Kapitel 4

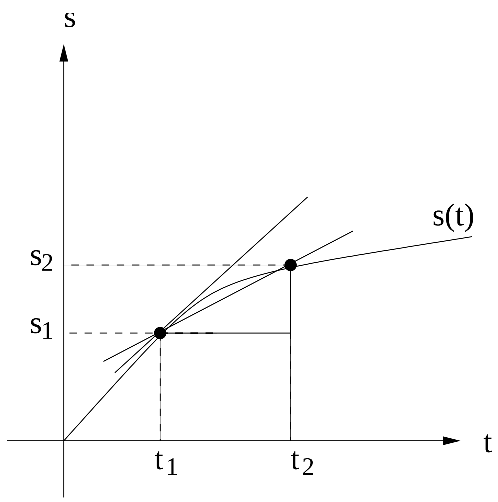
Differentialrechnung

4.1 Differenzierbarkeit

Zusammenfassung: *Das Konzept der Ableitung einer Funktion ist ein fundamentaler Begriff der neuzeitlichen Mathematik. Hier wird der Begriff als Grenzwert definiert, anhand von Beispielen erläutert und geometrisch interpretiert. Mithilfe der Ableitungsrechenregeln ist es möglich, die Ableitungen der elementaren Funktionen, dort wo sie existieren, auch effektiv zu berechnen.*

Die Entwicklung der Differential- und Integralrechnung, oder wie die Begründer der Theorie es nannten, der calculus differentialis und integralis geht vor allem auf zwei bedeutende Mathematiker und Physiker des 17. Jahrhunderts zurück, nämlich Sir Isaac Newton (1642-1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Beide entwickelten die Theorie unabhängig voneinander und verwendeten unterschiedliche Schreibweisen, die bis heute parallel nebeneinander verwendet werden.

Newton entwickelte zunächst ein Konzept von Geschwindigkeit. Legt ein Fahrzeug in einer Zeit $\Delta t = t_2 - t_1$ einen Weg $\Delta s = s_2 - s_1$ zurück, so gibt der Quotient $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ die durchschnittliche Geschwindigkeit des Fahrzeugs auf dieser Strecke an. Um die momentan erreichte Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_1 zu beschreiben, geht man zu immer kürzeren Zeitintervallen Δt über. In heutiger Sprache heisst das, man macht einen Grenzübergang für $\Delta t \to 0$ und definiert die *Momentangeschwindigkeit* als $v(t_1) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Fassen wir den zurückgelegten Weg als eine Funktion $s(t)$ der Zeit auf, erhalten wir folgenden Graphen:



Aus der Graphik können wir ablesen, dass die Momentangeschwindigkeit auch eine weitere, geometrische Interpretation hat. Denn wir können den Differenzenquotienten $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ auch als Steigung der Sekante an den Graphen von $s(t)$ auffassen. Durch den Grenzübergang $\Delta t \to 0$ erhalten wir dann die Steigung der Tangenten an den Graphen im Punkt (t_1, s_1):

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \tan \alpha \,,$$

wobei α den Winkel angibt, den die Tangente mit der Horizontalen bildet.

Hier nun die heutige Definition von Ableitung:

4.1.1 Definition Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ heisst *differenzierbar* an der Stelle $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. In diesem Fall heisst $f'(x_0)$ die *Ableitung* von f an der Stelle x_0. Die Gerade, gegeben durch die Gleichung $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ist die *Tangente* an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Der Wert $f'(x_0)$ gibt also die Steigung der Tangente an.

Es werden auch andere Schreibweisen verwendet: Leibniz dachte sich die Ableitung als Quotient von infinitesimal kleinen Differenzen. Deshalb spricht man auch vom *Differentialquotienten* und schreibt statt $f'(x_0)$ auch

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} = \partial_x f(x_0)\,.$$

Wird die Variable x als Zeit interpretiert, schreibt man statt x häufig t und verwendet die Notation von Newton für die Ableitung: $\dot{f}(t)$.

4.1.2 Definition Die Funktion f heisst auf I differenzierbar, wenn f in jedem Punkt des Intervalls I differenzierbar ist. In diesem Fall liefert die punktweise Ableitung eine Funktion, nämlich $f'\colon I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$.

Nun einige erste Beispiele:

- Sei $c \in \mathbb{R}$ vorgegeben und $f(x) = cx$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{c(x-x_0)}{x-x_0} = c$. Die Ableitung ist also konstant gleich c. Man sieht dies auch direkt am Graphen von f. Denn hier handelt es sich um eine Gerade der Steigung c, die an jedem Punkt mit ihrer Tangente übereinstimmt.

- Die Parabelfunktion $f(x) = x^2$ ist überall differenzierbar und es gilt:

  $$f'(x) = 2x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

  Denn $\frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0$ und daraus folgt $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0}(x + x_0) = 2x_0$.

- Die Betragsfunktion $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ ist im Punkt $x = 0$ zwar stetig, aber nicht differenzierbar. Denn es gelten

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{|x|}{x} = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 0} \frac{|x|}{x} = 1\,.$$

Da der links- und der rechtsseitige Grenzwert nicht übereinstimmen, kann es keine Ableitung geben. Und tatsächlich fällt es schwer, an den Graphen der Betragsfunktion im Nullpunkt eine Tangente zu zeichnen, denn dort liegt eine "Knickstelle" vor.

- Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \geq 0$ ist bei $x = 0$ nicht differenzierbar, denn im Nullpunkt hat die Tangente unendliche Steigung:

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty\,.$$

Für $x_0 > 0$ ist dagegen

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = f'(x_0)\,.$$

- Die Funktion $f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (für $x \neq 0$) lässt sich stetig nach 0 fortsetzen durch $f(0) = 0$. Denn nach dem Vergleichssatz ist $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, weil $|f(x)| \leq |x| \cdot |\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$ für alle x. Aber die so fortgesetzte Funktion ist im Nullpunkt nicht differenzierbar. Denn der Grenzwert $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sin(\frac{1}{x})$ existiert nicht (siehe Beispiel 2.3.3).

4.1.3 Satz *Die Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, *definiert durch* $\exp(x) = e^x$, *ist überall differenzierbar und es gilt:*

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Um dies einzusehen, kann man zunächst auf elementare Art die Ableitung im Nullpunkt bestimmen. Genauer gilt (siehe Übungsaufgabe):

$$\exp'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

Die Steigung der Tangente an die Exponentialkurve im Punkt $(0, 1)$ ist also gleich 1.

Um die Ableitung an einer beliebigen Stelle x_0 zu bestimmen, führen wir nun die Variable $h := x - x_0$ ein. Dann ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0 + h} - e^{x_0}}{h}\,.$$

Daher gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0}(e^h - 1)}{h} = e^{x_0} \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0}\,. \qquad \text{q.e.d.}$$

4.1.4 Bemerkung *Entsprechend findet man für $a > 1$:* $\dfrac{d}{dx}(a^x) = \lambda a^x$, *wobei* $\lambda = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$, *das ist also die Steigung des Funktionsgraphen von* $\exp_a$ *bei* $x = 0$.

4.1.5 Satz *Die Funktion Sinus ist überall differenzierbar und es gilt*

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Die Ableitung an der Stelle $x = 0$ stimmt überein mit einem speziellen Grenzwert, den wir bereits auf elementare Art bestimmt hatten. Es ist nämlich

$$\sin'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \text{(siehe Beispiel 2.3.2).}$$

Um die Ableitung des Sinus an einer beliebigen Stelle x_0 zu bestimmen, setzen wir wie eben $h := x - x_0$ und verwenden das Additionstheorem:

$$\frac{\sin(x_0 + h) - \sin(x_0)}{h} = \frac{\sin(x_0)\cos(h) + \sin(h)\cos(x_0) - \sin(x_0)}{h}.$$

Wir wissen ausserdem (siehe Übungsaufgabe):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0\,.$$

Zusammen folgt:

$$\sin'(x_0) = \sin(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = \cos(x_0)\,.$$

q.e.d.

Eine äquivalente Umformulierung der Differenzierbarkeit lautet so:

4.1.6 Satz *Ist die Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar, dann gibt es eine Funktion $R: I \to \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in I$ gilt:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(x)\,, \quad \text{wobei} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0\,.$$

Hier ist $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ die Gleichung, die die Tangente an den Graphen von f im Punkt $x = x_0$, $y = f(x_0)$ beschreibt. Die "Restfunktion" R gibt an, wie stark der Verlauf von f von der Tangente abweicht.

Beweis. Die im Satz angegebene Dreigliedentwicklung für f können wir folgendermassen umschreiben:

$$\frac{R(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \quad \text{für } x \neq x_0\,.$$

Die Bedingung $\lim_{x\to x_0} \frac{R(x)}{x - x_0} = 0$ ergibt sich also aus der Definition von $f'(x_0)$. q.e.d.

4.1.7 Beispiel Die kubische Funktion $f(x) = x^3$ hat die Ableitung $f'(x_0) = 3x_0^2$. An der Stelle $x_0 = 1$ ist also $f(x_0) = 1$ und $f'(x_0) = 3$. Die Tangente an den Graphen von f an der entsprechenden Stelle hat also die Steigung 3 und wird beschrieben durch die Gleichung $y = 1 + 3(x - 1)$. Diese Tangente schneidet die y-Achse bei $y = -2$ und die x-Achse bei $x = 2/3$.

Die Dreigliedentwicklung an der Stelle $x_0 = 1$ lautet:

$$f(x) = x^3 = 1 + 3(x-1) + (x^3 - 3x + 2)\,.$$

Der dritte Term $R(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ gibt jeweils die Differenz zwischen Funktionswert und Wert auf der Tangente an, und es gilt wie behauptet $\lim_{x\to 1} \frac{R(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x-1)(x+2) = 0$. Wir können hier ausserdem ablesen, dass die Tangente den Graphen an der Stelle $x = -2$ ein weiteres Mal schneidet.

Aus der Existenz der Dreigliedentwicklung folgt sofort:

4.1.8 Satz *Ist $f\colon I \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar, so ist f in x_0 auch stetig. Ist eine Funktion in einem Punkt unstetig so kann sie dort also auch nicht differenzierbar sein.*

Ähnlich wie Stetigkeit vererbt sich auch Differenzierbarkeit auf Summen, Vielfache, Produkte, Quotienten (soweit sie definiert sind), Kompositionen und (unter bestimmten Voraussetzungen) auch auf Umkehrfunktionen. Deshalb sind die elementaren Funktionen fast überall differenzierbar. Genauer gelten folgende Regeln:

4.1.9 Satz *Sei $I = (a, b)$ ein offenes Intervall, und seien $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbare Funktionen.*

1. *Die Funktion $\alpha f + \beta g$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fest) ist ebenfalls differenzierbar auf I und es gilt:*
$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

2. *Die Produktfunktion $f \cdot g$ ist ebenfalls differenzierbar auf I, und es gilt die Produktregel:*
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

3. *Die Funktion $\frac{f}{g}$, definiert auf der Menge $D = I \setminus \{x \in I \mid g(x) = 0\}$, ist auf ganz D differenzierbar, und es gilt die Quotientenregel*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad \text{für alle } x \in D.$$

4. *Ist $h\colon J \to \mathbb{R}$ eine weitere differenzierbare Funktion mit $h(x) \in I$ für alle $x \in J$, so ist auch die Komposition $f = g \circ h\colon J \to \mathbb{R}$ auf J differenzierbar, und es gilt die Kettenregel:*
$$f'(x) = (g \circ h)'(x) = (g'(h(x)) \cdot h'(x) \quad \text{für alle } x \in J.$$

5. *Sei jetzt f streng monoton auf I. Wir fassen nun f als Funktion von I nach $J = f(I)$ auf und bezeichnen die Umkehrfunktion von f mit g. Dann ist g an jeder Stelle $x \in J$ mit $f'(g(x)) \neq 0$ differenzierbar und es gilt:*
$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \quad \text{für alle } x \in J \text{ mit } f'(g(x)) \neq 0.$$

Beweis. Beweisen wir hier exemplarisch die Kettenregel. Dazu setzen wir zuerst $y := h(x)$ und $y_0 = h(x_0)$ in die Dreigliedentwicklung von g ein:
$$g(h(x)) = g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y - y_0) + R(y)\,.$$
Wir setzen jetzt $r(y) = \frac{R(y)}{y-y_0}$ für $y \neq y_0$ und $r(y_0) = 0$. Damit schreiben wir die Dreigliedentwicklung um in:
$$g(h(x)) = g(h(x_0)) + (g'(y_0) + r(y))(y - y_0)\,, \quad \text{wobei } \lim_{y\to y_0} r(y) = 0 \text{ ist.}$$
Einsetzen in den Differentialquotienten liefert:
$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(h(x)) - g(h(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (g'(y_0) + r(y)) \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0} = g'(y_0)\, h'(x_0)\,,$$
wie behauptet.

Die Ableitungsregel für Umkehrfunktionen ergibt sich aus der Beobachtung, dass beim Spiegeln des Funktionsgraphen an der Winkelhalbierenden die Tangente an einer bestimmten Stelle ebenfalls gespiegelt wird und dabei die Steigung m in die Steigung $\frac{1}{m}$ übergeht. q.e.d.

Hier einige Anwendungsbeispiele für die Ableitungsrechenregeln:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\frac{d}{dx}\, x^n = n \cdot x^{n-1}$.
- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\frac{d}{dx}\, x^{-n} = -n \cdot x^{-n-1}$, wie sich durch Anwendung der Quotientenregel aus dem vorigen Beispiel ergibt.
- Und noch ein Beispiel für die Anwendung der Quotientenregel:
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}\,.$$
- Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Dann gilt nach der Kettenregel für alle $x \in \mathbb{R}$:
$$\frac{d}{dx}\, e^{\lambda x^2} = 2\lambda x e^{\lambda x^2}\,.$$
- Sei $a > 0$ festgewählt und $\exp_a(x) = a^x$. Dann finden wir:
$$\exp_a'(x) = \frac{d}{dx}\, a^x = \frac{d}{dx}\, e^{\ln(a)x} = \ln(a) \cdot e^{\ln(a)x} = \ln(a) \cdot a^x\,.$$
Insbesondere ist also (siehe Bemerkung 4.1.4):
$$\exp_a'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)\,.$$

- Ebenfalls aus der Kettenregel folgt

$$\cos' = -\sin\,,$$

denn $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ und daher $\cos'(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$.

- Nun folgt wiederum aus der Quotientenregel für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)\,.$$

- Der natürliche Logarithmus ist auf ganz $\mathbb{R}_{>0}$ differenzierbar, und für alle $x > 0$ gilt:

$$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Denn $\ln\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, und nach der Regel zur Umkehrfunktion erhalten wir: $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$.

- Ist $f(x) = \ln(\sqrt{x}+1)$ für $x > 0$, so ist nach der Kettenregel $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x+2\sqrt{x}}$.

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Denn nach der Umkehrregel gilt:

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Die Funktion arctan ist also auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

- Ist $f(x) = \arctan(\frac{1}{x})$ für $x \neq 0$, folgt wiederum mit der Kettenregel

$$f'(x) = \frac{1}{(1+\frac{1}{x^2})}\cdot\frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{1+x^2}\,.$$

Eine nützliche Konsequenz aus der Dreigliedentwicklung differenzierbarer Funktionen ist ein Spezialfall der sogenannten *l'Hospitalschen Regel*. Dabei geht es um die Bestimmung von Grenzwerten von Quotienten, die bei naiver Anwendung der Regeln auf Ausdrücke der Form „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\infty}{\infty}$“ führen würden. Die Regel ist nach dem Mathematiker l'Hospital benannt, der sie in einem Lehrbuch zur Infinitesimalrechnung erstmals publizierte, nachdem er sie von Johann Bernoulli gelernt hatte. Hier zunächst die spezielle Fassung, die wir mit den bisherigen Mitteln herleiten können.

4.1.10 Satz *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Sei weiter $g(x) \neq 0$ für alle $x < b$. Ist $f(b) = g(b) = 0$ und $g'(b) \neq 0$, so gilt:*

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(b)}{g'(b)}.$$

Beweis. Die Dreigliedentwicklungen von f und g an der Stelle b lauten $f(x) = f(b)+f'(b)(x-b)+R_1(x)$ und $g(x) = g(b)+g'(b)(x-b)+R_2(x)$, wobei $\lim_{x\to b} \frac{R_1(x)}{x-b} = \lim_{x\to b} \frac{R_2(x)}{x-b} = 0$. Weil $f(b) = g(b) = 0$ ist, folgt

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(b)(x-b)+R_1(x)}{g'(b)(x-b)+R_2(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(b)+R_1(x)/(x-b)}{g'(b)+R_2(x)/(x-b)} = \frac{f'(b)}{g'(b)}.$$

q.e.d.

Die l'Hospitalsche Regel gilt allgemeiner auch in dieser Fassung:

4.1.11 Satz *Seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $a < b \leq \infty$. Sei weiter $g(x) \neq 0 \neq g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$. Ist entweder*

$$(I) \qquad \lim_{x \nearrow b} f(x) = \lim_{x \nearrow b} g(x) = 0$$

oder

$$(II) \qquad \lim_{x \nearrow b} f(x) = \lim_{x \nearrow b} g(x) = \infty,$$

so gilt:

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \, (= \lambda),$$

falls der rechte Grenzwert existiert. Dabei ist auch $\lambda = \infty$ zugelassen.

Falls nötig, kann man auch mehrmals hintereinander die l'Hospitalsche Regel anwenden. Allerdings muss man dann daran denken, jeweils zu überprüfen, ob noch immer die Voraussetzungen erfüllt sind.

4.1.12 Beispiele Zunächst einige Beispiele zu Fall (I):

- $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{2} = 0.$
- $\displaystyle \lim_{x\to(-3)} \frac{x^3+27}{x^4-81} = \lim_{x\to(-3)} \frac{3x^2}{4x^3} = \lim_{x\to(-3)} \frac{3}{4x} = -\frac{1}{4}.$
- $\displaystyle \lim_{x\nearrow 1} \frac{2x^2+x-3}{x^3-3x+2} = \lim_{x\nearrow 1} \frac{4x+1}{3x^2-3} = 5 \lim_{x\nearrow 1} \frac{1}{3x^2-3} = \lim_{y\nearrow 0} \frac{1}{y} = -\infty.$

Beim dritten Beispiel könnte man versucht sein, die Regel ein zweites mal anzuwenden und Zähler und Nenner des Ausdrucks $\frac{4x+1}{3x^2-3}$ nochmals separat abzuleiten. Das geht hier aber nicht, denn die Voraussetzungen der l'Hospitalschen Regel sind gar nicht erfüllt!

Und nun einige Beispiele zu Fall (II):

- Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0\,.$$

  Das bedeutet, dass die Exponentialfunktion für $x \to \infty$ schneller wächst als jedes Polynom!

- Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{nx^n} = 0\,.$$

  Das bedeutet, dass die Logarithmusfunktion für $x \to \infty$ langsamer wächst als jedes Polynom!

- Und schliesslich noch eine letzte Anwendung:

$$\lim_{x\searrow 0} x \cdot (-\ln(x)) = \lim_{x\searrow 0} \frac{\ln(1/x)}{1/x} = \lim_{t\searrow\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0\,.$$