Aufgabenblatt 12

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei der folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Matrixmultiplikation)* Seien $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Rechnen Sie nach, dass $BA = E$ und $AB \neq E$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass es keine Matrix C vom Typ 2×3 gibt mit $AC = E$.

Hinweis zu (b): Versuchen Sie die Spalten von C zu konstruieren, indem Sie passende lineare Gleichungssysteme lösen, bis Sie auf einen Widerspruch stossen. (4 Punkte)

Aufgabe 2. *(Inverse einer Matrix)* Berechnen Sie die Inversen der Matrizen
$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Überprüfen Sie Ihr Resultat durch eine Probe!
Lösen Sie nun die folgenden linearen Gleichungssysteme

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3. *(Determinanten)* Berechnen Sie auf möglichst ökonomische Art die Determinanten der folgenden Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{2} & 10 & 0 \\ -1 & 5\pi & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(5 Punkte)

Aufgabe 4. *(Eigenschaften der Determinantenfunktion)* Gehen wir davon aus, die Determinante einer 3×3-Matrix sei (wie im Skript) durch Entwicklung nach der ersten Spalte definiert. Rechnen Sie nun nach, dass für jede 3×3-Matrix A folgendes gilt:

(a) Durch Entwicklung nach der zweiten Spalte erhält man dasselbe Resultat.

(b) Durch Entwicklung nach der ersten Zeile erhält man dasselbe Resultat.

(c) Vertauscht man die ersten beiden Zeilen von A, dann bleibt der Betrag der Determinante gleich, aber das Vorzeichen ändert sich. (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Bandmatrizen)* Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne A_n eine $n \times n$-Matrix, die nur in drei Diagonalen Einträge ungleich Null hat, und zwar folgende:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie durch vollständige Induktion: $\det A_n = n + 1$. (3 Punkte)

Und hier noch zwei Verständnisfragen zur Selbstkontrolle:

Frage 1. *(Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen)* Sei A eine $m \times 2$-Matrix ohne Nullzeilen. Welche der folgenden Aussagen über ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A sind korrekt?

(a) Ist $m = 1$, kann man die Lösungsmenge als eine Gerade in der Ebene $\mathbb{R}^2$ auffassen. ☐

(b) Ist $m = 2$, dann ist die Lösungsmenge die Schnittmenge von zwei Geraden in der Ebene. ☐

(c) Ist $m = 2$, dann ist die Lösung eindeutig bestimmt. ☐

(d) Zwei verschiedene Geraden in der Ebene sind parallel genau dann, wenn der Rang der entsprechenden Koeffizientenmatrix gleich 1 ist. ☐

Frage 2. *(Rechenregeln für Matrizen)* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

(a) $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$ für alle 3×3-Matrizen A und alle Skalare λ. ☐

(b) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ für alle $n \times n$-Matrizen A, B. ☐

(c) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ für alle invertierbaren $n \times n$-Matrizen A, B. ☐

(d) Für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ gilt $AB = BA$. ☐

Abgabe der Aufgaben: Donnerstag, den 9. Dezember 2021, bis 12.30 Uhr als .pdf via ADAM bei Ihrem Tutor bzw. Ihrer Tutorin.