7.2 Rechnen mit Matrizen

Zusammenfassung: *Man kann für Matrizen von passendem Typ eine Addition, eine Skalarmultiplikation und eine Matrixmultiplikation erklären, und es gelten dann ähnliche Rechengesetze wie bei ganzen Zahlen mit Ausnahme des Kommutativgesetzes der Multiplikation. Ausserdem zeigen wir, dass eine quadratische Matrix genau dann eine multiplikative Inverse hat, wenn die Matrix von maximalem Rang ist.*

Für Matrizen desselben Typs ist eine *Addition* erklärt, und zwar durch Addition jeweils entsprechender Einträge. Sind genauer $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ Matrizen vom Typ $m \times n$, so setzt man

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij})\,.$$

Die Summe ist also wiederum eine $m \times n$-Matrix.

7.2.1 Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Die *Skalarmultiplikation* einer $m \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ (mit Einträgen a_{ij} aus einem Körper $\mathbb{K}$) mit $\lambda \in \mathbb{K}$ ist durch Multiplikation sämtlicher Einträge mit λ definiert:

$$\lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{ij})\,.$$

7.2.2 Beispiel

$$i \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2+i & -i \\ 2 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -1+2i & 1 \\ 2i & -1 \end{pmatrix}.$$

Die *Multiplikation* einer Matrix mit einem Spaltenvektor haben wir bereits kennengelernt. Allgemeiner kann man das *Produkt* von zwei Matrizen A und B mit Einträgen in demselben Körper $\mathbb{K}$ definieren, wenn die Anzahl Spalten von A mit der Anzahl Zeilen von B übereinstimmt. Dabei gehen wir folgendermassen vor. Nehmen wir an, $A = (a_{ik})$ sei vom Typ $m \times s$ und $B = (b_{kj})$ vom Typ $s \times n$. Jede Spalte von B bildet einen Vektor in $\mathbb{R}^s$, nämlich

$$v_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{sj} \end{pmatrix} \qquad (j = 1, \ldots, n)\,.$$

Nun multiplizieren wir der Reihe nach A mit jeder dieser Spaltenvektoren und bilden aus den Vektoren $Av_1, Av_2, \ldots, Av_n$, die jeweils aus m Einträgen bestehen, eine $m \times n$-Matrix C. Diese Matrix C ist das Produkt der Matrizen A und B.

7.2.3 Beispiele

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 11 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 2 & 0 & 2+i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+i & 1+i \\ 4 & 2+i \end{pmatrix}.$$

Man findet den Eintrag der Produktmatrix C an der Stelle (i, j), indem man jeweils entsprechende Einträge der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B multipliziert und aufaddiert. Also ist

$$C = A \cdot B = (\sum_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}).$$

Ist $n = 1$, so ist B nichts anderes als ein Spaltenvektor, und in diesem Fall stimmt die Multiplikation mit der schon bekannten Multiplikation von Matrix mit Spaltenvektor überein.

7.2.4 Beispiel

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist zu beachten, dass das Produkt von zwei Matrizen nur definiert ist, wenn die Typen der Matrizen zueinander passen! Hier einige spezielle Produkte:

7.2.5 Bemerkung *Sei A eine Matrix vom Typ $m \times n$. Für $j = 1, \ldots, n$ bezeichne $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ denjenigen Spaltenvektor mit n Einträgen, der an der Stelle j den Eintrag 1 hat und sonst lauter Nullen. Für $i = 1, \ldots, m$ sei weiter e_i^T der Zeilenvektor mit m Einträgen, der an der Stelle i den Eintrag 1 hat und sonst lauter Nullen: $e_i^T = (0 \ldots 1 \ldots 0)$. Dann gilt*

$$Ae_j = j\text{-te Spalte von } A \quad \forall j \quad \text{und} \quad e_i^T A = i\text{-te Zeile von } A \quad \forall i.$$

Ist $m = n$ und bezeichnet E die $n \times n$–Matrix, die auf der Diagonalen Einsen stehen hat, aber an jeder anderen Stelle Nullen:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$AE = EA = A.$$

Man nennt E deshalb auch n–te Einheitsmatrix.

Für das Rechnen mit Matrizen gelten einige der von den Zahlen her geläufigen Rechenregeln, allerdings nicht das Kommutativgesetz!

7.2.6 Bemerkung *Für alle Matrizen A, B, C von passendem Typ und alle Zahlen λ gelten:*

Skalarmultiplikation: $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;

Assoziativgesetz: $(AB)C = A(BC)$;

Distributivgesetz: $A(B + C) = AB + AC$.

Aber das Kommutativgesetz für die Multiplikation gilt nicht, im allgemeinen ist $AB \neq BA$ (falls überhaupt beide Produkte definiert sind).

7.2.7 Beispiele

$$(3 \quad -1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (5) \,, \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} (3 \quad -1 \quad 1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \\ 12 & -4 & 4 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Als nächstes soll nun noch die *Inverse* einer Matrix definiert werden.

7.2.8 Definition Seien A, B Matrizen vom Typ $n \times n$ mit Einträgen aus dem Körper $\mathbb{K}$. Die Matrix B ist die *Inverse* von A, falls

$$AB = BA = E \,.$$

Durch diese Eigenschaft ist B eindeutig bestimmt. Man verwendet für die Inverse einer Matrix A üblicherweise die Notation A^{-1}.

7.2.9 Bemerkung *Eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ hat genau dann den Rang 2, wenn $ad - bc \neq 0$ ist. Ist das der Fall, dann ist die Inverse $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Denn man rechnet nach, dass $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Inverse der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ lautet zum Beispiel $A^{-1} = -\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.*

Allgemeiner gilt folgendes:

7.2.10 Satz *Eine $n \times n$-Matrix A besitzt genau dann eine Inverse, wenn der Rang von A gleich n ist.*

Beweis. Nehmen wir zunächst an, die Matrix A besitze eine Inverse A^{-1}. Dann hat für jeden Vektor $b \in \mathbb{R}^n$ das Gleichungssystem $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b$ eine eindeutige Lösung, nämlich $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}b$. Nach Folgerung 7.1.7 über die Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme folgt daraus, dass der Rang von A gleich n sein muss.

Sei jetzt umgekehrt der Rang von A gleich n. Wenn wir A auf Zeilenstufenform bringen, erhalten wir also eine Matrix ganz ohne Nullzeilen, mit genau n Stufen. Deshalb hat jedes der linearen Gleichungssysteme $Av_j = e_j$ (für $j = 1, \ldots, n$) eine eindeutige Lösung $v_j \in \mathbb{R}^n$. Bilden wir aus den Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ als Spalten eine neue $n \times n$-Matrix B, so gilt nach Konstruktion $AB = E$.

Ausserdem ist der Rang der Matrix B ebenfalls gleich n. Denn weil B eine Linksinverse hat, besitzt jedes lineare Gleichungssystem $B \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = v$ eine eindeutige Lösung. Man kann also wie eben argumentiert, eine Matrix A' finden mit $BA' = E$. Jetzt folgt aber $A = AE = A(BA') = (AB)A' = A'$. Also ist $AB = BA = E$ und das heisst, die Matrix B ist die Inverse von A. q.e.d.

Die Inverse einer vorgelegten quadratischen Matrix A von maximalem Rang kann mithilfe von elementaren Zeilenumformungen bestimmt werden. Die n Gleichungssysteme

$$A \cdot v_j = e_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, n.$$

müssen dazu simultan gelöst werden. Dazu kann man folgendermassen vorgehen: Man bildet aus A und der Einheitsmatrix E vom selben Typ eine erweiterte Matrix $M = (A|E)$. Nun bringt man M durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform. Weil A von maximalem Rang ist, erhält man in der linken Hälfte eine Matrix, deren Einträge in der Diagonalen gleich 1 und unterhalb der Diagonalen gleich Null sind. Durch weitere geeignete elementare Zeilenumformungen kann man nun ausserdem erreichen, dass in der linken Hälfte auch die Einträge oberhalb der Diagonalen gleich Null sind. Man erhält die Form $M' = (E|B)$. Die Matrix B ist dann bereits die gesuchte Inverse.

7.2.11 Beispiel $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$. Die erweiterte Matrix $M = (A|E)$ lautet dann:

$$M = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Wir vertauschen die ersten beiden Zeilen und ziehen von der dritten Zeile das Doppelte der zweiten Zeile ab:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 8 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Jetzt addieren wir zur zweiten Zeile das Siebenfache der dritten Zeile und erhalten:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Wir ziehen von der ersten Zeile das Dreifache der zweiten Zeile und das Fünffache der dritten Zeile ab und addieren schliesslich noch zur zweiten die dritte Zeile dazu. Damit ist die gesuchte Form erreicht:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -38 & 11 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Nun lesen wir aus der rechten Hälfte die Inverse ab:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -38 & 11 & -5 \\ 8 & -2 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.3 Determinanten

Zusammenfassung: *Hier werden Determinanten quadratischer Matrizen definiert. Die Determinante liefert u.a. ein einfaches Kriterium dafür, ob eine vorgelegte Matrix A von maximalem Rang (und damit invertierbar) ist oder nicht. Ist dies der Fall, ist jedes lineare Gleichungssystem mit A als Koeffizientenmatrix eindeutig lösbar.*

Für jede natürliche Zahl n gibt es eine Abbildung $\det\colon M_{n\times n} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det A$, die wir jetzt durch Induktion über n definieren werden.

Für 1×1-Matrizen setzt man

$$\det(a) := a \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Für 2×2-Matrizen definiert und schreibt man

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc\,.$$

Zum Beispiel ist also

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 8 - 3 = 5\,.$$

Kommen wir jetzt zum Fall $n = 3$. Die Determinante einer 3×3-Matrix kann man als Kombination von drei 2×2-Unterdeterminanten beschreiben. Genauer setzt man:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

7.3.1 Beispiele

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -18\,.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\,, \qquad \begin{vmatrix} a & d & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} b & f \\ 0 & c \end{vmatrix} = abc\,.$$

Wenn wir die in unserer Definition vorkommenden 2×2-Unterdeterminanten ausschreiben, erhalten wir folgende Beschreibung der Determinante:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}\,.$$

Es handelt sich also um eine alternierende Summe, die aus 6 Produkten von je 3 Einträgen der Matrix A besteht. Man kann sich davon überzeugen, dass in jedem einzelnen Produkt genau ein Eintrag aus jeder Zeile und jeder Spalte vorkommt.

Sei jetzt $n > 3$, und nehmen wir an, die Determinanten von sämtlichen $(n-1) \times (n-1)$-Matrizen sind bereits definiert. Für $n \times n$-Matrizen definieren wir nun wie im Fall $n = 3$ die Determinante durch "Entwicklung nach der ersten Spalte". Dazu sei A_{i1} diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A durch Streichung der i-ten Zeile und der ersten Spalte entsteht. Die Determinante von A_{i1} ist nach der Annahme bereits erklärt, und wir multiplizieren sie jetzt noch mit dem Eintrag a_{i1} aus der ersten Spalte. Die alternierende Summe all dieser Teilergebnisse bildet die Determinante von A:

7.3.2 Definition

$$\det A := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} = a_{11}\det(A_{11}) - a_{21}\det(A_{21}) + \cdots + (-1)^{n+1} a_{n1} A_{n1}\,.$$

7.3.3 Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$+1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 4 \left(2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = 2 - 4 \cdot 7 = -26\,.$$

7.3.4 Bemerkung *Durch vollständige Induktion kann man zeigen, dass sich die Determinante einer $n \times n$-Matrix als alternierende Summe von $n!$ Produkten aus je n Einträgen schreiben lässt. Dabei kommt in jedem der Produkte genau ein Eintrag aus jeder Zeile und jeder Spalte vor.*

Für eine obere Dreiecksmatrix ist es sehr einfach, die Determinante zu bestimmen:

7.3.5 Bemerkung *Ist A eine obere Dreiecksmatrix, so stimmt die Determinante von A mit dem Produkt der Diagonaleinträge von A überein. Insbesondere ist die Determinante der Einheitsmatrix gleich* 1.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion nach der Anzahl der Zeilen n. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei jetzt $n > 1$ und die Behauptung für $n - 1$ schon gezeigt. Ist A eine obere Dreiecksmatrix vom Typ $n \times n$, können wir A in folgender Form schreiben:

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & d_2 & \dots & \dots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} .$$

Durch Entwicklung der Determinante nach der ersten Spalte ergibt sich:

$$\det A = d_1 \cdot \begin{vmatrix} d_2 & \dots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & d_n \end{vmatrix} .$$

Da die Teilmatrix A_{11} wiederum eine obere Dreiecksmatrix ist, folgt nun aus der Induktionsannahme $\det A = d_1 \cdot d_2 \cdots d_n$, wie behauptet. q.e.d.

Enthält eine Matrix viele Nullen, kann die Berechnung der Determinante sich vereinfachen, wenn man nicht nach der ersten sondern nach einer der anderen Spalten oder nach einer geeigneten Zeile entwickelt. Dabei macht man sich den folgenden *Entwicklungssatz* zunutze:

7.3.6 Satz *Die Determinante einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ kann man wahlweise auf eine der folgenden Arten berechnen:*

- *Entwicklung nach der j-ten Spalte (für ein $j \in \{1, \dots, n\}$)*

  $$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} .$$

  (Dabei bezeichnet A_{ij} diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus A entsteht.)

- *Entwicklung nach der i-ten Zeile (für ein $i \in \{1, \dots, n\}$)*

  $$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} .$$

Dabei wird folgendes Vorzeichenschema verwendet: $\begin{bmatrix} + & - & + & \dots & \\ - & + & - & & \\ + & - & + & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & \dots & & + \end{bmatrix}$.

Beweis. Diese Aussagen folgen durch vollständige Induktion aus der Bemerkung 7.3.4, wenn man die Vorzeichenregeln beachtet. q.e.d.

Hier sind zur Illustration einige Beispiele.

7.3.7 Beispiele (a) Die folgende Determinante wird durch Entwicklung nach der letzten Zeile berechnet: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 12\,.$

(b) Die Determinante der folgenden 4×4-Matrix berechnen wir durch Entwicklung nach der zweiten Spalte, weil darin zwei Nullen vorkommen:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}\,.$$

Die zweite Teildeterminante ist gleich Null. Die erste Teildeterminante entwickeln wir nun weiter nach der dritten Zeile und erhalten:

$$\det A = (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 9\,.$$

Wir können die Determinante auch als Funktion der Spalten $v_1, \ldots, v_n$ der Matrix A auffassen und schreiben dann $\det(v_1, \ldots, v_n)$.

7.3.8 Satz *Bezogen auf die Spalten hat die Determinantenfunktion folgende wichtige Eigenschaften:*

(i) *Linearität in den Spalten: Für alle* $u, v \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt:* $\det(\ldots, u+v, \ldots) = \det(\ldots, u, \ldots) + \det(\ldots, v, \ldots)$ *und* $\det(\ldots, \alpha u, \ldots) = \alpha \cdot \det(\ldots, u, \ldots)$ *(bei festgehaltenen restlichen Spalten).*

(ii) *Die Funktion ist alternierend: Vertauscht man zwei Spalten, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante:*

$$\det(\ldots, u, \ldots, v, \ldots) = -\det(\ldots, v, \ldots, u, \ldots) \quad \text{für alle } u, v \in \mathbb{R}^n.$$

(iii) *Normierung:* $\det(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \det E = 1$.

Durch diese drei Eigenschaften ist die Funktion $\det\colon M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ bereits eindeutig festgelegt.

Beweis. Die Aussage (iii) haben wir bereits früher festgehalten. Zu (i): Die Linearität kann man durch Nachrechnen überprüfen, indem man die Determinante durch Entwicklung nach derjenigen Spalte berechnet, in der die Summe der Vektoren vorkommt. Die Aussage (ii) ergibt sich durch vollständige Induktion: Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Für $n = 2$ rechnen wir nach:

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\,.$$

Sei jetzt $n > 2$, und es nehmen wir an, es sollen die Spalten j und k miteinander vertauscht werden. Weil $n > 2$, gibt es einen Spaltenindex l, der von j und k verschieden ist. Wir berechnen jetzt die Determinante durch Entwicklung nach der l-ten Spalte. Bei allen in der Entwicklung vorkommenden Unterdeterminanten ändert sich nach der Induktionsannahme bei der Vertauschung der Spalten j und k das Vorzeichen. Also gilt dasselbe auch für die daraus gebildete Gesamtdeterminante. q.e.d.

Aus den Eigenschaften (i)-(iii) ergeben sich folgende nützliche Konsequenzen:

7.3.9 Folgerung *Für die Determinantenfunktion gelten ausserdem noch diese Eigenschaften:*

(iv) *Stimmen zwei Spalten einer quadratischen Matrix miteinander überein, so ist die Determinante der Matrix gleich Null.*

(v) *Zieht man von einer Spalte einer quadratischen Matrix ein Vielfaches einer anderen Spalte ab, so bleibt die Determinante der Matrix dabei unverändert.*

Beweis. (iv) Nach (ii) muss für eine Matrix mit zwei identischen Spalten gelten: $\det(A) = \det(\ldots, v, \ldots, v, \ldots) = -\det(\ldots, v, \ldots, v, \ldots)$ und daher $\det(A) = 0$.

(v) Nehmen wir an, die Matrix A enthält die Spalten u und v, und wir ersetzen v durch $v - \alpha u$ (für ein $\alpha \in \mathbb{R}$). Wegen der Linearität und Eigenschaft (iv) folgt dann: $\det(\ldots, v - \alpha u, \ldots, u, \ldots) = \det(\ldots, v, \ldots, u, \ldots) - \alpha \det(\ldots, u, \ldots, u, \ldots) = \det(\ldots, v, \ldots, u, \ldots)$. q.e.d.

Die entsprechenden Aussagen gelten auch bezogen auf Zeilen:

7.3.10 Satz *Die Determinantenfunktion* $\det\colon M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ *ist auch linear und alternierend in den Zeilen. Stimmen zwei Zeilen in einer Matrix überein, so ist die Determinante der Matrix gleich Null. Zieht man von einer Zeile einer Matrix ein Vielfaches einer anderen Zeile ab, so bleibt die Determinante dabei unverändert.*

Hier nun das zu Anfang des Abschnitts angekündigte Kriterium dafür, wann eine Matrix von maximalem Rang ist (siehe Satz 7.2.10):

7.3.11 Folgerung *Für jede $n \times n$-Matrix A gilt*

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Rang}(A) = n \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1} \text{ existiert}\,.$$

Beweis. Durch elementare Zeilenumformungen können wir A auf Zeilenstufenform A' bringen. Dann ist

$$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(A') \neq 0\,.$$

Denn bei den einzelnen Umformungen passiert folgendes: Das Abziehen eines Vielfaches einer Zeile von einer anderen ändert die Determinante nicht. Die Vertauschung von zwei Zeilen ändert nur das Vorzeichen der Determinante. Teilt man eine Zeile durch den Faktor $d \neq 0$, dann wird auch die Determinante durch den Faktor d geteilt.

Schauen wir uns jetzt A' genauer an. Eine quadratische Matrix in Zeilenstufenform ist sicher eine obere Dreiecksmatrix, und in der Diagonale stehen führende Einsen oder eventuell Nullen, wenn die Treppe der führenden Einsen eine breitere Stufe hat. Die Determinante von A' kann also nur die Werte 1 oder 0 annehmen. Der Wert 1 wird genau dann angenommen, wenn in der Diagonale nur führende Einsen stehen, und also der Rang der Matrix A' gleich n ist. q.e.d.

Eine weitere wichtige Eigenschaft der Determinantenfunktion wird durch den folgenden *Multiplikationssatz* beschrieben, der hier wiederum ohne Beweis angegeben werden soll:

7.3.12 Satz *Sind $A, B \in M_{n\times n}$, so gilt:*

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)\,.$$

Ist A invertierbar, so folgt insbesondere:

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(E) = 1\,.$$

Auch hier sollen einige Beispiele zur Illustration genügen:

7.3.13 Beispiele 1. Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, so ist

$$A^{-1} = -\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ und } \det A^{-1} = -\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{\det A}\,.$$

2. Sind A und B Diagonalmatrizen mit Einträgen $a_1, \dots, a_n$ bzw. $b_1, \dots, b_n$ auf der Diagonalen und Nullen abseits der Diagonalen, so ist das Produkt von A und B wiederum eine Diagonalmatrix, nämlich:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1b_1 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

Also gilt hier

$$\det(AB) = a_1b_1 \cdots a_nb_n = (a_1 \cdots a_n)(b_1 \cdots b_n) = \det(A)\det(B)\,.$$

3. Ist B eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $b_1, \dots, b_n$ und A eine beliebige $n \times n$-Matrix mit den Spalten $v_1, \dots, v_n$, so gilt wegen der Linearität in den Spalten

$$\det(AB) = \det(b_1v_1, \dots, b_nv_n) = b_1 \cdots b_n \det(v_1, \dots, v_n) = \det(B)\det(A)\,.$$