Vorlesung:
Mathematische Methoden I

A. A'Campo–Neuen

Universität Basel, Herbstsemester 2021

Literatur zu Mathematische Methoden I und II

Mathematik für Naturwissenschaftler:
In den folgenden Büchern, mit Ausnahme der Pearson-Bücher, werden sowohl Differential- und Integralrechnung als auch Lineare Algebra behandelt.

- George B. Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Analysis 1 und Analysis 2. Lehr– und Übungsbuch, Pearson Verlag, 2013 bzw. 2014. *Deckt zusammen den Stoff von zwei Semestern ab. Enthält eine Fülle von Zeichnungen und viele Beispiele, die ausführlich behandelt werden, sowie numerische Anwendungen.*
- Karl-Heinz Goldhorn und Hans-Peter Heinz, Mathematik für Physiker 1, Grundlagen aus Analysis und Linearer Algebra, Springer-Verlag 2007. *Enthält den Stoff für die ersten beiden Semester; umfangreicher Aufgabenteil; zu jedem Kapitel gibt es einen Ergänzungsteil mit Details zu Beweisen oder weiterführenden Bemerkungen und Beispielen, die man je nach Interesse noch zusätzlich lesen kann.*
- Lothar Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler in 3 Bänden, Vieweg-Verlag 2001. *Niveau elementarer. Sehr ausführliche Darstellung mit vielen Beispielen. Elementare Rechnungen in allen Schritten ausgeführt, viele Aufgaben mit Lösungen, insofern gut zum Selbststudium geeignet. Nachteil: Jeder Band enthält nur den Stoff eines Semesters, die Anschaffung ist also relativ teuer.*
- Lothar Papula, Klausur- und Übungsaufgaben zu Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg-Verlag. *Aufgaben zur Prüfungsvorbereitung zu Papulas Lehrbuch, Band 1-3, und zwar mit sehr ausführlichen Lösungen! Gut geeignet, um Routineverfahren einzuüben.*

Differential- und Integralrechnung:
Die folgenden Bücher sind für Mathematik- und Physikstudenten geschrieben und behandeln die Differential- und Integralrechnung jeweils in mehreren Bänden.

- Klaus Jänich, Mathematik 1. Geschrieben für Physiker, Springer-Lehrbuch 2005. *Umfasst den Stoff für die ersten beiden Semester, Darstellung erfrischend locker, Tempo gelegentlich hoch, viele Zeichnungen. Aufgabenteil gegliedert in theoretische und anwendungsbezogene Aufgaben.*
- Otto Forster, Analysis 1, 2 und 3, Vieweg-Verlag, Braunschweig 1979/81. *Standardlehrbuch, knapp formuliert, trotzdem alles Wesentliche enthalten. Auch zu diesen Büchern gibt's separate Aufgabenbände mit ausführlichen Lösungen!*
- Konrad Königsberger, Analysis 1 und 2, Springer-Lehrbuch, Berlin 1993. *Etwas ausführlicher, enthält viele Beispiele, die durch Zeichnungen anschaulich werden.*
- Wolfgang Walter, Analysis I und II, Springer-Lehrbuch, Berlin 1989/90. *Sehr ausführlich, zusätzlich interessante historische Anmerkungen und physikalische*

Beispiele. Es gibt einen Anhang mit Lösungen und Lösungshinweisen zu ausgewählten Aufgaben.

- E. Hairer und G. Wanner, Analysis by Its History, Springer Verlag, Berlin 1996. *Anregende historische Darstellung, sehr schön illustriert.*

Anwendungen in der Biologie:

- Jan Prüss, Roland Schnaubelt, Rico Zacher, Mathematische Modelle in der Biologie, Birkhäuser Verlag, Basel 2008. *Es werden Differentialgleichungen vorgestellt, die u.a. das Wachstum von Populationen, die Ausbreitung von Infektionen, Genetische Prozesse oder chemische Reaktionen modellieren.*

Formelsammlungen:

- Bronstein et al., Taschenbuch der Mathematik, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main 2005. *Ein echtes Kompendium, allerdings nicht ganz billig.*
- Formelsammlung Mathematik, Binomi-Verlag. *Kurz gefasste Ausgabe, die aber deutlich über die schulüblichen Sammlungen hinausgeht, erfreulich preiswert.*
- Formeln, Tabellen, Begriffe. Mathematik – Physik – Chemie, Orell-Füssli-Verlag, 4. Auflage 2013. *Klassiker schon im Gymnasium.*
- Fundamentum Mathematik und Physik, Orell-Füssli-Verlag, 2001. *Sehr elementar, deshalb nur zum Einstieg geeignet.*

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Mathematische Methoden spielen bei der Lösung vieler alltäglicher Probleme eine Rolle, ohne dass uns das immer bewusst ist, und sie tragen entscheidend zur Entwicklung der Technik bei, die uns selbstverständlich umgibt. Deshalb ist es vor allem für Naturwissenschaftler unerlässlich, die grundlegenden mathematischen Konzepte kennenzulernen, sich in die mathematische Sprache einzuleben und eine gewisse Sicherheit im Umgang mit mathematischen Methoden zu erlernen.

Unter den Naturwissenschaften ist die Physik am stärksten mit der Mathematik verflochten. Mathematische und physikalische Begriffsbildungen haben sich immer wieder gegenseitig inspiriert und beeinflusst. Zum Beispiel beruht das Konzept der Ableitung einer Funktion, so wie sie Newton entwickelt hat, auf der Untersuchung der momentanen Geschwindigkeit eines bewegten Körpers, und die Vektorrechnung hatte ihren Ausgangspunkt in der Untersuchung von Kräften. Zur Formulierung der modernen Physik ist sehr anspruchsvolle Mathematik unerlässlich.

Auch in der Biologie kommen mathematische Methoden zum Einsatz. Zum Beispiel wird in der Evolutionsbiologie das Wachstum von Populationen mithilfe gekoppelter Differentialgleichungen modelliert. Auch die Entwicklung von Epidemien lassen sich so beschreiben. In der Strukturbiologie verwendet man zur Untersuchung des räumlichen Aufbaus von Makromolekülen wie Proteinen, DNA oder RNA sowohl Röntgenkristallographie als auch NMR Spektroskopie. Aus den Messungen lassen sich unter anderem mithilfe der Fouriertransformation Rückschlüsse auf die atomare Struktur ziehen.

Die Computer Science hat mit der Mathematik vor allem die systematische Arbeitsweise und das logische Zerlegen von Problemen zur Entwicklung schrittweiser Lösungsverfahren, der Algorithmen, gemeinsam. Ein elementares Beispiel eines solchen Lösungsverfahrens in der Mathematik ist der sogenannte euklidische Algorithmus, mit dem der grösste gemeinsame Teiler zweier natürlicher Zahlen bestimmt werden kann, ohne die Zahlen dafür in Primfaktoren zerlegen zu müssen.

Kapitel 1
Mathematisches Handwerkszeug

1.1 Aussagen, Beweise

Zusammenfassung: *Die mathematische Arbeitsweise besteht darin, Vermutungen in Form von Aussagen zu entwickeln, die überprüft und bewiesen oder als falsch verworfen werden. Hier werden erste Beispiele für Aussagen und Beweise gegeben. Beim direkten Beweis führt man die Aussage auf akzeptierte einfachere Aussagen zurück. Beim Widerspruchsbeweis geht man vom Gegenteil der vermuteten Aussage aus und leitet daraus einen Widerspruch her.*

In der Mathematik beschäftigt man sich in der Regel mit Aussagen, die nur entweder wahr oder falsch sein können. Hier einige Beispiele für Aussagen:

- Mathematik ist eine kreative Wissenschaft.
- $1 + 1 = 2$.
- In jedem Dreieck schneiden sich die drei Winkelhalbierenden in einem Punkt, und zwar dem Inkreismittelpunkt.
- Jede Primzahl ausser 2 ist ungerade.

Die erste Aussage halte ich selbstverständlich für wahr, aber es handelt sich in der Tat um eine subjektiv gefärbte Aussage, über deren Wahrheitsgehalt es unterschiedliche Meinungen geben kann. Die übrigen Aussagen dagegen sind typische wahre mathematische Aussagen. Unabhängig davon, ob eine solche Aussage wahr oder falsch ist, kann man ihre Negation bilden, also das logische Gegenteil. Hier ist die Negation der vierten Aussage: *Es gibt eine gerade Primzahl, die von* 2 *verschieden ist.* Dies ist nun eine falsche Aussage. Oder man kann mehrere Aussagen logisch miteinander verknüpfen (durch "und" bzw. "oder"). Hier ein Beispiel: *Die Anzahl der Studierenden im Saal ist durch* 3 *oder durch* 5 *teilbar.* Und die Negation dieser Aussage lautet: *Die Anzahl der Studierenden im Hörsaal ist weder durch* 3 *noch durch* 5 *teilbar.*

Wie kann man nun entscheiden, ob eine vorgelegte Aussage wahr oder falsch ist? Schauen wir uns dazu einige Beispiele an.

Vermutung: *Jede Zahl der Form* $2^{(2^n)} + 1$, *wobei* n *eine natürliche Zahl ist, ist eine Primzahl.*

Um den Wahrheitsgehalt dieser Aussage zu prüfen, setzen wir einige Werte ein und erhalten für $n = 1$ die Zahl $2^2 + 1 = 5$, für $n = 2$ die Zahl $2^4 + 1 = 17$ und für $n = 3$ die Zahl $2^8 + 1 = 257$, wiederum eine Primzahl. Auch für $n = 4$ findet man eine Primzahl, nämlich $2^{16} + 1 = 65537$. Aber wie der Mathematiker Euler 1732 zeigen konnte, ergibt sich für $n = 5$ keine Primzahl, es ist nämlich

$$2^{(2^5)} + 1 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417\,.$$

Die Vermutung erweist sich damit als falsch, und zwar durch Angabe eines *Gegenbeispiels*.

Die berühmte (starke) Goldbachvermutung, die nach dem Mathematiker Goldbach (1690-1764) benannt ist, sieht noch einfacher aus und lautet:

Vermutung: *Jede gerade Zahl $a > 2$ kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.*

Zum Beispiel sind $8 = 3{+}5$, $12 = 5{+}7$ und $18 = 5{+}13 = 7{+}11$. Es wurde bereits bewiesen, dass die Goldbachvermutung für Zahlen $a < 26 \cdot 10^{17}$ richtig ist. Aber es ist noch immer eine offene Frage, ob die Aussage auch für beliebig grosse gerade Zahlen a stimmt. Auf die Lösung dieses Problems wurde sogar zeitweise ein Preisgeld von einer Million Dollar ausgesetzt, das aber mangels Lösung nicht ausgezahlt werden konnte. Schauen wir uns nun eine weitere Aussage an:

Vermutung: *Sind a und b zwei positive Zahlen, so gilt stets:*

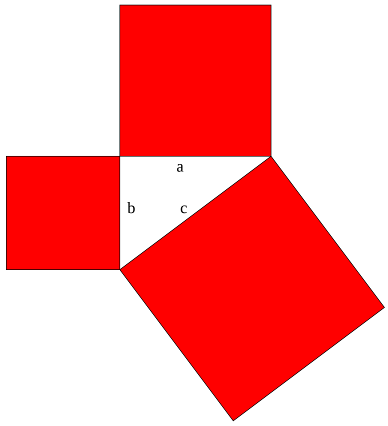
$$(a + b)^2 > a^2 + b^2\,.$$

Diese Aussage ist wahr. Um dies nachzuweisen, reicht es natürlich nicht, einige Werte exemplarisch einzusetzen. Hier benötigen wir ein Argument, das für alle in Frage kommenden Werte von a und b funktioniert. Wir können etwa die binomische Formel verwenden und argumentieren, dass in dem Ausdruck $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ der mittlere Term stets echt positiv ist, wenn $a, b > 0$ sind. Oder wir können die Behauptung geometrisch begründen, indem wir ein Quadrat der Seitenlänge $a + b$ aufzeichnen und die auf naheliegende Weise darin enthaltenen Quadrate der Seitenlänge a bzw. b markieren. Offenbar füllen die beiden kleineren Quadrate das grosse Quadrat nicht vollständig aus, der Flächeninhalt des grossen Quadrats ist also echt grösser als die Summe der Inhalte der Teilquadrate.

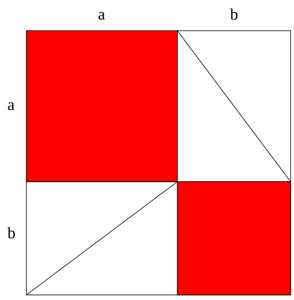
Ich möchte nun zwei Beweisstrategien anhand von Beispielen erläutern.

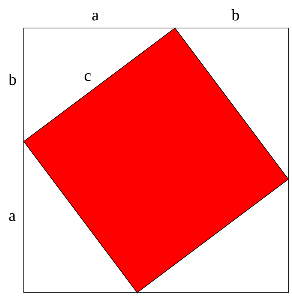
Direkter Beweis: Eine behauptete mathematische Aussage wird begründet, indem man sie nach den Gesetzen der Logik aus möglichst wenigen Grundannahmen, den *Axiomen*, und aus bereits akzeptierten Aussagen herleitet. Hierzu ein prominentes Beispiel aus der euklidischen Geometrie, der Satz des Pythagoras.

1.1.1 Satz *Bei einem rechtwinkligen Dreieck Δ stimmt die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten a, b mit dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse c überein:* $a^2 + b^2 = c^2$.



Für diesen Satz gibt es sehr viele verschiedene Beweise, von denen ich nur einen herausgreifen will. Bei diesem Beweis bildet man ein Quadrat der Seitenlänge $a + b$ und zerlegt es auf zwei verschiedene Arten.





Die erste Zerlegung besteht darin, je ein Quadrat der Seitenlänge a bzw. b einzuzeichnen (s. Zeichnung) und die verbleibenden 2 Rechtecke wiederum zu unterteilen, so dass man insgesamt 4 zu Δ kongruente Dreiecke erhält. Bei der zweiten Zerlegung werden 4 zu Δ kongruente Dreiecke in den Ecken des grossen Quadrats plaziert, und zwar so, dass jeweils die Seiten a, b im Uhrzeigersinn aufeinanderfolgen. In der Mitte entsteht eine Raute der Seitenlänge c. Tatsächlich ist es sogar ein Quadrat, wie eine Bilanz der Winkel zeigt. Entfernt man jeweils die 4 Dreiecke, bleiben flächengleiche Figuren übrig, also gilt $a^2 + b^2 = c^2$. q.e.d.

Welche einfacheren Aussagen wurden in diesem Beweis verwendet? Wir haben benutzt, dass jedes rechtwinklige Dreieck mit denselben Kathetenlängen wie Δ bereits zu Δ kongruent ist. Und die Bilanz der Winkel beruht darauf, dass die Winkelsumme im Viereck 360° beträgt.

Widerspruchsbeweis: Dieses Vorgehen geht von dem Grundprinzip aus, dass eine mathematische Aussage nur entweder wahr oder falsch sein kann, aber nicht beides zugleich. Dies macht man sich folgendermassen zunutze. Um eine behauptete Aussage zu zeigen, nimmt man zunächst an, ihr Gegenteil sei richtig und leitet daraus einen Widerspruch zu dieser Annahme oder zu bereits akzeptierten Tatsachen her. Die Negation der Behauptung erweist sich damit als falsch, also muss die Behauptung selbst richtig sein. Zur Erläuterung hier ein Beispiel:

1.1.2 Satz *Die positive Quadratwurzel aus 2 ist eine irrationale Zahl.*

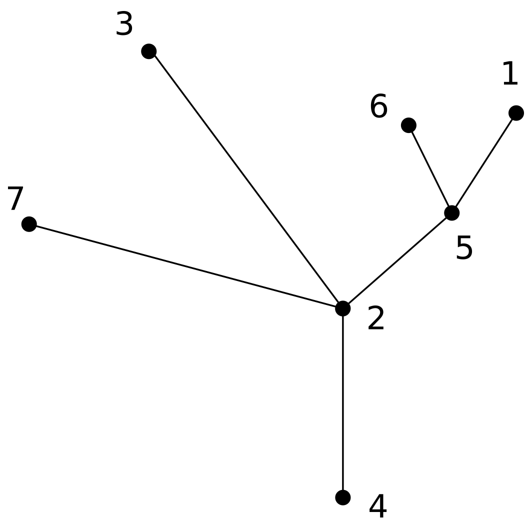
Beweis. Wir führen die Annahme des Gegenteils zum Widerspruch. Nehmen wir an, x sei eine positive rationale Zahl mit $x^2 = 2$. Die Zahl x lässt sich dann als gekürzter Bruch in der Form $x = p/q$ schreiben, wobei p, q teilerfremde natürliche Zahlen sind. Für die Zahlen p, q ergibt sich daraus $p^2/q^2 = 2$ und daher $p^2 = 2q^2$. Insbesondere ist also das Quadrat von p eine gerade Zahl. Das ist aber nur möglich, wenn auch p selbst bereits gerade ist. Wir schreiben p in der Form $p = 2s$ und erhalten $4s^2 = 2q^2$ und daraus $2s^2 = q^2$. Wie eben folgt, dass auch q gerade ist. Wenn aber sowohl p als auch q gerade sind, ist der Bruch p/q doch kürzbar im Widerspruch zur Annahme. Damit ist gezeigt: die positive Quadratwurzel aus 2 kann keine rationale Zahl sein! q.e.d.

Untersuchen wir nun exemplarisch eine Frage, bei der zuerst eine Vermutung entwickelt werden muss, bevor wir daran gehen können, die Vermutung zu beweisen.

1.1.3 Definition Einen Graphen, bestehend aus mindestens zwei Punkten (sogenannten Knoten) und verbindenden Kanten, nennen wir einen *Baum*, wenn es im Graphen keinen geschlossenen Kantenweg gibt und wenn der Graph zusammenhängend ist, d.h. wenn er nicht aus mehreren unverbundenen Teilfiguren besteht.

Sei jetzt $n > 2$ eine natürliche Zahl. Wir stellen uns folgende Frage:

Frage: *Wieviele Bäume mit n durchnumerierten Knoten gibt es?*



Genauer ist hier gemeint, dass die n Knoten mit den Zahlen von 1 bis n beschriftet sind. Und wir betrachten zwei solche Bäume als gleich, wenn jeweils dieselben Paare von Knoten durch eine Kante verbunden sind. Bei einer Zeichnung dürfen die Kanten beliebig lang dargestellt sein, die genaue Gestalt und die Position der Knoten ist unerheblich.

In diesem Sinn gibt es für $n = 3$ genau drei verschiedene Bäume mit numerierten Knoten. Für $n = 4$ gibt es 16 verschiedene solche Bäume, und es ist schon schwieriger, die Übersicht zu behalten. Um nun das Zählen der Möglichkeiten zu vereinfachen, entwickeln wir erst einen Code für Bäume mit numerierten Knoten, den sogenannten *Prüfer-Code.*

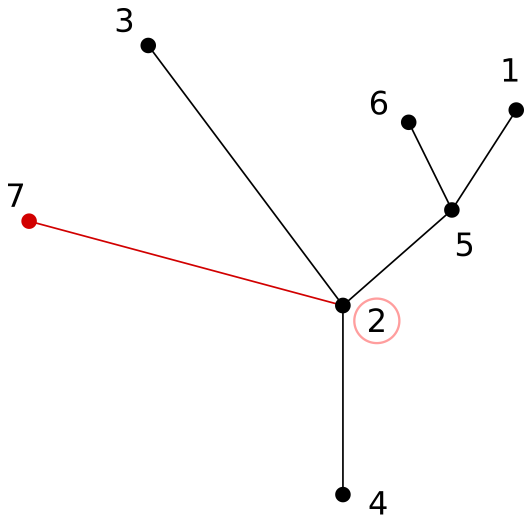
Und zwar verwenden wir als Code jeweils eine Liste von $n-2$ Zahlen aus dem Zahlenvorrat $\{1, 2, \dots, n\}$ (wobei Wiederholungen erlaubt sind). Dafür halten wir zunächst folgendes fest (siehe Aufgabenblatt 1):

Beobachtung: *Jeder Baum hat mindestens ein freies Ende, d.h. einen Knoten, von dem nur genau eine Kante ausgeht.*

Wir ordnen einem gegebenen Baum mit n durchnumerierten Knoten einen Code zu, indem wir die folgenden Schritte so oft wiederholen, bis nur noch eine Kante übriggeblieben ist:

1. Wir suchen dasjenige freie Ende im Baum mit der höchsten Nummer und notieren uns die Nummer des eindeutig bestimmten Nachbarknotens dieses freien Endes.

2. Nun entfernen wir dies freie Ende mitsamt der davon ausgehenden Kante, und es bleibt ein Baum mit $n-1$ Knoten übrig.



Bei diesem Baum ist der rot markierte Knoten das freie Ende mit der höchsten Nummer, sein Nachbarknoten hat die Nummer 2. Das nächsthöhere freie Ende ist am Knoten mit der Nummer 5 angeheftet usw. Der Code für diesen Baum lautet also $[2, 5, 2, 2, 5]$.

Man kann nun beweisen, dass jede geordnete Liste von $n-2$ Zahlen aus dem Vorrat $\{1, \dots, n\}$ auch tatsächlich als Code vorkommt und sich aus dem Code der Baum wieder rekonstruieren lässt. Demonstrieren wir dies an unserem Beispiel: Wir lesen den Code $[2, 5, 2, 2, 5]$ von hinten nach vorn. Die letzte Nummer ist die 5. Also endete der Prozess mit einer Kante, die von Knoten Nummer 5 ausgeht. Der andere Knoten muss mit der kleinsten Zahl ≤ 7 beschriftet sein, die im Code fehlt, hier also einer 1. Ausserdem gibt es eine Kante, die bei Knoten Nummer 5 angeheftet ist, und zwar geht diese Kante von der Nummer 2 aus, die vor der 5 im Code steht. Weil die vorletzte Nummer eine 2 ist, gibt es ausserdem eine Kante, die beim Knoten Nummer

2 angeheftet ist, und der andere Knoten dieser Kante ist mit der kleinsten Zahl beschriftet, die im Code fehlt und die wir bei der Rekonstruktion bisher noch nicht verbraucht haben, hier also der Nummer 3. Die vorvorletzte Nummer ist wiederum eine 2. Also gibt es eine weitere Kante, die beim Knoten Nummer 2 angeheftet ist, und der andere Knoten dieser Kante ist mit der nächsten fehlenden Zahl beschriftet, hier also der Nummer 4. Das erneute Auftreten der 5 im Code verrät uns, dass bei Knoten Nummer 5 eine weitere Kante angeheftet ist, und zwar am anderen Ende beschriftet mit der nächsten fehlenden Zahl, der Nummer 6. Und die erste 2 schliesslich bedeutet, dass ein freies Ende mit der letzten noch fehlenden Nummer, der 7, an Knoten Nr. 2 angeheftet ist.

Es gibt also gleichviele Bäume mit numerierten Knoten wie Codes. Die Anzahl möglicher Codes lässt sich sehr leicht zählen, und wir erhalten folgende, verblüffend einfache Antwort auf die eingangs gestellte Frage, den Satz von Cayley:

1.1.4 SATZ *Es gibt genau n^{n-2} verschiedene Bäume mit n numerierten Knoten.*

1.2 Vollständige Induktion

Zusammenfassung: *Hier geht es um eine Beweismethode für Aussagen, die für alle (oder für fast alle) natürlichen Zahlen gelten sollen. Die vollständige Induktion besteht aus der Induktionsverankerung, d.h. der Überprüfung der Aussage für die kleinste natürliche Zahl, und dem eigentlichen Induktionsschritt, bei dem aus der Gültigkeit der Aussage für eine gewisse natürliche Zahl n auf die Gültigkeit der Aussage für die nächste Zahl $n+1$ geschlossen wird.*

Zur Notation: Mit $\mathbb{N}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Soll die Zahl 0 auch noch zur Menge dazugehören, schreiben wir $\mathbb{N}_0$. Das Symbol $\forall$ ist eine Kurzschreibweise von "für alle". Wenn man sagen möchte, "für alle natürlichen Zahlen", kann man also kurz schreiben: $\forall n \in \mathbb{N}$.

Die Induktionsmethode beruht auf dem folgenden Prinzip:

Peanosches Induktionsaxiom: *Enthält eine Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ die Zahl 1 und enthält A mit jedem Element auch dessen Nachfolger, so umfasst A bereits ganz $\mathbb{N}$.*

Um zu zeigen, dass eine Aussage $\mathcal{A}(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gültig ist, kann man daher folgendermassen vorgehen:

Induktionsverankerung: $\mathcal{A}(1)$ *zeigen.*

Induktionsschritt $(n \to n+1)$: *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ zeigen:* $\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$.

Gelingen diese beiden Schritte, so ist die Aussage $\mathcal{A}(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. Dazu ein erstes Beispiel.

1. Behauptung: *Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist gleich n^2, d.h.*

$$1 + 3 + \ldots + (2n-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Induktionsverankerung: Für $n = 1$ wird behauptet $1 = 1^2$. Dies stimmt.

Schritt von n auf $n+1$: Wir nehmen an, die Behauptung ist für n richtig, und wir müssen daraus schliessen, dass sie auch für $n+1$ gilt. Genauer ist zu zeigen

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2 \,.$$

Dazu gehen wir von der Induktionsvoraussetzung aus und formen solange um, bis die Induktionsbehauptung dasteht. Also starten wir mit

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \,.$$

Nun addieren wir auf beiden Seiten die nächste ungerade Zahl, also $2(n+1)-1 = 2n+1$ und erhalten:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = n^2 + (2n+1) \,.$$

Die rechte Seite können wir mit der binomischen Formel umschreiben in $n^2+2n+1 = (n+1)^2$. Wir erhalten

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = (n+1)^2 \,.$$

Dies war zu zeigen, wir sind also fertig. q.e.d.

Entsprechend kann man auch zeigen (siehe Aufgabenblatt 1):

2. Behauptung: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$

Wir können die Methode auch verwenden, um zu beweisen, dass eine gewisse Aussage für alle $n \in \mathbb{N}_0$ oder für alle $n \in \mathbb{N}$ ab einer gewissen kleinsten Zahl n_0 gilt. Dazu müssen mit der Verankerung bei $n=0$ bzw. bei $n=n_0$ beginnen. Hier einige Beispiele:

3. Behauptung: *Sei q eine beliebige Zahl ungleich* 1. *Dann gilt:*

$$1 + q^1 + q^2 \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Beweis. Induktionsverankerung: Für $n=0$ wird behauptet $1 = q^0 = \frac{q^1-1}{q-1}$, was offenbar richtig ist.

Schritt von n auf $n+1$: Wir nehmen an, die Behauptung ist für n richtig, und wir müssen daraus schliessen, dass sie auch für $n+1$ gilt. Genauer ist zu zeigen:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{q^{n+2}-1}{q-1} \,.$$

Wir starten wieder mit der Induktionsvoraussetzung, also der Behauptung für n:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\,.$$

Wir addieren auf beiden Seiten q^{n+1} und erhalten:

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = (\sum_{k=0}^{n} q^k) + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1}\,.$$

Nun bringen wir die rechte Seite auf einen Hauptnenner und finden

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{q^{n+1}-1+q^{n+1}(q-1)}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}\,, \quad \text{wie behauptet.} \quad \text{q.e.d.}$$

4. Behauptung: $2^n > n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *mit* $n \geq 2$.

Beweis. Induktionsverankerung: Für $n = 2$ wird behauptet $2^2 = 4 \geq 2+1$, was stimmt.

$n \to n+1$: Zu zeigen ist: $2^{n+1} > n+2$. Die Induktionsvoraussetzung lautet hier:

$$2^n > n+1\,.$$

Multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit 2, folgt daraus

$$2^{n+1} > 2n+2 > n+2\,.$$

Zusammen ergibt sich also $2^{n+1} > n+2$, wie behauptet. q.e.d.

Wichtig ist: *Ein Induktionsbeweis funktioniert nur dann, wenn sowohl die Verankerung als auch der Induktionsschritt gelingen.*

Hier zwei Beispiele dazu, dass man weder die Verankerung noch den Induktionsschritt weglassen kann.

1.2.1 Beispiele

- Die Ungleichung $n! \leq 2^n + n$ stimmt für $n = 1, 2, 3$, ist aber falsch für alle natürliche Zahlen $n \geq 4$. Hier funktioniert also die Induktionsverankerung, aber nicht der Induktionsschritt.
- Versuchen wir die folgende Behauptung zu beweisen:

$$\sum_{k=2}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1) + 5 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 1\,.$$

Der Induktionsschritt funktioniert hier. Denn angenommen, die Aussage ist richtig für ein gegebenes n. Wir addieren zur Induktionsvoraussetzung auf beiden Seiten $(n+1)$ hinzu und erhalten

$$\sum_{k=2}^{n} k + (n+1) = \sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{n}{2}(n+1) + 5 + (n+1) = \frac{n+1}{2}(n+2) + 5\,.$$

Die Aussage stimmt dann also auch für $n+1$. Aber die Induktionsverankerung klappt nicht. Denn setzt man $n = 2$ ein, erhält man die Aussage

$$2 = \frac{2}{2}(2+1) + 5 = 8\,,$$

und das ist ja offensichtlich falsch.

Hier jetzt ein (erfolgreicher) Induktionsbeweis einer sehr nützlichen Ungleichung.

5. Behauptung (Bernoullische Ungleichung): *Sei $t \in \mathbb{R}$, $t > -1$ fest gewählt. Dann gilt:*

$$(1+t)^n \geq 1 + nt \quad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$

Die Voraussetzung an t kann man nicht fallenlassen, denn zum Beispiel für $t = -3$ und $n \geq 5$ stimmt die entsprechende Ungleichung nicht.

Beweis. Induktionsverankerung: Für $n = 1$ lautet die Behauptung $(1+t)^1 \geq 1+1 \cdot t$, was offensichtlich richtig ist.

$n \to n+1$: zu zeigen ist

$$(1+t)^{n+1} \geq 1 + (n+1)t\,.$$

Wir starten dafür wieder mit der Induktionsvoraussetzung

$$(1+t)^n \geq 1 + nt\,.$$

Wir multiplizieren beide Seiten der Ungleichung mit dem Faktor $(1+t)$. Weil nach Voraussetzung $1 + t > 0$ ist, bleibt dabei die Ungleichung erhalten und es folgt:

$$(1+t)^{n+1} = (1+t)^n(1+t) \geq (1+nt)(1+t)\,.$$

Nun multiplizieren wir die rechte Seite aus und fassen neu zusammen:

$$(1+t)^{n+1} \geq (1+nt)(1+t) = 1 + nt + t + nt^2 = 1 + (n+1)t + nt^2\,.$$

Weil Quadrate nichtnegativ sind, wird der Ausdruck höchstens kleiner, wenn wir den Term nt^2 weglassen. Das heisst

$$1 + (n+1)t + nt^2 \geq 1 + (n+1)t\,.$$

Also folgt insgesamt $(1+t)^{n+1} \geq 1 + (n+1)t$, wie behauptet. q.e.d.