Kapitel 2

Funktionen und Grenzwerte

2.1 Folgen und Grenzwerte

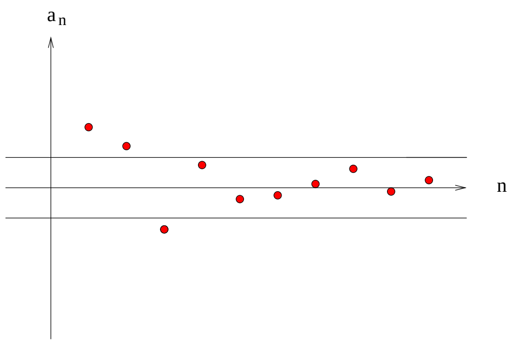
Zusammenfassung: *Hier wird der für die Analysis zentrale Begriff der Konvergenz einer Zahlenfolge gegen einen Grenzwert definiert. Es werden Beispiele betrachtet und einige Rechenregeln im Zusammenhang mit Grenzwerten formuliert. Bemerkenswert ist auch das Monotoniekriterium für Konvergenz.*

2.1.1 Definition Eine Folge ist eine Zuordnung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, geschrieben als Liste $(a_1, a_2, \ldots)$ oder in der Form $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hier sind ein paar Beispiele:

$$\left.\begin{array}{lll}
2, 4, 6, 8, \ldots & a_n & = 2n \\
1, 4, 9, 16, \ldots & a_n & = n^2 \\
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots & a_{n+2} & = a_{n+1} + a_n \\
1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots & a_n & = \frac{1}{n} \\
-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \ldots & a_n & = \frac{(-1)^n}{2^n} \\
1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \ldots & a_{2n} & = \frac{1}{n+1}, a_{2n-1} = 1 \\
\frac{1}{1}, \frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}, \ldots & a_n & = \frac{1}{n!}
\end{array}\right\} \forall n \in \mathbb{N}$$

2.1.2 Definition Man sagt, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a_n| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Anders gesagt: Tragen wir sämtliche Punkte (n, a_n) (für $n \in \mathbb{N}$) in ein kartesisches Koordinatensystem ein, so gilt: In jedem noch so dünnen Streifen um die x-Achse liegen alle markierten Punkte bis auf endlich viele Ausnahmen. Man nennt die Folge dann auch *Nullfolge*.



2.1.3 Beispiele 1. Die Folge der Stammbrüche $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0. Denn zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n_0 mit $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Daraus folgt $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Konkret gilt dies z.B. für $\epsilon = 10^{-9}$ ab $n_0 = 10^9 + 1$.

2. Auch $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$ konvergiert gegen 0, allerdings werden die Werte nicht immer kleiner, sondern sie oszillieren immer enger um den Wert 0.

3. Die Folge, gegeben durch $a_{2n} = \frac{1}{n+1}$ bzw. $a_{2n-1} = 1$ für $n \in \mathbb{N}$, konvergiert nicht gegen Null. Denn alle ungeraden Folgenglieder sind gleich 1. Also gibt es offenbar zu $\epsilon = \frac{1}{2}$ kein passendes n_0. Im entsprechenden ϵ-Streifen um die x-Achse liegen nur die geraden Folgenglieder, alle ungeraden Folgenglieder sind ausserhalb des Streifens.

4. Die Folge $(\frac{1}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge, da $\frac{1}{n!} < \frac{1}{n}$ für alle n. Diese Folge konvergiert also noch schneller gegen Null, als die Folge der Stammbrüche.

5. Die Folge $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergiert ebenfalls gegen Null, allerdings langsamer als die Folge $\frac{1}{n}$. Denn zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ findet man sicher eine natürliche Zahl $n_0 > \frac{1}{\epsilon^2}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$ die Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \epsilon\,.$$

Für $\epsilon = 10^{-2}$ zum Beispiel ist $n_0 = 10'001$ gross genug.

Vergleichen wir Fakultäten und Potenzen, stellen wir folgendes fest:

2.1.4 Beispiel Die Folge der Zahlen $a_n = \dfrac{n \cdot 3^n}{n!}$ ist eine Nullfolge.

Beweis. Wie man per Induktion zeigen kann, gilt die Abschätzung $n^2 \cdot 3^n < 81 \cdot n!$ für alle $n \geq 4$. Daraus folgt

$$0 < a_n = \frac{n \cdot 3^n}{n!} < \frac{81}{n}\,.$$

Wählt man jetzt zu einer vorgegebenen positiven Zahl ϵ eine natürliche Zahl n_0, so dass $n_0 > \frac{81}{\epsilon}$, dann folgt $a_n < \frac{81}{n} \leq \frac{81}{n_0} < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Konkret ist für $\epsilon = 10^{-9}$ die verlangte Abschätzung erfüllt ab $n_0 = 81'000'000'001$. q.e.d.

2.1.5 Definition Man sagt, eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, wenn die Folge der Differenzen $a_n - a$ gegen 0 konvergiert. Ist dies der Fall, schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,.$$

2.1.6 Beispiele 1. Die Folge $a_n = \dfrac{1-n}{n}$ konvergiert gegen -1, denn $|a_n + 1| = \frac{1-n}{n} + 1 = \frac{1}{n}$.

2. Die Folge $a_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2+1}$ konvergiert gegen 2. Denn:
$$\left|\frac{2n^2-1}{n^2+1} - 2\right| = \frac{3}{n^2+1} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad n^2 > \frac{3}{\epsilon} - 1\,.$$
Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ findet man sicher eine Quadratzahl n_0^2, die dies erfüllt, und die gewünschte Ungleichung gilt dann erst recht für alle $n \geq n_0$. Konkret ist zum Beispiel für $\epsilon = 10^{-6}$ die Zahl $n_0 = 2'000$ gross genug.

3. Sei jetzt $a > 1$ fest gewählt. Dann gilt
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1\,.$$
Denn wie in den Übungen gezeigt, ist $\sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wählt man jetzt zu $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 > \frac{a-1}{\epsilon}$, dann ist $0 < \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n} \leq \frac{a-1}{n_0} < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$.

2.1.7 Definition Man sagt, eine Folge positiver Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen unendlich, wenn die Folge $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} 1/a_n = 0\,.$$
Das bedeutet, dass jede vorgegebene Schranke $M > 0$ von allen Folgengliedern a_n bis auf endliche viele Ausnahmen übertroffen wird.

Um zu entscheiden, ob bei einer Folge Konvergenz vorliegt und wenn ja, gegen welchen Wert, reicht es nicht, die ersten 10 bis 20 Werte per Taschenrechner zu ermitteln und zu schätzen. Berechnet man beispielsweise die Glieder der Folge, definiert durch $a_n = 1 + 10^{-9}n$, bis auf 6 Kommastellen genau, dann sind die ersten tausend Folgenglieder nicht von 1 zu entscheiden. Die Folge konvergiert aber keineswegs gegen 1, sondern die Zahlen a_n werden sogar beliebig gross.

2.1.8 Satz *Sei $q \in \mathbb{R}$. Ist $q > 1$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$. Ist $|q| < 1$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.*

Beweis. Nehmen wir zuerst an, dass $q > 1$. Dann liefert die Bernoullische Ungleichung (siehe 1.2):
$$q^n = (1 + (q-1))^n \geq 1 + n(q-1)\,.$$
Weil $\lim_{n\to\infty}(1 + n(q-1)) = \infty$, folgt nun sofort $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$. Sei jetzt $|q| < 1$. Ist $q = 0$, ist nichts zu zeigen. Ist $q \neq 0$, so ist $a = |1/q| > 1$ und daher wie eben gezeigt $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$. Das bedeutet nach Definition gerade, $\lim_{n\to\infty} 1/a^n = \lim_{n\to\infty} |q|^n = 0$. Also ist auch $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. q.e.d.

2.1.9 Bemerkung *Der Grenzwert der Summe der Potenzen einer festen Zahl wird auch als geometrische Reihe bezeichnet. Für $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$ gilt:*
$$1 + q + q^2 + \cdots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q}{1-q}\,.$$

Beweis. Wir haben bereits durch Induktion folgende Formel für die geometrische Summe bewiesen:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - 1 = \frac{q^{n+1}-q}{q-1}\,.$$

Ausserdem ist wie eben gezeigt $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$. Daraus folgt sofort die Behauptung. q.e.d.

Hier einige konkrete Beispiele:

- Für $q = \frac{1}{2}$ erhalten wir $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \cdots = 2$.
- Für $q = -\frac{1}{2}$ ergibt sich $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \cdots = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$.
- Für $q = \frac{1}{3}$ ergibt sich $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.
- Ist $|q| \geq 1$, so konvergiert die zugehörige geometrische Reihe nicht. Denn ist $q > 1$, so wachsen die Teilsummen über jede Schranke hinaus.
  Für $q = -1$ lauten die Teilsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$.
  Sie konvergieren also ebenfalls nicht. Ist schliesslich $q < -1$, so wachsen jedenfalls die Beträge der Teilsummen über alle Schranken hinaus.

Jede periodische Dezimalentwicklung ist eigentlich nichts anderes als eine geometrische Reihe. Konkret zum Beispiel:

$$0,\overline{1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^k} = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{9} \quad \text{und} \quad 0,\overline{12} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{12}{100^k} = 12\,\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{12}{99}$$

Jede Dezimalentwicklung einer positiven reellen Zahl a liefert eine monoton anwachsende Folge mit Grenzwert a, wenn wir jeweils die Angabe der Zahl bis auf n Kommastellen als Folgenglied a_n auffassen. Hier wiederum ein Beispiel:

$$0,1001000010000001\ldots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{10^{k^2}}$$

2.1.10 Satz *Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Nehmen wir an, eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere sowohl gegen a, als auch gegen b, und $a < b$. Ist $\epsilon > 0$ klein genug, so ist $a+\epsilon < b-\epsilon$. Genauer gilt dies, wenn $\epsilon < \frac{b-a}{2}$. Wählen wir, um sicher zu gehen, zum Beispiel $\epsilon = \frac{b-a}{4}$. Da $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, erfüllen fast alle Folgenglieder a_n bis auf endlich viele Ausnahmen die Ungleichung $|a_n - a| < \epsilon$. Nun ist

$$|a_n - a| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\epsilon < a_n - a < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \epsilon < a_n < a + \epsilon\,.$$

Das Entsprechende gilt auch für b, das heisst $b-\epsilon < a_n < b+\epsilon$ für fast alle n. Weil ausserdem $a+\epsilon < b-\epsilon$, folgt daraus $a_n < a_n$ für fast alle n. Das ist aber unmöglich. q.e.d.

Die Grenzwertbildung ist mit den Grundrechenarten verträglich. Genauer gilt folgendes:

2.1.11 Satz *Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen, so konvergieren auch die Folgen, gebildet aus den Summen, den Differenzen und den Produkten von a_n und b_n, und*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \pm (\lim_{n\to\infty} b_n) \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim_{n\to\infty} b_n)\,.$$

Ist $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, so ist $b_n \neq 0$ für fast alle n und

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}\,.$$

Auf den Beweis dieser Grenzwertrechenregeln wollen wir verzichten. Stattdessen hier einige Beispiele:

- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^k} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n})^k = 0$ und $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}^k} = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n}})^k = 0$ für alle $k\in\mathbb{N}$.
- $$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n+2}{2n^3-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+3\frac{1}{n^2}+2\frac{1}{n^3}}{2-\frac{1}{n^3}} = \frac{1}{2}\,.$$
- $$\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}^5+4n-1}{\sqrt{n}^5-\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3+4\frac{1}{\sqrt{n}^3}-\frac{1}{\sqrt{n}^5}}{1-\frac{1}{n^2}} = 3\,.$$

Bei Quotienten von Nullfolgen kann sozusagen alles passieren, deshalb ist dort Vorsicht angebracht.

2.1.12 Beispiele

- $\lim_{n\to\infty}\frac{2/n}{1/(n+1)} = 2\,.$
- Sei $a_n = \frac{1}{n}$ und $b_n = \frac{1}{n^2}$. Dann ist $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0\,.$

Auch bei Quotienten gegen unendlich gehender Folgen kann alles passieren.

2.1.13 Beispiele

- Offenbar ist $\lim_{n\to\infty} 2n = \lim_{n\to\infty} n! = \infty\,.$ Aber die Fakultäten wachsen viel schneller, und es gilt
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)!} = 0\,.$$
- Ebenso ist $\lim_{n\to\infty} 2^n = \lim_{n\to\infty} n = \infty\,.$ Auch die Zweierpotenzen wachsen viel schneller wachsen als die natürlichen Zahlen. Genauer kann man durch Induktion zeigen, dass $\frac{2^n}{n} > n$ für $n \geq 5$. Also ist
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n} = \infty\,.$$

- Schliesslich ist
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n}}{\sqrt{n+1}} = 3\,.$$

Die Grenzwertbildung ist auch mit der Relation $\leq$ verträglich.

2.1.14 Satz *Sind* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergente Folgen mit* $a_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *so folgt*
$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n\,.$$

Diese Aussage wird allerdings falsch, wenn wir $\leq$ durch $<$ ersetzen. Zum Beispiel ist $1 - \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{n}$ für alle n, aber $\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n}) = 1 = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})$.

Beweis. Beweisen wir die Aussage des Satzes durch Widerspruch. Angenommen, der Grenzwert a der Folge a_n wäre echt grösser als der Grenzwert b der Folge b_n. Setzen wir $\epsilon := \frac{a-b}{4}$. Für dies ϵ ist sicher $b + \epsilon < a - \epsilon$. Für genügend grosse n müsste dann gelten:
$$b_n < b + \epsilon < a - \epsilon < a_n\,.$$
Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung. q.e.d.

Es gilt der folgende Vergleichssatz:

2.1.15 Satz *Seien* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *drei Folgen mit* $a_n \leq b_n \leq c_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$, *so folgt* $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

Beweis. Zu $\epsilon > 0$ wählen wir einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass sowohl $a-\epsilon \leq a_n \leq a+\epsilon$ als auch $a-\epsilon \leq c_n \leq a+\epsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Daraus folgt $a-\epsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq a+\epsilon$ und daher $|b_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$. Damit ist die Konvergenz der Folge (b_n) gegen a gezeigt. q.e.d.

Ein nützliches Konvergenzkriterium ist das folgende Monotoniekriterium. Dabei handelt es sich eigentlich um das Vollständigkeitsaxiom der Menge der reellen Zahlen.

2.1.16 Bemerkung *Jede monoton steigende (bzw. fallende), nach oben (bzw. unten) beschränkte Zahlenfolge hat in* $\mathbb{R}$ *einen Grenzwert.*

Wie schon erwähnt, können wir jede Dezimalentwicklung einer positiven Zahl a als eine solche monoton wachsende Folge auffassen, die gegen a konvergiert. Hier ist ein weiteres Beispiel für eine monoton wachsende, beschränkte Folge:

2.1.17 Bemerkung *Die Folge der Teilsummen* $s_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ *ist monoton steigend und durch* 2 *nach oben beschränkt, also existiert der Grenzwert* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Beweis. Durch vollständige Induktion kann man zeigen (siehe Übungsaufgabe):

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n} < 2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist die Teilsummenfolge wie behauptet nach oben beschränkt. Ausserdem ist die Folge streng monoton wachsend, da $\frac{1}{k^2} > 0$ ist für alle $k \in \mathbb{N}$. q.e.d.

Euler hat diese unendliche Reihe untersucht und festgestellt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Die Berechnung dieses Grenzwertes ist aber nicht einfach und muss zunächst auf später verschoben werden.

2.1.18 Bemerkung *Die harmonische Reihe:*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

hat keinen endlichen Grenzwert. Die Folge der Teilsummen $s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *wächst über alle Schranken hinaus.*

Beweis. Um das einzusehen, fassen wir folgende Stammbrüche jeweils zusammen und schätzen nach unten ab:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} & \geq & \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} & \geq & \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} & \geq & \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \\ & \vdots & \end{array}$$

Daraus folgt $s_{2^n} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}$ für alle n. Also kann die Folge der Teilsummen der harmonischen Reihe nicht nach oben beschränkt sein. q.e.d.

Für rekursiv definierte Folgen, die monoton wachsen und beschränkt sind, kann man den Grenzwert mithilfe der Rekursion konkreter bestimmen. Hierfür ein Beispiel.

2.1.19 Beispiel Die folgende rekursiv definierte Folge konvergiert gegen 2:

$$a_1 := \sqrt{2}, \quad a_{n+1} := \sqrt{2 + a_n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Durch vollständige Induktion zeigen wir zunächst: $a_n < a_{n+1} < 2 \;\forall n \in \mathbb{N}$.
$n = 1$: zu zeigen ist $\sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} < 2$. Das ist äquivalent zu $2 < 2 + \sqrt{2} < 4$, und also offensichtlich richtig.

$n \to n+1$: Die Induktionsbehauptung für n lautet $a_n < \sqrt{2+a_n} < 2$. Daraus folgt: $\sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+\sqrt{2+a_n}} < \sqrt{2+2} = 2$. Das ist bereits die Behauptung für $n+1$.

Also ist die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt und hat nach dem Monotoniekriterium einen Grenzwert, etwa a. Aus der Rekursion folgt $a^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty}(2+a_n) = 2+a$, das bedeutet $a = 2$ oder $a = -1$. Weil ausserdem $a \geq a_1 = \sqrt{2}$ sein muss, erhalten wir $a = 2$. q.e.d.

Wir können nun auch eine Definition der Eulerschen Zahl e angeben.

2.1.20 Satz *Die Folge der Zahlen $a_n := (1+\frac{1}{n})^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist monoton wachsend, die Folge der Zahlen $b_n := (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) ist monoton fallend und es gilt:*

$$2 \leq (1+\frac{1}{n})^n \leq (1+\frac{1}{n})^{n+1} \leq 4 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Folgen (a_n) und (b_n) sind konvergent und haben denselben Grenzwert, den man als die Eulersche Zahl e bezeichnet.

Die Folge der a_n lässt sich im Zusammenhang mit Zinseszinsrechnung folgendermassen interpretieren. Nehmen wir an, ein Kapital K werde während einer bestimmten Zinsperiode T zu 100% verzinst. Dann wird das Kapital nach Ablauf der Zeit T verdoppelt. Zahlt man stattdessen aber bereits nach der Hälfte der Zeit T den halben Zins aus und verzinst den Zwischenbetrag von $K\cdot(1+\frac{1}{2})$ nach Ablauf des gesamten Zeitraums nochmals mit 50% Zins, beträgt das Kapital dann insgesamt $K(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2}) = K \cdot 2,25$.

Unterteilt man den Zeitraum T noch weiter in n Abschnitte ($n \in \mathbb{N}$) und wird das jeweilige Zwischenkapital am Ende jedes Teilabschnitts zu einem Zinssatz von $\frac{100}{n}$% verzinst, so beträgt das Kapital am Ende $K \cdot (1+\frac{1}{n})^n$. Der Grenzwert $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ gibt also an, um welchen Faktor sich ein Kapital bei kontinuierlicher Verzinsung vergrössern würde.

Auch die Folge der Zahlen b_n hat etwas mit Zinseszins zu tun. Wenn man ein Kapital bei einer Einteilung der Gesamtzeit in n Abschnitte bereits zu Beginn der Zeit erstmals verzinst und zusätzlich nach Ablauf jedes einzelnen Abschnitts, insgesamt also $(n+1)$-mal, und dabei jeweils den Zinssatz $\frac{100}{n}$ verwendet, beträgt das Kapital einschliesslich Zinseszins nach Ablauf der Gesamtzeit $K \cdot (1+\frac{1}{n})^{n+1}$.

Beweis des Satzes: Nehmen wir an, die Monotonie der Folgen (a_n) und (b_n) sei gezeigt. Dann ergeben sich die behaupteten Schranken durch Einsetzen von $n = 1$. Die mittlere Ungleichung folgt so:

$$(1+\frac{1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})^n \cdot (1+\frac{1}{n}) > (1+\frac{1}{n})^n .$$

Also ist die Folge (a_n) durch 4 nach oben beschränkt und daher konvergent. Aus den Grenzwertrechenregeln folgt jetzt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} a_n .$$

Der Beweis der Monotonie ist raffinierter, und wir verzichten hier darauf. q.e.d.