Kapitel 6
Exkurs: Fouriertheorie

6.1 Kreisfunktionen und Integrale

Zusammenfassung: *Eine komplexe Kreisfunktion beschreibt die gleichförmige Bewegung eines Punktes auf einer Kreislinie, aufgefasst als Kreislinie um den Nullpunkt in der komplexen Ebene. Die trigonometrischen Funktionen Cosinus und Sinus treten hier im Real- bzw. Imaginärteil gekoppelt auf. Da das Integrieren der komplexen Kreisfunktionen sehr einfach ist, ergeben sich daraus Vereinfachungen der Berechnung gewisser trigonometrischer Integrale. Die komplexen Kreisfunktionen spielen ausserdem eine wichtige Rolle in der Fouriertheorie. Hier wird das Konzept der Fouriertransformation an einem Beispiel kurz vorgestellt.*

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Die Funktion $f(t) = e^{i\lambda t}$ (für $t \geq 0$) gibt, in Abhängigkeit von der Zeit t, die Bewegung eines Massenpunktes an, der sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit λ auf der Einheitskreislinie bewegt. Ist $\lambda = n2\pi$ für eine natürliche Zahl n, durchläuft der Massenpunkt den Kreis pro Zeiteinheit genau n-mal, und zwar entgegen dem Uhrzeigersinn. Ist dagegen $\lambda = -n2\pi$, so gibt es ebenfalls n Umläufe, aber jetzt im Uhrzeigersinn. Ist $n = 0$, bleibt der Massenpunkt bei 1 stehen.

Wenn wir Real- und Imaginärteil dieser Funktion separat nach der Zeit ableiten, erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}f(t) = \frac{d}{dt}(\cos(\lambda t) + i\sin(\lambda t)) = \lambda(-\sin(\lambda t) + i\cos(\lambda t)) = \lambda i e^{i\lambda t}\,.$$

Also ist $f'(t) = i\lambda f(t)$. Wir können diese komplexe Zahl als den Geschwindigkeitsvektor der Bewegung des Massenpunktes auf der Kreislinie zum Zeitpunkt t auffassen. Der Betrag $|f'(t)| = |\lambda|$ gibt die Momentangeschwindigkeit an, und die Richtung von $f'(t)$ erhalten wir aus der Richtung des Radialvektors $f(t)$ durch Drehung um $\pm 90°$ (je nach Vorzeichen von λ). Es handelt sich also um einen Tangentialvektor an die Kreislinie, passend zur Kreisbewegung.

Entsprechend gilt für jede vorgegebene komplexe Zahl $\alpha \neq 0$:

$$\frac{d}{dt}e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t}\,.$$

Daraus können wir eine Stammfunktion ablesen:

$$\int e^{\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t} + C\,,$$

wobei hier gemeint ist, den Realteil und den Imaginärteil des Integranden separat zu integrieren.

Dies kann man zum Beispiel verwenden, um Stammfunktionen für gedämpfte Schwingungen zu finden. Denn um etwa

$$\int e^{-\lambda t} \cos(\omega t)\, dt$$

zu berechnen, fassen wir den Integranden als Realteil der komplexen Funktion

$$f(t) = e^{(-\lambda + i\omega)t} = e^{-\lambda t} \cos(\omega t) + i e^{-\lambda t} \sin(\omega t)$$

auf. Zunächst berechnen wir

$$\int e^{(-\lambda+i\omega)t}\, dt = \frac{1}{-\lambda + i\omega} e^{(-\lambda+i\omega)t} = \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda^2+\omega^2}(\lambda + i\omega)(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))\,.$$

Gehen wir jetzt über zum Realteil, erhalten wir das Resultat:

$$\int e^{-\lambda t} \cos(\omega t)\, dt = \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda^2+\omega^2}(\lambda \cos(\omega t) - \omega \sin(\omega t))\,.$$

Die komplexen Kreisfunktionen spielen in der Fouriertheorie eine wichtige Rolle. Die Fouriertransformierte $\widehat{f}$ einer reellwertigen Funktion f ist folgendermassen definiert:

$$\widehat{f}(p) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ipt}\, dt \quad \text{für } p \in \mathbb{R}.$$

Es handelt sich also um eine Funktion in einer neuen Frequenzvariablen p, an jeder Stelle gegeben durch ein uneigentliches Integral, das nur dann existiert, wenn die Funktion f für betragsmässig grosse t-Werte schnell genug abfällt. Hier ein wichtiges Beispiel:

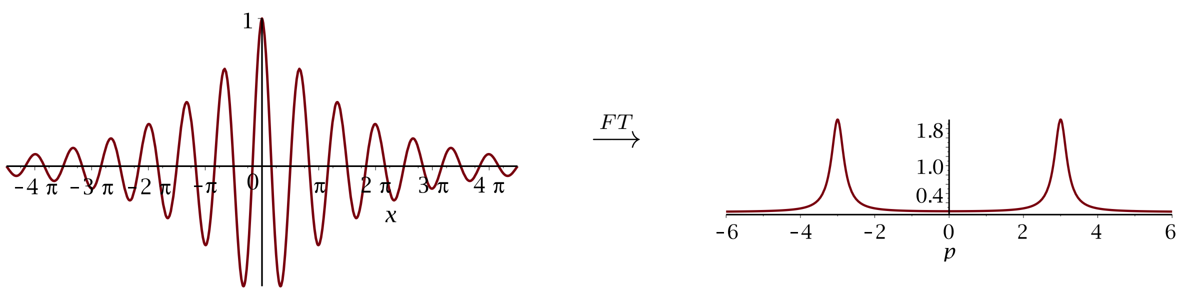
6.1.1 Beispiel Seien $\alpha, \nu > 0$ vorgegeben. Ist f eine gedämpfte Schwingung der Frequenz ν von der Form

$$f(t) = e^{-\alpha|t|} \cos(\nu t) \quad (t \in \mathbb{R})\,,$$

so ist

$$\widehat{f}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + (\nu - p)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\nu + p)^2} \right) \quad \text{für } p \in \mathbb{R}.$$

Die Fouriertransformierte von f ist also zusammengesetzt aus zwei Hügelfunktionen mit Maxima an den Stellen $p = \pm\nu$. Die Höhe der beiden Hügel ist proportional zu $1/\alpha$. Bei geringer Dämpfung α sind die Hügel sehr schmal und hoch.



Entsprechend ist die Fouriertransformierte einer Funktion, die aus mehreren gedämpften Schwingungen dieser Art zusammengesetzt ist, eine Funktion mit mehreren lokalen Maxima im Bereich $p > 0$, und zwar jeweils an den Stellen, die den Frequenzen der Schwingungsanteile entsprechen. An der Transformierten sind also die beteiligten Frequenzen und auch ihre jeweiligen Dämpfungsfaktoren leicht abzulesen.

Dies Prinzip findet zum Beispiel praktische Anwendung bei der Kernspinresonanztomographie. Man misst dann eigentlich eine Überlagerung von gedämpften Spinresonanzen, berechnet die dazugehörige Fouriertransformierte und liest daraus Frequenzanteile ab, aus denen sich wiederum ein Bild rekonstruieren lässt.

6.2 Harmonische Schwingungen und Fourieranalyse

Zusammenfassung: *Wir erinnern an den Begriff der harmonischen Schwingung und beschreiben die Überlagerung harmonischer Schwingungen, wie sie zum Beispiel in der Akustik oder Optik auftreten. Dies führt zum Begriff der Fourierreihe. Unter der Fourieranalyse versteht man die Zerlegung einer gegebenen periodischen Funktion in harmonische Schwingungsanteile oder anders gesagt, die Darstellung der Funktion als Fourierreihe.*

Wie schon erwähnt, versteht man unter einer harmonischen Schwingung eine Funktion der Zeit t der Form

$$f(t) = a\sin(\nu t + \varphi)\,.$$

Dabei gibt die Zahl a die *Amplitude* an, die Zahl φ die *Phasenverschiebung* und ν ist die *Frequenz*. Mit dem Additionstheorem für die Sinusfunktion können wir f auch folgendermassen umschreiben:

$$f(t) = c_1 \sin(\nu t) + c_2 \cos(\nu t)\,,$$

wobei $c_1 := a\cos(\varphi)$ und $c_2 = a\sin(\varphi)$ Konstanten sind.

Zum Beispiel lässt sich jeder durch ein Musikinstrument erzeugte Ton als Überlagerung solcher harmonischen Schwingungen beschreiben, genauer durch eine Summe der Form

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(k\nu\, 2\pi t)\,.$$

Dabei ist ν die Frequenz des Grundtons. Die dazukommenden Obertöne haben Frequenzen, die kleine Vielfache der Grundfrequenz sind. Die Amplituden b_k geben die Gewichtung der Obertöne an, und das bestimmt die Klangfarbe eines musikalischen Gesamttons.

Hier zum Beispiel die ersten Obertöne des Tons c der Frequenz $\nu = 264$ Hertz:

Frequenz	ν	2ν	3ν	4ν	5ν	6ν	7ν	8ν	9ν
Ton	c	c'	g'	c''	e''	g''	bluenote	c'''	d'''

Die Frequenzverhältnisse bestimmen die Intervalle zwischen den Tönen:

Frequenzverhältnis	1 : 2	2 : 3	3 : 4	4 : 5	5 : 6
Intervall	Oktave	Quinte	Quarte	grosseTerz	kleineTerz

Geht es um räumliche Wellen, schreibt man die harmonische Schwingung in dieser Form:

$$f(x) = a\,\sin(\frac{2\pi}{\lambda}\,x)\,.$$

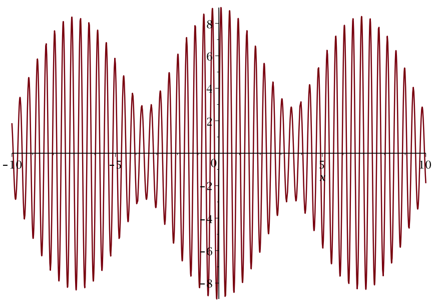
Dabei gibt die Zahl λ die *Wellenlänge* an. Eine Summe solcher Funktionen der Form

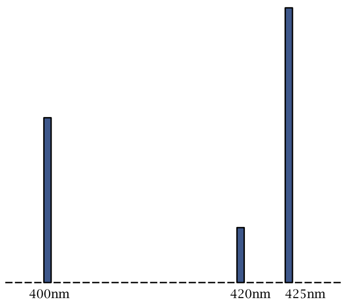
$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(\frac{2\pi}{\lambda_k} x)$$

ist dann eine Zusammensetzung von harmonischen Wellen mit Wellenlängen λ_k. Zum Beispiel setzt sich das Licht aus Wellen unterschiedlicher Wellenlängen zusammen, die den Farbkomponenten entsprechen.

6.2.1 Beispiel Die folgende Überlagerung harmonischer Schwingungen der Wellenlängen 400nm, 420nm und 425nm beschreibt Licht im fliederfarbenen Farbspektrum:

$$f(x) = 3\sin(\frac{2\pi}{400}x) + \sin(\frac{2\pi}{420}x) + 5\sin(\frac{2\pi}{425}x)\,.$$





Die auftretenden Amplituden b_k der Teilschwingungen sind hier in einem Balkendiagramm aufgetragen.

Die Überlagerung harmonischer Schwingungen der Periode L führt auf endliche oder unendliche Reihen der Form

$$\mathcal{F}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(k\frac{2\pi}{L}x) + b_k \sin(k\frac{2\pi}{L}x)] \quad (a_k, b_k \in \mathbb{R}, L \in \mathbb{R}_{>0}).$$

Man bezeichnet eine solche Reihe als *Fourierreihe.* Die Zahlen a_k und b_k sind die reellen *Fourierkoeffizienten.*

Die Fouriertheorie hat zwei Aspekte, nämlich Synthese und Analyse. Man kann ausgehend von gegebenen harmonischen Schwingungen studieren, wie deren Überlagerung aussieht, das ist die Fragestellung der Synthese. Bei der Fourieranalyse geht man umgekehrt von einer vorgegebenen periodischen Funktion aus und untersucht, ob und wie sich diese Funktion als Fourierreihe darstellen lässt. Tatsächlich lässt sich jede stetig differenzierbare, periodische Funktion in eine Fourierreihe entwickeln. Auch Funktionen mit Sprungstellen können Fourrierreihen besitzen. Die Fourierkoeffizienten sind durch die Funktion bereits eindeutig festgelegt.

In vielen Bereichen der Physik und Chemie ist Fourieranalyse von Bedeutung. Sie wird zum Beispiel zur Spektralanalyse verwendet, also der Bestimmung von chemischen Elementen anhand von charakteristischen Farbspektren, den Spektrallinien (wie im oben gezeigten Balkendiagramm). Sie ist aber auch Grundlage bildgebender Verfahren, wie der Röntgenkristallographie. Hier einige Beispiele zur Fourieranalyse:

6.2.2 Beispiele 1. Die Treppenfunktion mit Periode $L = 2\pi$, definiert durch $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{für } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$ auf $[0, 2\pi)$ und anschliessende 2π-periodische Fortsetzung hat folgende Fourierreihenentwicklung:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1} = \frac{4}{\pi}(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5}\ldots)\,.$$

2. Sei jetzt f auf $[-\pi, \pi)$ definiert durch $f(x) = |x|$ und dann periodisch fortgesetzt. Der Graph dieser Funktion bildet Dreiecke mit der x-Achse. Die Fourierreihe lautet hier:

$$\mathcal{F}(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \ldots)\,.$$

3. Sei f die Sägezahnfunktion, definiert durch $f(x) = \pi - x$ für $0 \leq x < 2\pi$, und anschliessend periodische Fortsetzung von $[0, 2\pi)$ auf ganz $\mathbb{R}$. Diese Funktion ist ungerade und ihre Fourierentwicklung lautet:

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k}\sin(kx) = 2\sin(x) + \sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) + \ldots\,.$$

Wir wollen jetzt noch angeben, wie man die Fourierkoeffizienten mithilfe geeigneter Integrale aus der Funktion berechnen kann.

6.2.3 Satz *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine periodische Funktion der Periode $L > 0$, das heisst $f(x + L) = f(x)$ für alle x. Weiter gebe es Koeffizienten a_k, $b_k \in \mathbb{R}$ mit*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(k\frac{2\pi}{L}x) + b_k\sin(k\frac{2\pi}{L}x)] \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wenn die Konvergenz der Reihe sogar "gleichmässig" ist, gilt folgendes:

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\cos(k\frac{2\pi}{L}x)\,dx \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cdot\sin(k\frac{2\pi}{L}x)\,dx\,.$$

Diese Aussage ergibt sich aus folgendem Lemma:

6.2.4 LEMMA *Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:*

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\, \sin(mx)\, dx = \begin{cases} \pi & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \int_0^{2\pi} \sin(nx)\, \cos(mx)\, dx = 0\,,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx)\, \cos(mx)\, dx = \begin{cases} \pi & \text{falls } n = m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis. Man rechnet zuerst für $k \in \mathbb{Z}$ folgendes nach:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx}\, dx = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Setzt man nun $\sin(nx) = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})$ und $\cos(mx) = \frac{1}{2}(e^{imx} + e^{-imx})$ ein, erhält man die behaupteten Formeln. q.e.d.

Beweis. (von Satz 6.2.3) Nehmen wir der Einfachheit halber an, $L = 2\pi$, und f von der Form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)] \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Nun setzen wir diese Reihenentwicklung ein in die Formel zur Berechnung von a_n (für $n \in \mathbb{N}$) und erhalten mit dem Lemma

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, \cos(nx)\, dx = \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} \cos(nx)\, dx +$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \int_0^{2\pi} \cos(kx)\, \cos(nx)\, dx + b_k \int_0^{2\pi} \sin(kx)\, \cos(nx)\, dx \right] = a_n \cdot \pi\,,$$

wie behauptet. Das entsprechende Resultat findet man für b_n und für a_0. q.e.d.

Für das erste Beispiel in 6.2.2 bedeutet das konkret: Die Koeffizienten b_k der Sinusreihe lassen sich folgendermassen berechnen.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(kx)\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin(kx)\, dx \right) =$$

$$\frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = \frac{1}{k\pi} (1 - (-1)^k + 1 - (-1)^k)\,.$$

Also verschwindet b_k, wenn k gerade ist, und $b_k = \dfrac{4}{\pi k}$, wenn k ungerade ist.

Zur effizienten Speicherung eines quadratischen Bildes der Breite L kann man 2D-Fourieranalyse verwenden. Dabei werden Funktionen in zwei Variablen x, y mit $0 \leq x, y \leq L$ in eine doppelte Fourierreihe folgender Form entwickelt:

$$f(x,y) = \frac{a_{0,0}}{4} + \frac{1}{2}(a_{1,0} \cos(\frac{\pi}{L}x) + a_{0,1} \cos(\frac{\pi}{L}y)) + \sum_{m,n=1}^{\infty} [a_{m,n} \cos(m\frac{\pi}{L}x) \cos(n\frac{\pi}{L}y)]\,,$$

wobei:

$$a_{m,n} = \frac{4}{L^2} \int_0^L \int_0^L f(x,y) \cdot \cos(m\frac{\pi}{L}x) \cos(n\frac{\pi}{L}y)\, dx\, dy\,.$$

Kapitel 7

Lineare Algebra

7.1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Zusammenfassung: *Ein lineares Gleichungssystem bestehend aus m linearen Gleichungen in n Unbekannten lässt sich praktisch in Kurzform schreiben, indem man aus den $m \cdot n$ auftretenden Koeffzienten ein rechteckiges Zahlenschema, eine sogenannte Matrix von Typ $m \times n$ bildet. Wir beschreiben hier das Gausssche Eliminationsverfahren zur Berechnung der Lösungsmenge eines solchen linearen Gleichungssystems, und zwar indem wir die entsprechende erweiterte Matrix auf Zeilenstufenform bringen.*

Man begegnet Systemen von linearen Gleichungen in sehr vielen verschiedenen Zusammenhängen, etwa bei Mischungsverhältnissen von Substanzen oder bei der Bestimmung von Preisen mit zusätzlichen Nebenbedingungen, aber auch in der analytischen Geometrie. Hier drei Beispiele dafür:

Mischungsverhältnisse: Nehmen wir an, es stehen zwei Substanzen (zum Beispiel Flüssigkeiten) mit spezifischen Gewicht $a = 2$ kg/l bzw. $b = \frac{1}{2}$ kg/l zur Verfügung. Gesucht sei eine Mischung aus beiden Substanzen von vorgegebenem Gesamtvolumen $V = 100$ l und Gesamtgewicht $G = 110$ kg.

Bezeichnet man den Volumenanteil der ersten Substanz mit x und den der zweiten Substanz mit y, so führt diese Frage auf das folgende lineare Gleichungssystem in x und y:

$$\begin{aligned} x + y &= 100 \\ 2x + \tfrac{1}{2}y &= 110 \end{aligned}$$

Dies Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung, nämlich $x = 40$ und $y = 60$. Das gesuchte Mischungsverhältnis beträgt also $x : y = 4 : 6$.

Analytische Geometrie: Betrachten wir die von den Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ im 3-Raum erzeugte Ebene durch den Nullpunkt. Wir fragen nun, ob die Punkte $P(1/2/-1)$ und $Q(1/2/3)$ auf dieser Ebene liegen.

Bekanntermassen liegt ein beliebiger Punkt mit den Koordinaten $(a/b/c)$ genau dann auf der fraglichen Ebene, wenn gilt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für geeignete Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Die Frage, ob der Punkt P auf der Ebene liegt, führt also auf das folgende lineare Gleichungssystem in den Unbekannten λ und μ:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & \lambda - \mu \\ 2 & = & \lambda + 2\mu \\ -1 & = & -\lambda + \mu \end{array}$$

Dies System hat eine Lösung, nämlich $\mu = \frac{1}{3}$ und $\lambda = \frac{4}{3}$, der Punkt P liegt also auf der Ebene. Aber für den Punkt Q gilt das nicht. Denn das entsprechende Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & \lambda - \mu \\ 2 & = & \lambda + 2\mu \\ 3 & = & -\lambda + \mu \end{array}$$

hat keine Lösung, weil die erste und dritte Gleichung nicht gleichzeitig erfüllt sein können (sonst wäre $1 = -3$).

Interpolation: Wir suchen jetzt ein quadratisches Polynom, so dass der zugehörige Graph durch drei vorgegebene Punkte verläuft. Genauer suchen wir ein Polynom $p(x) = ax^2 + bx + c$ mit $p(-2) = 4$, $p(-1) = 5$ und $p(1) = 4$. Setzen wir dies in den Ansatz für das Polynom ein, erhalten wir folgende Bedingungen an die noch unbekannten Koeffizienten a, b, c des Polynoms:

$$\begin{array}{rcccl} p(-2) & = & 4a - 2b + c & = & 4 \\ p(-1) & = & a - b + c & = & 5 \\ p(1) & = & a + b + c & = & 4 \end{array}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem in a, b, c. Um die Lösungen zu finden, eliminieren wir zunächst die Unbekannte b. Dazu addieren wir einerseits das Doppelte der dritten zur ersten Zeile dazu und andererseits bilden wir die Summe aus der zweiten und der dritten Zeile und erhalten folgendes System in a, c:

$$\begin{array}{rcl} 6a + 3c & = & 12 \\ 2a + 2c & = & 9 \end{array}$$

Ziehen wir nun von der ersten Zeile das Dreifache der zweiten Zeile ab, so fällt auch die Unbekannte a heraus und es folgt $-3c = -15$, das heisst $c = 5$. Setzt man nun in die früheren Gleichungen ein, erhält man die eindeutige Lösung, nämlich $a = -\frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = 5$. Das gesuchte Polynom lautet also:

$$p(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 5\,.$$

Diese drei Beispiele mögen zunächst genügen. Man schreibt Systeme von m linearen Gleichungen in n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in der Regel in der folgenden Form auf:

$$\begin{array}{ccl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Dabei sind $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ für $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ die Koeffizienten bzw. die Zeilenresultate. Der erste Index i von a_{ij} gibt die Zeile, und der zweite Index j die Variable an, bei der der Koeffizient steht. Aus den Koeffizienten eines solchen Gleichungssystems können wir ein rechteckiges Zahlenschema bilden, eine sogenannte *Matrix*, die aus m Zeilen und n Spalten besteht:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Man nennt A eine Matrix vom Typ $m \times n$. Die Zahlen a_{ij} sind die *Einträge* der Matrix. Dabei gibt der erste Index die Zeile und der zweite Index die Spalte an.

Die Variablen $x_1, \ldots, x_n$ werden zu einem Spaltenvektor der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ zusammengefasst. Das Einsetzen von Werten für die Variablen in die oben angebenen Gleichungen wird als *Multiplikation* der Matrix A mit einem Spaltenvektor gedeutet:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

Hier ein konkretes Beispiel. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dann lautet das Produkt:

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Oder ein Beispiel mit komplexen Zahlen:

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + i(1+i) \\ 2i + (-1)(1+i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ i-1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also folgende Kurzschreibweise für das ursprüngliche lineare Gleichungssystem:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems können wir als Teilmenge der Menge aller Spaltenvektoren mit n reellen (bzw. komplexen) Koeffizienten auffassen, die mit $\mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{C}^n$) bezeichnet wird:

$$\mathbb{L} = \left\{ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; A \cdot v = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \right\},$$

wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, falls nur reelle Lösungen gesucht werden, und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, wenn auch komplexe Koeffizienten zugelassen sind.

Die Lösungsmenge kann man mithilfe des *Eliminationsverfahrens* (auch bekannt unter dem Namen Gauss-Verfahren) bestimmen, das jetzt erläutert werden soll. Die Idee besteht darin, das System schrittweise durch Manipulation der Zeilen, die der Elimination einer Variablen aus möglichst vielen Gleichungen entsprechen, zu vereinfachen, bis die Lösungen direkt ablesbar werden. Die einzelnen Schritte sind *elementare Zeilenumformungen* von folgender Art:

Typ (i): Zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile dazuaddieren.

Typ (ii): Zwei Zeilen miteinander vertauschen.

Typ (iii): Eine Zeile mit einer festen Zahl ($\neq 0$) multiplizieren.

Bei jeder dieser elementaren Zeilenumformungen bleibt die Lösungsmenge des zugehörigen Gleichungssystems unverändert!

7.1.1 Beispiel Wir betrachten das folgende System aus 3 Gleichungen in 4 Unbekannten über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1+ & & 4x_3+ & 2x_4 & = & 10 \\ x_1+ & x_2+ & 5x_3+ & 2x_4 & = & 7 \\ x_1+ & 2x_2+ & 8x_3+ & 4x_4 & = & 12 \end{array}.$$

Hier lauten also Koeffizientenmatrix bzw. Ergebnisvektor:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Jetzt notieren wir die *erweiterte Matrix*

$$(A \,|\, b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 4 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 8 & 4 & 12 \end{array} \right).$$

Zunächst soll erreicht werden, dass in der ersten Spalte unterhalb der ersten Zeile Nullen stehen. Für das entsprechende Gleichungssystem bedeutet das, die Variable

x_1 aus den Zeilen 2 und 3 zu eliminieren. Wir teilen deshalb die erste Zeile durch 2 und ziehen dann die erste Zeile von der zweiten und der dritten ab. Wir erhalten:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & 7 \end{array}\right).$$

Jetzt wollen wir die Variable x_2 aus der dritten Zeile eliminieren. Dafür ziehen wir das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten Zeile ab und bekommen jetzt:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Bei dieser Umformung sind in der letzten Zeile gleich zwei Nullen entstanden, das bedeutet, nicht nur x_2 sondern sogar x_3 taucht in der letzten Gleichung nicht mehr auf. Das Gleichungssystem, das dieser neuen erweiterten Matrix entspricht, lautet:

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1+ & & 2x_3+ & x_4 & = & 5 \\ & x_2+ & 3x_3+ & x_4 & = & 2 \\ & & & x_4 & = & 3 \end{array}.$$

Die Lösungsmenge können wir an diesem vereinfachten System tatsächlich leicht ablesen. Setzen wir $x_4 = 3$ in die zweite Gleichung ein, erhalten wir $x_2 + 3x_3 = -1$. Wir können nun eine der beiden Variablen x_2, x_3 ganz frei wählen, etwa setzen wir $x_3 = t$ ($t \in \mathbb{R}$). Dann muss $x_2 = -1 - 3t$ sein und aus der ersten Gleichung folgt $x_1 = 2 - 2t$. Die Lösungsmenge des vereinfachten und damit gleichzeitig auch des ursprünglichen Systems lautet also:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2-2t \\ -1-3t \\ t \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Hier gibt es einen freien Parameter.

Es kann aber auch sein, dass ein Gleichungssystem gar nicht lösbar ist. Dazu ein anderes Beispiel.

7.1.2 Beispiel Wir betrachten jetzt das folgende System aus 3 Gleichungen in 4 Unbekannten:

$$\begin{array}{rrrrcl} 2x_1+ & 12x_2+ & & 2x_4 & = & 0 \\ x_1+ & 6x_2+ & x_3+ & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1+ & 18x_2- & 3x_3- & 3x_4 & = & 3 \end{array}.$$

Hier lautet also die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 12 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 18 & -3 & -3 & 3 \end{array}\right).$$

Wir vertauschen die ersten beiden Zeilen und ziehen dann von der zweiten Zeile das Zweifache der ersten und von der dritten Zeile das Dreifache der ersten Zeile ab. Dann ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -12 & 3 \end{array}\right).$$

Nun teilen wir die zweite Zeile durch (-2), und ziehen von der dritten Zeile das Dreifache der alten zweiten Zeile ab. Als letztes teilen wir die neue dritte Zeile noch durch 3. Dann erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Das entsprechende Gleichungssystem lautet:

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1+ & 6x_2+ & x_3+ & 3x_4 & = & 0 \\ & & x_3+ & 2x_4 & = & 0 \\ & & & 0 & = & 1 \end{array}.$$

Also gibt es in diesem Fall keine Lösung.

Hier zu guter Letzt noch ein Beispiel über den komplexen Zahlen:

7.1.3 Beispiel Wir betrachten das folgende System aus 3 Gleichungen in 3 Unbekannten über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{rrrcc} 2x_1- & 5ix_2- & 8x_3 & = & -2i \\ 2ix_1+ & 11x_2+ & 4ix_3 & = & 14 \\ ix_1+ & 5x_2+ & ix_3 & = & 6 \end{array}.$$

Hier lauten also Koeffizientenmatrix bzw. Ergebnisvektor:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5i & -8 \\ 2i & 11 & 4i \\ i & 5 & i \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -2i \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Jetzt notieren wir die *erweiterte Matrix*

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5i & -8 & -2i \\ 2i & 11 & 4i & 14 \\ i & 5 & i & 6 \end{array}\right).$$

Wir multiplizieren die letzte Zeile mit $(-i)$, so dass in der unteren linken Ecke eine 1 entsteht, vertauschen die neue letzte Zeile mit der ersten und erhalten:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5i & 1 & -6i \\ 2 & -5i & -8 & -2i \\ 2i & 11 & 4i & 14 \end{array}\right).$$

Nun ziehen wir von der zweiten das Doppelte der ersten Zeile und von der dritten das $(2i)$-fache der ersten Zeile ab und bekommen:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5i & 1 & -6i \\ 0 & 5i & -10 & 10i \\ 0 & 1 & 2i & 2 \end{array}\right).$$

Dann vertauschen wir die zweite und die dritte Zeile und ziehen von der neuen dritten Zeile das $(5i)$-fache der neuen zweiten Zeile ab. Das liefert:

$$(A\,|\,b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5i & 1 & -6i \\ 0 & 1 & 2i & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das entsprechende Gleichungssystem besteht also eigentlich nur aus zwei unabhängigen Bedingungen und lautet:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1- & 5ix_2+ & x_3 & = & -6i \\ & x_2+ & 2ix_3 & = & 2 \end{array}.$$

Wir können $x_3 = z \in \mathbb{C}$ beliebig wählen, dann ergibt sich aus den beiden Gleichungen durch Einsetzen:

$$x_2 = 2 - 2iz \quad \text{und} \quad x_1 = -6i + 5i(2 - 2iz) - z = 4i + 9z\,.$$

Die Lösungsmenge lautet also hier

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 4i + 9z \\ 2 - 2iz \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{C} \right\} = \begin{pmatrix} 4i \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -2i \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Hier gibt es einen freien komplexen Parameter.

Die entscheidenden Eigenschaften der vereinfachten erweiterten Matrix sind hier zusammengefasst:

7.1.4 Definition Eine Matrix M hat *Zeilenstufenform*, wenn es eine Zahl $r \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass folgendes gilt:

- Die Zeilen unterhalb der r-ten Zeile sind Nullzeilen, das heisst ihre sämtlichen Einträge sind Nullen.
- Die ersten r Zeilen sind *keine* Nullzeilen, jeweils der erste von Null verschiedene Eintrag (wenn man von links nach rechts liest) ist eine Eins.
- Markiert man die führenden Einsen in den ersten r Zeilen, erhält man eine nach rechts absteigende Treppe. Oder anders gesagt: Steht die führende Eins in Zeile i jeweils in der Spalte s_i, so gilt: $s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_r$.

In dieser Situation wird die Zahl r als *Rang* der Matrix M bezeichnet.

7.1.5 Satz *Jede beliebige Matrix M lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen.*

Beweis. Die Behauptung beweisen wir durch Induktion über die Anzahl Zeilen m. Ist $m = 1$, so gibt es zwei Möglichkeiten, nämlich $M = (0 \dots 0)$ besteht nur aus einer Nullzeile, oder $M = (0 \dots 0a \dots)$ enthält in der ersten Zeile nach eventuellen Nullen einen Eintrag $a \neq 0$. In dieser Situation teilen wir die erste Zeile durch a und sind fertig.

Induktionsschritt: Nehmen wir jetzt an, die Aussage sei richtig für alle Matrizen mit m Zeilen. Sei M eine Matrix mit $m+1$ Zeilen. Wir suchen in M die erste Spalte mit einem Eintrag $a \neq 0$, transportieren diesen Eintrag durch Zeilenvertauschung in die erste Zeile und dividieren dann die erste Zeile durch a. So erhalten wir an dieser Stelle die erste führende Eins. Jetzt ziehen wir geeignete Vielfache der ersten Zeile von allen anderen Zeilen ab, um die anderen Einträge derselben Spalte zu Null zu machen. Das Resultat hat folgende Form

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|ccc} 0 & & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \dots & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & M' & \\ 0 & & 0 & 0 & & & \end{array}\right).$$

Nach Induktionsannahme kann man M' entsprechend weiterbearbeiten, bis die Zeilenstufenform erreicht ist. q.e.d.

Kommen wir jetzt wieder zurück zu linearen Gleichungssystemen. Sei A eine $m \times n$-Matrix und b ein Spaltenvektor mit m Einträgen, jeweils aus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei weiter $M = (A \,|\, b)$ die erweiterte Matrix, gebildet aus M durch Anfügung der Spalte b. Um das Gleichungssystem zu lösen, bringen wir zunächst M durch Zeilenumformungen in Zeilenstufenform $M' = (A' \,|\, b')$. Wie schon bemerkt, hat das neue System dieselben Lösungen wie das alte, es gilt: $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot x = b\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid A' \cdot x = b'\}$. Aber man kann, wie in den Beispielen gezeigt, die Lösungsmenge des in Zeilenstufenform geschriebenen Systems direkt ablesen. Dabei stellen wir folgendes fest:

7.1.6 Bemerkung *Sei A eine $m \times n$-Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{K}$ in Zeilenstufenform von Rang r, also mit genau r Nichtnullzeilen. Dann ist $r \leq m$ und $r \leq n$, denn die führenden Einsen in den Nichtnullzeilen müssen in verschiedenen Spalten stehen. Sei weiter $b \in \mathbb{K}^m$. Für das Gleichungssystem $Ax = b$ gilt:*

(1) Das System hat keine Lösung in $\mathbb{K}^n$, falls $r < m$ und $b_i \neq 0$ für ein $i > r$.

(2) Sind die Bedingungen aus (1) nicht erfüllt, so gibt es zwei Möglichkeiten.

   (i) Ist $r = n$, so hat das System eine eindeutige Lösung.

   (ii) Ist $r < n$, so gibt es unendlich viele Lösungen (genauer enthält die allgemeine Lösung $n - r$ freie Parameter).

Ist b der Nullvektor, so kann der erste Fall nie eintreten.

7.1.7 FOLGERUNG *Besteht ein lineares Gleichungssystem in n Unbekannten aus n Gleichungen, so hat das System genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ die Koeffizientenmatrix A ist vom maximal möglichen Rang n.*

Es ist jetzt noch nicht geklärt, ob die Zahl $n-r$ der freien Parameter der Lösungsmenge im Fall 2(ii) durch das ursprüngliche lineare Gleichungssystem bereits eindeutig festgelegt ist oder nicht. Es wird sich aber später noch herausstellen, dass diese Anzahl eindeutig ist und die Dimension des Lösungsraums angibt.

Schauen wir uns den Fall $n = 3$ und $m \leq 3$ für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ noch einmal genauer an. In diesem Fall ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ eine Teilmenge des dreidimensionalen Raumes, die wir geometrisch beschreiben wollen. Nehmen wir an, A sei eine Matrix von Rang r.
1.Fall: $m = 1$. Hier haben wir nur eine Gleichung, nämlich $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b_1$. Ist $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, so ist der Rang $r = 0$ und $\mathbb{L}$ ist leer, falls $b_1 \neq 0$, bzw. $\mathbb{L} = \mathbb{R}^3$, falls $b_1 = 0$. Sind nicht alle a_j gleichzeitig Null, so handelt es sich bei der Gleichung um eine Ebenengleichung. Die Lösungsmenge ist also eine Ebene und hat daher zwei freie Parameter. Falls $b_1 = 0$, besteht $\mathbb{L}$ aus allen Vektoren x, die auf dem Vektor $w = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen.

2.Fall: $m = 2$. Hier sind zwei Gleichungen simultan zu erfüllen. Enthält A keine Nullzeile, so ist $\mathbb{L}$ die Schnittmenge von zwei Ebenen E_1 und E_2. Es gibt daher die folgenden Möglichkeiten:

Lage der Ebenen	$E_1 \not\parallel E_2$	$E_1 = E_2$	$E_1 \neq E_2$ und $E_1 \parallel E_2$
r	2	1	1
$\mathbb{L}$	Gerade	Ebene	leer

3.Fall: $m = 3$. Falls A keine Nullzeile enthält, ist die Lösungsmenge der Durchschnitt von 3 Ebenen. Hier gibt es die folgenden Möglichkeiten:

r	3	2	1
$\mathbb{L}$	Punkt	Gerade oder leer	Ebene oder leer