

Aufgabenblatt 2

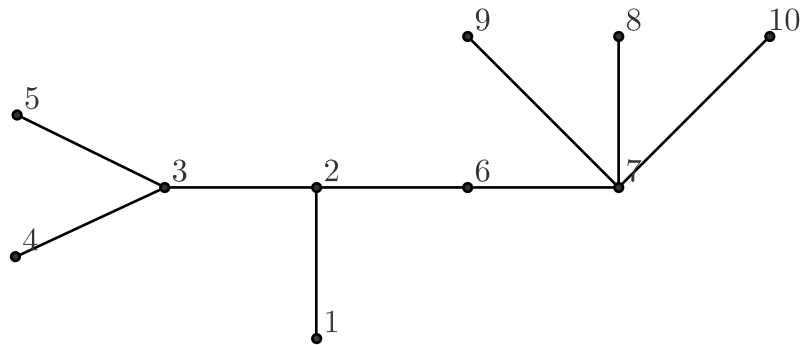
Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei der folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. (*wahr oder falsch?*) Beweisen oder widerlegen Sie jeweils:

(a) Für jede natürliche Zahl n ist: $4^n = 2^{(2^n)}$.

(b) Für jede positive Zahl a gilt: $2a + \frac{1}{a} \geq 2 + a$. (3 Punkte)

Aufgabe 2. (*Bäume*) (a) Welcher Code gehört zu diesem Baum mit numerierten Knoten?



(b) Welcher Baum mit numerierten Knoten gehört zu dem Code $[3, 3, 2]$? (4 Punkte)

Aufgabe 3. (*Vollständige Induktion*) Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

(a) $\sum_{k=0}^n (4k + 1) = 1 + 5 + 9 + \dots + (4n + 1) = (n + 1)(2n + 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) $n + 6 < 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2.$ (c) $n^2 < 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$ (6 Punkte)

Aufgabe 4. (*Bäume*) Sei $n \geq 4$. Wieviele verschiedene Bäume mit n numerierten Knoten gibt es, die genau 2 freie Enden haben? Und wieviele mit genau 3 freien Enden? (3 Punkte)

Aufgabe 5. (*Dreiecksgeometrie*) Ein (nicht notwendig rechtwinkliges) Dreieck in der Ebene habe die Seitenlängen a, b, c . Bezeichne $s = (a + b + c)/2$ den halben Umfang des Dreiecks. Beweisen Sie, dass für den Flächeninhalt F dieses Dreiecks gilt:

$$F^2 = s(s - a)(s - b)(s - c).$$

Hinweis: Überlegen Sie dies zunächst für rechtwinklige Dreiecke. Bei allgemeinen Dreiecken kann man den Cosinussatz verwenden. (4 Punkte)

Und hier noch zwei Verständnisfragen zur Selbstkontrolle:

Frage 1. (*Bäume*) Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) Entfernt man aus einem Baum ein freies Ende zusammen mit der davon ausgehenden Kante, bleibt wieder ein Baum übrig. ☐

(b) Entfernt man aus einem Baum eine Kante, die kein freies Ende hat, dann zerfällt der Graph in genau zwei Bäume. ☐

(c) Die freien Enden sind genau diejenigen Knoten, deren Nummern im entsprechenden Prüfercode NICHT vorkommen. ☐

Frage 2. (*Induktionsbeweise*) Welche der folgenden Aussagen über die Methode der vollständigen Induktion sind korrekt?

(a) Die vollständige Induktion besteht aus der Verankerung und dem Induktionsschritt von n auf $n + 1$. ☐

(b) Die Verankerung beginnt immer mit dem Fall $n = 1$. ☐

(c) Es kann vorkommen, dass der Induktionsschritt gelingt, die Aussage aber trotzdem für keine einzige natürliche Zahl richtig ist. ☐

Abgabe der Aufgaben: Donnerstag, den 30. September 2021, bis 12.30 Uhr als .pdf via ADAM bei Ihrem Tutor bzw. Ihrer Tutorin.