -1]$ und eine weitere im Intervall $[0, 1]$. Diese Nullstellen kann man auf entsprechende Art mit dem Newtonverfahren approximativ bestimmen.

Beweis. Kommen wir nun zur Begründung dafür, warum das Verfahren funktioniert. Nach Voraussetzung ist f strikt konvex, das heisst, die Ableitung f' ist streng monoton wachsend. Ausserdem wechselt die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ das Vorzeichen. Der Minimalwert von f auf $[a, b]$ ist $\leq f(a) < 0$, wird also an einer Stelle $m < b$ angenommen. Die Funktion f fällt von a bis m und wächst streng monoton von m bis b , denn $f'(x) > 0$ für alle $x > m$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also genau eine Nullstelle t von f zwischen m und b , und $f(x) > 0$ für alle $x > t$.

Ist $x_n \in [t, b]$, so ist $f'(x_n) > 0$ und die Tangente zur Stelle x_n schneidet die x -Achse zwischen t und x_n , weil der Graph von f oberhalb der Tangente liegt. Also ist $x_{n+1} \in [t, b]$ wohldefiniert und $x_{n+1} < x_n$. Die Folge x_n ist also streng monoton fallend und nach unten beschränkt durch t . Deshalb hat sie einen Grenzwert. Für diesen Grenzwert c ergibt sich aus der Rekursionsformel und der Stetigkeit von f und f' :

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n)} = c - \frac{f(c)}{f'(c)}.$$

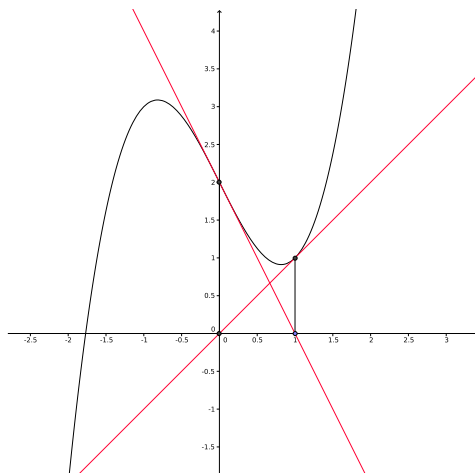
Also muss $f(c) = 0$ sein, das heisst $c = t$. q.e.d.

Allgemeiner funktioniert das Newtonverfahren für $f \in C^2([a, b])$ auch dann, wenn auf $[a, b]$ ein Vorzeichenwechsel von f stattfindet und $f''(x) \neq 0$ ist für alle x , solange man den Startwert auf der passenden Seite der vermuteten Nullstelle wählt. Wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist und ein Wendepunkt der Funktion im Intervall liegt, dann kann es sein, dass die Näherungsschritte gar nicht definiert sind (weil man durch Null teilen müsste) oder das Verfahren nicht konvergiert. Dazu hier noch ein Beispiel:

4.3.12 BEISPIEL Die Funktion

$$f(x) = x^3 - 2x + 2$$

hat die Ableitung $f'(x) = 3x^2 - 2$ und $f''(x) = 6x$. Es gibt also einen Wendepunkt bei $x = 0$. Wählt man jetzt als Startwert für das Newtonverfahren den Punkt $x_0 = 1$, dann liefert das Verfahren als nächste Stelle den Punkt $x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 0$ und dann wiederum $x_2 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)}$ ist nicht definiert. Die Folge der Näherungswerte springt also zwischen den beiden Punkten x_0 und x_1 hin und her, und das Newtonverfahren konvergiert hier nicht.



Kapitel 5

Integralrechnung

Der Ausgangspunkt für die Entwicklung der Integralrechnung ist das Problem der Berechnung krummlinig begrenzter Flächen. Bereits in der Antike gelang es Archimedes, den Flächeninhalt eines Kreises und den Flächeninhalt unter einem Parabelabschnitt mithilfe von Ausschöpfungen zu bestimmen. Seit der Antike haben sich viele Mathematiker (u.a. Kepler und Fermat) mit der Berechnung spezieller Flächeninhalte auseinandergesetzt. Im 17. Jahrhundert fanden dann G.W. Leibniz, I. Newton und Johann Bernoulli unabhängig voneinander heraus, dass man die Integration stetiger Funktionen als das Suchen einer Stammfunktion und damit als Umkehrung der Differentiation auffassen kann. Dadurch vereinfachte sich die Berechnung der bis dahin bekannten Flächeninhalte radikal und reduzierte sich auf die Anwendung einiger einfacher Regeln, und es entstand das Integralkalkül.

Dabei stand für Newton der Aspekt der Suche nach einer Stammfunktion im Vordergrund, während Leibniz das Integral primär als eine Approximation der Fläche unter einem Funktionsgraphen durch eine Summe über geeignete Rechtecke auffasste. Der Ansatz von Leibniz wurde im 19. Jahrhundert von Bernhard Riemann präzisiert. Wir werden hier den Integralbegriff vorstellen, wie er im 19. Jahrhundert von Bernhard Riemann definiert wurde.

5.1 RIEMANN-INTEGRAL

Zusammenfassung: Wir definieren das Integral einer Funktion als Grenzwert von Riemannsummen. Handelt es sich um eine Funktion, die nur positive Werte annimmt, dann misst das Integral den Inhalt der Fläche zwischen Funktionsgraph und x -Achse. Es gibt Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind. Ist aber eine Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ bis auf endlich viele Sprungstellen stetig, so ist sie über $[a, b]$ integrierbar. Ändert man den Wert der Funktion an einer Stelle beliebig ab, bleibt das Integral trotzdem unverändert.

Für die Definition des Integrals benötigen wir einige Vorbereitungen. Sei dazu $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine nach oben und unten beschränkte Funktion. Unter einer *Teilung* des Intervalls $[a, b]$ verstehen wir eine Menge von *Stützstellen*

$$T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b],$$

wobei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ und $n \in \mathbb{N}$ ist. Die *Feinheit* der Teilung T ist definiert als

$$||T|| := \max\{x_k - x_{k-1} \mid k = 1, \dots, n\}.$$

Die *Riemann-Summe* von f zur Teilung T und den Messpunkten $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ lautet

$$R_T(f) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Hier werden (falls $f(\xi_k) \geq 0$) die Flächen der Rechtecke über den Teilintervallen $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ der Höhe $f(\xi_k)$ aufsummiert. Eigentlich müsste man die Wahl der Messpunkte mit in die Abkürzung $R_T(f)$ aufnehmen. Wir verzichten hier darauf, um die Notation möglichst einfach zu halten. Ist f stetig und wählt man als Messpunkte jeweils die Stellen ξ_k , an denen f sein Maximum (bzw. sein Minimum) auf I_k annimmt, so ist die zugehörige Riemann-Summe die *Obersumme* (bzw. die *Untersumme*) zur Teilung T .

Ist jetzt $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Teilungen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} ||T_n|| = 0$, so würde man das Integral von f über $[a, b]$ gern als den Grenzwert der zugehörigen Riemann-Summen, also als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{T_n}(f)$$

definieren. Hier ergeben sich aber gleich zwei Fragen: Existiert dieser Grenzwert überhaupt? Und wenn ja, hängt der Grenzwert von der Wahl der Teilungen und der jeweiligen Messpunkte ab?

Um die Existenz und Eindeutigkeit sicherzustellen, muss man an die Funktion Bedingungen stellen. Dazu definieren wir die *Schwankungssumme* von f zur Teilung T als

$$D_T(f) := \sum_{k=1}^n \Delta(f)_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \text{Obersumme} - \text{Untersumme},$$

wobei $\Delta(f)_k := \sup\{f(x) \mid x \in I_k\} - \inf\{f(x) \mid x \in I_k\}$ die grösste Schwankung von f auf dem Intervall I_k angibt. Die Schwankungssumme von T ist gerade die Differenz zwischen Ober- und Untersumme zur Teilung T . Wir können festhalten, dass die Schwankungssumme bei Verfeinerung der Teilung T höchstens kleiner, aber nie grösser wird.

5.1.1 DEFINITION Eine beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heisst Riemann-integrierbar über $[a, b]$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Teilung T von $[a, b]$ gibt mit $D_T(f) \leq \epsilon$.

5.1.2 SATZ Ist f Riemann-integrierbar über $[a, b]$ und T_j eine Folge von Teilungen von $[a, b]$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} ||T_j|| = 0$, so existiert der Grenzwert $\lim_{j \rightarrow \infty} R_{T_j}(f)$ in \mathbb{R} und ist unabhängig von der Wahl der Folge T_j und der Messpunkte. Man schreibt dann

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{j \rightarrow \infty} R_{T_j}(f).$$

Diese Schreibweise geht auf Leibniz zurück, der damit an die Summation über Rechtecksflächen “infinitesimaler Breite” dx erinnern wollte.

Zur Berechnung des Integrals einer integrierbaren Funktion kommen also zum Beispiel Obersummen oder Untersummen in Frage, man könnte aber als Messpunkte

auch jeweils die Mittelpunkte der Teilintervalle wählen. Entscheidend ist nur, dass die Feinheit der betrachteten Teilungen gegen Null konvergiert.

Wir halten zunächst fest, dass alle auf einem abgeschlossenen Intervall stetigen Funktionen dort auch Riemann-integrierbar sind. Dazu brauchen wir folgende Tatsache, die wir hier ohne Beweis angeben:

5.1.3 SATZ Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann ist f auf $[a, b]$ sogar gleichmässig stetig. Das heisst, zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$|x - y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \forall x, y \in [a, b].$$

5.1.4 SATZ Jede auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige Funktion ist über $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann setzen wir $\epsilon_0 := \frac{\epsilon}{b-a}$ und wählen $\delta > 0$ so dass $|f(x) - f(y)| < \epsilon_0$ für alle x, y mit $|x - y| < \delta$. Sei weiter $T = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Teilung des Intervalls $[a, b]$ mit $\|T\| < \delta$. Dann gilt $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ für alle k , und daher $\Delta(f)_k = \max\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\} - \min\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k\} < \epsilon_0$. Daraus folgt für die Schwankungssumme $D_T(f) = \sum_{k=1}^n \Delta(f)_k (x_k - x_{k-1}) < \epsilon_0(b - a) = \epsilon$. Also erfüllt f die Definition der Riemann-Integrierbarkeit. q.e.d.

Es gibt aber auch Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind. Dazu hier ein Beispiel.

5.1.5 BEISPIEL Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Es gilt $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(k! \pi x))^{2n})$ für alle x . Jedes Teilintervall von $[0, 1]$ enthält sowohl rationale als auch irrationale Punkte, die als Messpunkte zur Auswahl stehen. Also beträgt die Schwankungssumme $D_T(f) = 1$ für jede Teilung T von $[0, 1]$. Deshalb ist f nicht Riemann-integrierbar. Der Bereich, der zwischen dem Funktionsgraphen und der x -Achse liegt, ist so ausgefranst, dass es uns in diesem Rahmen nicht gelingt, ihm einen sinnvollen Flächeninhalt zuzuordnen.

Nun wollen wir das Integral mithilfe von Riemannsummen in zwei Beispielen explizit berechnen.

5.1.6 BEISPIELE (1) Sei $a > 0$ fest gewählt und bezeichne f die Parabelfunktion auf $[0, a]$, gegeben durch $f(x) = x^2$. Die Parabelfunktion ist stetig und daher integrierbar. Zur Berechnung des Integrals wählen wir Teilungen in jeweils gleichbreite Abschnitte. Die Teilung T_n (für $n \in \mathbb{N}$) bestehe aus den Stützstellen

$$x_k := a \cdot \frac{k}{n} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n.$$

Im Intervall I_k wählen wir jeweils den rechten Randpunkt als Messpunkt. Dann lautet die dazugehörige Riemann-Summe:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a}{n} f(x_k) = \sum_{k=1}^n \frac{a}{n} \left(a \frac{k}{n}\right)^2 = \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{a^3}{n^3} \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{a^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Daraus ergibt sich

$$\int_0^a x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{T_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^3}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = \frac{a^3}{3}.$$

(2) Betrachten wir nun die Hyperbelfunktion. Sei $a > 1$ fest gewählt. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in [1, a]$ ist ebenfalls stetig und daher integrierbar. Wir wollen zeigen:

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx = \ln(a).$$

Man kann diese Tatsache sogar als Definition des natürlichen Logarithmus verwenden, und so ist es auch historisch gewesen. Der Mathematiker Napier entdeckte bei dem Versuch, die Hyperbel zu integrieren, dass die Fläche unter der Hyperbel auf dem Abschnitt $[1, a]$ übereinstimmt mit der Fläche unter der Hyperbel auf dem Abschnitt $[c, ac]$ für alle $c > a$. (Die Streckung des Abschnitts $[1, a]$ auf der x -Achse wird wettgemacht durch die entsprechende Stauchung der Funktionswerte.) In Integralnotation heisst das:

$$\int_c^{ac} \frac{1}{x} dx = \int_1^a \frac{1}{x} dx.$$

Denn ist $T = \{1, x_1, \dots, x_n\}$ eine Teilung von $[1, a]$, dann liefert Multiplikation mit dem Faktor c eine Teilung $cT = \{c, c \cdot x_1, \dots, c \cdot x_n\}$ von $[c, ac]$. Die entsprechenden Riemann-Untersummen stimmen überein, denn: $R_{cT}(f) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{cx_k} (cx_k - cx_{k-1}) = R_T(f)$. Die Behauptung folgt jetzt durch Grenzübergang $\|T\| \rightarrow 0$.

Die Beobachtung von Napier ist eigentlich nichts anderes als das Logarithmen-gesetz:

$$\ln(ac) - \ln(c) = \int_c^{ac} \frac{1}{x} dx = \int_1^a \frac{1}{x} dx = \ln(a).$$

Ausserdem gilt offenbar $\int_1^1 \frac{1}{x} = 0 = \ln(1)$. Durch diese Eigenschaften ist der natürliche Logarithmus bereits (bis auf Konstante) eindeutig festgelegt.

Jetzt wollen wir das Integral für $a > 1$ mithilfe von Riemannsummen explizit bestimmen. Dazu sei T_n die Teilung mit den Stützstellen $x_k = (\sqrt[n]{a})^k$ ($k = 1, \dots, n$). Wählen wir als Messpunkte jeweils die Punkte x_{k-1} , so erhalten wir folgende Riemann-Obersumme:

$$R_{T_n}(f) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_{k-1}} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{x_{k-1}} - 1 \right) = n(\sqrt[n]{a} - 1).$$

Nun ergibt sich aus der Stetigkeit der Funktion $g(x) = a^x$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = g'(0) = \ln(a).$$

Also ist wie behauptet:

$$\int_1^a \frac{1}{x} dx = \ln(a).$$

Wir halten nun einige wichtige Eigenschaften fest, die mehr oder weniger direkt aus den Definitionen folgen.

5.1.7 SATZ Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar. Dann sind auch $f + g$, $\lambda \cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ fest), $f \cdot g$ und $|f|$ Riemann-integrierbar. Ausserdem gelten die folgenden Aussagen:

Linearität:
$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \quad \int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

Monotonie: Aus $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$ folgt
$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Betragsregel:
$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Additivität der Intervalle:
$$\int_a^t f(x) dx + \int_t^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \forall t \in (a, b).$$

Man trifft deshalb auch die Vereinbarung $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Die Integrierbarkeit von $|f|$ folgt zum Beispiel daraus, dass $D_T(|f|) \leq D_T(f)$ für alle Teilungen T von $[a, b]$. Und die Monotonie des Integrals ergibt sich daraus, dass $R_T(f) \leq R_T(g)$ für jede Teilung T , falls $f(x) \leq g(x)$ für alle x . Die übrigen Aussagen sind ähnlich einfach einzusehen. Nur die Integrierbarkeit von Produkten erfordert eine etwas längere Argumentation.

Nach Konstruktion misst das Integral über $[a, b]$ einer Funktion, deren Graph ganz oberhalb der x -Achse verläuft, den Inhalt der Fläche zwischen Funktionsgraph und x -Achse über dem Abschnitt $[a, b]$. Bei einer beliebigen Funktion f gibt das Integral über $|f|$ die Gesamtfläche zwischen Funktionsgraph und x -Achse an, also die Summe der Teilflächen oberhalb und unterhalb der x -Achse. Das Integral über f dagegen gibt die Differenz der Teilflächen oberhalb der x -Achse und unterhalb der x -Achse an. Ausserdem gilt:

Folgerung 1: Ändert man den Funktionswert einer Riemann-integrierbaren Funktion an endlich vielen Stellen, so erhält man wieder eine Riemann-integrierbare Funktion, und der Wert des Integrals bleibt dabei unverändert.

Beweis. Nehmen wir an, wir wollen den Wert der Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle $t \in (a, b)$ durch den Wert $f(t) + \lambda$ ersetzen ($\lambda \in \mathbb{R}$). Dann können wir die neue Funktion schreiben als $f + \lambda \cdot g$, wobei $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = t \\ 0 & \text{für } x \neq t \end{cases}$. Die Funktion g ist integrierbar auf $[a, b]$. Denn zu $\epsilon > 0$ können wir die Teilung $T = \{a, t - \frac{\epsilon}{2}, t + \frac{\epsilon}{2}, b\}$ wählen und erhalten $D_T(g) = \epsilon$. Für die zugehörigen Riemann-Summen gilt $R_T(g) \leq \epsilon$, und deshalb $\int_a^b g(x) dx = 0$. Also ist auch die Funktion $f + \lambda \cdot g$ integrierbar, und $\int_a^b (f(x) + \lambda g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx$. q.e.d.

Folgerung 2: Sei $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Teilung des Intervalls $[a, b]$. Ist die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b] \setminus T$ stetig und existieren endliche rechts- und linkssei-

tige Grenzwerte $\lim_{x \searrow x_k} f(x)$ und $\lim_{x \nearrow x_k} f(x)$ für alle k , so ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar.

Beweis. Wir betrachten die Funktion f auf den Teilintervallen $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Auf dem Inneren von I_k ist f stetig, und aufgrund der Voraussetzung über das Verhalten am Rand können wir f stetig auf die Randpunkte fortsetzen und die resultierende Funktion f_k über I_k integrieren. Da es für das Integral auf die Funktionswerte an den Randpunkten nicht ankommt, ist auch f auf I_k integrierbar. Mit der Additivität der Intervalle folgt jetzt die Behauptung. q.e.d.

5.1.8 BEISPIELE Zur Ergänzung noch zwei weitere Beispiele:

1. Die Funktion $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ ist auf dem Abschnitt $[0, 1]$ nicht integrierbar, denn

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \searrow 0} (\ln(1) - \ln(\epsilon)) = \infty.$$

Hier sind die Voraussetzungen von Folgerung 2 nicht erfüllt, $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty$.

2. Die Funktion $f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ dagegen ist auf dem Abschnitt $[0, 1/\pi]$ integrierbar. Das Integral von f über $[\epsilon, 1/\pi]$ existiert, weil f dort stetig ist. Und $\int_0^{\epsilon} \sin(1/x) dx < 2\epsilon$ für alle $0 < \epsilon < 1/\pi$, weil der Sinus nur Werte zwischen -1 und $+1$ annimmt und wir also den Graphen von f in ein Rechteck der Breite ϵ und der Höhe 2 einschliessen können. Lässt man nun ϵ gegen Null geht, erhält man die Behauptung.

5.2 STAMMFUNKTIONEN UND PARTIELLE INTEGRATION

Zusammenfassung: Unter einer Stammfunktion einer stetigen Funktion f versteht man eine differenzierbare Funktion F mit $F' = f$. Betrachtet man das Integral von f als Funktion der oberen Grenze, erhält man eine Stammfunktion von f . Umgekehrt kann man das Integral von f über ein Intervall berechnen, indem man die Intervallgrenzen in eine Stammfunktion von f einsetzt und die Werte voneinander abzieht. Also ist das Integrieren in gewissem Sinne eine Umkehrung des Differenzierens. Wenn man die Produktregel für Ableitungen auf Stammfunktionen anwendet, findet man eine Regel für das Integrieren, die als partielle Integrationsregel bezeichnet wird. Wir illustrieren diese Regel hier anhand einiger Beispiele.

Bevor wir zur Hauptaussage über Stammfunktionen kommen, formulieren wir hier zur Beweisvorbereitung den Mittelwertsatz der Integralrechnung:

5.2.1 SATZ Ist f stetig auf $[a, b]$, dann ist $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(\tau)$ für ein passendes $\tau \in [a, b]$.

Beweis. Bezeichne m den minimalen und M den maximalen Wert, den f auf $[a, b]$ annimmt. Dann ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Daraus folgt mit der Monotonie

des Integrals

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a).$$

Also ist $\eta := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ ein Wert zwischen m und M , und nach dem Zwischenwertsatz existiert ein $\tau \in [a, b]$ mit $f(\tau) = \eta$. q.e.d.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung lautet folgendermassen:

5.2.2 SATZ Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion U , definiert durch

$$U(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (\text{für alle } x \in [a, b])$$

eine Stammfunktion von f , das heisst $U' = f$. Ist umgekehrt F eine Stammfunktion von f , also $F' = f$, so gilt

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Man verwendet für das Einsetzen der Grenzen in die Stammfunktion auch die Notation:

$$F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Die Menge aller Stammfunktionen von f wird als das *unbestimmte Integral* von f bezeichnet, und man schreibt dafür

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Beweis. Sei zunächst $h > 0$. Dann ist

$$\frac{U(x+h) - U(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(\tau_h)$$

für ein $\tau_h \in [x, x+h]$ (nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung). Da f stetig ist, folgt weiter $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(\tau_h) = f(x)$. Entsprechendes gilt für $h < 0$. Dies zeigt, dass $U'(x) = f(x)$ für alle x .

Sei jetzt F eine weitere Stammfunktion von f . Dann ist $(F - U)' = 0$ und daher $F - U$ konstant. Es gibt also eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $F(x) = U(x) + C$ für alle x . Also folgt $F(b) - F(a) = U(b) - U(a) = \int_a^b f(t) dt$. q.e.d.

Hier nun zwei Beispiele zur Flächenberechnung mithilfe von Stammfunktionen.

5.2.3 BEISPIEL Für die von den Graphen von $g(x) = 3x$ und $f(x) = x(x^2 - 1)$ (für $-2 \leq x \leq 2$) umschlossene Fläche A gilt:

$$A = \int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx,$$

wie man aus einer Skizze sieht. Weil f und g zwei gerade Funktionen sind, stimmen die beiden Teilflächen überein und wir erhalten:

$$A = 2 \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx = 2 \int_0^2 (3x - x^3 + x) dx = [4x^2 - x^4/2]_0^2 = 8.$$

5.2.4 BEISPIEL Die Funktionsgraphen von $f(x) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}(x-1)^2$ und $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$ schneiden sich bei $x = \pm 2$. Die dazwischen liegende, von den Graphen umschlossene Fläche können wir folgendermassen berechnen:

$$\int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^2 \left[\frac{5}{4} - \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{x^{1/3}}{\sqrt[3]{2}} \right] dx = \left[-\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + x - \frac{3x^{4/3}}{4\sqrt[3]{2}} \right]_{-2}^2 = \frac{8}{3}.$$

Hier ist eine Zusammenstellung einiger wichtiger Stammfunktionen.

| $f(x)$ | $F(x) = \int f(x) dx$ |
|--|---|
| $x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x \neq 0$ | $\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$ |
| $e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ | $\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$ |
| $\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$ | $\ln(x)$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x)$ |
| $\frac{1}{\cos^2(x)}, \quad \cos(x) \neq 0$ | $\tan(x)$ |
| $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x < 1$ | $\arcsin(x)$ |
| $\frac{1}{c+x^2}, \quad c > 0$ | $\frac{1}{\sqrt{c}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{c}}\right)$ |
| $\frac{1}{1-x^2}, \quad x^2 \neq 1$ | $\frac{1}{2} \ln \frac{ 1+x }{ 1-x }$ |
| $\sinh(x)$ | $\cosh(x)$ |
| $\cosh(x)$ | $\sinh(x)$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ | $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ |

Es gibt auch elementare Funktionen, die keine elementare Stammfunktion besitzen. In diesem Fall liefern die Integrale neue Funktionen. Hier einige Beispiele:

5.2.5 BEISPIELE • Die Funktion $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ nennt man Integralsinus.

- Die Funktion $\operatorname{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$ wird Integralexponentialfunktion genannt.
- Die Funktion $\operatorname{Li}_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ für $-\infty < x < 1$ heisst Dilogarithmus.

Aus den Rechenregeln für das Differenzieren ergeben sich weitere Regeln für das Integrieren. Hier ist die Folgerung aus der Produktregel:

5.2.6 SATZ (*Regel der partiellen Integration*) Für $f, g \in C^1[a, b]$ gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = - \int_a^b f'(x)g(x)dx + f(x)g(x)\Big|_a^b.$$

Dabei ist $f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Beweis. Nach der Produktregel für Ableitungen gilt: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$. Das heisst, $f \cdot g$ ist eine Stammfunktion für $f'g + fg'$. Daraus folgt:

$$\int_a^b (f'g + fg')(x) dx = f(x)g(x)\Big|_a^b.$$

Durch Umformung ergibt sich daraus die Behauptung. q.e.d.

5.2.7 BEISPIELE 1. $\int_a^b x^2 \cdot e^{3x} dx = -\frac{2}{3} \int_a^b x \cdot e^{3x} dx + \frac{1}{3} x^2 e^{3x}\Big|_a^b =$

$$\frac{2}{9} \int_a^b e^{3x} dx - \frac{2}{9} x e^{3x}\Big|_a^b + \frac{1}{3} x^2 e^{3x}\Big|_a^b.$$

Also ist $F(x) = (\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27})e^{3x}$ eine Stammfunktion für $f(x) = x^2 e^{3x}$.

2. Für $0 < a < b$:

$$\int_a^b \ln(x) dx = \int_a^b 1 \cdot \ln(x) dx = - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} dx + x \ln(x)\Big|_a^b = x(\ln(x) - 1)\Big|_a^b.$$

3. $\int_a^b \sin^2(x) dx = - \int_a^b \cos(x)(-\cos(x)) dx - \sin(x) \cos(x)\Big|_a^b.$

Wegen $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ folgt hieraus:

$$\int_a^b \sin^2(x) dx = \frac{1}{2}(x - \cos(x) \sin(x))\Big|_a^b.$$

Insbesondere ist also:

$$\int_0^\pi \sin^2(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

4. Für $f(x) = \arctan(x)$ und $g(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ erhält man:

$$\int_0^c x \cdot \arctan(x) dx = - \int_0^c \frac{x^2 + 1}{2(x^2 + 1)} dx + \frac{1}{2}(x^2 + 1) \arctan(x)\Big|_0^c.$$

Nun folgt:

$$\int_0^c x \cdot \arctan(x) dx = -\frac{c}{2} + \frac{1}{2}(c^2 + 1) \arctan(c).$$

5.3 SUBSTITUTIONSREGEL, RATIONALE FUNKTIONEN UND UNEIGENTLICHE INTEGRALE

Zusammenfassung: Aus der Kettenregel für das Differenzieren ergibt sich die Substitutionsregel fürs Integrieren, die hier auf etliche Beispiele angewendet wird. Ausserdem wird beschrieben, wie man für rationale Funktionen durch sukzessive Zerlegung in Partialbrüche elementare Stammfunktionen finden kann. Und schliesslich folgt noch der Begriff des uneigentlichen Integrals. In manchen Fällen ist es nämlich möglich, auch über Polstellen hinweg zu integrieren oder die Integrationsgrenzen nach unendlich auszudehnen.

Die folgende Integrationsregel, die aus der Kettenregel folgt, wird sich als sehr nützlich erweisen:

5.3.1 SATZ (Substitutionsregel) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varphi: [r, s] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar mit $\varphi(r) = a$ und $\varphi(s) = b$. Dann gilt:

$$\int_a^b f(u) du = \int_r^s f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f . Dann folgt mit der Kettenregel

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \quad \text{für } x \in [r, s].$$

Also ist $F \circ \varphi$ eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ und daher gilt

$$\int_r^s f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) \Big|_r^s = F(\varphi(s)) - F(\varphi(r)) = F(b) - F(a). \quad \text{q.e.d.}$$

Man kann sich die Substitutionsregel leichter merken, wenn man die Leibniznotation für Ableitungen verwendet. Setzen wir im Satz $u = \varphi(x)$ und schreiben $\varphi'(x) = \frac{du}{dx}$, dann lautet jetzt die Substitutionsregel:

$$\int_a^b f(u) du = \int_r^s f(\varphi(x)) \frac{du}{dx} dx.$$

Noch kürzer dürfen wir schreiben:

$$du = \frac{du}{dx} dx.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$dx = \frac{dx}{du} du,$$

denn wir können ja umgekehrt in dem durch x ausgedrückten Integral $x = \varphi^{-1}(u)$ substituieren, und nach der Regel für die Ableitungen von Umkehrfunktionen ist

$$\frac{dx}{du} = (\varphi^{-1})'(u) = \frac{1}{\varphi'(x)} = \frac{1}{\frac{du}{dx}}.$$

- 5.3.2 BEISPIELE 1. Zur Bestimmung des Integrals $\int_{\frac{2}{3}}^a (2-3x)^4 dx$ verwenden wir die Substitution $u = \varphi(x) = 2-3x$. Hier ist $\frac{du}{dx} = -3$ und daher $du = -3 dx$ oder $dx = -\frac{1}{3} du$. Also liefert die Substitutionsregel:

$$\int_{\frac{2}{3}}^a (2-3x)^4 dx = -\frac{1}{3} \int_0^{2-3a} u^4 du = -\frac{1}{15} (2-3a)^5.$$

2. Um das Integral $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{2x-c}$ (für $c \notin [x_1, x_2]$) zu bestimmen, substituieren wir $u = \varphi(x) = 2x - c$. Dann ist $du = 2 dx$, und die Substitutionsregel liefert:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{2x-c} = \frac{1}{2} \int_{2x_1-c}^{2x_2-c} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} (\ln |2x-c|) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2}.$$

3. Im folgenden Beispiel liefert die Substitution $u = \varphi(x) = x-1$ für $1 \notin [x_1, x_2]$ das Resultat:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(x-1)^3} = \int_{x_1-1}^{x_2-1} \frac{du}{u^3} = \frac{-1}{2(x-1)^2} \Big|_{x=x_1}^{x=x_2}.$$

4. Mithilfe der Substitution $u = x^2 + 4$ und $du = 2x dx$ findet man

$$\int_0^c \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \int_4^{c^2+4} \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{c^2+4} - 1.$$

5. Wir untersuchen jetzt das Integral $\int_{x_1}^{x_2} x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$. Hier eignet sich die Substitution $u = \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2$. Wegen $\varphi'(x) = x$ ist $du = x dx$ und es folgt

$$\int_{x_1}^{x_2} x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{\frac{1}{2}x_1^2}^{\frac{1}{2}x_2^2} e^{-u} du = e^{-\frac{1}{2}x_1^2} - e^{-\frac{1}{2}x_2^2}.$$

6. Ist $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und hat g auf $[a, b]$ keine Nullstellen, so gilt:

$$\int_a^b \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{du}{u} = \ln \frac{g(b)}{g(a)}.$$

Dies ergibt sich aus der Substitution $u = g(x)$. Wendet man dies Prinzip auf $g(x) = -\cos(x)$ an, so erhält man beispielsweise:

$$\int_a^b \tan(x) dx = - \int_a^b \frac{\sin(x)}{(-\cos(x))} dx = \ln \frac{\cos(a)}{\cos(b)}.$$

5.3.3 BEISPIEL Wir wollen jetzt die Fläche F eines Kreises von Radius r berechnen. Dazu wählen wir das Koordinatensystem so, dass der Nullpunkt der Mittelpunkt des vorgegebenen Kreises ist. Für die Punkte (x, y) auf der Kreislinie gilt $x^2 + y^2 = r^2$ und daher $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, falls $y \geq 0$. Also ist

$$F = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Substituieren wir $\varphi(t) = -r \cos(t)$ für x , so liefert die Substitutionsregel wegen $\varphi'(t) = r \sin(t)$:

$$F = 2 \int_0^\pi r^2 \sin^2(t) dt = r^2 \pi.$$

Hier ist noch ein Beispiel, bei dem sowohl die Substitutionsregel als auch die partielle Integration zur Anwendung kommt.

5.3.4 BEISPIEL Um eine Stammfunktion für \arctan zu finden, beginnen wir mit einer partiellen Integration und erhalten:

$$\int_a^b \arctan(x) dx = \int_a^b 1 \cdot \arctan(x) dx = - \int_a^b \frac{x}{1+x^2} dx + x \arctan(x) \Big|_a^b.$$

Nun substituieren wir im Integral auf der rechten Seite der Gleichung $u = 1 + x^2$. Weil $\frac{du}{dx} = 2x$ ist, liefert dies das folgendes Resultat:

$$\int_a^b \arctan(x) dx = -\frac{1}{2} \int_{1+a^2}^{1+b^2} \frac{du}{u} + x \arctan(x) \Big|_a^b = \left(-\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + x \arctan(x) \right) \Big|_a^b.$$

Zum Abschluss dieses Paragraphen wollen wir die Integration rationaler Funktionen kurz beschreiben. Wir halten fest:

5.3.5 SATZ *Jede rationale Funktion f lässt sich elementar integrieren.*

Sei $f = \frac{p}{q}$ der Quotient von zwei Polynomen p und q . Wir können annehmen, dass q normiert ist, d.h. den Leitkoeffizient 1 hat. Falls $\text{grad } q \leq \text{grad } p$, so kann man durch Polynomdivision Polynome p_1 und p_2 finden, so dass $p = p_1 q + p_2$ und $\text{grad } p_2 < q$, und erhält

$$f = \frac{p}{q} = p_1 + \frac{p_2}{q}.$$

Die Integration des Polynoms p_1 führt wieder auf ein Polynom, ist also unproblematisch. Deshalb betrachten wir jetzt nur noch rationale Funktionen, bei denen der Nennergrad echt grösser ist als der Zählergrad.

Die Strategie zur Bestimmung der Stammfunktion einer solchen rationalen Funktion besteht darin, sie zunächst aufzuspalten in eine Summe aus rationalen Funktionen mit einfacheren Nennern (den sogenannten Partialbrüchen) und diese wiederum

nach eventueller weiterer Aufspaltung durch passende Substitutionen auf folgende drei Grundtypen zurückzuführen:

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u|, \quad \int \frac{du}{u^n} = \frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} \quad (\text{für } n \in \mathbb{N}_{>1}), \quad \int \frac{du}{u^2 + c^2} = \frac{1}{c} \arctan\left(\frac{u}{c}\right).$$

Hier zunächst drei Beispiele für Funktionen mit Nenner von Grad 2:

5.3.6 BEISPIELE 1. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 9} = \int \frac{dx}{(x-3)^2} = -\frac{1}{x-3} + K,$

2. Mit Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 2x - 3} &= \int \frac{dx}{(x+3)(x-1)} = -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+3} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x-1} \\ &= \frac{1}{4} (\ln(|x-1|) - \ln(|x+3|)) + K = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{|x-1|}{|x+3|} \right) + K. \end{aligned}$$

3. Mit quadratischer Ergänzung:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + K.$$

Die Partialbruchzerlegung wird im folgenden Satz präzisiert. Dabei verwendet man die Zerlegung des Nennerpolynoms in lineare bzw. quadratische Faktoren, die wir bereits im Zusammenhang mit Polynomen über komplexen Zahlen kennengelernt hatten.

5.3.7 SATZ Seien p, q Polynome, $\text{grad } p < \text{grad } q$. Sei weiter

$$q(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)^{n_j} \cdot \prod_{k=1}^m q_k^{m_k},$$

wobei x_1, \dots, x_n die verschiedenen reellen Nullstellen von q und q_k die verschiedenen normierten quadratischen Faktoren mit komplexen Nullstellen von q bezeichnen. Dann existieren Polynome p_j mit $\text{grad } p_j < n_j$ und \tilde{p}_k mit $\text{grad } \tilde{p}_k < 2m_k$, so dass

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^n \frac{p_j(x)}{(x - x_j)^{n_j}} + \sum_{k=1}^m \frac{\tilde{p}_k(x)}{q_k^{m_k}}.$$

Beweis. Diesen Satz kann man durch vollständige Induktion beweisen. Zeigen wir hier nur einen Spezialfall, nämlich die Abspaltung eines Summanden zugehörig zu einer einfachen Nullstelle x_1 . Das heisst, wir nehmen an $q(x) = (x - x_1)q_1(x)$, wobei q_1 ein Polynom ist mit $q_1(x_1) \neq 0$. Jetzt machen wir den Ansatz:

$$f(x) = \frac{p(x)}{(x - x_1)q_1(x)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{p_1(x)}{q_1(x)},$$

wobei A eine Zahl und p_1 ein noch zu bestimmendes Polynom ist mit $\text{grad } p_1 < \text{grad } q_1$. Der Ansatz ist erfüllt, wenn für alle x gilt:

$$Aq_1(x) + (x - x_1)p_1(x) = p(x).$$

Setzen wir zunächst $x = x_1$ ein, erhalten wir $A = \frac{p(x_1)}{q(x_1)}$. Nun ist also A schon bestimmt. Ausserdem hat das Polynom $p(x) - Aq_1(x)$ eine Nullstelle bei $x = x_1$. Also ist es teilbar durch $(x - x_1)$, und das gesuchte Polynom p_1 findet man, indem man diese Polynomdivision ausführt. q.e.d.

5.3.8 BEISPIEL Sei $f(x) = \frac{x}{(x+2)^2(x+1)}$. Das Nennerpolynom hat also eine doppelte und eine einfache Nullstelle und der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet hier:

$$\frac{x}{(x+2)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

Diese Gleichung ist genau dann für alle $x \neq -1, -2$ erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} x &= A(x+2)^2 + B(x+1)(x+2) + C(x+1) = \\ &= (A+B)x^2 + (4A+3B+C)x + (4A+2B+C). \end{aligned}$$

Setzen wir $x = -1$ ein, finden wir $A = -1$. Setzen wir $x = -2$ ein, folgt $C = 2$. Und weil auf der linken Seite kein x^2 -Term vorkommt, muss schliesslich $A+B=0$ sein, d.h. $B=1$. Nun können wir die Stammfunktion von f für $x \neq -1, -2$ ablesen:

$$\int f(x) dx = - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x+2} + 2 \int \frac{dx}{(x+2)^2} = \ln \left| \frac{x+2}{x+1} \right| - 2 \frac{1}{x+2} + K.$$

Hier noch ein Beispiel für eine rationale Funktion mit quadratischem Nenner ohne reelle Nullstellen:

5.3.9 BEISPIEL Sei $f(x) = \frac{1-x}{x^2+x+1}$. Zur Substitution $u = x^2+x+1$ gehört $\frac{du}{dx} = 2x+1$. Daher zerlegen wir f folgendermassen:

$$f(x) = \frac{1-x}{x^2+x+1} = \frac{-1}{2} \cdot \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Das erste Teilintegral können wir mithilfe der Substitution $u = x^2+x+1$ bestimmen:

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln(|u|) + K = \ln(|x^2+x+1|) + K.$$

Das zweite Teilintegral finden wir unter den gerade behandelten Beispielen. Zusammen erhalten wir

$$-\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} = -\frac{1}{2} \ln |x^2+x+1| + \sqrt{3} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + K.$$

In manchen Fällen ist es möglich, auch über Pole von Funktionen hinweg zu integrieren oder die Intervallgrenzen nach unendlich auszudehnen und doch einen endlichen Integralwert zu erhalten. Damit ist gemeint, dass einer der folgenden Grenzwerte existiert und endlich ist:

$$\int_a^\infty f(t)dt := \lim_{x \rightarrow \infty} \int_a^x f(t)dt \quad \text{oder} \quad \int_{-\infty}^b f(t)dt := \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t)dt$$

und falls f auf $[a, b)$ bzw. $(a, b]$ stetig, aber unbeschränkt ist:

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)dt \quad \text{oder} \quad \int_a^b f(t)dt := \lim_{x \rightarrow a} \int_x^b f(t)dt.$$

Diese Grenzwerte werden als *uneigentliche Integrale* bezeichnet. Dazu einige Beispiele:

- $\int_0^\infty e^{-t}dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-t}dt = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-x}) = 1.$
- $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x}) = 1,$
aber $\lim_{\epsilon \searrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{1}{t^2} dt = (-1 + \frac{1}{\epsilon}) = \infty.$ Das entsprechende Integral existiert also nicht.

- Auch hier existiert das uneigentliche Integral nicht:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty.$$

- $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2(1 - \sqrt{\epsilon}) = 2.$
- Aber $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \frac{1}{t} dt = \infty.$
- Hier ein beidseitiger Grenzwert:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} (\arctan(R) - \arctan(-R)) = \pi.$$

- Zum Vergleich:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{1+R}) = 1.$$

Aber über den Pol dieser Funktion bei -1 kann man nicht hinweg integrieren. Das Integral

$$\int_{-1+\epsilon}^0 \frac{1}{(1+x)^2} dx = (\frac{1}{\epsilon} - 1)$$

hat keinen endlichen Grenzwert für $\epsilon \rightarrow 0$.

- Ohne Beweis: Die Fläche unter der Gaußschen Glockenkurve beträgt:

$$A = \int_{-\infty}^\infty \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = \sqrt{2\pi}.$$

5.4 EXKURS: TAYLORENTWICKLUNG UND INTEGRATION

Zusammenfassung: Jede stetige Funktion ist Riemann-integrierbar, besitzt also eine Stammfunktion auf jedem abgeschlossenen Intervall im Definitionsbereich. Aber diese Stammfunktion braucht nicht elementar zu sein. Die Integranden $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ oder $f(x) = e^{-x^2}$ zum Beispiel haben keine elementaren Stammfunktionen. Man verwendet vielmehr das Integral, um damit neue Funktionen zu definieren. Die beiden genannten Funktionen lassen sich aber durch konvergente Potenzreihen darstellen, und diese Reihenentwicklung eröffnet eine andere explizite Beschreibung des Integrals durch summandenweise Integration.

Hier zunächst einige Beispiele für solche Darstellungen von Funktionen durch Potenzreihen:

5.4.1 BEISPIELE • Die Exponentialfunktion hat folgende Reihenentwicklung

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Genauer konvergiert die angegebene Reihe für jedes fest gewählte x gegen den Wert e^x . Bricht man die Reihe nach einer bestimmten Anzahl von Summanden ab, erhält man einen Näherungswert für e^x , und verwendet man genügend viele Summanden, kann man jede gewünschte Genauigkeit erreichen. Auf diese Weise ist die näherungsweise Berechnung der Funktionswerte der Exponentialfunktion auf die Berechnung von Polynomen zurückgeführt.

• Die Reihenentwicklung der Sinusfunktion lautet:

$$\sin(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

• Und hier ist noch die Reihenentwicklung des Cosinus:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

5.4.2 SATZ Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^∞ Funktion und sei $x_0 \in I$ fest gewählt. Nehmen wir an, dass die Funktion f sich auf dem Intervall I durch eine konvergente Potenzreihe darstellen lässt, also

$$f(x_0 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{für alle } x_0 + x \in I.$$

Dann sind die Koeffizienten der Reihe eindeutig bestimmt. Es gilt nämlich

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Man spricht hier von der Taylorentwicklung der Funktion f um den Entwicklungspunkt x_0 .

Beweis. In den angegebenen Beispielen können wir leicht nachprüfen, dass die Koeffizienten a_n tatsächlich die behauptete Form haben. Gehen wir davon aus, dass man bei der Reihe Summation und Differentiation vertauschen darf, dann ergibt sich durch vollständige Induktion:

$$f^{(m)}(x_0 + x) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n n(n-1) \dots (n-m+1) x^{n-m}.$$

Setzen wir nun $x = 0$ ein, wird daraus $f^{(m)}(x_0) = a_m m!$, wie behauptet. Der subtile Punkt ist das Vertauschen von Ableiten und Grenzwertbildung der Reihe. Das ist hier erlaubt, weil die Konvergenz der Reihe sogar *gleichmäßig* ist, also an benachbarten Stellen x vergleichbar schnell. Auf diese Konvergenzfragen werde ich im 3. Semester genauer eingehen. q.e.d.

5.4.3 BEISPIEL Die Taylorentwicklung der Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ lautet:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots \quad \text{für alle } |x| < 1.$$

Für $x > 1$ konvergiert diese Reihe nicht, $x = 1$ dagegen darf man noch einsetzen und erhält dann eine Reihenentwicklung für $\ln(2)$, nämlich:

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Der folgende Satz beschreibt den Fehler, den man macht, wenn man eine Funktion durch ihr Taylorpolynom (bis zum Grad n) approximiert, durch das sogenannte *Taylorsche Restglied* (hier in Integralform).

5.4.4 SATZ Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ mindestens $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar und sei $x_0 \in I$ fest gewählt. Dann gilt für alle $x_0 + x \in I$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$:

$$f(x_0 + x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} x^k + R_{n+1}(x), \quad \text{wobei}$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(x_0 + t) dt.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über n . Für $n = 0$ ist zu zeigen:

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + \int_0^x f'(x_0 + t) dt = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+x} f'(s) ds.$$

Dies stimmt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Nehmen wir nun an, die Aussage sei für n gezeigt. Dann lautet also das Restglied

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(x_0+t) dt.$$

Mit partieller Integration wird daraus

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(x_0+t) dt - f^{(n+1)}(x_0+t) \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \Big|_{t=0}^{t=x} = \\ &= R_{n+2}(x) + f^{(n+1)}(x_0) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned} \quad \text{q.e.d.}$$

Wenn das Restglied auf dem ganzen Intervall für $n \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert, dann wird also die Funktion f auf I durch seine Taylorreihe dargestellt. Das ist zum Beispiel bei der Exponentialfunktion der Fall.

5.4.5 BEISPIEL Für $f(x) = e^x$ und $x_0 = 0$ ist

$$|R_{n+1}(x)| = \frac{1}{n!} \left| \int_0^x (x-t)^n e^t dt \right| \leq e^x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Aber es gibt auch C^∞ -Funktionen, die nicht durch ihre Taylorreihen dargestellt werden. Kommen wir nun wieder auf die eingangs genannten Funktionen zurück, die keine elementare Stammfunktion haben.

- Die Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ lässt sich stetig nach 0 fortsetzen durch den Wert 1, denn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Ausserdem besitzt f eine Taylorentwicklung. Dazu brauchen wir nur die Sinusreihe einzusetzen:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \dots$$

Wegen der angedeuteten gleichmässigen Konvergenz der Taylorreihe darf man bei der Integration die Grenzwertbildung der Reihe und die Integration miteinander vertauschen. Durch summandenweise Integration ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} \int_0^x f(x) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!} dx = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1) \cdot (2n-1)!} = \\ &= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} \dots \end{aligned}$$

- Die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ hat eine Taylorentwicklung, die sich durch Einsetzen in die Exponentialreihe ergibt, nämlich:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}.$$

Das Integral lautet also:

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!}.$$

Kapitel 6

Exkurs: Fouriertheorie

6.1 KREISFUNKTIONEN UND INTEGRALE

Zusammenfassung: Eine komplexe Kreisfunktion beschreibt die gleichförmige Bewegung eines Punktes auf einer Kreislinie, aufgefasst als Kreislinie um den Nullpunkt in der komplexen Ebene. Die trigonometrischen Funktionen Cosinus und Sinus treten hier im Real- bzw. Imaginärteil gekoppelt auf. Da das Integrieren der komplexen Kreisfunktionen sehr einfach ist, ergeben sich daraus Vereinfachungen der Berechnung gewisser trigonometrischer Integrale. Die komplexen Kreisfunktionen spielen ausserdem eine wichtige Rolle in der Fouriertheorie. Hier wird das Konzept der Fouriertransformation an einem Beispiel kurz vorgestellt.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Die Funktion $f(t) = e^{i\lambda t}$ (für $t \geq 0$) gibt, in Abhängigkeit von der Zeit t , die Bewegung eines Massenpunktes an, der sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit λ auf der Einheitskreislinie bewegt. Ist $\lambda = n2\pi$ für eine natürliche Zahl n , durchläuft der Massenpunkt den Kreis pro Zeiteinheit genau n -mal, und zwar entgegen dem Uhrzeigersinn. Ist dagegen $\lambda = -n2\pi$, so gibt es ebenfalls n Umläufe, aber jetzt im Uhrzeigersinn. Ist $n = 0$, bleibt der Massenpunkt bei 1 stehen.

Wenn wir Real- und Imaginärteil dieser Funktion separat nach der Zeit ableiten, erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}(\cos(\lambda t) + i \sin(\lambda t)) = \lambda(-\sin(\lambda t) + i \cos(\lambda t)) = \lambda i e^{i\lambda t}.$$

Also ist $f'(t) = i\lambda f(t)$. Wir können diese komplexe Zahl als den Geschwindigkeitsvektor der Bewegung des Massenpunktes auf der Kreislinie zum Zeitpunkt t auffassen. Der Betrag $|f'(t)| = |\lambda|$ gibt die Momentangeschwindigkeit an, und die Richtung von $f'(t)$ erhalten wir aus der Richtung des Radialvektors $f(t)$ durch Drehung um $\pm 90^\circ$ (je nach Vorzeichen von λ). Es handelt sich also um einen Tangentialvektor an die Kreislinie, passend zur Kreisbewegung.

Entsprechend gilt für jede vorgegebene komplexe Zahl $\alpha \neq 0$:

$$\frac{d}{dt}e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t}.$$

Daraus können wir eine Stammfunktion ablesen:

$$\int e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} + C,$$

wobei hier gemeint ist, den Realteil und den Imaginärteil des Integranden separat zu integrieren.

Dies kann man zum Beispiel verwenden, um Stammfunktionen für gedämpfte Schwingungen zu finden. Denn um etwa

$$\int e^{-\lambda t} \cos(\omega t) dt$$

zu berechnen, fassen wir den Integranden als Realteil der komplexen Funktion

$$f(t) = e^{(-\lambda+i\omega)t} = e^{-\lambda t} \cos(\omega t) + i e^{-\lambda t} \sin(\omega t)$$

auf. Zunächst berechnen wir

$$\int e^{(-\lambda+i\omega)t} dt = \frac{1}{-\lambda+i\omega} e^{(-\lambda+i\omega)t} = \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda^2 + \omega^2} (\lambda + i\omega) (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)).$$

Gehen wir jetzt über zum Realteil, erhalten wir das Resultat:

$$\int e^{-\lambda t} \cos(\omega t) dt = \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda^2 + \omega^2} (\lambda \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t)).$$

Die komplexen Kreisfunktionen spielen in der Fouriertheorie eine wichtige Rolle. Die Fouriertransformierte \hat{f} einer reellwertigen Funktion f ist folgendermassen definiert:

$$\hat{f}(p) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ipt} dt \quad \text{für } p \in \mathbb{R}.$$

Es handelt sich also um eine Funktion in einer neuen Frequenzvariablen p , an jeder Stelle gegeben durch ein uneigentliches Integral, das nur dann existiert, wenn die Funktion f für betragsmässig grosse t -Werte schnell genug abfällt. Hier ein wichtiges Beispiel:

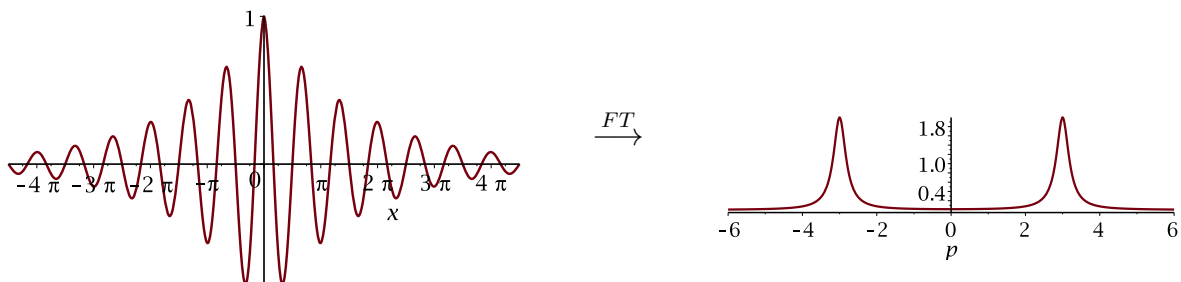
6.1.1 BEISPIEL Seien $\alpha, \nu > 0$ vorgegeben. Ist f eine gedämpfte Schwingung der Frequenz ν von der Form

$$f(t) = e^{-\alpha|t|} \cos(\nu t) \quad (t \in \mathbb{R}),$$

so ist

$$\hat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\nu - p)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\nu + p)^2} \right) \quad \text{für } p \in \mathbb{R}.$$

Die Fouriertransformierte von f ist also zusammengesetzt aus zwei Hügelfunktionen mit Maxima an den Stellen $p = \pm\nu$. Die Höhe der beiden Hügel ist proportional zu $1/\alpha$. Bei geringer Dämpfung α sind die Hügel sehr schmal und hoch.



Entsprechend ist die Fouriertransformierte einer Funktion, die aus mehreren gedämpften Schwingungen dieser Art zusammengesetzt ist, eine Funktion mit mehreren lokalen Maxima im Bereich $p > 0$, und zwar jeweils an den Stellen, die den Frequenzen der Schwingungsanteile entsprechen. An der Transformierten sind also die beteiligten Frequenzen und auch ihre jeweiligen Dämpfungsfaktoren leicht abzulesen.

Dies Prinzip findet zum Beispiel praktische Anwendung bei der Kernspinresonanztomographie. Man misst dann eigentlich eine Überlagerung von gedämpften Spinresonanzen, berechnet die dazugehörige Fouriertransformierte und liest daraus Frequenzanteile ab, aus denen sich wiederum ein Bild rekonstruieren lässt.

6.2 HARMONISCHE SCHWINGUNGEN UND FOURIERANALYSE

Zusammenfassung: Wir erinnern an den Begriff der harmonischen Schwingung und beschreiben die Überlagerung harmonischer Schwingungen, wie sie zum Beispiel in der Akustik oder Optik auftreten. Dies führt zum Begriff der Fourierreihe. Unter der Fourieranalyse versteht man die Zerlegung einer gegebenen periodischen Funktion in harmonische Schwingungsanteile oder anders gesagt, die Darstellung der Funktion als Fourierreihe.

Wie schon erwähnt, versteht man unter einer harmonischen Schwingung eine Funktion der Zeit t der Form

$$f(t) = a \sin(\nu t + \varphi).$$

Dabei gibt die Zahl a die *Amplitude* an, die Zahl φ die *Phasenverschiebung* und ν ist die *Frequenz*. Mit dem Additionstheorem für die Sinusfunktion können wir f auch folgendermassen umschreiben:

$$f(t) = c_1 \sin(\nu t) + c_2 \cos(\nu t),$$

wobei $c_1 := a \cos(\varphi)$ und $c_2 = a \sin(\varphi)$ Konstanten sind.

Zum Beispiel lässt sich jeder durch ein Musikinstrument erzeugte Ton als Überlagerung solcher harmonischen Schwingungen beschreiben, genauer durch eine Summe der Form

$$f(t) = \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\nu 2\pi t).$$

Dabei ist ν die Frequenz des Grundtons. Die dazukommenden Obertöne haben Frequenzen, die kleine Vielfache der Grundfrequenz sind. Die Amplituden b_k geben die Gewichtung der Obertöne an, und das bestimmt die Klangfarbe eines musikalischen Gesamttons.

Hier zum Beispiel die ersten Obertöne des Tons c der Frequenz $\nu = 264$ Hertz:

| | | | | | | | | | |
|----------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|--------|--------|
| Frequenz | ν | 2ν | 3ν | 4ν | 5ν | 6ν | 7ν | 8ν | 9ν |
| Ton | c | c' | g' | c'' | e'' | g'' | bluenote | c''' | d''' |

Die Frequenzverhältnisse bestimmen die Intervalle zwischen den Tönen:

| | | | | | |
|--------------------|--------|--------|--------|------------|------------|
| Frequenzverhältnis | 1 : 2 | 2 : 3 | 3 : 4 | 4 : 5 | 5 : 6 |
| Intervall | Oktave | Quinte | Quarte | grosseTerz | kleineTerz |

Geht es um räumliche Wellen, schreibt man die harmonische Schwingung in dieser Form:

$$f(x) = a \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right).$$

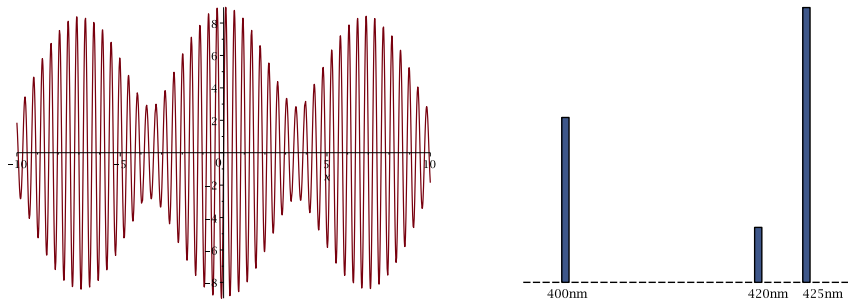
Dabei gibt die Zahl λ die *Wellenlänge* an. Eine Summe solcher Funktionen der Form

$$f(x) = \sum_{k=1}^n b_k \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_k} x\right)$$

ist dann eine Zusammensetzung von harmonischen Wellen mit Wellenlängen λ_k . Zum Beispiel setzt sich das Licht aus Wellen unterschiedlicher Wellenlängen zusammen, die den Farbkomponenten entsprechen.

6.2.1 BEISPIEL Die folgende Überlagerung harmonischer Schwingungen der Wellenlängen 400nm, 420nm und 425nm beschreibt Licht im fliederfarbenen Farbspektrum:

$$f(x) = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{400} x\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{420} x\right) + 5 \sin\left(\frac{2\pi}{425} x\right).$$



Die auftretenden Amplituden b_k der Teilschwingungen sind hier in einem Balkendiagramm aufgetragen.

Die Überlagerung harmonischer Schwingungen der Periode L führt auf endliche oder unendliche Reihen der Form

$$\mathcal{F}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos\left(k \frac{2\pi}{L} x\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi}{L} x\right) \right] \quad (a_k, b_k \in \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}_{>0}).$$

Man bezeichnet eine solche Reihe als *Fourierreihe*. Die Zahlen a_k und b_k sind die reellen *Fourierkoeffizienten*.

Die Fouriertheorie hat zwei Aspekte, nämlich Synthese und Analyse. Man kann ausgehend von gegebenen harmonischen Schwingungen studieren, wie deren Überlagerung aussieht, das ist die Fragestellung der Synthese. Bei der Fourieranalyse geht man umgekehrt von einer vorgegebenen periodischen Funktion aus und untersucht, ob und wie sich diese Funktion als Fourierreihe darstellen lässt. Tatsächlich lässt sich jede stetig differenzierbare, periodische Funktion in eine Fourierreihe entwickeln. Auch Funktionen mit Sprungstellen können Fourierreihen besitzen. Die Fourierkoeffizienten sind durch die Funktion bereits eindeutig festgelegt.

In vielen Bereichen der Physik und Chemie ist Fourieranalyse von Bedeutung. Sie wird zum Beispiel zur Spektralanalyse verwendet, also der Bestimmung von chemischen Elementen anhand von charakteristischen Farbspektren, den Spektrallinien (wie im oben gezeigten Balkendiagramm). Sie ist aber auch Grundlage bildgebender Verfahren, wie der Röntgenkristallographie. Hier einige Beispiele zur Fourieranalyse:

6.2.2 BEISPIELE 1. Die Treppenfunktion mit Periode $L = 2\pi$, definiert durch $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{für } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$ auf $[0, 2\pi)$ und anschliessende 2π -periodische Fortsetzung hat folgende Fourierreihenentwicklung:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} = \frac{4}{\pi} (\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} \dots).$$

2. Sei jetzt f auf $[-\pi, \pi)$ definiert durch $f(x) = |x|$ und dann periodisch fortgesetzt. Der Graph dieser Funktion bildet Dreiecke mit der x -Achse. Die Fourierreihe lautet hier:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} (\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots).$$

3. Sei f die Sägezahnfunktion, definiert durch $f(x) = \pi - x$ für $0 \leq x < 2\pi$, und anschliessend periodische Fortsetzung von $[0, 2\pi)$ auf ganz \mathbb{R} . Diese Funktion ist ungerade und ihre Fourierentwicklung lautet:

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \sin(kx) = 2 \sin(x) + \sin(2x) + \frac{2}{3} \sin(3x) + \dots$$

Wir wollen jetzt noch angeben, wie man die Fourierkoeffizienten mithilfe geeigneter Integrale aus der Funktion berechnen kann.

6.2.3 SATZ Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Funktion der Periode $L > 0$, das heisst $f(x+L) = f(x)$ für alle x . Weiter gebe es Koeffizienten $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k \frac{2\pi}{L} x) + b_k \sin(k \frac{2\pi}{L} x)] \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wenn die Konvergenz der Reihe sogar "gleichmässig" ist, gilt folgendes:

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \cos(k \frac{2\pi}{L} x) dx \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin(k \frac{2\pi}{L} x) dx.$$

Diese Aussage ergibt sich aus folgendem Lemma:

6.2.4 LEMMA Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} \pi & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} \pi & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis. Man rechnet zuerst für $k \in \mathbb{Z}$ folgendes nach:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Setzt man nun $\sin(nx) = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})$ und $\cos(mx) = \frac{1}{2}(e^{imx} + e^{-imx})$ ein, erhält man die behaupteten Formeln. q.e.d.

Beweis. (von Satz 6.2.3) Nehmen wir der Einfachheit halber an, $L = 2\pi$, und f von der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Nun setzen wir diese Reihenentwicklung ein in die Formel zur Berechnung von a_n (für $n \in \mathbb{N}$) und erhalten mit dem Lemma

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(nx) dx +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx + b_k \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx \right] = a_n \cdot \pi,$$

wie behauptet. Das entsprechende Resultat findet man für b_n und für a_0 . q.e.d.

Für das erste Beispiel in 6.2.2 bedeutet das konkret: Die Koeffizienten b_k der Sinusreihe lassen sich folgendermassen berechnen.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(kx) dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(kx) dx \right) =$$

$$\frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = \frac{1}{k\pi} (1 - (-1)^k + 1 - (-1)^k).$$

Also verschwindet b_k , wenn k gerade ist, und $b_k = \frac{4}{\pi k}$, wenn k ungerade ist.

Zur effizienten Speicherung eines quadratischen Bildes der Breite L kann man 2D-Fourieranalyse verwenden. Dabei werden Funktionen in zwei Variablen x, y mit $0 \leq x, y \leq L$ in eine doppelte Fourierreihe folgender Form entwickelt:

$$f(x, y) = \frac{a_{0,0}}{4} + \frac{1}{2} (a_{1,0} \cos(\frac{\pi}{L}x) + a_{0,1} \cos(\frac{\pi}{L}y)) + \sum_{m,n=1}^{\infty} [a_{m,n} \cos(m\frac{\pi}{L}x) \cos(n\frac{\pi}{L}y)],$$

wobei:

$$a_{m,n} = \frac{4}{L^2} \int_0^L \int_0^L f(x, y) \cdot \cos(m\frac{\pi}{L}x) \cos(n\frac{\pi}{L}y) dx dy.$$

Kapitel 7

Lineare Algebra

7.1 LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME UND MATRIZEN

Zusammenfassung: Ein lineares Gleichungssystem bestehend aus m linearen Gleichungen in n Unbekannten lässt sich praktisch in Kurzform schreiben, indem man aus den $m \cdot n$ auftretenden Koeffizienten ein rechteckiges Zahlenschema, eine sogenannte Matrix von Typ $m \times n$ bildet. Wir beschreiben hier das Gaußsche Eliminationsverfahren zur Berechnung der Lösungsmenge eines solchen linearen Gleichungssystems, und zwar indem wir die entsprechende erweiterte Matrix auf Zeilenstufenform bringen.

Man begegnet Systemen von linearen Gleichungen in sehr vielen verschiedenen Zusammenhängen, etwa bei Mischungsverhältnissen von Substanzen oder bei der Bestimmung von Preisen mit zusätzlichen Nebenbedingungen, aber auch in der analytischen Geometrie. Hier drei Beispiele dafür:

Mischungsverhältnisse: Nehmen wir an, es stehen zwei Substanzen (zum Beispiel Flüssigkeiten) mit spezifischen Gewicht $a = 2$ kg/l bzw. $b = \frac{1}{2}$ kg/l zur Verfügung. Gesucht sei eine Mischung aus beiden Substanzen von vorgegebenem Gesamtvolumen $V = 100$ l und Gesamtgewicht $G = 110$ kg.

Bezeichnet man den Volumenanteil der ersten Substanz mit x und den der zweiten Substanz mit y , so führt diese Frage auf das folgende lineare Gleichungssystem in x und y :

$$\begin{aligned}x + y &= 100 \\ 2x + \frac{1}{2}y &= 110\end{aligned}$$

Dies Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung, nämlich $x = 40$ und $y = 60$. Das gesuchte Mischungsverhältnis beträgt also $x : y = 4 : 6$.

Analytische Geometrie: Betrachten wir die von den Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und

$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ im 3-Raum erzeugte Ebene durch den Nullpunkt. Wir fragen nun, ob die Punkte $P(1/2/-1)$ und $Q(1/2/3)$ auf dieser Ebene liegen.

Bekanntermassen liegt ein beliebiger Punkt mit den Koordinaten $(a/b/c)$ genau dann auf der fraglichen Ebene, wenn gilt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für geeignete Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Die Frage, ob der Punkt P auf der Ebene liegt, führt also auf das folgende lineare Gleichungssystem in den Unbekannten λ und μ :

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda - \mu \\ 2 &= \lambda + 2\mu \\ -1 &= -\lambda + \mu \end{aligned}$$

Dies System hat eine Lösung, nämlich $\mu = \frac{1}{3}$ und $\lambda = \frac{4}{3}$, der Punkt P liegt also auf der Ebene. Aber für den Punkt Q gilt das nicht. Denn das entsprechende Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda - \mu \\ 2 &= \lambda + 2\mu \\ 3 &= -\lambda + \mu \end{aligned}$$

hat keine Lösung, weil die erste und dritte Gleichung nicht gleichzeitig erfüllt sein können (sonst wäre $1 = -3$).

Interpolation: Wir suchen jetzt ein quadratisches Polynom, so dass der zugehörige Graph durch drei vorgegebene Punkte verläuft. Genauer suchen wir ein Polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $p(-2) = 4$, $p(-1) = 5$ und $p(1) = 4$. Setzen wir dies in den Ansatz für das Polynom ein, erhalten wir folgende Bedingungen an die noch unbekannten Koeffizienten a, b, c des Polynoms:

$$\begin{aligned} p(-2) &= 4a - 2b + c = 4 \\ p(-1) &= a - b + c = 5 \\ p(1) &= a + b + c = 4 \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in a, b, c . Um die Lösungen zu finden, eliminieren wir zunächst die Unbekannte b . Dazu addieren wir einerseits das Doppelte der dritten zur ersten Zeile dazu und andererseits bilden wir die Summe aus der zweiten und der dritten Zeile und erhalten folgendes System in a, c :

$$\begin{aligned} 6a + 3c &= 12 \\ 2a + 2c &= 9 \end{aligned}$$

Ziehen wir nun von der ersten Zeile das Dreifache der zweiten Zeile ab, so fällt auch die Unbekannte a heraus und es folgt $-3c = -15$, das heisst $c = 5$. Setzt man nun in die früheren Gleichungen ein, erhält man die eindeutige Lösung, nämlich $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = 5$. Das gesuchte Polynom lautet also:

$$p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 5.$$

Diese drei Beispiele mögen zunächst genügen. Man schreibt Systeme von m linearen Gleichungen in n Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_n in der Regel in der folgenden Form auf:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Dabei sind $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ oder in \mathbb{C} für $(i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$ die Koeffizienten bzw. die Zeilenresultate. Der erste Index i von a_{ij} gibt die Zeile, und der zweite Index j die Variable an, bei der der Koeffizient steht. Aus den Koeffizienten eines solchen Gleichungssystems können wir ein rechteckiges Zahlenschema bilden, eine sogenannte *Matrix*, die aus m Zeilen und n Spalten besteht:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Man nennt A eine Matrix vom Typ $m \times n$. Die Zahlen a_{ij} sind die *Einträge* der Matrix. Dabei gibt der erste Index die Zeile und der zweite Index die Spalte an.

Die Variablen x_1, \dots, x_n werden zu einem Spaltenvektor der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ zu-

sammengefasst. Das Einsetzen von Werten für die Variablen in die oben angegebenen Gleichungen wird als *Multiplikation* der Matrix A mit einem Spaltenvektor gedeutet:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Hier ein konkretes Beispiel. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dann lautet das Produkt:

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Oder ein Beispiel mit komplexen Zahlen:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + i(1+i) \\ 2i + (-1)(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ i-1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also folgende Kurzschreibweise für das ursprüngliche lineare Gleichungssystem:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems können wir als Teilmenge der Menge aller Spaltenvektoren mit n reellen (bzw. komplexen) Koeffizienten auffassen, die mit \mathbb{R}^n (bzw. \mathbb{C}^n) bezeichnet wird:

$$\mathbb{L} = \left\{ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \right\},$$

wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, falls nur reelle Lösungen gesucht werden, und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wenn auch komplexe Koeffizienten zugelassen sind.

Die Lösungsmenge kann man mithilfe des *Eliminationsverfahrens* (auch bekannt unter dem Namen Gauss-Verfahren) bestimmen, das jetzt erläutert werden soll. Die Idee besteht darin, das System schrittweise durch Manipulation der Zeilen, die der Elimination einer Variablen aus möglichst vielen Gleichungen entsprechen, zu vereinfachen, bis die Lösungen direkt ablesbar werden. Die einzelnen Schritte sind *elementare Zeilenumformungen* von folgender Art:

Typ (i): Zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile dazuzugaddieren.

Typ (ii): Zwei Zeilen miteinander vertauschen.

Typ (iii): Eine Zeile mit einer festen Zahl ($\neq 0$) multiplizieren.

Bei jeder dieser elementaren Zeilenumformungen bleibt die Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems unverändert!

7.1.1 BEISPIEL Wir betrachten das folgende System aus 3 Gleichungen in 4 Unbekannten über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x_1 + & & 4x_3 + & 2x_4 & = & 10 \\ x_1 + & x_2 + & 5x_3 + & 2x_4 & = & 7 \\ x_1 + & 2x_2 + & 8x_3 + & 4x_4 & = & 12 \end{array}.$$

Hier lauten also Koeffizientenmatrix bzw. Ergebnisvektor:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Jetzt notieren wir die *erweiterte Matrix*

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 12 \end{array} \right).$$

Zunächst soll erreicht werden, dass in der ersten Spalte unterhalb der ersten Zeile Nullen stehen. Für das entsprechende Gleichungssystem bedeutet das, die Variable

Wir vertauschen die ersten beiden Zeilen und ziehen dann von der zweiten Zeile das Zweifache der ersten und von der dritten Zeile das Dreifache der ersten Zeile ab. Dann ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -12 & 3 \end{array} \right).$$

Nun teilen wir die zweite Zeile durch (-2) , und ziehen von der dritten Zeile das Dreifache der alten zweiten Zeile ab. Als letztes teilen wir die neue dritte Zeile noch durch 3. Dann erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Das entsprechende Gleichungssystem lautet:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 + & 6x_2 + & x_3 + & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_3 + & 2x_4 & = & 0 \\ & & 0 & & = & 1 \end{array}.$$

Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Hier zu guter Letzt noch ein Beispiel über den komplexen Zahlen:

7.1.3 BEISPIEL Wir betrachten das folgende System aus 3 Gleichungen in 3 Unbekannten über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 - & 5ix_2 - & 8x_3 & = & -2i \\ 2ix_1 + & 11x_2 + & 4ix_3 & = & 14 \\ ix_1 + & 5x_2 + & ix_3 & = & 6 \end{array}.$$

Hier lauten also Koeffizientenmatrix bzw. Ergebnisvektor:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5i & -8 \\ 2i & 11 & 4i \\ i & 5 & i \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -2i \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Jetzt notieren wir die *erweiterte Matrix*

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5i & -8 & -2i \\ 2i & 11 & 4i & 14 \\ i & 5 & i & 6 \end{array} \right).$$

Wir multiplizieren die letzte Zeile mit $(-i)$, so dass in der unteren linken Ecke eine 1 entsteht, vertauschen die neue letzte Zeile mit der ersten und erhalten:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5i & 1 & -6i \\ 2 & -5i & -8 & -2i \\ 2i & 11 & 4i & 14 \end{array} \right).$$

Nun ziehen wir von der zweiten das Doppelte der ersten Zeile und von der dritten das $(2i)$ -fache der ersten Zeile ab und bekommen:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5i & 1 & -6i \\ 0 & 5i & -10 & 10i \\ 0 & 1 & 2i & 2 \end{array} \right).$$

Dann vertauschen wir die zweite und die dritte Zeile und ziehen von der neuen dritten Zeile das $(5i)$ -fache der neuen zweiten Zeile ab. Das liefert:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5i & 1 & -6i \\ 0 & 1 & 2i & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Das entsprechende Gleichungssystem besteht also eigentlich nur aus zwei unabhängigen Bedingungen und lautet:

$$\begin{array}{rclcl} x_1 - 5ix_2 + x_3 & = & -6i \\ x_2 + 2ix_3 & = & 2 \end{array}.$$

Wir können $x_3 = z \in \mathbb{C}$ beliebig wählen, dann ergibt sich aus den beiden Gleichungen durch Einsetzen:

$$x_2 = 2 - 2iz \quad \text{und} \quad x_1 = -6i + 5i(2 - 2iz) - z = 4i + 9z.$$

Die Lösungsmenge lautet also hier

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 4i + 9z \\ 2 - 2iz \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{C} \right\} = \begin{pmatrix} 4i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Hier gibt es einen freien komplexen Parameter.

Die entscheidenden Eigenschaften der vereinfachten erweiterten Matrix sind hier zusammengefasst:

7.1.4 DEFINITION Eine Matrix M hat *Zeilenstufenform*, wenn es eine Zahl $r \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass folgendes gilt:

- Die Zeilen unterhalb der r -ten Zeile sind Nullzeilen, das heisst ihre sämtlichen Einträge sind Nullen.
- Die ersten r Zeilen sind *keine* Nullzeilen, jeweils der erste von Null verschiedene Eintrag (wenn man von links nach rechts liest) ist eine Eins.
- Markiert man die führenden Einsen in den ersten r Zeilen, erhält man eine nach rechts absteigende Treppe. Oder anders gesagt: Steht die führende Eins in Zeile i jeweils in der Spalte s_i , so gilt: $s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_r$.

In dieser Situation wird die Zahl r als *Rang* der Matrix M bezeichnet.

7.1.5 SATZ Jede beliebige Matrix M lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen.

Beweis. Die Behauptung beweisen wir durch Induktion über die Anzahl Zeilen m . Ist $m = 1$, so gibt es zwei Möglichkeiten, nämlich $M = (0 \dots 0)$ besteht nur aus einer Nullzeile, oder $M = (0 \dots 0a \dots)$ enthält in der ersten Zeile nach eventuellen Nullen einen Eintrag $a \neq 0$. In dieser Situation teilen wir die erste Zeile durch a und sind fertig.

Induktionsschritt: Nehmen wir jetzt an, die Aussage sei richtig für alle Matrizen mit m Zeilen. Sei M eine Matrix mit $m+1$ Zeilen. Wir suchen in M die erste Spalte mit einem Eintrag $a \neq 0$, transportieren diesen Eintrag durch Zeilenvertauschung in die erste Zeile und dividieren dann die erste Zeile durch a . So erhalten wir an dieser Stelle die erste führende Eins. Jetzt ziehen wir geeignete Vielfache der ersten Zeile von allen anderen Zeilen ab, um die anderen Einträge derselben Spalte zu Null zu machen. Das Resultat hat folgende Form

$$\left(\begin{array}{c|ccc|c|ccc} 0 & & & & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & & & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & & & & 0 & 0 & & & \end{array} \begin{array}{c} M' \end{array} \right).$$

Nach Induktionsannahme kann man M' entsprechend weiterbearbeiten, bis die Zeilenstufenform erreicht ist. q.e.d.

Kommen wir jetzt wieder zurück zu linearen Gleichungssystemen. Sei A eine $m \times n$ -Matrix und b ein Spaltenvektor mit m Einträgen, jeweils aus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei weiter $M = (A | b)$ die erweiterte Matrix, gebildet aus M durch Anfügung der Spalte b . Um das Gleichungssystem zu lösen, bringen wir zunächst M durch Zeilenumformungen in Zeilenstufenform $M' = (A' | b')$. Wie schon bemerkt, hat das neue System dieselben Lösungen wie das alte, es gilt: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = b\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A' \cdot x = b'\}$. Aber man kann, wie in den Beispielen gezeigt, die Lösungsmenge des in Zeilenstufenform geschriebenen Systems direkt ablesen. Dabei stellen wir folgendes fest:

7.1.6 BEMERKUNG Sei A eine $m \times n$ -Matrix mit Einträgen aus \mathbb{K} in Zeilenstufenform von Rang r , also mit genau r Nichtnullzeilen. Dann ist $r \leq m$ und $r \leq n$, denn die führenden Einsen in den Nichtnullzeilen müssen in verschiedenen Spalten stehen. Sei weiter $b \in \mathbb{K}^m$. Für das Gleichungssystem $Ax = b$ gilt:

(1) Das System hat keine Lösung in \mathbb{K}^n , falls $r < m$ und $b_i \neq 0$ für ein $i > r$.

(2) Sind die Bedingungen aus (1) nicht erfüllt, so gibt es zwei Möglichkeiten.

(i) Ist $r = n$, so hat das System eine eindeutige Lösung.

(ii) Ist $r < n$, so gibt es unendlich viele Lösungen (genauer enthält die allgemeine Lösung $n - r$ freie Parameter).

Ist b der Nullvektor, so kann der erste Fall nie eintreten.

7.1.7 FOLGERUNG Besteht ein lineares Gleichungssystem in n Unbekannten aus n Gleichungen, so hat das System genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ die Koeffizientenmatrix A ist vom maximal möglichen Rang n .

Es ist jetzt noch nicht geklärt, ob die Zahl $n-r$ der freien Parameter der Lösungsmenge im Fall 2(ii) durch das ursprüngliche lineare Gleichungssystem bereits eindeutig festgelegt ist oder nicht. Es wird sich aber später noch herausstellen, dass diese Anzahl eindeutig ist und die Dimension des Lösungsraums angibt.

Schauen wir uns den Fall $n = 3$ und $m \leq 3$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ noch einmal genauer an. In diesem Fall ist die Lösungsmenge \mathbb{L} eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes, die wir geometrisch beschreiben wollen. Nehmen wir an, A sei eine Matrix von Rang r .

1.Fall: $m = 1$. Hier haben wir nur eine Gleichung, nämlich $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b_1$. Ist $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, so ist der Rang $r = 0$ und \mathbb{L} ist leer, falls $b_1 \neq 0$, bzw. $\mathbb{L} = \mathbb{R}^3$, falls $b_1 = 0$. Sind nicht alle a_j gleichzeitig Null, so handelt es sich bei der Gleichung um eine Ebenengleichung. Die Lösungsmenge ist also eine Ebene und hat daher zwei freie Parameter. Falls $b_1 = 0$, besteht \mathbb{L} aus allen Vektoren x , die auf dem Vektor $w = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.

2.Fall: $m = 2$. Hier sind zwei Gleichungen simultan zu erfüllen. Enthält A keine Nullzeile, so ist \mathbb{L} die Schnittmenge von zwei Ebenen E_1 und E_2 . Es gibt daher die folgenden Möglichkeiten:

| Lage der Ebenen | $E_1 \not\parallel E_2$ | $E_1 = E_2$ | $E_1 \neq E_2$ und $E_1 \parallel E_2$ |
|-----------------|-------------------------|-------------|--|
| r | 2 | 1 | 1 |
| \mathbb{L} | Gerade | Ebene | leer |

3.Fall: $m = 3$. Falls A keine Nullzeile enthält, ist die Lösungsmenge der Durchschnitt von 3 Ebenen. Hier gibt es die folgenden Möglichkeiten:

| r | 3 | 2 | 1 |
|--------------|-------|------------------|-----------------|
| \mathbb{L} | Punkt | Gerade oder leer | Ebene oder leer |

7.2 RECHNEN MIT MATRIZEN

Zusammenfassung: Man kann für Matrizen von passendem Typ eine Addition, eine Skalarmultiplikation und eine Matrixmultiplikation erklären, und es gelten dann ähnliche Rechengesetze wie bei ganzen Zahlen mit Ausnahme des Kommutativgesetzes der Multiplikation. Ausserdem zeigen wir, dass eine quadratische Matrix genau dann eine multiplikative Inverse hat, wenn die Matrix von maximalem Rang ist.

Für Matrizen desselben Typs ist eine *Addition* erklärt, und zwar durch Addition jeweils entsprechender Einträge. Sind genauer $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ Matrizen vom Typ $m \times n$, so setzt man

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}).$$

Die Summe ist also wiederum eine $m \times n$ -Matrix.

7.2.1 BEISPIEL

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die *Skalarmultiplikation* einer $m \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ (mit Einträgen a_{ij} aus einem Körper \mathbb{K}) mit $\lambda \in \mathbb{K}$ ist durch Multiplikation sämtlicher Einträge mit λ definiert:

$$\lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{ij}).$$

7.2.2 BEISPIEL

$$i \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2+i & -i \\ 2 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -1+2i & 1 \\ 2i & -1 \end{pmatrix}.$$

Die *Multiplikation* einer Matrix mit einem Spaltenvektor haben wir bereits kennengelernt. Allgemeiner kann man das *Produkt* von zwei Matrizen A und B mit Einträgen in demselben Körper \mathbb{K} definieren, wenn die Anzahl Spalten von A mit der Anzahl Zeilen von B übereinstimmt. Dabei gehen wir folgendermassen vor. Nehmen wir an, $A = (a_{ik})$ sei vom Typ $m \times s$ und $B = (b_{kj})$ vom Typ $s \times n$. Jede Spalte von B bildet einen Vektor in \mathbb{R}^s , nämlich

$$v_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Nun multiplizieren wir der Reihe nach A mit jeder dieser Spaltenvektoren und bilden aus den Vektoren Av_1, Av_2, \dots, Av_n , die jeweils aus m Einträgen bestehen, eine $m \times n$ -Matrix C . Diese Matrix C ist das Produkt der Matrizen A und B .

7.2.3 BEISPIELE

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 11 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 2 & 0 & 2+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & 1+i \\ 4 & 2+i \end{pmatrix}.$$

Man findet den Eintrag der Produktmatrix C an der Stelle (i, j) , indem man jeweils entsprechende Einträge der i -ten Zeile von A mit der j -ten Spalte von B multipliziert und aufaddiert. Also ist

$$C = A \cdot B = \left(\sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj} \right).$$

Ist $n = 1$, so ist B nichts anderes als ein Spaltenvektor, und in diesem Fall stimmt die Multiplikation mit der schon bekannten Multiplikation von Matrix mit Spaltenvektor überein.

7.2.4 BEISPIEL

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist zu beachten, dass das Produkt von zwei Matrizen nur definiert ist, wenn die Typen der Matrizen zueinander passen! Hier einige spezielle Produkte:

7.2.5 BEMERKUNG Sei A eine Matrix vom Typ $m \times n$. Für $j = 1, \dots, n$ bezeichne

$$e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \text{ denjenigen Spaltenvektor mit } n \text{ Einträgen, der an der Stelle } j \text{ den}$$

Eintrag 1 hat und sonst lauter Nullen. Für $i = 1, \dots, m$ sei weiter e_i^T der Zeilenvektor mit m Einträgen, der an der Stelle i den Eintrag 1 hat und sonst lauter Nullen: $e_i^T = (0 \dots 1 \dots 0)$. Dann gilt

$$Ae_j = j\text{-te Spalte von } A \quad \forall j \quad \text{und} \quad e_i^T A = i\text{-te Zeile von } A \quad \forall i.$$

Ist $m = n$ und bezeichnet E die $n \times n$ -Matrix, die auf der Diagonalen Einsen stehen hat, aber an jeder anderen Stelle Nullen:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$AE = EA = A.$$

Man nennt E deshalb auch n -te Einheitsmatrix.

Für das Rechnen mit Matrizen gelten einige der von den Zahlen her geläufigen Rechenregeln, allerdings nicht das Kommutativgesetz!

7.2.6 BEMERKUNG Für alle Matrizen A, B, C von passendem Typ und alle Zahlen λ gelten:

SKALARMULTIPLIKATION: $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;

ASSOZIATIVGESETZ: $(AB)C = A(BC)$;

DISTRIBUTIVGESETZ: $A(B + C) = AB + AC$.

Aber das Kommutativgesetz für die Multiplikation gilt nicht, im allgemeinen ist $AB \neq BA$ (falls überhaupt beide Produkte definiert sind).

7.2.7 BEISPIELE

$$(3 \quad -1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (5), \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} (3 \quad -1 \quad 1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \\ 12 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Als nächstes soll nun noch die *Inverse* einer Matrix definiert werden.

7.2.8 DEFINITION Seien A, B Matrizen vom Typ $n \times n$ mit Einträgen aus dem Körper \mathbb{K} . Die Matrix B ist die *Inverse* von A , falls

$$AB = BA = E.$$

Durch diese Eigenschaft ist B eindeutig bestimmt. Man verwendet für die Inverse einer Matrix A üblicherweise die Notation A^{-1} .

7.2.9 BEMERKUNG Eine 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ hat genau dann den Rang 2, wenn $ad - bc \neq 0$ ist. Ist das der Fall, dann ist die Inverse $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Denn man rechnet nach, dass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Inverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ lautet zum Beispiel $A^{-1} = - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Allgemeiner gilt folgendes:

7.2.10 SATZ Eine $n \times n$ -Matrix A besitzt genau dann eine Inverse, wenn der Rang von A gleich n ist.

Beweis. Nehmen wir zunächst an, die Matrix A besitze eine Inverse A^{-1} . Dann hat für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ das Gleichungssystem $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$ eine eindeutige

Lösung, nämlich $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}b$. Nach Folgerung 7.1.7 über die Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme folgt daraus, dass der Rang von A gleich n sein muss.

Sei jetzt umgekehrt der Rang von A gleich n . Wenn wir A auf Zeilenstufenform bringen, erhalten wir also eine Matrix ganz ohne Nullzeilen, mit genau n Stufen. Deshalb hat jedes der linearen Gleichungssysteme $Av_j = e_j$ (für $j = 1, \dots, n$) eine eindeutige Lösung $v_j \in \mathbb{R}^n$. Bilden wir aus den Vektoren v_1, \dots, v_n als Spalten eine neue $n \times n$ -Matrix B , so gilt nach Konstruktion $AB = E$.

Ausserdem ist der Rang der Matrix B ebenfalls gleich n . Denn weil B eine Linksinverse hat, besitzt jedes lineare Gleichungssystem $B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = v$ eine eindeutige Lösung. Man kann also wie eben argumentiert, eine Matrix A' finden mit $BA' = E$. Jetzt folgt aber $A = AE = A(BA') = (AB)A' = A'$. Also ist $AB = BA = E$ und das heisst, die Matrix B ist die Inverse von A . q.e.d.

Die Inverse einer vorgelegten quadratischen Matrix A von maximalem Rang kann mithilfe von elementaren Zeilenumformungen bestimmt werden. Die n Gleichungssysteme

$$A \cdot v_j = e_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

müssen dazu simultan gelöst werden. Dazu kann man folgendermassen vorgehen: Man bildet aus A und der Einheitsmatrix E vom selben Typ eine erweiterte Matrix $M = (A|E)$. Nun bringt man M durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform. Weil A von maximalem Rang ist, erhält man in der linken Hälfte eine Matrix, deren Einträge in der Diagonalen gleich 1 und unterhalb der Diagonalen gleich Null sind. Durch weitere geeignete elementare Zeilenumformungen kann man nun ausserdem erreichen, dass in der linken Hälfte auch die Einträge oberhalb der Diagonalen gleich Null sind. Man erhält die Form $M' = (E|B)$. Die Matrix B ist dann bereits die gesuchte Inverse.

7.2.11 BEISPIEL $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$. Die erweiterte Matrix $M = (A|E)$ lautet dann:

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Wir vertauschen die ersten beiden Zeilen und ziehen von der dritten Zeile das Dop-

pelte der zweiten Zeile ab:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 8 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Jetzt addieren wir zur zweiten Zeile das Siebenfache der dritten Zeile und erhalten:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Wir ziehen von der ersten Zeile das Dreifache der zweiten Zeile und das Fünffache der dritten Zeile ab und addieren schliesslich noch zur zweiten die dritte Zeile dazu. Damit ist die gesuchte Form erreicht:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -38 & 11 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array} \right).$$

Nun lesen wir aus der rechten Hälfte die Inverse ab:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -38 & 11 & -5 \\ 8 & -2 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.3 DETERMINANTEN

Zusammenfassung: Hier werden Determinanten quadratischer Matrizen definiert. Die Determinante liefert u.a. ein einfaches Kriterium dafür, ob eine vorgelegte Matrix A von maximalem Rang (und damit invertierbar) ist oder nicht. Ist dies der Fall, ist jedes lineare Gleichungssystem mit A als Koeffizientenmatrix eindeutig lösbar.

Für jede natürliche Zahl n gibt es eine Abbildung $\det: M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \det A$, die wir jetzt durch Induktion über n definieren werden.

Für 1×1 -Matrizen setzt man

$$\det(a) := a \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Für 2×2 -Matrizen definiert und schreibt man

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc.$$

Zum Beispiel ist also

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 3 = 5.$$

Kommen wir jetzt zum Fall $n = 3$. Die Determinante einer 3×3 -Matrix kann man als Kombination von drei 2×2 -Unterdeterminanten beschreiben. Genauer setzt man:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

7.3.1 BEISPIELE

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -18.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \begin{vmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} b & f \\ 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

Wenn wir die in unserer Definition vorkommenden 2×2 -Unterdeterminanten ausschreiben, erhalten wir folgende Beschreibung der Determinante:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}.$$

Es handelt sich also um eine alternierende Summe, die aus 6 Produkten von je 3 Einträgen der Matrix A besteht. Man kann sich davon überzeugen, dass in jedem einzelnen Produkt genau ein Eintrag aus jeder Zeile und jeder Spalte vorkommt.

Sei jetzt $n > 3$, und nehmen wir an, die Determinanten von sämtlichen $(n-1) \times (n-1)$ -Matrizen sind bereits definiert. Für $n \times n$ -Matrizen definieren wir nun wie im Fall $n = 3$ die Determinante durch "Entwicklung nach der ersten Spalte". Dazu sei A_{i1} diejenige $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die aus A durch Streichung der i -ten Zeile und der ersten Spalte entsteht. Die Determinante von A_{i1} ist nach der Annahme bereits erklärt, und wir multiplizieren sie jetzt noch mit dem Eintrag a_{i1} aus der ersten Spalte. Die alternierende Summe all dieser Teilergebnisse bildet die Determinante von A :

7.3.2 DEFINITION

$$\det A := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} = a_{11} \det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det(A_{n1}).$$

7.3.3 BEISPIEL

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \left(2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = 2 - 4 \cdot 7 = -26.$$

7.3.4 BEMERKUNG Durch vollständige Induktion kann man zeigen, dass sich die Determinante einer $n \times n$ -Matrix als alternierende Summe von $n!$ Produkten aus je n Einträgen schreiben lässt. Dabei kommt in jedem der Produkte genau ein Eintrag aus jeder Zeile und jeder Spalte vor.

Für eine obere Dreiecksmatrix ist es sehr einfach, die Determinante zu bestimmen:

7.3.5 BEMERKUNG Ist A eine obere Dreiecksmatrix, so stimmt die Determinante von A mit dem Produkt der Diagonaleinträge von A überein. Insbesondere ist die Determinante der Einheitsmatrix gleich 1.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Zeilen n . Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei jetzt $n > 1$ und die Behauptung für $n - 1$ schon gezeigt. Ist A eine obere Dreiecksmatrix vom Typ $n \times n$, können wir A in folgender Form schreiben:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & d_2 & \dots & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

Durch Entwicklung der Determinante nach der ersten Spalte ergibt sich:

$$\det A = d_1 \cdot \begin{vmatrix} d_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{vmatrix}.$$

Da die Teilmatrix A_{11} wiederum eine obere Dreiecksmatrix ist, folgt nun aus der Induktionsannahme $\det A = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n$, wie behauptet. q.e.d.

Enthält eine Matrix viele Nullen, kann die Berechnung der Determinante sich vereinfachen, wenn man nicht nach der ersten sondern nach einer der anderen Spalten oder nach einer geeigneten Zeile entwickelt. Dabei macht man sich den folgenden *Entwicklungssatz* zunutze:

7.3.6 SATZ Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ kann man wahlweise auf eine der folgenden Arten berechnen:

- Entwicklung nach der j -ten Spalte (für ein $j \in \{1, \dots, n\}$)

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

(Dabei bezeichnet A_{ij} diejenige $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix, die durch Streichung der i -ten Zeile und j -ten Spalte aus A entsteht.)

- Entwicklung nach der i -ten Zeile (für ein $i \in \{1, \dots, n\}$)

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Dabei wird folgendes Vorzeichenschema verwendet:

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \\ & \dots & & + \end{bmatrix}.$$

Beweis. Diese Aussagen folgen durch vollständige Induktion aus der Bemerkung 7.3.4, wenn man die Vorzeichenregeln beachtet. q.e.d.

Hier sind zur Illustration einige Beispiele.

7.3.7 BEISPIELE (a) Die folgende Determinante wird durch Entwicklung nach der

letzten Zeile berechnet: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 12.$

(b) Die Determinante der folgenden 4×4 -Matrix berechnen wir durch Entwicklung nach der zweiten Spalte, weil darin zwei Nullen vorkommen:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

Die zweite Teildeterminante ist gleich Null. Die erste Teildeterminante entwickeln wir nun weiter nach der dritten Zeile und erhalten:

$$\det A = (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 9.$$

Wir können die Determinante auch als Funktion der Spalten v_1, \dots, v_n der Matrix A auffassen und schreiben dann $\det(v_1, \dots, v_n)$.

7.3.8 SATZ *Bezogen auf die Spalten hat die Determinantenfunktion folgende wichtige Eigenschaften:*

- (i) *Linearität in den Spalten:* Für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: $\det(\dots, u+v, \dots) = \det(\dots, u, \dots) + \det(\dots, v, \dots)$ und $\det(\dots, \alpha u, \dots) = \alpha \cdot \det(\dots, u, \dots)$ (bei festgehaltenen restlichen Spalten).
- (ii) *Die Funktion ist alternierend:* Vertauscht man zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante:

$$\det(\dots, u, \dots, v, \dots) = -\det(\dots, v, \dots, u, \dots) \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

- (iii) *Normierung:* $\det(e_1, e_2, \dots, e_n) = \det E = 1.$

Durch diese drei Eigenschaften ist die Funktion $\det: M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ bereits eindeutig festgelegt.

Beweis. Die Aussage (iii) haben wir bereits früher festgehalten. Zu (i): Die Linearität kann man durch Nachrechnen überprüfen, indem man die Determinante durch Entwicklung nach derjenigen Spalte berechnet, in der die Summe der Vektoren vorkommt. Die Aussage (ii) ergibt sich durch vollständige Induktion: Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Für $n = 2$ rechnen wir nach:

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Sei jetzt $n > 2$, und es nehmen wir an, es sollen die Spalten j und k miteinander vertauscht werden. Weil $n > 2$, gibt es einen Spaltenindex l , der von j und k verschieden ist. Wir berechnen jetzt die Determinante durch Entwicklung nach der l -ten Spalte. Bei allen in der Entwicklung vorkommenden Unterdeterminanten ändert sich nach der Induktionsannahme bei der Vertauschung der Spalten j und k das Vorzeichen. Also gilt dasselbe auch für die daraus gebildete Gesamtdeterminante. q.e.d.

Aus den Eigenschaften (i)-(iii) ergeben sich folgende nützliche Konsequenzen:

7.3.9 FOLGERUNG Für die Determinantenfunktion gelten ausserdem noch diese Eigenschaften:

- (iv) Stimmen zwei Spalten einer quadratischen Matrix miteinander überein, so ist die Determinante der Matrix gleich Null.
- (v) Zieht man von einer Spalte einer quadratischen Matrix ein Vielfaches einer anderen Spalte ab, so bleibt die Determinante der Matrix dabei unverändert.

Beweis. (iv) Nach (ii) muss für eine Matrix mit zwei identischen Spalten gelten: $\det(A) = \det(\dots, v, \dots, v, \dots) = -\det(\dots, v, \dots, v, \dots)$ und daher $\det(A) = 0$.

(v) Nehmen wir an, die Matrix A enthält die Spalten u und v , und wir ersetzen v durch $v - \alpha u$ (für ein $\alpha \in \mathbb{R}$). Wegen der Linearität und Eigenschaft (iv) folgt dann: $\det(\dots, v - \alpha u, \dots, u, \dots) = \det(\dots, v, \dots, u, \dots) - \alpha \det(\dots, u, \dots, u, \dots) = \det(\dots, v, \dots, u, \dots)$. q.e.d.

Die entsprechenden Aussagen gelten auch bezogen auf Zeilen:

7.3.10 SATZ Die Determinantenfunktion $\det: M_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch linear und alternierend in den Zeilen. Stimmen zwei Zeilen in einer Matrix überein, so ist die Determinante der Matrix gleich Null. Zieht man von einer Zeile einer Matrix ein Vielfaches einer anderen Zeile ab, so bleibt die Determinante dabei unverändert.

Hier nun das zu Anfang des Abschnitts angekündigte Kriterium dafür, wann eine Matrix von maximalem Rang ist (siehe Satz 7.2.10):

7.3.11 FOLGERUNG Für jede $n \times n$ -Matrix A gilt

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Rang}(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} \text{ existiert.}$$

Beweis. Durch elementare Zeilenumformungen können wir A auf Zeilenstufenform A' bringen. Dann ist

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(A') \neq 0.$$

Denn bei den einzelnen Umformungen passiert folgendes: Das Abziehen eines Vielfaches einer Zeile von einer anderen ändert die Determinante nicht. Die Vertauschung von zwei Zeilen ändert nur das Vorzeichen der Determinante. Teilt man eine Zeile durch den Faktor $d \neq 0$, dann wird auch die Determinante durch den Faktor d geteilt.

Schauen wir uns jetzt A' genauer an. Eine quadratische Matrix in Zeilenstufenform ist sicher eine obere Dreiecksmatrix, und in der Diagonale stehen führende Einsen oder eventuell Nullen, wenn die Treppe der führenden Einsen eine breitere Stufe hat. Die Determinante von A' kann also nur die Werte 1 oder 0 annehmen. Der Wert 1 wird genau dann angenommen, wenn in der Diagonale nur führende Einsen stehen, und also der Rang der Matrix A' gleich n ist. q.e.d.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Determinantenfunktion wird durch den folgenden *Multiplikationssatz* beschrieben, der hier wiederum ohne Beweis angegeben werden soll:

7.3.12 SATZ Sind $A, B \in M_{n \times n}$, so gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Ist A invertierbar, so folgt insbesondere:

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(E) = 1.$$

Auch hier sollen einige Beispiele zur Illustration genügen:

7.3.13 BEISPIELE 1. Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, so ist

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } \det A^{-1} = -\frac{1}{2} = \frac{1}{\det A}.$$

2. Sind A und B Diagonalmatrizen mit Einträgen a_1, \dots, a_n bzw. b_1, \dots, b_n auf der Diagonalen und Nullen abseits der Diagonalen, so ist das Produkt von A und B wiederum eine Diagonalmatrix, nämlich:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix}.$$

Also gilt hier

$$\det(AB) = a_1 b_1 \cdots a_n b_n = (a_1 \cdots a_n)(b_1 \cdots b_n) = \det(A) \det(B).$$

3. Ist B eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen b_1, \dots, b_n und A eine beliebige $n \times n$ -Matrix mit den Spalten v_1, \dots, v_n , so gilt wegen der Linearität in den Spalten

$$\det(AB) = \det(b_1 v_1, \dots, b_n v_n) = b_1 \cdots b_n \det(v_1, \dots, v_n) = \det(B) \det(A).$$

7.4 GEOMETRISCHE BEDEUTUNG DER DETERMINANTE

Zusammenfassung: Der Betrag der Determinante einer 2×2 -Matrix misst den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Spaltenvektoren der Matrix aufgespannt wird. Im dreidimensionalen Fall kann man den Betrag der Determinante als das Volumen des Spates verstehen, der von den drei Spaltenvektoren erzeugt wird. Das Vorzeichen der Determinante hängt jeweils mit der Orientierung der Ebene bzw. des Raumes zusammen.

Betrachten wir zunächst Paare von Vektoren in der Ebene:

7.4.1 SATZ Seien $u, v \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig, d.h. sie liegen nicht auf einer gemeinsamen Geraden. Dann gibt der Betrag der Determinante $|\det(u, v)|$ den Flächeninhalt des von u und v aufgespannten Parallelogramms an. Bezeichnen wir den von u nach v gemessenen Winkel mit α , so gilt für das Vorzeichen der Determinante:

$$\det(u, v) \begin{cases} > 0 & \text{falls } 0 < \alpha < \pi \\ < 0 & \text{falls } -\pi < \alpha < 0. \end{cases}$$

Sind u, v linear abhängig, so entartet das von ihnen aufgespannte Parallelogramm zu einer Strecke, und in diesem Fall ist $\det(u, v) = 0$.

Beweis. 1. Fall: Zeigen u und v in Richtung der Koordinatenachsen, sind also $u = u_1 \cdot e_1$ und $v = v_2 \cdot e_2$, so spannen u und v ein Rechteck auf, und die Fläche dieses Rechtecks beträgt $|u_1 \cdot v_2| = |\det(u, v)|$.

2. Fall: Ist $u = u_1 \cdot e_1$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ beliebig, so geht das von u und v aufgespannte Parallelogramm durch Scherung in das von u und $v_2 e_2$ aufgepannte Rechteck über. Also stimmen die Flächen überein und wir haben wieder $|\det(u, v)| = |u_1 v_2|$. Das Vorzeichen der Determinante ist genau dann positiv, wenn u_1 und v_2 dasselbe Vorzeichen haben. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $0 < \alpha < \pi$ ist.

3. Fall: Ist $v \in \text{Spann}(e_1) = \{\lambda e_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und u beliebig, so tauschen wir u und v und landen wieder im 2. Fall.

4. Fall: Weder u noch v sind parallel zu e_1 . Nun wähle $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $u' = u - \lambda v \in \text{Spann}(e_1)$ und ersetze u durch u' . Da es sich um eine Scherung handelt, erzeugen u, v und u', v flächengleiche Parallelogramme. Ausserdem gilt $\det(u, v) = \det(u', v)$ nach Eigenschaft (v). Damit haben wir die Situation auf den 2. Fall zurückgeführt. q.e.d.

Für Tripel von Vektoren im dreidimensionalen Raum gilt folgendes:

7.4.2 SATZ Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, d.h. sie liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene. Dann gibt der Betrag der Determinante $|\det(u, v, w)|$ den Rauminhalt des von u, v und w aufgespannten Spates (oder Parallelepiped) an. Das Vorzeichen der Determinante ist genau dann positiv, wenn die Anordnung der Vektoren

u, v, w zur “Dreifingerregel” der rechten Hand passt. Das heisst, man kann mit der rechten Hand mit dem Daumen in die Richtung von u , mit dem Zeigefinger in die Richtung von v und mit dem Mittelfinger in die Richtung von w zeigen. Sind $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig, so erzeugen sie nur eine höchstens zweidimensionale Figur, deren Rauminhalt gleich Null ist. Auch dies wird durch die Determinante angegeben, denn in diesem Fall ist $\det(u, v, w) = 0$.

Beweis. 1. Fall: Sind $u = ae_1$, $v = be_2$ und $w = ce_3$, so erzeugen die drei Vektoren einen Quader, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Das Volumen dieses Quaders beträgt $|abc| = |\det(u, v, w)|$. Die Interpretation des Vorzeichens lässt sich in diesem Fall ebenfalls leicht bestätigen.

2. Fall: Ist $w \in \text{Spann}(e_3)$ und liegen u, v in der x - y -Ebene, so gilt

$$|\det(u, v, w)| = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{pmatrix} \right| = |(u_1v_2 - u_2v_1)| \cdot |w_3|.$$

Der Faktor $|u_1v_2 - u_2v_1|$ gibt die Grundfläche des Spates und $|w_3|$ die Höhe des Spates an.

Allgemeiner Fall: Durch eine Folge von Scherungen (das heisst elementare Spaltenumformungen vom Typ (v)) und eventuell Vertauschung der Kantenvektoren kann man das Spat in einen Quader verwandeln, dessen Seiten wie im 1. Fall parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Für die neuen Kantenvektoren des Quaders u', v', w' gilt einerseits:

$$|\det(u, v, w)| = |\det(u', v', w')|.$$

Andererseits stimmen Spatvolumen und Quadervolumen nach dem Cavalieriprinzip überein. (Man denke dabei an einen Papierstapel, der bei der Scherung zur Seite gedrückt wird.) q.e.d.

Wir können die Determinante eines Tripels von Vektoren im Raum mit dem Vektorprodukt in Zusammenhang bringen. Dazu hier zur Erinnerung die Definition von Skalarprodukt und von Vektorprodukt. Das Skalarprodukt im \mathbb{R}^3 ist folgendermassen erklärt:

7.4.3 DEFINITION Sei $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Für das *Skalarprodukt* von u und v verwenden wir die folgende Schreibweise:

$$\langle u, v \rangle := x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

7.4.4 BEMERKUNG Entsprechend wie in der Ebene gilt:

$$\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\alpha),$$

wobei $\|u\|$, $\|v\|$ die Längen der Vektoren u, v und α den Winkel zwischen u und v , gemessen in der von u und v erzeugten Ebene, bezeichnet. Insbesondere gilt:

$$\langle u, v \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ und } v \text{ stehen senkrecht aufeinander.}$$

Ist $\|v\| = 1$, so gibt das Skalarprodukt von u und v die Länge der orthogonalen Projektion von u auf die Gerade durch v an.

Das Vektorprodukt ist folgendermassen definiert:

7.4.5 DEFINITION Sei $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Der Vektor $w :=$

$u \times v \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch $w = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$. Man kann sich diese Definition

leichter merken, wenn man sie als Entwicklung der Determinante einer passenden Matrix nach der letzten Spalte auffasst, in der die kanonischen Basisvektoren stehen:

$$w = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \vec{e}_1 \\ y_1 & y_2 & \vec{e}_2 \\ z_1 & z_2 & \vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel ist

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Man kann leicht nachrechnen, dass folgender Zusammenhang zwischen Vektorprodukt und Determinante besteht:

7.4.6 BEMERKUNG Für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\langle u \times v, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rangle = \det(u, v, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}).$$

Die geometrische Deutung der Determinante von drei Vektoren im Raum liefert nun die bekannte Interpretation des Vektorprodukts:

7.4.7 FOLGERUNG Für $u, v \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\alpha)|,$$

wobei wie eben α den Winkel zwischen u und v bezeichnet, der in der von u, v erzeugten Ebene von u nach v gemessen wird. Also ist $u \times v = 0$ genau dann, wenn u und v linear abhängig sind. Wenn u und v linear unabhängig sind, gibt die Länge des Vektors $w = u \times v$ die Fläche des von u und v erzeugten Parallelogramms an. Ausserdem steht w senkrecht auf der von u und v erzeugten Ebene. Schliesslich ist w so orientiert, dass die Richtungen der Vektoren u, v, w zur Dreifingerregel der rechten Hand passen.

Beweis. Sind u und v linear abhängig, d.h. $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$, dann ist $u = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder umgekehrt). Deshalb verschwindet $\det(u, v, u \times v)$ und damit auch $\|u \times v\|$. Nehmen wir nun an, dass u und v linear unabhängig sind. Dann gibt es genau einen Vektor n der Länge 1, der auf u und v senkrecht steht, so dass u, v, n zur Dreifingerregel der rechten Hand passen. Aus Bemerkung 7.4.6 folgt, dass $u \times v$ ebenfalls auf u und v senkrecht steht. Also ist $u \times v = \lambda n$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und daher

$$\langle u \times v, n \rangle = \langle \lambda n, n \rangle = \lambda.$$

Nun folgt aus Bemerkung 7.4.6

$$\lambda = \langle u \times v, n \rangle = \det(u, v, n),$$

stimmt also überein mit dem Volumen des von u, v, n erzeugten Spates. Insbesondere ist $\lambda > 0$ und daher $\lambda = \|u \times v\|$. Ausserdem beträgt die Höhe des Spates hier $\|n\| = 1$ und die Grundfläche ist die Fläche des von u und v erzeugten Parallelogramms. Daraus ergibt sich die Behauptung. q.e.d.

7.5 VEKTORRÄUME

Zusammenfassung: Wir erinnern zunächst an das Rechnen mit Vektoren im zwei- oder dreidimensionalen euklidischen Raum. Die dafür geltenden Rechengesetze dienen dann als Modell für die Definition eines abstrakten Vektorraums. Wir lernen weitere Beispiele kennen und betrachten lineare Unterräume.

Bereits in dem antiken Lehrbuch der *Elemente* von Euklid sind die Grundbegriffe der ebenen Geometrie festgehalten, die noch heute in der Schule vermittelt werden. Dazu gehören die Begriffe Punkt, Gerade, Ebene, Winkel oder Dreieck mit den dazugehörigen Lehrsätzen. Unter der euklidischen Ebene wollen wir hier eine solche (intuitiv gegebene) Ebene verstehen, in der man Abstände zwischen Punkten und Winkel zwischen Halbstrahlen messen kann und die bekannten Gesetze der euklidischen Geometrie gelten, wie zum Beispiel die folgenden:

- Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Verbindungsgerade.
- Je zwei nichtparallele Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
- Zu einer Geraden g und einem Punkt P , der nicht auf g liegt, gibt es genau eine zu g parallele Gerade durch P .
- Sind g_1 und g_2 zwei parallele Geraden, so schneidet jede dazu nicht parallele Gerade h die Geraden g_1 und g_2 unter demselben Winkel.
- Die Winkelsumme in jedem Dreieck beträgt 180° .

Je zwei verschiedene Punkte A, B in der Ebene liefern einen Pfeil mit Anfangspunkt A und Endpunkt B . Wir betrachten zwei Pfeile als äquivalent, wenn sich der erste Pfeil durch Parallelverschiebung in den zweiten Pfeil überführen lässt. Unter einem *Vektor* versteht man eine Äquivalenzklasse von Pfeilen, also die Gesamtheit aller zu einem bestimmten Pfeil äquivalenten Pfeile. Man sagt auch, ein bestimmter Pfeil *repräsentiere* den entsprechenden Vektor. Ein Spezialfall ist der sogenannte *Nullvektor*, nämlich die Klasse aller Pfeile, bei denen Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen. Wir schreiben dafür einfach 0 . Die *Vektoraddition* ist nun definiert durch das Aneinanderhängen von Pfeilen.

Sind genauer u, v Vektoren und wird u repräsentiert durch den Pfeil von A nach B , und wird v repräsentiert durch den Pfeil von B nach C , dann definieren wir $u + v$ als denjenigen Vektor, der vom Pfeil von A nach C repräsentiert wird. Hätten wir einen anderen Startpunkt gewählt, etwa A' , würde die gesamte Konfiguration parallel verschoben, der Vektor $u + v$ ist also von dieser Wahl unabhängig und daher wohldefiniert.

Wird v durch den Pfeil von A nach B repräsentiert, so bezeichnet $-v$ den Vektor, der durch den Pfeil von B nach A repräsentiert wird. Offenbar gilt nach Definition dann $v + (-v) = 0$. Weil sich beim Paralleltransport eines Pfeiles der Abstand zwischen Anfangs- und Endpunkt nicht ändert, können wir diese Grösse als die *Länge* des entsprechenden Vektors auffassen. Wir schreiben dafür $\|v\|$. Die Multiplikation eines Vektors v mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ist folgendermassen erklärt: Ist $\lambda > 0$, so ist λv derjenige Vektor, der parallel ist zu v , dessen Länge aber $\lambda\|v\|$ beträgt. Ist $\lambda < 0$, so ist λv derjenige Vektor, der parallel ist zu $-v$, dessen Länge aber $|\lambda|\|v\|$ beträgt. Die Multiplikation mit 0 liefert den Nullvektor.

Die bisher eingeführten Begriffe lassen sich auch auf den euklidischen dreidimensionalen Raum übertragen. Wiederum legen je zwei verschiedene Punkte im Raum einen Pfeil fest, und wir betrachten je zwei Pfeile als äquivalent, wenn sich der erste Pfeil durch Parallelverschiebung in den zweiten Pfeil überführen lässt. Die Vektoren im Raum sind die Äquivalenzklassen von Pfeilen. Jeder einzelne Vektor hat also eine wohldefinierte Länge und eine Richtung. Wiederum können wir die Addition solcher Vektor durch Aneinanderhängen entsprechender Pfeile definieren. Und die Skalarmultiplikation definieren wir ebenfalls entsprechend wie in der Ebene.

Für die Vektoraddition und die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren im zwei- oder dreidimensionalen euklidischen Raum gelten bestimmte Rechengesetze, die man auch in anderen Zusammenhängen antrifft. Diese Rechengesetze sind die Grundlage für den Begriff des abstrakten Vektorraums.

7.5.1 DEFINITION Ein *reeller Vektorraum* ist eine Menge V mit einem Nullelement 0 , auf der zwei Rechenoperationen erklärt sind, nämlich Addition $V \times V \rightarrow V$, $(v, w) \mapsto v + w$ und Skalarmultiplikation $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$, und zwar so, dass für alle $u, v, w \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die folgenden Rechenregeln gelten:

- $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Assoziativgesetz für die Addition).
- $u + v = v + u$ (Kommutativgesetz).
- $u + 0 = u$ (neutrales Element).

- Die Gleichung $v + x = 0$ besitzt zu jedem $v \in V$ genau eine Lösung $x \in V$. Wir schreiben dafür $x = -v$ (Existenz des additiven Inversen).
- $(\alpha \cdot \beta)u = \alpha(\beta \cdot u)$ (Assoziativgesetz für die Skalarmultiplikation).
- $1 \cdot u = u$.
- $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (Distributivgesetz).
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (Distributivgesetz).

Aus diesen acht Axiomen folgen alle weiteren vertrauten Regeln des Rechnens mit Vektoren. Zum Beispiel gilt

$$0 \cdot v = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

(Dabei ist mit der ersten 0 die Zahl Null in \mathbb{R} gemeint und mit der zweiten 0 der Nullvektor in V .) Denn aus dem Distributivgesetz folgt $1 \cdot v + 0 \cdot v = (1 + 0) \cdot v = 1 \cdot v = v$. Addieren wir nun auf beiden Seiten $-v$ dazu, erhalten wir die Behauptung.

Weiter gilt auch:

$$(-1) \cdot v = -v \quad \text{für alle } v \in V.$$

Denn wiederum nach dem Distributivgesetz ist $(-1) \cdot v + v = (-1) \cdot v + 1 \cdot v = (-1 + 1)v = 0 \cdot v = 0$. Also stimmt $(-1)v$ mit dem eindeutigen Inversen $-v$ überein.

7.5.2 BEISPIELE 1. Der kleinstmögliche Vektorraum besteht nur aus dem Nullelement $V = \{0\}$.

2. Die Wahl eines Koordinatensystems für den euklidischen Raum führt auf den Raum der Spaltenvektoren \mathbb{R}^3 , oder allgemeiner \mathbb{R}^n (für $n \in \mathbb{N}$). Addition und Skalarmultiplikation sind komponentenweise erklärt. Das heisst, für alle $v_j, w_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ setzt man:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}.$$

Wie es aus der elementaren Vektorrechnung geläufig ist, sind hier alle in der Definition angegebenen Rechenregeln erfüllt. Dabei ist das Nullelement der Nullvektor, dessen sämtliche Einträge gleich Null sind.

3. Die Menge der $m \times n$ -Matrizen mit reellen Einträgen bilden einen Vektorraum (mit der Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen, wie früher definiert).
4. Wir können ein Schwarz-Weiss-Bild, zerlegt in 1200×3600 Pixel, durch eine Matrix beschreiben, in der jeweils für jedes Pixel der entsprechende Grauwert als Eintrag notiert ist. In diesem Sinn entsprechen die Matrizen vom Typ 1200×3600 möglichen Bildern, und die Addition zweier solcher Matrizen kann als Überlagerung der Bilder interpretiert werden. Die Multiplikation einer Matrix mit einem festen Faktor dagegen kann man verstehen als Änderung des Hell-Dunkel-Faktors. Auf diese Weise trägt auch die Gesamtheit all dieser Bilder eine Vektorraumstruktur.

5. Die Minkowskische Raum-Zeit $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \{(p, t) \mid p \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}$ ist ein Vektorraum, den man mit \mathbb{R}^4 identifizieren kann. Jeder Vektor besteht hier aus drei Raumkoordinaten, die einen Punkt festlegen, und einer Zeitangabe. Die Abstandsmessung in der Raum-Zeit ist folgendermassen definiert:

$$\text{dist}^2((u, t_1), (w, t_2)) = c^2(t_2 - t_1)^2 - \|w - u\|^2 \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}, u, w \in \mathbb{R}^3,$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Zu gegebenem (u, t_1) bildet die Menge der Raum-Zeit-Punkte (w, t_2) im Abstand 0, also mit

$$\|w - u\| = c|t_2 - t_1|,$$

den sogenannten Lichtkegel. Es handelt sich dabei um diejenigen Punkte in der Raum-Zeit, die ein Photon, das mit Lichtgeschwindigkeit unterwegs ist, von (u, t_1) aus erreichen könnte.

6. Auf der Menge $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ aller reellwertigen Funktionen auf einem festgewählten Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ erklärt man üblicherweise Addition und Skalarmultiplikation durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ für alle $x \in D$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. Mit diesen Verknüpfungen bildet $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ einen Vektorraum. Denn die acht definierenden Rechenregeln eines Vektorraums sind alle erfüllt; sie lassen sich jeweils auf die entsprechenden Rechengesetze im Wertebereich, also in der Menge der reellen Zahlen, zurückführen.

Auf entsprechende Weise definiert man Vektorräume über den komplexen Zahlen.

7.5.3 DEFINITION Ein komplexer Vektorraum ist eine Menge V mit einem Nullelement 0 , auf der eine Addition $V \times V \rightarrow V, (v, w) \mapsto v + w$ und eine Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ erklärt ist, so dass für alle $u, v, w \in V$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ die oben genannten acht Rechenregeln gelten.

Wichtige Beispiele für komplexe Vektorräume erhält man, indem man in den eben gegebenen Beispielen jeweils \mathbb{R} durch \mathbb{C} ersetzt. Der Raum \mathbb{C}^n (für fest gewähltes

$n \in \mathbb{N}$) besteht aus allen Spaltenvektoren der Form $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ mit komplexen Einträgen

$z_j \in \mathbb{C}$ für $j = 1, \dots, n$. Addition und Skalarmultiplikation sind nun wiederum komponentenweise erklärt.

Der Raum $\mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ besteht aus allen Funktionen der Form $f: D \rightarrow \mathbb{C}$, definiert auf einem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$ mit Werten in \mathbb{C} . Zum Beispiel gehört dazu die Funktion

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2.$$

Analog erklärt man die Addition und Skalarmultiplikation in diesem Fall durch $(f + g)(z) = f(z) + g(z)$ und $(\alpha \cdot f)(z) = \alpha \cdot f(z)$ für alle $z \in D$, $\alpha \in \mathbb{C}$ und $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{C})$. Mit diesen Verknüpfungen bildet $\mathcal{F}(D, \mathbb{C})$ einen Vektorraum.

Eine besondere Rolle spielen diejenigen Teilmengen von Vektorräumen, die unter Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen sind, weil sie selbst wieder Vektorräume bilden.

7.5.4 DEFINITION Eine nichtleere Teilmenge $U \subset V$ eines \mathbb{K} -Vektorraums V ist ein *linearer Unterraum* von V , falls U unter Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist, das heisst, wenn folgendes gilt:

$$(A) \quad u, v \in U \implies u + v \in U.$$

$$(S) \quad u \in U \implies \lambda \cdot u \in U \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Ist U ein linearer Unterraum von V , so bildet U mit den von V geerbten Operationen wieder einen Vektorraum. Denn offensichtlich bleiben die Assoziativgesetze, das Kommutativgesetz und die Distributivgesetze erhalten. Und auch das Nullelement von V liegt in U . Denn nach Voraussetzung ist U nichtleer, es gibt also mindestens ein Element $u_0 \in U$. Wegen der Eigenschaft (S) folgt jetzt $0 \cdot u_0 = 0 \in U$. Schliesslich liegt mit u auch stets $-u$ in U , denn $-u = (-1) \cdot u \in U$ wiederum wegen der Eigenschaft (S).

7.5.5 BEISPIELE Bezeichne V jetzt den Vektorraum, bestehend aus den ebenen Vektoren.

1. Der Vektorraum V hat die folgenden Unterräume: die “trivialen” Unterräume $\{0\}$ und V einerseits und andererseits Unterräume der Form $g_v = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, wobei $v \in V$ festgewählt ist. Diese Unterräume entsprechen den Geraden durch den Nullpunkt. Genauer besteht die Menge g_v aus den Ortsvektoren sämtlicher Punkte auf der Geraden durch den Nullpunkt in Richtung v .
2. Sind g, h verschiedene Geraden in V durch den Nullpunkt, dann ist $g \cup h$ kein linearer Unterraum. Denn bezeichnet v einen Richtungsvektor auf g und w einen Richtungsvektor auf h , dann sind v und w linear unabhängig und $v + w \notin g \cup h$.
3. Die Gerade $g = \{\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ in der Ebene geht nicht durch den Nullpunkt und ist deshalb kein linearer Unterraum von V . Man erhält g , indem man den linearen Unterraum $g' = \{\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ um den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel verschiebt.

Und hier noch drei Beispiele für Unterräume des Funktionenraums:

7.5.6 BEISPIELE 1. Die Schar der Parabeln in \mathbb{R}^2 mit Nullstellen 0 und 1 können wir darstellen als folgende Teilmenge der Funktionen in einer reellen Variablen:

$$U = \{g(x) = \alpha x(x - 1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Man kann direkt sehen, dass U bezüglich der Addition und Skalarmultiplikation der Funktionen abgeschlossen ist. Also bildet die Parabelschar einen linearen Unterraum von $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Jedes Polynom mit reellen Koeffizienten können wir als reellwertige Funktion auf \mathbb{R} auffassen. In diesem Sinn bilden die reellen Polynome eine Teilmenge des Raum $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Diese Teilmenge ist ein linearer Unterraum, denn sowohl die Summe von je zwei Polynomen ist wieder ein Polynom, als auch das Produkt eines Polynoms mit einem festen Skalar.
3. Entsprechend bilden die Polynome mit komplexen Koeffizienten, betrachtet als Funktionen auf \mathbb{C} , einen linearen Unterraum des Raumes $\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Wir kommen nun wieder zurück auf lineare Gleichungssysteme, und beschreiben jetzt deren Lösungsmengen in dem neuen begrifflichen Rahmen. Sei dazu $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, und sei A eine $m \times n$ -Matrix mit Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Sei weiter $b \in \mathbb{K}^m$ ein Spaltenvektor mit Einträgen in \mathbb{K} . Das dazugehörige Gleichungssystem $Ax = b$ aus reellen oder komplexen linearen Gleichungen nennt man *homogen*, falls b der Nullvektor ist, und andernfalls *inhomogen*. Es gilt folgendes:

7.5.7 BEMERKUNG Die Lösungsmenge

$$\mathbb{L} := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = 0 \right\}$$

des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ (hier steht 0 für den Nullvektor in \mathbb{K}^m) bildet einen linearen Unterraum des \mathbb{K}^n .

Ist $b \in \mathbb{K}^m$ nicht der Nullvektor, und hat das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung $v \in \mathbb{K}^n$, so ist die Lösungsmenge des inhomogenen Systems von der Form

$$v + \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}.$$

Man erhält diese Menge also, indem man den Unterraum der Lösungen des zugehörigen homogenen Systems um v parallel verschiebt. Eine solche Menge bezeichnet man als *affinen Unterraum*.

Ist zum Beispiel $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$, $m = 1$ und A nicht gerade die Nullmatrix, so bildet die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ eine Ebene in \mathbb{R}^3 durch den Nullpunkt. Und die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$ ($b \neq 0$) ist eine dazu parallele Ebene.

Beweis. Betrachten wir zunächst das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$. Offenbar liegt der Nullvektor in der Lösungsmenge \mathbb{L} , denn wenn man für jede der Variablen

Null einsetzt, ist die Gleichung trivialerweise erfüllt. Seien jetzt $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und

$v = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ Elemente von \mathbb{L} . Dann gilt $Au = 0$ und $Av = 0$. Durch Addition der beiden Gleichungen erhalten wir $Au + Av = 0$. Weil die Multiplikation einer Matrix

mit Spaltenvektoren das Distributivgesetz erfüllt, folgt daraus $A(u+v) = Au + Av = 0$. Also ist auch $u + v$ eine Lösung. Die Multiplikation mit einem Skalar λ liefert ausserdem $A(\lambda u) = \lambda Au = 0$. Also liegt auch λu in der Lösungsmenge für alle $\lambda \in \mathbb{K}$. Damit ist gezeigt, dass \mathbb{L} ein linearer Unterraum ist.

Betrachten wir jetzt das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $b \in \mathbb{K}^m$ nicht der Nullvektor sei. Sind $v, w \in \mathbb{K}^m$ zwei Lösungen des Systems $Ax = b$, so gilt $Av = b = Aw$, und daraus folgt $A(v-w) = Av - Aw = b - b = 0$. Der Differenzvektor $v - w$ liegt also im Lösungsraum \mathbb{L} des zugehörigen homogenen Gleichungssystems. Das heisst $w \in v + \mathbb{L}$. Ist umgekehrt $u \in \mathbb{L}$, so folgt $A(v+u) = Av + Au = b + 0 = b$. Also ist $v + u$ eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems. Zusammen ergibt sich die Behauptung. q.e.d.

Hier noch ein konkretes Zahlenbeispiel dazu (siehe Beispiel 7.1.1):

7.5.8 BEISPIEL Wir betrachten das folgende inhomogene System aus 3 Gleichungen in 4 reellen Unbekannten:

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} = b.$$

Wie bereits früher berechnet, hat dies System folgende Lösungsmenge:

$$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = b\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2-2t \\ -1-3t \\ t \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Hier ist die Lösungsmenge des entsprechenden homogenen Gleichungssystems der eindimensionale lineare Unterraum

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\},$$

und man erhält die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems, indem man \mathbb{L} um $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ parallel verschiebt.