Statistica I

Unità A.1: Sommatorie e produttorie

Tommaso Rigon

Università Milano-Bicocca

(Il contenuto di queste slide è una rielaborazione del materiale di Statistica Descrittiva prodotto da Guido Masarotto e Bruno Scarpa, che ringrazio vivamente. Eventuali sviste ed errori presenti rimangono a mio carico.)

Sommatoria: esempio

- Supponiamo di avere i seguenti **sei numeri**: 2, 15, 5, 8, 10, 3 così indicati:

  $$a_1 = 2, a_2 = 15, a_3 = 5, a_4 = 8, a_5 = 10, a_6 = 3.$$

  La loro somma

  $$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

  può essere letta come **somma di tutti i valori** di a_i, con $i = 1, 2, \dots, 6$.

- La somma di tutti i valori è generalmente rappresentata dalla lettera **greca maiuscola sigma**. Quindi, scriveremo

  $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{6} a_i &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ &= 2 + 15 + 5 + 8 + 10 + 3 = 43,\end{aligned}$$

  e si legge "*sommatoria delle a_i con i che varia da* 1 *a* 6".

Sommatorie e produttorie

- Sia $a_1, \dots, a_n$ una sequenza di valori reali, dove $a_i \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

- La somma di una sequenza di valori $a_1, \dots, a_n$ si può esprimere in maniera compatta come segue:
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
ovvero tramite il simbolo di **sommatoria**.

- Il prodotto di una sequenza di valori $a_1, \dots, a_n$ si può esprimere in maniera compatta come segue:
$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n,$$
ovvero tramite il simbolo di **produttoria**.

Sommatorie: notazione

- Si osservi che nella sommatoria la lettera i, indice del termine generico, può essere **sostituita** da un'altra **qualsiasi lettera**.

- Ad esempio si può scrivere

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{s=1}^{n} a_s.$$

- **Se ciò non crea confusione**, talvolta si può trovare indicato

$$\sum_{i} a_i \qquad \text{al posto di} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

- A volte si trova anche la dicitura $\sum a_i$. Tuttavia, sarebbe meglio evitare quest'ultima scrittura.

- La somma dal termine j-esimo al termine j-esimo, coincide col termine j-esimo. In simboli:

$$\sum_{i=j}^{j} a_i = a_j.$$

Proprietà delle sommatorie

- **Proprietà**. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ è una costante che non dipende dall'indice i, allora

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Infatti, si noti che

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha a_1 + \alpha a_2 + \cdots + \alpha a_n = \alpha(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

- **Proprietà**. Si noti anche che:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n.$$

Infatti $\sum_{i=1}^{n} 1$ è una sommatoria il cui termine generico $a_i = 1$, perciò

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n \text{ volte}} = n.$$

Proprietà delle sommatorie

- **Proprietà**. Se $m > n$, allora vale la seguente **decomposizione**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

Infatti vale che:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{m} a_i = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m) = \sum_{i=1}^{m} a_i.$$

- **Proprietà**. La sommatoria di una somma è pari alla somma delle sommatorie:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Infatti vale che:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.\end{aligned}$$

Proprietà delle sommatorie

- **Proprietà**. Se α e β sono costanti che non dipendono dall'indice i, allora:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i + \beta) = \left(\alpha \sum_{i=1}^{n} a_i\right) + (n \times \beta) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i + n \times \beta.$$

Attenzione all'uso delle **parentesi**. Utilizzando le proprietà precedentemente viste:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i + \beta) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i + \sum_{i=1}^{n} \beta = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i + n \times \beta.$$

Una non-proprietà delle sommatorie

- Si noti che in generale:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \neq \sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Dimostrazione

- Nella disuguaglianza precedente, il **primo termine** è pari a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

- Il **secondo termine** invece coincide con

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{i=1}^{n} b_i &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \\ &= (a_1 b_1 + a_1 b_2 + \cdots + a_1 b_n) + \cdots + (a_n b_1 + a_n b_2 + \cdots + a_n b_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i \neq j} a_i b_j,\end{aligned}$$

dove $\sum_{i \neq j} a_i b_j$ indica la sommatoria dei prodotti $a_i b_j$ estesa a tutte le coppie di indici i e j compresi tra 1 e n tali che $i \neq j$.

Proprietà delle sommatorie

- **Proprietà**. Come **caso particolare** della precedente dimostrazione, otteniamo

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i \times \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j$$

  Questo equivale a quanto visto precedentemente circa il prodotto di due sommatorie, nel caso particolare che esse **siano uguali**.

- Poichè $a_i a_j = a_j a_i$ si ottiene che ciascun prodotto si presenta due volte nella sommatoria. Potremo perciò scrivere

$$\sum_{i \neq j} a_i a_j = 2 \sum_{i<j} a_i a_j.$$

- Scritto per esteso, si ottiene che

$$\sum_{i<j} a_i a_j = (a_1 a_2 + a_1 a_3 + \cdots + a_1 a_n) + (a_2 a_3 + a_2 a_4 + \cdots + a_2 a_n) + \cdots + a_{n-1} a_n.$$

Sommatorie doppie

- Siano $a_{ij} \in \mathbb{R}$ dei valori reali dipendenti da **due indici**, ovvero

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}, \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm}. \end{array}$$

- La somma di questi $n \times m$ valori si può scrivere come segue:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{1j} + \cdots + \sum_{j=1}^{m} a_{nj} = (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1m}) + \cdots + (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nm}).$$

- Ponendo $S_1 = \sum_{j=1}^{m} a_{1j}, \dots, S_n = \sum_{j=1}^{m} a_{nj}$, otteniamo che la somma cercata è pari a

$$S_1 + \cdots + S_n = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

- Si noti il caso particolare $\sum_{i=k}^{k} \sum_{j=k'}^{k'} a_{ij} = a_{kk'}$.

Proprietà delle sommatorie doppie

- **Proprietà**. Le sommatorie di una sommatoria doppia possono essere **cambiate di ordine**, cioè si può scrivere

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

Infatti, si noti che:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} &= (a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1m}) + \cdots + (a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nm}) \\ &= (a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1}) + \cdots + (a_{1m} + a_{2m} + \cdots + a_{nm}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i1} + \sum_{i=1}^{n} a_{i2} + \cdots + \sum_{i=1}^{n} a_{im} \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.\end{aligned}$$

Proprietà delle sommatorie doppie

- **Proprietà**. Una sommatoria doppia può essere scritta come una sommatoria. Infatti:

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum_{k=1}^{n\times m} b_k,$$

dove i valori $b_1, \dots, b_{n\times m}$ coincidono con i valori originali $a_{11}, \dots, a_{1m}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nm}$ disposti in sequenza.

- Questo implica che molte proprietà delle sommatorie doppie seguono direttamente da quelle delle sommatorie.

- **Proprietà**. Se α è una costante che non dipende dagli indici i e j, allora

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \alpha \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \alpha \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

- **Proprietà**. Vale che

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} 1 = n \times m.$$

Proprietà delle sommatorie doppie

- **Proprietà**. Come in precedenza, vale che:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij} + b_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}.$$

- **Proprietà**. Inoltre, anche nel caso delle sommatorie doppie vale che per $n > n_1$:

$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} + \sum_{i=n_1+1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

  Specularmente, vale anche che per $m > m_1$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m_1} a_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=m_1+1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

- **Proprietà**. Infine, se α e β sono costanti che non dipendono dagli indici i e j, allora

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(\alpha a_{ij} + \beta) = \alpha \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} + m \times n \times \beta.$$

Proprietà delle sommatorie doppie

- **Proprietà**. Si osservi ancora che è lecito estrarre da ogni sommatoria i termini che non dipendono dall'indice della sommatoria:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

- Si può perciò scrivere, come **caso particolare**

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i a_j.$$

Infatti, si ha che:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i a_j.$$

Proprietà delle sommatorie doppie

- **Proprietà**. È lecito anche scrivere:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} 1 = m \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} 1 = n \sum_{j=1}^{m} b_j.$$

- **Proprietà**. È **corretto** effettuare la seguente decomposizione:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} b_{ij}.$$

- È invece **priva di senso** la scrittura

$$\sum_{j=1}^{m} b_{ij} \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Proprietà delle produttorie

- **Proprietà**. Se α è una costante che non dipende dall'indice i, allora vale che

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha^n \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

Infatti, si noti che:

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha a_1 \times \alpha a_2 \times \cdots \times \alpha a_n = \alpha^n (a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n) = \alpha^n \prod_{i=1}^{n} a_i.$$

- **Proprietà**. Si osservi che:

$$\prod_{i=1}^{n} 1 = 1.$$

Infatti, si tratta una produttoria in cui il termine generico $a_i = 1$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = 1.$$

Proprietà delle produttorie

- La produttoria di una somma **non** è uguale la somma delle produttorie:

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_i) \neq \prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

- **Proprietà**. Vale che:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \times \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

Infatti

$$\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 \times a_2 b_2 \times \cdots \times a_n b_n = (a_1 a_2 \cdots a_n) \times (b_1 b_2 \cdots b_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i \times \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

Proprietà delle produttorie

- **Proprietà**. Per $m > n$ vale che:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=n+1}^{m} a_i = \prod_{i=1}^{m} a_i.$$

Infatti si ha che

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=n+1}^{m} a_i = (a_1 a_2 \cdots a_n) \times (a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_m) = \prod_{i=1}^{m} a_i$$

- **Proprietà**. Se ogni $a_i > 0$, allora vale che

$$\log \prod_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \log a_i.$$

Infatti si ottiene che:

$$\log \prod_{i=1}^{n} a_i = \log(a_1 a_2 \cdots a_n) = \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n = \sum_{i=1}^{n} \log a_i.$$