Übungen zur Vorlesung Mathematische Methoden I — Dr. A. A'Campo-Neuen
Herbstsemester 2021 — 28. Oktober 2021

Aufgabenblatt 7

Wenn Sie sich für das Niveau A der Übungen entschieden haben, brauchen Sie nur die ersten drei der folgenden Aufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1. *(Ableitungsregeln anwenden)* Berechnen Sie mithilfe von Produktregel, Quotientenregel und Kettenregel die Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, (b) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ (für $x \neq 0$), (c) $f(x) = e^{-2x}\cos(3x)$,

(d) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, (e) $f(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ (für $x \neq 0$). (5 Punkte)

Aufgabe 2. *(Tangenten)* Bestimmen Sie jeweils die Tangenten zum Graphen von f an den angegebenen Stellen.

(a) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 2$, $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

(b) $f(x) = \cosh(x) := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, $x_0 = 0$, $x_1 = \ln(2)$.

Berechnen Sie bei (a) ausserdem die Schnittstellen der Tangenten mit dem Graphen von f, falls es weitere gibt ausser der Berührstelle, und machen Sie eine Skizze.
(5 Punkte)

Aufgabe 3. *(Differenzierbarkeit)* Sind die folgenden Funktionen jeweils an der Stelle $x = 0$ differenzierbar und falls ja, welchen Wert hat $f'(0)$?

(a) $f(x) = |x|\,(x^2+1)$, (b) (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln(x) & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ (d) $f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Hinweis: Bei (b),(c) und (d) sollten Sie jeweils mit der Definition 4.1.1 und eventuell der l'Hospitalschen Regel argumentieren. (4 Punkte)

Aufgabe 4. *(Beweis der Quotientenregel)* (a) Zeigen Sie mit der Grenzwertdefinition, dass die Ableitung von $f(x) = 1/x$ (für $x \neq 0$) lautet $f'(x) = -1/x^2\ \forall x \neq 0$.

(b) Sei jetzt f eine beliebige differenzierbare Funktion ohne Nullstellen auf dem Intervall I. Bestimmen Sie mit der Kettenregel (und NICHT der Quotientenregel) die Ableitung von $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ (für $x \in I$).

(c) Leiten Sie nun aus (b) und der Produktregel die Quotientenregel her. (3 Punkte)

Aufgabe 5. *(Tangente der Exponentialfunktion)* Es gilt $e^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n \forall x \in \mathbb{R}$. Dies dürfen Sie ohne Begründung verwenden, um folgendes zu zeigen:

(a) $e^x \geq 1 + x$, falls $|x| < 1$. (b) $e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$, falls $x < 1$. (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

(3 Punkte)

Und hier noch zwei Verständnisfragen zur Selbstkontrolle:

Frage 1. *(Differenzierbarkeit)* Welche der folgenden Aussagen über eine Funktion f sind korrekt?

(a) Ist f bei x_0 stetig, aber nicht differenzierbar, dann hat f dort eine Knickstelle. ☐

(b) Hat f bei x_0 eine Sprungstelle, dann ist f dort nicht differenzierbar. ☐

(c) Hat der Graph von f bei x_0 eine eindeutige Tangente, dann ist f bei x_0 differenzierbar. ☐

(d) Hat f bei x_0 eine Definitionslücke und gibt es dort eine Tangente von rechts und eine von links mit derselben Steigung, dann lässt sich f differenzierbar nach x_0 fortsetzen. ☐

Frage 2. *(Umkehrfunktionen)* Welche der folgenden Aussagen über eine umkehrbare, differenzierbare Funktion f und ihre Umkehrfunktion g sind korrekt?

(a) Hat die Tangente des Graphen von f an der Stelle x_0 die Steigung m, dann hat die Tangente des Graphen von g bei $f(x_0)$ die Steigung $1/m$. ☐

(b) Hat der Graph von f an der Stelle x_0 eine waagerechte Tangente, dann hat der Graph von g an der Stelle $f(x_0)$ eine senkrechte Tangente und ist dort nicht differenzierbar. ☐

(c) Der Graph von g besitzt an jeder Stelle x_0 eine eindeutige Tangente. ☐

Abgabe der Aufgaben: Donnerstag, den 4. November 2021, bis 12.30 Uhr als .pdf via ADAM bei Ihrem Tutor bzw. Ihrer Tutorin.