

Aufgabenblatt 14 (Repetition)

Aufgabe 1. (*Kurvendiskussion und Grenzwerte*) Die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2}\right) \quad \text{für } x \neq 0.$$

(i) Bestimmen Sie die Nullstellen und die lokalen Extrema der Funktion f .

(ii) Berechnen Sie (soweit sie existieren) die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0, x < 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0, x > 0} f(x).$$

(iii) Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion f . Lässt sich f stetig (oder sogar differenzierbar) nach $x = 0$ fortsetzen? (8 Punkte)

Aufgabe 2. (*Vollständige Induktion*) Die Funktion f sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{|x|}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die n -te Ableitung von f an der Stelle $x = 0$ existiert und $f^{(n)}(0) = 0$ ist. (5 Punkte)

Aufgabe 3. (*Integration*) (a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Gebietes zwischen den Funktionsgraphen der Funktionen $f(x) = x^2 \sin(x)$ und $g(x) = (x - \pi)e^{-(x-\pi)^2}$ (für $0 \leq x \leq 2\pi$). Eine Skizze ist hier hilfreich.

(b) Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + 10}$ (für $x \in \mathbb{R}$) und berechnen Sie die Gesamtfläche zwischen dem Graphen von f und der x -Achse. (7 Punkte)

Aufgabe 4. (*Komplexe Zahlen*)

(a) Sei $z = -1 + \sqrt{3}i$. Berechnen Sie z^{10} .

(b) Bestimmen Sie sämtliche komplexen Lösungen der Gleichung $z^4 = 81(1-i)$ und stellen Sie die Lösungsmenge graphisch dar. (5 Punkte)

Aufgabe 5. (*Lineare Gleichungssysteme*) Schreiben Sie den Vektor $z = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Linearkombination in der Form $z = \alpha u + \beta v + \gamma w$ (mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$) der Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Welchen Rang hat die von den Spalten u, v, w gebildete Matrix? (5 Punkte)