

Aufgabenblatt 8

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei der folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. (*Kurvendiskussion*) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Nullstellen, die lokalen Extrema oder Sattelpunkte, die Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$ (und bei (b) zusätzlich für $x \searrow -1$) und skizzieren Sie dann den Verlauf von f .

(a) $f(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{e^x}$ (b) $f(x) = \ln(x^3 + 1)$ für $x > -1$

(c) $f(x) = \arctan(x^3 - 9x^2)$. (6 Punkte)

Aufgabe 2. (*Wendepunkte und Konverxität*) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Wendepunkte (soweit vorhanden). Auf welchen Abschnitten ist die Funktion jeweils konvex, auf welchen Abschnitten konkav?

(a) $f(x) = \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (b) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

(c) $f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$ ($x_0, \sigma > 0$ gegeben) (3 Punkte)

Aufgabe 3. (*Newtonverfahren*) Zeigen Sie, dass $p(x) = x^7 - \frac{7}{2}x^2 + 2$ genau drei verschiedene Nullstellen hat. (Hinweis: Satz von Rolle und passende Intervalle, auf denen p das Vorzeichen wechselt.) Bestimmen Sie diese Nullstellen nun mithilfe des Newtonverfahrens jeweils auf 3 Kommastellen genau (hier natürlich ausnahmsweise mit Rechner). (4 Punkte)

Aufgabe 4. (*l'Hospitalsche Regel*) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2(x) - 1}{2x^2}$ (b) $\lim_{x \searrow 0} \frac{\tan(x)}{\sqrt{x}}$ (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$ (d) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$ (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$.

Hinweis: Bei (e) ist eine Zahlenfolge gemeint, also $n \in \mathbb{N}$. (4 Punkte)

Aufgabe 5. (*Doppelte Nullstellen*) Sei p ein Polynom von Grad $n \geq 2$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) $p(x_0) = 0 = p'(x_0) \Leftrightarrow p$ hat an der Stelle x_0 eine mindestens doppelte Nullstelle, d.h. $p(x) = (x - x_0)^2 q(x) \forall x$, wobei q ein Polynom von Grad $n - 2$ ist.

(b) Ist x_0 eine doppelte Nullstelle (also genau der Vielfachheit 2), dann hat p an der Stelle x_0 ein lokales Maximum oder Minimum. Ist aber x_0 eine dreifache Nullstelle, dann hat p dort einen Sattelpunkt. (3 Punkte)

Und hier noch zwei Verständnisfragen zur Selbstkontrolle:

Frage 1. (*Polynome von Grad 3*) Welche der folgenden Aussagen über ein Polynom der Form $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ sind korrekt?

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$. ☐

(b) p hat mindestens eine reelle Nullstelle. ☐

(c) p hat entweder ein lokales Minimum und ein lokales Maximum oder einen Sattelpunkt. ☐

(d) p hat genau eine Wendetangente. ☐

Frage 2. (*Konvexität*) Welche der folgenden Aussagen über eine strikt konvexe Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ sind korrekt?

(a) Die Funktion hat keine Sattelpunkte. ☐

(b) Sie nimmt ihr Minimum an genau einer Stelle an. ☐

(c) Sie nimmt ihr Maximum an genau einer Stelle an. ☐

(d) f nimmt das Maximum am Rand des Intervalls an. ☐

Abgabe der Aufgaben: Donnerstag, den 11. November 2021, bis 12.30 Uhr als .pdf via ADAM bei Ihrem Tutor bzw. Ihrer Tutorin.