Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden I — Dr. A. A'Campo-Neuen
Herbstsemester 2021 — im August 2021

Aufgabenblatt 1

Die folgenden Aufgaben werden in der ersten Übungsstunde am 27./28./29. September besprochen, Abgabe ist nicht erforderlich.

Frage 1. *(Aussagen)* Hier eine (wahre?) Aussage: "Zu jeder beliebigen Zahl gibt es eine natürliche Zahl, die grösser ist." Welche der folgenden Aussagen ist deren Negation (also das logische Gegenteil davon)?

(a) Keine einzige Zahl wird von jeder natürlichen Zahl übertroffen. ☐

(b) Es gibt mindestens eine Zahl, die von keiner natürlichen Zahl übertroffen wird. ☐

(c) Zu jeder Zahl gibt es eine natürliche Zahl, die kleiner ist. ☐

(d) Zu keiner einzigen Zahl gibt es eine passende natürliche Zahl, die grösser ist. ☐

Aufgabe 1. *(wahr oder falsch?)* Beweisen oder widerlegen Sie jeweils:

(a) Für alle positiven Zahlen a und b gilt: $\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$.

(b) Für jede natürliche Zahl n ist: $3^n \leq 2^{n+3}$.

Aufgabe 2. *(Vollständige Induktion)* Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

(a) $$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

(b) $n! \geq 2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$.

(c) Jede Zahl der Form $n^3 + 5n$ ist durch 6 teilbar.

Aufgabe 3. *(Bäume)* Zeigen Sie:

(a) Jeder Baum hat mindestens zwei freie Enden.

(b) Jeder Baum mit n Knoten hat genau $n-1$ Kanten.