

### Aufgabenblatt 10

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei der folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

**Aufgabe 1.** (*Substitutionsregel*) Bestimmen Sie mithilfe geeigneter Substitutionen die folgenden Integrale:

$$\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1} \, dx, \quad \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} \, dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} \, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \cos(x) \sin^5(x) \, dx.$$

(5 Punkte)

**Aufgabe 2.** (*Rationale Funktionen*) Finden Sie Stammfunktionen für die folgenden rationalen Funktionen.

$$(a) f(x) = \frac{x^2 + x + 18}{x(x^2 + 2x - 3)}, \quad (b) f(x) = \frac{-2x^3 + x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)}.$$

Hinweis zu (b): Verwenden Sie zur Partialbruchzerlegung den Ansatz:

$$f(x) = \frac{A}{x^2+1} + \frac{B(2x)}{x^2+1} + \frac{C}{x^2+2x+2} + \frac{D(2x+2)}{x^2+2x+2},$$

(5 Punkte)

wobei  $A, B, C, D$  passende Zahlen sind.

**Aufgabe 3.** (*Vermischtes*) Berechnen Sie folgende Integrale ( $a > e$ ,  $0 \leq b < 1$ ):

$$\int_0^{1/2} \sin(5\pi x) \, dx, \quad \int_e^a \frac{1}{x \ln(x)} \, dx, \quad \int_0^b \arcsin(x) \, dx, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

(4 Punkte)

**Aufgabe 4.** (*Gerade und ungerade Funktionen*) Sei  $f$  eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte, stetige Funktion. Man nennt  $f$  gerade, falls  $f(-x) = f(x) \, \forall x$ , und  $f$  heisst ungerade, falls  $f(-x) = -f(x) \, \forall x$ . Zeigen Sie mithilfe der Substitutionsregel:

(a) Ist  $f$  gerade, dann ist  $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx \, \forall a > 0$ .

(b) Ist  $f$  ungerade, dann ist  $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0 \, \forall a > 0$ .

(c) Sei jetzt  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  mit  $F(0) = 0$ . Ist  $f$  gerade, dann ist  $F$  ungerade, und ist  $f$  ungerade, dann ist  $F$  gerade. (3 Punkte)

**Aufgabe 5.** (*Taylorentwicklung*)

(a) Berechnen Sie die Taylorentwicklung von  $f(x) = \cosh(x)$  um den Punkt  $x_0 = 0$ .

(b) Geben Sie nun für  $\int_0^x \frac{\cosh(t) - 1}{t^2} \, dt$  eine Taylorreihenentwicklung an.

(3 Punkte)

Und hier noch zwei Verständnisfragen zur Selbstkontrolle:

**Frage 1.** (*Integration rationaler Funktionen*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- (a) Jede rationale Funktion hat eine rationale Stammfunktion. ☐
- (b) Jede rationale Funktion hat eine elementare Stammfunktion. ☐
- (c) Der Arcustangens ist die Stammfunktion einer rationalen Funktion. ☐

**Frage 2.** (*Uneigentliche Integrale*) Sei  $f$  eine stetige Funktion, definiert auf ganz  $\mathbb{R}$  mit  $f(x) \geq 0 \forall x$  und  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ . Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- (a) Die Funktion  $f$  besitzt ein uneigentliches Integral von  $-\infty$  bis  $+\infty$ . ☐
- (b) Wenn das uneigentliche Integral existiert, ist der Flächeninhalt der Gesamtfläche zwischen Funktionsgraphen und  $x$ -Achse endlich. ☐
- (c) Der Flächeninhalt der Gesamtfläche zwischen Funktionsgraphen und  $x$ -Achse ist unendlich gross. ☐

**Abgabe der Aufgaben:** Donnerstag, den 25. November 2021, bis 12.30 Uhr als .pdf via ADAM bei Ihrem Tutor bzw. Ihrer Tutorin.