7.4 Geometrische Bedeutung der Determinante

Zusammenfassung: *Der Betrag der Determinante einer 2×2-Matrix misst den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Spaltenvektoren der Matrix aufgespannt wird. Im dreidimensionalen Fall kann man den Betrag der Determinante als das Volumen des Spates verstehen, der von den drei Spaltenvektoren erzeugt wird. Das Vorzeichen der Determinante hängt jeweils mit der Orientierung der Ebene bzw. des Raumes zusammen.*

Betrachten wir zunächst Paare von Vektoren in der Ebene:

7.4.1 Satz *Seien $u, v \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig, d.h. sie liegen nicht auf einer gemeinsamen Geraden. Dann gibt der Betrag der Determinante $|\det(u,v)|$ den Flächeninhalt des von u und v aufgespannten Parallelogramms an. Bezeichnen wir den von u nach v gemessenen Winkel mit α, so gilt für das Vorzeichen der Determinante:*

$$\det(u,v)\begin{cases} > 0 & \text{falls } 0 < \alpha < \pi \\ < 0 & \text{falls } -\pi < \alpha < 0. \end{cases}$$

Sind u, v linear abhängig, so entartet das von ihnen aufgespannte Parallelogramm zu einer Strecke, und in diesem Fall ist $\det(u,v) = 0$.

Beweis. 1. Fall: Zeigen u und v in Richtung der Koordinatenachsen, sind also $u = u_1 \cdot e_1$ und $v = v_2 \cdot e_2$, so spannen u und v ein Rechteck auf, und die Fläche dieses Rechtecks beträgt $|u_1 \cdot v_2| = |\det(u,v)|$.

2. Fall: Ist $u = u_1 \cdot e_1$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ beliebig, so geht das von u und v aufgespannte Parallelogramm durch Scherung in das von u und $v_2 e_2$ aufgepannte Rechteck über. Also stimmen die Flächen überein und wir haben wieder $|\det(u,v)| = |u_1 v_2|$. Das Vorzeichen der Determinante ist genau dann positiv, wenn u_1 und v_2 dasselbe Vorzeichen haben. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $0 < \alpha < \pi$ ist.

3. Fall: Ist $v \in \text{Spann}(e_1) = \{\lambda e_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und u beliebig, so tauschen wir u und v und landen wieder im 2. Fall.

4. Fall: Weder u noch v sind parallel zu e_1. Nun wähle $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $u' = u - \lambda v \in \text{Spann}(e_1)$ und ersetze u durch u'. Da es sich um eine Scherung handelt, erzeugen u, v und u', v flächengleiche Parallelogramme. Ausserdem gilt $\det(u,v) = \det(u',v)$ nach Eigenschaft (v). Damit haben wir die Situation auf den 2. Fall zurückgeführt. q.e.d.

Für Tripel von Vektoren im dreidimensionalen Raum gilt folgendes:

7.4.2 Satz *Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig, d.h. sie liegen nicht in einer gemeinsamen Ebene. Dann gibt der Betrag der Determinante $|\det(u,v,w)|$ den Rauminhalt des von u, v und w aufgespannten Spates (oder Parallelflachs) an. Das Vorzeichen der Determinante ist genau dann positiv, wenn die Anordnung der Vektoren*

u, v, w zur "Dreifingerregel" der rechten Hand passt. Das heisst, man kann mit der rechten Hand mit dem Daumen in die Richtung von u, mit dem Zeigefinger in die Richtung von v und mit dem Mittelfinger in die Richtung von w zeigen. Sind $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ linear abhängig, so erzeugen sie nur eine höchstens zweidimensionale Figur, deren Rauminhalt gleich Null ist. Auch dies wird durch die Determinante angegeben, denn in diesem Fall ist $\det(u, v, w) = 0$.

Beweis. 1. Fall: Sind $u = ae_1$, $v = be_2$ und $w = ce_3$, so erzeugen die drei Vektoren einen Quader, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Das Volumen dieses Quaders beträgt $|abc| = |\det(u, v, w)|$. Die Interpretation des Vorzeichens lässt sich in diesem Fall ebenfalls leicht bestätigen.

2. Fall: Ist $w \in \operatorname{Spann}(e_3)$ und liegen u, v in der x-y-Ebene, so gilt

$$|\det(u, v, w)| = \left|\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & 0 \\ u_2 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{pmatrix}\right| = |(u_1 v_2 - u_2 v_1)| \cdot |w_3| \,.$$

Der Faktor $|u_1 v_2 - u_2 v_1|$ gibt die Grundfläche des Spates und $|w_3|$ die Höhe des Spates an.

Allgemeiner Fall: Durch eine Folge von Scherungen (das heisst elementare Spaltenumformungen vom Typ (v)) und eventuell Vertauschung der Kantenvektoren kann man das Spat in einen Quader verwandeln, dessen Seiten wie im 1. Fall parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Für die neuen Kantenvektoren des Quaders u', v', w' gilt einerseits:

$$|\det(u, v, w)| = |\det(u', v', w')| \,.$$

Andererseits stimmen Spatvolumen und Quadervolumen nach dem Cavalieriprinzip überein. (Man denke dabei an einen Papierstapel, der bei der Scherung zur Seite gedrückt wird.) q.e.d.

Wir können die Determinante eines Tripels von Vektoren im Raum mit dem Vektorprodukt in Zusammenhang bringen. Dazu hier zur Erinnerung die Definition von Skalarprodukt und von Vektorprodukt. Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ ist folgendermassen erklärt:

7.4.3 Definition Sei $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Für das *Skalarprodukt* von u und v verwenden wir die folgende Schreibweise:

$$\langle u, v \rangle := x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \,.$$

7.4.4 Bemerkung *Entsprechend wie in der Ebene gilt:*

$$\langle u, v \rangle = ||u|| \cdot ||v|| \cdot \cos(\alpha) \,,$$

wobei $||u||$, $||v||$ *die Längen der Vektoren* v, w *und* α *den Winkel zwischen* u *und* v, *gemessen in der von* u *und* v *erzeugten Ebene, bezeichnet. Insbesondere gilt:*

$$\langle u, v\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ und } v \text{ stehen senkrecht aufeinander.}$$

Ist $||v|| = 1$, *so gibt das Skalarprodukt von* u *und* v *die Länge der orthogonalen Projektion von* u *auf die Gerade durch* v *an.*

Das Vektorprodukt ist folgendermassen definiert:

7.4.5 Definition Sei $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Der Vektor $w := u \times v \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch $w = \begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}$. Man kann sich diese Definition leichter merken, wenn man sie als Entwicklung der Determinante einer passenden Matrix nach der letzten Spalte auffasst, in der die kanonischen Basisvektoren stehen:

$$w = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \vec{e_1} \\ y_1 & y_2 & \vec{e_2} \\ z_1 & z_2 & \vec{e_3} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel ist

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Man kann leicht nachrechnen, dass folgender Zusammenhang zwischen Vektorprodukt und Determinante besteht:

7.4.6 Bemerkung *Für alle* $u, v \in \mathbb{R}^3$ *und* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\langle u \times v, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\rangle = \det(u, v, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}).$$

Die geometrische Deutung der Determinante von drei Vektoren im Raum liefert nun die bekannte Interpretation des Vektorprodukts:

7.4.7 Folgerung *Für* $u, v \in \mathbb{R}^3$ *gilt:*

$$||u \times v|| = ||u|| \cdot ||v|| \cdot |\sin(\alpha)|,$$

wobei wie eben α *den Winkel zwischen* u *und* v *bezeichnet, der in der von* u, v *erzeugten Ebene von* u *nach* v *gemessen wird. Also ist* $u \times v = 0$ *genau dann, wenn* u *und* v *linear abhängig sind. Wenn* u *und* v *linear unabhängig sind, gibt die Länge des Vektors* $w = u \times v$ *die Fläche des von* u *und* v *erzeugten Parallelogramms an. Ausserdem steht* w *senkrecht auf der von* u *und* v *erzeugten Ebene. Schliesslich ist* w *so orientiert, dass die Richtungen der Vektoren* u, v, w *zur Dreifingerregel der rechten Hand passen.*

Beweis. Sind u und v linear abhängig, d.h. $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$, dann ist $u = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder umgekehrt). Deshalb verschwindet $\det(u, v, u \times v)$ und damit auch $||u \times v||$. Nehmen wir nun an, dass u und v linear unabhängig sind. Dann gibt es genau einen Vektor n der Länge 1, der auf u und v senkrecht steht, so dass u, v, n zur Dreifingerregel der rechten Hand passen. Aus Bemerkung 7.4.6 folgt, dass $u \times v$ ebenfalls auf u und v senkrecht steht. Also ist $u = \lambda n$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und daher

$$\langle u \times v, n \rangle = \langle \lambda n, n \rangle = \lambda \,.$$

Nun folgt aus Bemerkung 7.4.6

$$\lambda = \langle u \times v, n \rangle = \det(u, v, n) \,,$$

stimmt also überein mit dem Volumen des von u, v, n erzeugten Spates. Insbesondere ist $\lambda > 0$ und daher $\lambda = ||u \times v||$. Ausserdem beträgt die Höhe des Spates hier $||n|| = 1$ und die Grundfläche ist die Fläche des von u und v erzeugten Parallelogramms. Daraus ergibt sich die Behauptung. q.e.d.

7.5 Vektorräume

Zusammenfassung: *Wir erinnern zunächst an das Rechnen mit Vektoren im zwei- oder dreidimensionalen euklidischen Raum. Die dafür geltenden Rechengesetze dienen dann als Modell für die Definition eines abstrakten Vektorraums. Wir lernen weitere Beispiele kennen und betrachten lineare Unterräume.*

Bereits in dem antiken Lehrbuch der *Elemente* von Euklid sind die Grundbegriffe der ebenen Geometrie festgehalten, die noch heute in der Schule vermittelt werden. Dazu gehören die Begriffe Punkt, Gerade, Ebene, Winkel oder Dreieck mit den dazugehörigen Lehrsätzen. Unter der euklidischen Ebene wollen wir hier eine solche (intuitiv gegebene) Ebene verstehen, in der man Abstände zwischen Punkten und Winkel zwischen Halbstrahlen messen kann und die bekannten Gesetze der euklidischen Geometrie gelten, wie zum Beispiel die folgenden:

- Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Verbindungsgerade.
- Je zwei nichtparallele Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
- Zu einer Geraden g und einem Punkt P, der nicht auf g liegt, gibt es genau eine zu g parallele Gerade durch P.
- Sind g_1 und g_2 zwei parallele Geraden, so schneidet jede dazu nicht parallele Gerade h die Geraden g_1 und g_2 unter demselben Winkel.
- Die Winkelsumme in jedem Dreieck beträgt 180°.

Je zwei verschiedene Punkte A, B in der Ebene liefern einen Pfeil mit Anfangspunkt A und Endpunkt B. Wir betrachten zwei Pfeile als äquivalent, wenn sich der erste Pfeil durch Parallelverschiebung in den zweiten Pfeil überführen lässt. Unter einem *Vektor* versteht man eine Äquivalenzklasse von Pfeilen, also die Gesamtheit aller zu einem bestimmten Pfeil äquivalenten Pfeile. Man sagt auch, ein bestimmter Pfeil *repräsentiere* den entsprechenden Vektor. Ein Spezialfall ist der sogenannte *Nullvektor*, nämlich die Klasse aller Pfeile, bei denen Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen. Wir schreiben dafür einfach 0. Die *Vektoraddition* ist nun definiert durch das Aneinanderhängen von Pfeilen.

Sind genauer u, v Vektoren und wird u repräsentiert durch den Pfeil von A nach B, und wird v repräsentiert durch den Pfeil von B nach C, dann definieren wir $u + v$ als denjenigen Vektor, der vom Pfeil von A nach C repräsentiert wird. Hätten wir einen anderen Startpunkt gewählt, etwa A', würde die gesamte Konfiguration parallel verschoben, der Vektor $u + v$ ist also von dieser Wahl unabhängig und daher wohldefiniert.

Wird v durch den Pfeil von A nach B repräsentiert, so bezeichnet $-v$ den Vektor, der durch den Pfeil von B nach A repräsentiert wird. Offenbar gilt nach Definition dann $v + (-v) = 0$. Weil sich beim Paralleltransport eines Pfeiles der Abstand zwischen Anfangs- und Endpunkt nicht ändert, können wir diese Grösse als die *Länge* des entsprechenden Vektors auffassen. Wir schreiben dafür $||v||$. Die Multiplikation eines Vektors v mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ist folgendermassen erklärt: Ist $\lambda > 0$, so ist λv derjenige Vektor, der parallel ist zu v, dessen Länge aber $\lambda||v||$ beträgt. Ist $\lambda < 0$, so ist λv derjenige Vektor, der parallel ist zu $-v$, dessen Länge aber $|\lambda|||v||$ beträgt. Die Multiplikation mit 0 liefert den Nullvektor.

Die bisher eingeführten Begriffe lassen sich auch auf den euklidischen dreidimensionalen Raum übertragen. Wiederum legen je zwei verschiedene Punkte im Raum einen Pfeil fest, und wir betrachten je zwei Pfeile als äquivalent, wenn sich der erste Pfeil durch Parallelverschiebung in den zweiten Pfeil überführen lässt. Die Vektoren im Raum sind die Äquivalenzklassen von Pfeilen. Jeder einzelne Vektor hat also eine wohldefinierte Länge und eine Richtung. Wiederum können wir die Addition solcher Vektor durch Aneinanderhängen entsprechender Pfeile definieren. Und die Skalarmultiplikation definieren wir ebenfalls entsprechend wie in der Ebene.

Für die Vektoraddition und die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren im zwei- oder dreidimensionalen euklidischen Raum gelten bestimmte Rechengesetze, die man auch in anderen Zusammenhängen antrifft. Diese Rechengesetze sind die Grundlage für den Begriff des abstrakten Vektorraums.

7.5.1 Definition Ein *reeller Vektorraum* ist eine Menge V mit einem Nullelement 0, auf der zwei Rechenoperationen erklärt sind, nämlich Addition $V \times V \to V$, $(v, w) \mapsto v + w$ und Skalarmultiplikation $\mathbb{R} \times V \to V$, $(\lambda, v) \to \lambda \cdot v$, und zwar so, dass für alle $u, v, w \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die folgenden Rechenregeln gelten:

- $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Assoziativgesetz für die Addition).
- $u + v = v + u$ (Kommutativgesetz).
- $u + 0 = u$ (neutrales Element).

- Die Gleichung $v + x = 0$ besitzt zu jedem $v \in V$ genau eine Lösung $x \in V$. Wir schreiben dafür $x = -v$ (Existenz des additiven Inversen).
- $(\alpha \cdot \beta)u = \alpha(\beta \cdot u)$ (Assoziativgesetz für die Skalarmultiplikation).
- $1 \cdot u = u$.
- $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (Distributivgesetz).
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (Distributivgesetz).

Aus diesen acht Axiomen folgen alle weiteren vertrauten Regeln des Rechnens mit Vektoren. Zum Beispiel gilt

$$0 \cdot v = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

(Dabei ist mit der ersten 0 die Zahl Null in $\mathbb{R}$ gemeint und mit der zweiten 0 der Nullvektor in V.) Denn aus dem Distributivgesetz folgt $1 \cdot v + 0 \cdot v = (1 + 0) \cdot v = 1 \cdot v = v$. Addieren wir nun auf beiden Seiten $-v$ dazu, erhalten wir die Behauptung.

Weiter gilt auch:

$$(-1) \cdot v = -v \quad \text{für alle } v \in V.$$

Denn wiederum nach dem Distributivgesetz ist $(-1) \cdot v + v = (-1) \cdot v + 1 \cdot v = (-1 + 1)v = 0 \cdot v = 0$. Also stimmt $(-1)v$ mit dem eindeutigen Inversen $-v$ überein.

7.5.2 Beispiele

1. Der kleinstmögliche Vektorraum besteht nur aus dem Nullelement $V = \{0\}$.
2. Die Wahl eines Koordinatensystems für den euklidischen Raum führt auf den Raum der Spaltenvektoren $\mathbb{R}^3$, oder allgemeiner $\mathbb{R}^n$ (für $n \in \mathbb{N}$). Addition und Skalarmultiplikation sind komponentenweise erklärt. Das heisst, für alle $v_j, w_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ setzt man:
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}.$$
Wie es aus der elementaren Vektorrechnung geläufig ist, sind hier alle in der Definition angegebenen Rechenregeln erfüllt. Dabei ist das Nullelement der Nullvektor, dessen sämtliche Einträge gleich Null sind.
3. Die Menge der $m \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen bilden einen Vektorraum (mit der Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen, wie früher definiert).
4. Wir können ein Schwarz-Weiss-Bild, zerlegt in 1200×3600 Pixel, durch eine Matrix beschreiben, in der jeweils für jedes Pixel der entsprechende Grauwert als Eintrag notiert ist. In diesem Sinn entsprechen die Matrizen vom Typ 1200×3600 möglichen Bildern, und die Addition zweier solcher Matrizen kann als Überlagerung der Bilder interpretiert werden. Die Multiplikation einer Matrix mit einem festen Faktor dagegen kann man verstehen als Änderung des Hell-Dunkel-Faktors. Auf diese Weise trägt auch die Gesamtheit all dieser Bilder eine Vektorraumstruktur.

5. Die Minkowskische Raum-Zeit $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \{(p,t) \mid p \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}\}$ ist ein Vektorraum, den man mit $\mathbb{R}^4$ identifizieren kann. Jeder Vektor besteht hier aus drei Raumkoordinaten, die einen Punkt festlegen, und einer Zeitangabe. Die Abstandsmessung in der Raum-Zeit ist folgendermassen definiert:

$$\operatorname{dist}^2((u,t_1),(w,t_2)) = c^2(t_2-t_1)^2 - ||w-u||^2 \quad \forall t_1,t_2 \in \mathbb{R}, u,w \in \mathbb{R}^3\,,$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Zu gegebenem (u,t_1) bildet die Menge der Raum-Zeit-Punkte (w,t_2) im Abstand 0, also mit

$$||w-u|| = c|t_2-t_1|\,,$$

den sogenannten Lichtkegel. Es handelt sich dabei um diejenigen Punkte in der Raum-Zeit, die ein Photon, das mit Lichtgeschwindigkeit unterwegs ist, von (u,t_1) aus erreichen könnte.

6. Auf der Menge $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ aller reellwertigen Funktionen auf einem festgewählten Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ erklärt man üblicherweise Addition und Skalarmultiplikation durch $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ und $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$ für alle $x \in D$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f,g \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$. Mit diesen Verknüpfungen bildet $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ einen Vektorraum. Denn die acht definierenden Rechenregeln eines Vektorraums sind alle erfüllt; sie lassen sich jeweils auf die entsprechenden Rechengesetze im Wertebereich, also in der Menge der reellen Zahlen, zurückführen.

Auf entsprechende Weise definiert man Vektorräume über den komplexen Zahlen.

7.5.3 Definition Ein komplexer Vektorraum ist eine Menge V mit einem Nullelement 0, auf der eine Addition $V \times V \to V, (v,w) \mapsto v+w$ und eine Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times V \to V, (\lambda,v) \mapsto \lambda \cdot v$ erklärt ist, so dass für alle $u,v,w \in V$ und alle $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$ die oben genannten acht Rechenregeln gelten.

Wichtige Beispiele für komplexe Vektorräume erhält man, indem man in den eben gegebenen Beispielen jeweils $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt. Der Raum $\mathbb{C}^n$ (für fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$) besteht aus allen Spaltenvektoren der Form $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ mit komplexen Einträgen $z_j \in \mathbb{C}$ für $j = 1,\dots,n$. Addition und Skalarmultiplikation sind nun wiederum komponentenweise erklärt.

Der Raum $\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ besteht aus allen Funktionen der Form $f\colon D \to \mathbb{C}$, definiert auf einem Definitionsbereich $D \subset \mathbb{C}$ mit Werten in $\mathbb{C}$. Zum Beispiel gehört dazu die Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = z^2\,.$$

Analog erklärt man die Addition und Skalarmultiplikation in diesem Fall durch $(f+g)(z) = f(z)+g(z)$ und $(\alpha \cdot f)(z) = \alpha \cdot f(z)$ für alle $z \in D$, $\alpha \in \mathbb{C}$ und $f,g \in \mathcal{F}(D,\mathbb{C})$. Mit diesen Verknüpfungen bildet $\mathcal{F}(D,\mathbb{C})$ einen Vektorraum.

Eine besondere Rolle spielen diejenigen Teilmengen von Vektorräumen, die unter Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen sind, weil sie selbst wieder Vektorräume bilden.

7.5.4 Definition Eine nichtleere Teilmenge $U \subset V$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V ist ein *linearer Unterraum* von V, falls U unter Addition und Skalarmultiplikation abgeschlossen ist, das heisst, wenn folgendes gilt:

(A) $u, v \in U \Longrightarrow u + v \in U$.

(S) $u \in U \Longrightarrow \lambda \cdot u \in U$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ist U ein linearer Unterraum von V, so bildet U mit den von V geerbten Operationen wieder einen Vektorraum. Denn offensichtlich bleiben die Assoziativgesetze, das Kommutativgesetz und die Distributivgesetze erhalten. Und auch das Nullelement von V liegt in U. Denn nach Voraussetzung ist U nichtleer, es gibt also mindestens ein Element $u_0 \in U$. Wegen der Eigenschaft (S) folgt jetzt $0 \cdot u_0 = 0 \in U$. Schliesslich liegt mit u auch stets $-u$ in U, denn $-u = (-1) \cdot u \in U$ wiederum wegen der Eigenschaft (S).

7.5.5 Beispiele Bezeichne V jetzt den Vektorraum, bestehend aus den ebenen Vektoren.

1. Der Vektorraum V hat die folgenden Unterräume: die "trivialen" Unterräume $\{0\}$ und V einerseits und andererseits Unterräume der Form $g_v = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, wobei $v \in V$ festgewählt ist. Diese Unterräume entsprechen den Geraden durch den Nullpunkt. Genauer besteht die Menge g_v aus den Ortsvektoren sämtlicher Punkte auf der Geraden durch den Nullpunkt in Richtung v.

2. Sind g, h verschiedene Geraden in V durch den Nullpunkt, dann ist $g \cup h$ kein linearer Unterraum. Denn bezeichnet v einen Richtungsvektor auf g und w einen Richtungsvektor auf h, dann sind v und w linear unabhängig und $v + w \notin g \cup h$.

3. Die Gerade $g = \{\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ in der Ebene geht nicht durch den Nullpunkt und ist deshalb kein linearer Unterraum von V. Man erhält g, indem man den linearen Unterraum $g' = \{\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ um den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallel verschiebt.

Und hier noch drei Beispiele für Unterräume des Funktionenraums:

7.5.6 Beispiele 1. Die Schar der Parabeln in $\mathbb{R}^2$ mit Nullstellen 0 und 1 können wir darstellen als folgende Teilmenge der Funktionen in einer reellen Variablen:

$$U = \{g(x) = \alpha x(x-1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}\,.$$

Man kann direkt sehen, dass U bezüglich der Addition und Skalarmultiplikation der Funktionen abgeschlossen ist. Also bildet die Parabelschar einen linearen Unterraum von $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Jedes Polynom mit reellen Koeffizienten können wir als reellwertige Funktion auf $\mathbb{R}$ auffassen. In diesem Sinn bilden die reellen Polynome eine Teilmenge des Raum $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Diese Teilmenge ist ein linearer Unterraum, denn sowohl die Summe von je zwei Polynomen ist wieder ein Polynom, als auch das Produkt eines Polynoms mit einem festen Skalar.

3. Entsprechend bilden die Polynome mit komplexen Koeffizienten, betrachtet als Funktionen auf $\mathbb{C}$, einen linearen Unterraum des Raumes $\mathcal{F}(\mathbb{C},\mathbb{C})$.

Wir kommen nun wieder zurück auf lineare Gleichungssysteme, und beschreiben jetzt deren Lösungsmengen in dem neuen begrifflichen Rahmen. Sei dazu $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, und sei A eine $m\times n$-Matrix mit Einträgen $a_{ij}\in\mathbb{K}$. Sei weiter $b\in\mathbb{K}^m$ ein Spaltenvektor mit Einträgen in $\mathbb{K}$. Das dazugehörige Gleichungssystem $Ax=b$ aus reellen oder komplexen linearen Gleichungen nennt man *homogen*, falls b der Nullvektor ist, und andernfalls *inhomogen*. Es gilt folgendes:

7.5.7 Bemerkung *Die Lösungsmenge*

$$\mathbb{L} := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; A\cdot x = 0 \right\}$$

des homogenen Gleichungssystems $Ax=0$ (hier steht 0 für den Nullvektor in $\mathbb{K}^m$) bildet einen linearen Unterraum des $\mathbb{K}^n$.

Ist $b\in\mathbb{K}^m$ nicht der Nullvektor, und hat das inhomogene Gleichungssystem $Ax=b$ eine Lösung $v\in\mathbb{K}^n$, so ist die Lösungsmenge des inhomogenen Systems von der Form

$$v+\{x\in\mathbb{K}^n \mid Ax=0\}\,.$$

Man erhält diese Menge also, indem man den Unterraum der Lösungen des zugehörigen homogenen Systems um v parallel verschiebt. Eine solche Menge bezeichnet man als affinen Unterraum.

Ist zum Beispiel $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $n=3, m=1$ und A nicht gerade die Nullmatrix, so bildet die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax=0$ eine Ebene in $\mathbb{R}^3$ durch den Nullpunkt. Und die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $Ax=b$ $(b\neq 0)$ ist eine dazu parallele Ebene.

Beweis. Betrachten wir zunächst das homogene Gleichungssystem $Ax=0$. Offenbar liegt der Nullvektor in der Lösungsmenge $\mathbb{L}$, denn wenn man für jede der Variablen Null einsetzt, ist die Gleichung trivialerweise erfüllt. Seien jetzt $u=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $v=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ Elemente von $\mathbb{L}$. Dann gilt $Au=0$ und $Av=0$. Durch Addition der beiden Gleichungen erhalten wir $Au+Av=0$. Weil die Multiplikation einer Matrix mit Spaltenvektoren das Distributivgesetz erfüllt, folgt daraus $A(u+v) = Au+Av = 0$. Also ist auch $u + v$ eine Lösung. Die Multiplikation mit einem Skalar λ liefert ausserdem $A(\lambda u) = \lambda Au = 0$. Also liegt auch λu in der Lösungsmenge für alle $\lambda \in \mathbb{K}$. Damit ist gezeigt, dass $\mathbb{L}$ ein linearer Unterraum ist.

Betrachten wir jetzt das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$, wobei $b \in \mathbb{K}^m$ nicht der Nullvektor sei. Sind $v, w \in \mathbb{K}^m$ zwei Lösungen des Systems $Ax = b$, so gilt $Av = b = Aw$, und daraus folgt $A(v-w) = Av-Aw = b-b = 0$. Der Differenzvektor $v - w$ liegt also im Lösungsraum $\mathbb{L}$ des zugehörigen homogenen Gleichungssystems. Das heisst $w \in v+\mathbb{L}$. Ist umgekehrt $u \in \mathbb{L}$, so folgt $A(v+u) = Av+Au = b+0 = b$. Also ist $v + u$ eine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems. Zusammen ergibt sich die Behauptung. q.e.d.

Hier noch ein konkretes Zahlenbeispiel dazu (siehe Beispiel 7.1.1):

7.5.8 Beispiel Wir betrachten das folgende inhomogene System aus 3 Gleichungen in 4 reeellen Unbekannten:

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix} = b\,.$$

Wie bereits früher berechnet, hat dies System folgende Lösungsmenge:

$$\{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = b\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2-2t \\ -1-3t \\ t \\ 3 \end{pmatrix} \middle|\ t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \middle|\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Hier ist die Lösungsmenge des entsprechenden homogenen Gleichungssystems der eindimensionale lineare Unterraum

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\} = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle|\ t \in \mathbb{R} \right\},$$

und man erhält die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems, indem man $\mathbb{L}$ um $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ parallel verschiebt.