Aufgabenblatt 11

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei der folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Eliminationsverfahren)* Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme mithilfe des Gaussschen Eliminationsverfahrens. Welchen Rang hat die Koeffizientenmatrix jeweils?

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ -4x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ 9x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 9 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 & = & 6 \\ -x_1 + 3x_3 + x_4 & = & 2 \\ -5x_1 + x_2 + 8x_3 + x_4 & = & 0 \end{array}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2. *(Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen)* Finden Sie jeweils Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so dass die Lösungsmenge $\mathbb{L}_{\alpha,\beta} \subset \mathbb{R}^3$ des folgenden linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \\ \beta \end{pmatrix}$$

(a) leer, (b) einelementig, (c) unendlich ist.

Hinweis: Bringen Sie zunächst die entsprechende erweiterte Matrix auf Zeilenstufenform. (4 Punkte)

Aufgabe 3. *(Polynome finden)* Finden Sie ein reelles Polynom p dritten Grades, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$p(-1) = -1\,,\ p(2) = 5\,,\ p'(2) = -1\,,\ \int_{-1}^{1} 5x\,p(x)\,dx = 8\,.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Partialbruchzerlegung)* Finden Sie Zahlen A, B, C, D mit

$$f(x) = \frac{1 + 2x - 2x^2 + x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{B \cdot 2x}{x^2+1} + \frac{C \cdot 2x}{(x^2+1)^2} + \frac{D\,(1-x^2)}{(x^2+1)^2}\,.$$

Konstruieren Sie nun eine Stammfunktion für f.

Hinweis: $\int \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \left(\frac{1+x^2}{(x^2+1)^2} - x \cdot \frac{2x}{(x^2+1)^2} \right) dx.$ (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Raumgeometrie)* Die Ebenen E_1 und E_2, definiert durch die Gleichungen $x + 3y + 4z = 2$ bzw. $3x + 4y + 17z = 1$, schneiden sich in einer Gerade g.

(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für g an.

(b) Finden Sie jeweils reelle Zahlen α, β, so dass die Ebene E_3, gegeben durch die Gleichung $2x + 4y + \alpha z = \beta$, die Gerade g in genau einem Punkt schneidet bzw. die Gerade g enthält.

(c) Gibt es noch weitere Möglichkeiten für die relative Lage von g zu E_3 ? Für welche Wahl von α, β treten diese Fälle jeweils ein? (3 Punkte)

Und hier noch zwei Verständnisfragen zur Selbstkontrolle:

Frage 1. *(Lineare Gleichungssysteme)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Jedes lineare Gleichungssystem aus n Gleichungen in n Unbekannten hat eine eindeutig bestimmte Lösung. ☐

(b) Es gibt lineare Gleichungssysteme, die keine Lösung haben. ☐

(c) Jedes lineare Gleichungssystem mit einer Koeffizientenmatrix von Rang n in n Unbekannten hat eine eindeutig bestimmte Lösung. ☐

(d) Es gibt lineare Gleichungssysteme, die genau zwei Lösungen haben. ☐

Frage 2. *(Zeilenstufenform)* Welche der folgenden Aussagen über Matrizen vom Typ $m \times n$ sind korrekt?

(a) Man kann jede solche Matrix durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen. ☐

(b) Für den Rang r der Matrix gilt $r \leq m$ und $r \leq n$. ☐

(c) Ist der Rang der Matrix gleich n, dann enthält die Zeilenstufenform keine Nullzeilen. ☐

(d) Ist der Rang der Matrix gleich m, dann enthält die Zeilenstufenform keine Nullzeilen. ☐

Abgabe der Aufgaben: Donnerstag, den 2. Dezember 2021, bis 12.30 Uhr als .pdf via ADAM bei Ihrem Tutor bzw. Ihrer Tutorin.