Kapitel 3
Komplexe Zahlen und Polynome

3.1 Komplexe Zahlen

Zusammenfassung: *Durch die Einführung der imaginären Zahl i als Quadratwurzel aus -1 und die daraus resultierende Erweiterung des Zahlenvorrats erhält man den Zahlkörper der komplexen Zahlen, in dem jede Gleichung n-ten Grades eine Lösung hat. Interpretiert man die komplexen Zahlen als Punkte oder Ortsvektoren in der Gaussschen Zahlenebene, kann man die Addition dieser Zahlen als Vektoraddition und die Multiplikation mithilfe der Polarkoordinaten als Winkeladdition zusammen mit einer Multiplikation der Beträge verstehen.*

Der Ausgangspunkt für die Erfindung der komplexen Zahlen war die Suche nach Lösungen für quadratische, kubische und allgemeiner Gleichungen n-ten Grades. Die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ (für $a \neq 0$) lauten nach der bekannten *Mitternachtsformel*

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

falls die *Diskriminante* $D := 4ac - b^2$ kleiner oder gleich Null ist. Ist $D > 0$, so hat die quadratische Gleichung keine reelle Lösung. Es gibt in $\mathbb{R}$ keine Quadratwurzeln aus negativen Zahlen, weil alle Quadrate von reellen Zahlen grösser oder gleich Null sind.

Durch Einführung der komplexen Zahlen wird der Zahlenbereich so erweitert, dass darin alle quadratischen Gleichungen und darüberhinaus sogar Gleichungen beliebig hohen Grades Lösungen haben. Dazu postuliert man einfach die Existenz einer Quadratwurzel aus -1, bezeichnet diese Quadratwurzel nach Euler mit dem Symbol i (für imaginäre Zahl) und rechnet mit Vielfachen von i oder sogar mit Ausdrücken der Form $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ nach den bekannten Rechengesetzen der Algebra, erweitert um die Regel

$$i^2 = -1\,.$$

Zum Beispiel ist dann $(i\sqrt{2})^2 = i^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = (-1) \cdot 2 = -2$. Die Zahl $i\sqrt{2}$ ist also eine Quadratwurzel aus der negativen Zahl -2.

Genauer definieren wir die Menge der *komplexen Zahlen* folgendermassen:

$$\mathbb{C} := \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}\,.$$

Eine komplexe Zahl $z = a + ib$ wird durch die Angabe von zwei reellen Zahlen festgelegt, den *Realteil* $\mathrm{Re}(z) = a$ und den *Imaginärteil* $\mathrm{Im}(z) = b$. Und zwei komplexe

Zahlen stimmen nur genau dann überein, wenn sowohl die Real- als auch die Imaginärteile übereinstimmen. Ist der Imaginärteil einer Zahl gleich Null, schreiben wir anstelle von $a + i\,0$ auch einfach a. Wir identifizieren also die komplexen Zahlen der Form $a + i\,0$ mit den reellen Zahlen. Entsprechend schreiben wir auch statt $0 + i\,b$ einfach ib, falls $b \neq 0$ ist.

Die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen werden so definiert, dass die Verknüpfungen mit den von den reellen Zahlen her bekannten Rechenregeln verträglich sind und ausserdem $i^2 = -1$ gilt.

Daraus ergibt sich zwangsläufig für $z_1 = a_1 + b_1$ und $z_2 = a_2 + b_2$ die Definition: $(a_i, b_i \in \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) := (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) := (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \end{aligned}$$

Zum Beispiel:

$$i^3 = -i\,, \quad (1+i)(1-i) = 1 - i^2 = 2\,, \quad (2+i)(1-3i) = 5 - 5i = 5(1-i)\,.$$

Eine komplexe Zahl $z = a + ib$ ist ungleich Null, genau dann, wenn $a^2 + b^2 \neq 0$ ist. In diesem Fall gilt:

$$(a+ib)\,\frac{(a-ib)}{(a^2+b^2)} = 1\,.$$

Also hat z dann ein multiplikatives Inverses und wir können schreiben

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}\,.$$

Hier einige Beispiele:

$$(1+i)^{-1} = \frac{1}{2}(1-i)\,, \quad (1-\sqrt{2}i)^{-1} = \frac{1}{3}(1+\sqrt{2}i)\,, \quad i^{-1} = -i\,.$$

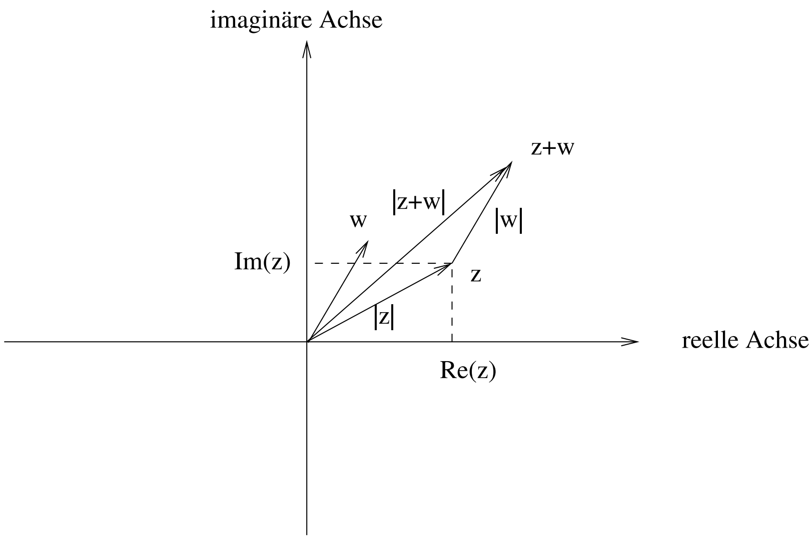
Fassen wir zusammen:

3.1.1 Satz *Die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ bildet einen sogenannten Körper. Das heisst, es gelten für die Addition und die Multiplikation dieselben Rechengesetze wie bei den reellen Zahlen, nämlich Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze. Ausserdem hat jede komplexe Zahl $z \neq 0$ ein multiplikatives Inverses.*

Man erhält eine geometrische Beschreibung der komplexen Zahlen, wenn man sie mit den Punkten der sogenannten *Gaussschen Zahlenebene* identifiziert. Dazu fasst man den Real- bzw. Imaginärteil einer Zahl als die Koordinaten eines Punktes in einer Ebene mit kartesischem Koordinatensystem auf. Die Abbildung

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2, \quad z = a + ib \mapsto (a, b)$$

ist eine 1:1–Zuordnung, jeder komplexen Zahl entspricht genau ein Punkt der Ebene und umgekehrt. Auf der x-Achse liegen die Punkte, die den reellen Zahlen entsprechen, und auf der y-Achse liegen die Vielfachen von i, die sogenannten rein imaginären Zahlen. Man spricht deshalb auch von der *reellen* bzw. der *imaginären Achse*.



Der *Betrag* einer komplexen Zahl ist definiert als

$$|z| = |a + ib| := \sqrt{a^2 + b^2}\,.$$

Er gibt gerade die Länge des Ortsvektors des entsprechenden Punktes in der komplexen Ebene an. Zum Beispiel ist

$$|1 + 2i| = \sqrt{5} \quad \text{und} \quad |4i - 1| = \sqrt{17}\,.$$

Für reelle Zahlen stimmt diese Definition mit der üblichen Definition des Betrages überein, denn

$$|a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Für den Betrag gelten die folgenden Rechenregeln für alle $z, w \in \mathbb{C}$:

1. $|z| \geq 0$, und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
2. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)
3. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

Beweis. Der erste Teil ergibt sich sofort aus der Interpretation des Betrages als Länge eines Ortsvektors.

Zu 2.: Die Addition komplexer Zahlen entspricht in der komplexen Zahlenebene der Addition der Ortsvektoren. Die Komposition der Ortsvektoren, die den Zahlen z und w entsprechen, liefert ein Dreieck in der Zahlenebene mit den Seitenlängen $|z|$, $|w|$ und $|z + w|$. Die Behauptung folgt nun aus der Tatsache, dass in einem ebenen

Dreieck jede Seite höchstens so lang ist wie die Summe der beiden anderen Seiten. Daher auch die Bezeichnung Dreiecksungleichung.

Zu 3.: Dazu setzen wir an $z = a + ib$ und $w = c + id$, setzen ein und rechnen nach. q.e.d.

3.1.2 Definition Unter der zu einer komplexen Zahl $z = a + ib$ *Konjugierten* versteht man die Zahl $\overline{z} := a - ib$. An der Mitternachtsformel kann man ablesen, dass eine quadratische Gleichung der Form $x^2 + px + q = 0$ (für $p, q \in \mathbb{R}$ mit $4q > p^2$) zwar keine reellen Lösungen, dafür aber zwei zueinander konjugierte komplexe Lösungen hat, nämlich $z_{1/2} = (-p \pm i\sqrt{4q - p^2})/2$.

In der Gaussschen Zahlenebene entspricht die komplexe Konjugation gerade der Spiegelung an der reellen Achse. Die Zuordnung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$, ist verträglich mit Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$, das heisst:

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w} \quad \text{und} \quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

Eine solche Abbildung wird als *Körperautomorphismus* bezeichnet. Mit der komplexen Konjugation lässt sich das Inverse einer Zahl einfach schreiben als:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \quad \text{für alle } z \neq 0.$$

Nun wollen wir die Multiplikation komplexer Zahlen geometrisch beschreiben. Zunächst wieder einige Beispiele:

3.1.3 Beispiele Die Multiplikation mit einer reellen Zahl $r > 0$ bewirkt in der Gaussschen Zahlenebene eine Streckung (oder Stauchung) der Ortsvektoren um den Faktor $r > 0$. Die Multiplikation mit der Zahl i entspricht einer Drehung um 90°. Denn

$$i\,z = i\,(a + ib) = -b + ia\,.$$

Und die Multiplikation mit i^2 ist eine Drehung um 180°, also dasselbe wie die Multiplikation mit -1.

Allgemeiner lässt sich die geometrische Bedeutung der Multiplikation in $\mathbb{C}$ besser verstehen, wenn man komplexe Zahlen nicht in kartesischen Koordinaten sondern in *Polarkoordinaten* angibt. Dabei ordnen wir jeder Zahl $z = x + iy \neq 0$ ihren Betrag $|z|$ und einen Winkel, das sogenannte Argument $\arg(z)$, zu. Das Argument $\arg(z)$ ist der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Radialstrahl durch z, gemessen gegen den Uhrzeigersinn.

3.1.4 Beispiel Die Zahl i hat den Betrag $|i| = 1$ und $\arg(i) = 90° = \frac{\pi}{2}$. Die Zahl $1+i$ hat die Polarkoordinaten $|1+i| = \sqrt{2}$ und $\arg(1+i) = 45° = \frac{\pi}{4}$. Für $z = -1+i$ schliesslich ist $|z| = \sqrt{2}$ und $\arg(-1+i) = 135° = \frac{3\pi}{4}$.

Durch den Winkel $\varphi = \arg(z)$ und den Betrag $|z|$ ist die Zahl z schon eindeutig festgelegt. Denn x, y sind die Längen der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks mit Hypotenuse der Länge $r = |z|$. Also gilt nach der Definition von Sinus bzw. Cosinus:

$$x = r\cos(\varphi) \quad \text{und} \quad y = r\sin(\varphi)\,.$$

Umgekehrt können wir aus den kartesischen Koordinaten die Polarkoordinaten folgendermassen berechnen:

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad \arg(z) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{falls } x > 0 \\ \arctan(y/x)+\pi & \text{falls } x < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0 \text{ und } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{falls } x = 0 \text{ und } y < 0 \end{cases}$$

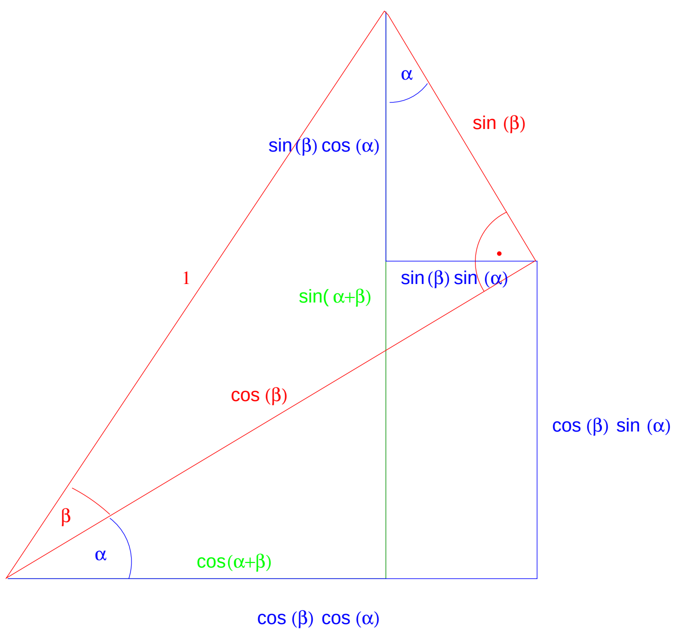
3.1.5 Beispiele Die Zahl $z = -1 + i\sqrt{3}$ hat den Betrag $|z| = 2$ und $\arg(z) = \arctan(-\sqrt{3})+\pi = \frac{2\pi}{3} = 120°$. Die Zahl $z = -3-4i$ hat den Betrag $|z| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ und $\arg(z) = \arctan(4/3)+\pi \approx 233° \approx 1.3\pi$.

Von grosser Bedeutung im Zusammenhang mit den komplexen Zahlen sind die sogenannten *Additionstheoreme* für Sinus und Cosinus:

3.1.6 Satz *Für alle Winkel $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta) \quad \text{und} \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)\,. \end{aligned}$$

Beweis. Die Herleitung dieser Aussagen ergibt sich aus der folgenden Zeichnung:



q.e.d.

Einige wichtige spezielle Werte von Sinus und Cosinus sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
tan	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$

Wenden wir das Additionstheorem nun beispielsweise an auf die Winkel $\alpha = 45°$ und $\beta = -30°$, dann erhalten wir $\sin(15°) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$ und $\cos(15°) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$.

Kommen wir nun zurück zu den komplexen Zahlen. Hat eine komplexe Zahl z den Betrag r und das Argument $\arg(z) = \varphi$, so gilt: $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Die komplexe Zahl von Betrag 1 und mit Argument $15° = \frac{\pi}{12}$ zum Beispiel lautet also $z = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) + i\,\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$.

3.1.7 Satz *Sind z, w komplexe Zahlen ungleich Null, dann gilt:*

$$\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)\,.$$

Beweis. Nehmen wir an, $\arg(z) = \phi$ und $\arg(w) = \psi$. Dann ist $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Für das Produkt der Zahlen erhalten wir also:

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi + i\sin\psi) =$$

$$|z| \cdot |w| \cdot (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)\,.$$

Nun können wir mit den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus schliessen:

$$z \cdot w = |z| \cdot |w| \cdot (\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))\,.$$

Daraus lesen wir ab: $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$. Dabei kann es sein, dass die Summe der Einzelwinkel über 2π hinausgeht. In diesem Fall ist gemeint, dass die Gleichheit der Winkel nach Abzug von 2π gilt. q.e.d.

Das bedeutet also: Man multipliziert komplexe Zahlen, indem man ihre Beträge multipliziert und die zugehörigen Winkel addiert.

Die reellen Funktionen Sinus und Cosinus stehen in engem Zusammenhang zu der komplexen Fortsetzung der Exponentialfunktion mithilfe der Exponentialreihe.

3.1.8 Definition Für $x \in \mathbb{R}$ setzt man

$$e^{ix} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!}\,.$$

Verwendet man nun, dass $i^2 = -1$ ist und sortiert nach geraden und ungeraden Exponenten um, erhält man

$$e^{ix} := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \,.$$

Wie wir später noch herleiten werden, konvergieren diese beiden Teilreihen gegen die trigonometrischen Funktionen:

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \,.$$

Also stellen wir fest:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \,.$$

Die Entdeckung dieser Beziehung geht auf Euler zurück und ist unter dem Namen *Eulersche Formel* bekannt. Zum Beispiel ist

$$e^{i\pi} = -1 \,.$$

Hier einige weitere Beispiele:

$$i + 1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} \,, \quad -i = e^{i3\pi/2} \,, \quad i - 1 = \sqrt{2}\, e^{i3\pi/4} \,.$$

Es gilt folgendes:

(a) Die Zahlen der Form $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, sind gerade die komplexen Zahlen von Betrag 1. Sie entsprechen also genau den Punkten auf der Kreislinie von Radius 1 in der komplexen Zahlenebene, dem sogenannten *Einheitskreis*.

(b) $e^{i\varphi} = e^{i\psi} \Leftrightarrow \varphi - \psi = 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $e^{-i\varphi} = (e^{i\varphi})^{-1} = \overline{e^{i\varphi}}$.

(d) $e^{i\varphi} \cdot e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}$.

Durch vollständige Induktion folgt die *DeMoivresche Formel*

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Diesen Zusammenhang kann man verwenden, um auf einfache Art hohe Potenzen von komplexen Zahlen zu bilden. Hier ein Beispiel dazu:

$$(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8 (e^{i\pi/4})^8 = 2^4 \cdot e^{i8\pi/4} = 16 \,.$$

3.2 Polynome über den komplexen Zahlen

Zusammenfassung: *Jede komplexe Zahl ausser Null hat in $\mathbb{C}$ genau n verschiedene n-te Wurzeln, die man in Polarkoordinaten explizit angeben kann. Wir beschreiben auch die Lösungsformel für Gleichungen dritten Grades von Cardano. Schliesslich halten wir den Fundamentalsatz der Algebra fest, der besagt, dass in $\mathbb{C}$ jedes Polynom von Grad n genau n Lösungen hat, wenn man die Vielfachheiten mitzählt. Das bedeutet, dass ein Polynom über $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren zerlegt werden kann. Und ein reelles Polynom besitzt immer eine Zerlegung in lineare oder quadratische Faktoren.*

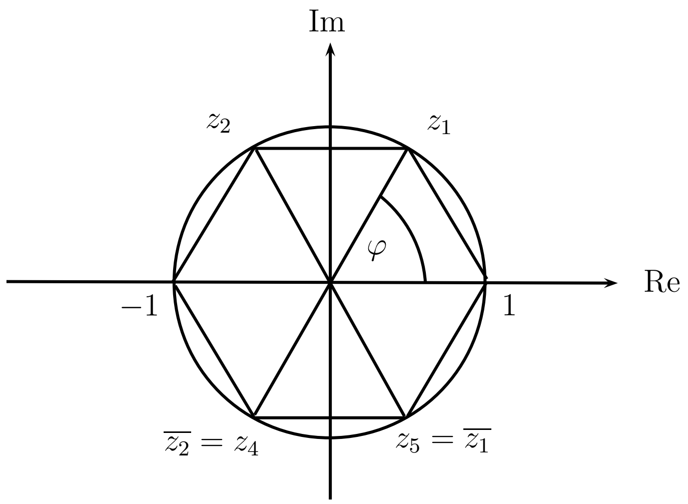
Mithilfe der Polarkoordinaten können wir für jede Wahl einer natürlichen Zahl n die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$, die sogenannten *n-ten Einheitswurzeln* angeben.

3.2.1 Satz *Zu $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $\varphi := \frac{2\pi}{n}$. Die Gleichung $z^n = 1$ hat genau n verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$, nämlich die Zahlen*

$$z_k = e^{ik\varphi} = \cos(k\frac{2\pi}{n}) + i\sin(k\frac{2\pi}{n}) \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Diese Zahlen liegen auf dem Einheitskreis und bilden die Eckpunkte eines regelmässigen n-Ecks. Man beachte, dass das n-Eck spiegelsymmetrisch zur reellen Achse liegt. Das bedeutet: Ist z eine n-te Einheitswurzel, so auch $\overline{z}$.

Für $n = 6$ erhält man:



Beweis. Wir rechnen zuerst nach, dass die angegebenen Zahlen tatsächlich die Gleichung lösen: $z_k^n = (e^{i\frac{k2\pi}{n}})^n = e^{ik2\pi} = e^{i0} = 1$. Nehmen wir jetzt umgekehrt an, $z = re^{i\psi}$ sei eine Lösung. Also ist $z^n = r^n(e^{i\psi})^n = r^n e^{in\psi} = 1$. Das bedeutet, $r = 1$ und $n\psi = k2\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, oder $\psi = k \cdot \frac{2\pi}{n} = k \cdot \varphi$. Die Zahl z kommt also schon in unserer Liste vor. q.e.d.

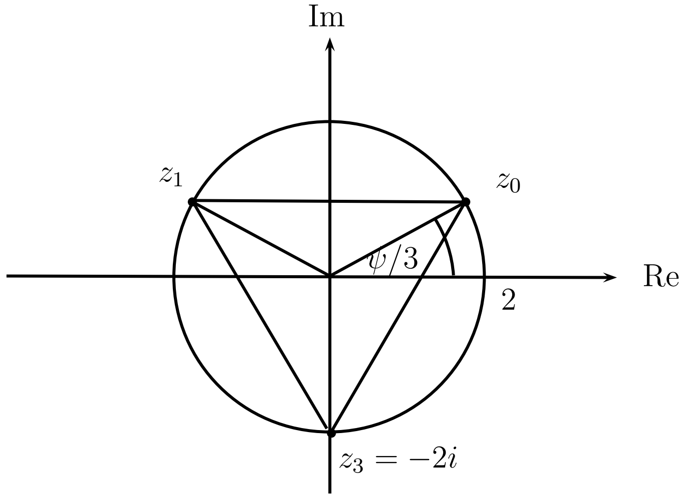
3.2.2 Beispiel Die dritten Einheitswurzeln sind

$$z_0 = 1\,, \quad z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad z_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Folgerung: *Die Gleichung $z^n = a$ (wobei $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$) hat in $\mathbb{C}$ genau n verschiedene Lösungen. Ist nämlich $a = r \cdot e^{i\psi}$, so lauten die Lösungen $z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\psi+k2\pi}{n}}$ für $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Diese Zahlen sind wiederum die Eckpunkte eines regelmässigen n-Ecks, das gegenüber dem n-Eck gebildet aus den n-ten Einheitswurzeln um den Winkel $\frac{\psi}{n}$ um den Nullpunkt gedreht und mit dem Faktor $\sqrt[n]{r}$ multipliziert ist.*

3.2.3 Beispiele

- Die Lösungen der Gleichung $z^3 = 8i$ lauten $z_0 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} + i$, $z_1 = 2 \cdot e^{i(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3})} = 2 \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$ und $z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$.



- Die Gleichung $z^3 = -1$ hat die Lösungen $z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_1 = e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3})} = -1$, $z_2 = e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3})} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{z_0}$.

Schauen wir uns nun allgemeiner Gleichungen an der Form

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0\,,$$

wobei die Zahlen $a_j \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ festgewählt sind. Der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung ist also ein *Polynom* von Grad n in z. Ist $a_n = 1$, so spricht man von einem *normierten* Polynom.

Die Nullstellen der Polynome von Grad 2 beschreibt die Mitternachtsformel, und für die Fälle $n = 3, 4$ fanden italienische Mathematiker im 16. Jahrhundert entsprechende Formeln.

Die *Cardanosche Formel* für die reelle Lösung der kubischen Gleichung

$$x^3 + 3px + 2q = 0 \quad (p, q \in \mathbb{R})$$

für den Fall $D := q^2 + p^3 > 0$ lautet:

$$x_1 = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}\,.$$

In diesem Fall gibt es auch noch zwei zueinander konjugierte komplexe Lösungen, nämlich

$$x_{2/3} = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} - \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}})\,.$$

Man findet die Formel für x_1, wenn man folgenden Ansatz in die kubische Gleichung einsetzt: $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$.

3.2.4 Beispiele
- Betrachten wir die Gleichung $x^3 + 6x + 2 = 0$. Hier ist $p = 2$ und $q = 1$, und $D = q^2 + p^3 = 9$. Die Formel von Cardano liefert die reelle Lösung $x_1 = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$. Ausserdem gibt es noch die komplexen Lösungen $x_{2/3} = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{-4}) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{-4})$.
- Wählen wir $p = 0$ und $q = -\frac{1}{2}$, kommen wir auf die Gleichung $x^3 - 1 = 0$. Hier ist $D = \frac{1}{4}$ und daher $x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 1$ und $x_{2/3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, wir finden also wieder die bereits oben berechneten dritten Einheitswurzeln.

Ist die Diskriminante $D = q^2 + p^3$ der kubischen Gleichung $x^3 + 3px + 2q = 0$ negativ, tauchen in der Formel "unmögliche" Quadratwurzeln aus negativen Zahlen auf, und das Zeichen $\sqrt[3]{\ }$ muss dann als mehrdeutige komplexe Wurzel interpretiert werden. In diesem Fall kommt man sogar auf drei verschiedene reelle Nullstellen!

Wählen wir zum Beispiel $q = 0$ und $p = -4$. Dann ist $q^2 + p^3 = -64$, und eine komplexe Quadratwurzel daraus ist $8i$. Die komplexen dritten Wurzeln der Zahl $w = 8i$ hatten wir oben bestimmt. Sie lauten $z_0 = \sqrt{3} + i$, $z_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = -2i$. Die dritten Wurzeln der Zahl $\overline{w} = -8i$ bekommt man durch Spiegelung an der reellen Achse. Sie lauten $\overline{z_0} = \sqrt{3} - i$, $\overline{z_1} = -\sqrt{3} - i$, $\overline{z_2} = +2i$. Addieren wir jetzt gemäss der Cardanoschen Formel jeweils entsprechende dritte Wurzeln, erhalten wir reelle Zahlen, denn $x_k := z_k + \overline{z_k} = 2\,\mathrm{Re}(z_k)$ für $k = 0, 1, 2$.

Konkret liefert das für unseren Fall:

$$z_0 + \overline{z_0} = 2\sqrt{3}, \quad z_1 + \overline{z_1} = -2\sqrt{3}, \quad z_2 + \overline{z_2} = 0\,.$$

Tatsächlich sind diese drei Zahlen die Lösungen der kubischen Gleichung

$$x^3 - 12x = 0\,.$$

Für Gleichungen von Grad $n \geq 5$ gibt es keine entsprechenden allgemeinen Lösungsformeln. Aber man kann beweisen, dass jede solche Gleichung über den komplexen Zahlen Lösungen hat.

Fundamentalsatz der Algebra: *Über $\mathbb{C}$ hat jedes Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ eine Nullstelle.*

Der Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra ist schwierig und kann an dieser Stelle nicht gegeben werden, weil man dafür mehr Theorie benötigt. Per Induktion folgt durch Polynomdivision aus dem Fundamentalsatz sogar, dass jede Gleichung von Grad n genau n Lösungen hat, wenn man die Vielfachheiten mitzählt. Dazu zunächst ein Beispiel:

3.2.5 Beispiel Das Polynom $p(z) = z^3 - 4z + 3$ hat offenbar die Nullstelle $z_1 = 1$. Nun teilen wir p durch $(z - 1)$ und erhalten $p(z) = z^3 - 4z + 3 = (z - 1)(z^2 + z - 3)$. Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $z^2 + z - 3$ lauten $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$. Wir haben also drei Nullstellen von p gefunden, und p hat die Zerlegung:

$$p(z) = z^3 - 4z + 3 = (z - 1)(z^2 + z - 3) = (z - 1)(z + \frac{1 - \sqrt{13}}{2})(z + \frac{1 + \sqrt{13}}{2})\,.$$

Allgemeiner beobachten wir:

3.2.6 Bemerkung *Ist p ein Polynom von Grad $n \geq 2$ und $z_0 \in \mathbb{C}$, dann gibt es ein Polynom q von Grad $n-1$ und eine Zahl $c \in \mathbb{C}$ mit*

$$p(z) = q(z)(z - z_0) + c\,.$$

Genauer ist $c = p(z_0)$. Ist also z_0 eine Nullstelle von p, dann ist p teilbar durch $z - z_0$.

Beweis. Man findet q, indem man p wie oben ausgeführt durch $(z - z_0)$ teilt, und eventuell bleibt dann noch ein Rest c übrig. Einsetzen liefert $p(z_0) = c$. q.e.d.

Nun ergibt sich durch vollständige Induktion über den Grad des Polynoms:

3.2.7 Satz *Ist $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ ein Polynom von Grad $n \in \mathbb{N}$ mit Koeffizienten $a_j \in \mathbb{C}$, dann gibt es komplexe Zahlen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit*

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)\,.$$

Die Liste der z_j besteht aus sämtlichen Nullstellen des Polynoms p, dabei können Nullstellen auch mehrfach aufgelistet sein. Die Häufigkeit, mit der eine bestimmte Nullstelle in der Liste vorkommt, bezeichnet man als Vielfachheit *der Nullstelle.*

3.2.8 Beispiele

1. Das Polynom $p(z) = z^2 + a$ ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) hat die Nullstellen $\pm i\sqrt{a}$, und wir können es als Produkt in der Form $p(z) = (z - i\sqrt{a})(z + i\sqrt{a})$ schreiben.

2. Das Polynom $p(z) = z^3 - 1$ hat als Nullstellen in $\mathbb{C}$ gerade die dritten Einheitswurzeln $z_0 = 1$, $z_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und $z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ und
$$p(z) = z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1) = (z-1)(z+(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(z+(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))\,.$$

3. Das Polynom $p(z) = z^4 + 3z^2 + 2$ hat die Nullstellen $\pm i$ und $\pm i\sqrt{2}$, es lässt sich also folgendermassen zerlegen:
$$p(z) = (z^2+1)(z^2+2) = (z-i)(z+i)(z-i\sqrt{2})(z+i\sqrt{2})\,.$$

4. In den bisherigen Beispielen gab es nur einfache Nullstellen. Hier ein Polynom mit einer doppelten und einer dreifachen Nullstelle:
$$p(z) = (z^2 - 4z + 4)(z^3 + 3z^2 + 3z + 1) = (z-2)^2(z+1)^3\,.$$

3.2.9 Bemerkung *Sind alle Koeffizienten des Polynoms p reell, und ist $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Nullstelle, so ist auch $\overline{w}$ eine Nullstelle und zwar von derselben Vielfachheit. In diesem Fall lässt sich p (über $\mathbb{R}$) durch das quadratische reelle Polynom $q(x) = x^2 - (2\,\mathrm{Re}(w))x + |w|^2$ teilen.*

3.2.10 Folgerung *Reelle Polynome von Grad $n > 0$ lassen sich über $\mathbb{R}$ vollständig in ein Produkt aus Polynomen von Grad ≤ 2 zerlegen.*