Statistica I

Unità F.2: mutua variabilità e concentrazione

Tommaso Rigon

Università Milano-Bicocca

Unità F.2

Argomenti affrontati

- Differenza semplice media
- Mutua variabilità e caratteri trasferibili
- Rapporto di concentrazione di Gini
- Curva di Lorenz

Riferimenti al libro di testo

- §5.4 — §5.5

Descrizione del problema

- Siamo interessati a confrontare il **valore** in euro delle **squadre di calcio** di Serie A, inteso come la somma del valore di mercato dei singoli giocatori.
- Siamo interessati a quantificare la **disuguaglianza** tra i valori delle squadre.

I dati grezzi

- I dati provengono dal sito web `https://www.transfermarkt.com`
- I dati considerati fanno riferimento agli anni 2010 e 2021. Le squadre che popolano la Serie A sono 20, ma sono ovviamente diverse nei due anni considerati.
- **Nota**. Il numero di giocatori per squadra era mediamente diverso negli anni 2010 e 2021. Inoltre, il valore in euro risente dell'**inflazione**.

Valore della squadra in milioni di euro, anno 2010

```
 [1] 390.15 361.35 332.43 257.00 207.73 168.70 142.50 129.15 116.25
[10] 112.55 103.43  87.80  74.13  68.70  64.90  63.45  55.20  49.10
[19]  47.18  35.50
```

Valore della squadra in milioni di euro, anno 2021

```
 [1] 602.90 525.90 518.55 476.70 429.25 415.35 311.30 253.80 216.90
[10] 185.93 147.18 145.50 120.80 109.35 103.00  96.60  77.65  74.70
[19]  68.50  36.15
```

Alcuni indici descrittivi

- Per cominciare, descriviamo i dati utilizzando i concetti che abbiamo appreso finora.

	Anno 2010	Anno 2021
Media di `valore`	143.36	245.80
Mediana di `valore`	107.99	166.56
Scarto quadratico medio di `valore`	106.98	178.11

- Pertanto, i valori complessivi dei campionati 2010 e 2021 sono circa 2.87 e 4.92 miliardi di euro, rispettivamente.

- Inoltre, le varianze dei due campionati sono molto diverse.

- Possiamo quindi concludere che il campionato 2021 è caratterizzato da una maggiore disuguaglianza? **No**, perché i redditi complessivi nei due anni sono diversi.

La differenza semplice media

- Prima di proseguire con la nostra analisi, introduciamo un nuovo indice di variabilità.
- **Differenza semplice media**. La differenza semplice media dei dati $x_1, \ldots, x_n$ è

$$\Delta = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|.$$

- La differenza semplice media è quindi pari alla media delle distanze tra tutte le coppie di valori distinti.
- Questa definizione ricorda quella della **varianza**, in cui si è usato il valore assoluto al posto del quadrato.

Differenza semplice media: definizione alternativa

- La differenza semplice media può anche essere definita in una **maniera alternativa**, tramite una formula dal calcolo più agevole

- **Differenza semplice media**. La differenza semplice media dei dati $x_1, \ldots, x_n$ è

$$\Delta = \frac{4}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^{n} i \, x_{(i)} \right) - 2 \, \bar{x} \, \frac{n+1}{n-1},$$

dove $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$ è il campione ordinato.

- Questo definizione è **più semplice da utilizzare** in pratica, anche se la sua interpretazione è **meno trasparente**.

Dimostrazione

- L'equivalenza tra le due definizioni, a meno del termine $n(n-1)$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j| &= 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}(x_{(i)} - x_{(j)}) = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}x_{(i)} - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}x_{(j)} \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} i\, x_{(i)} - 2\left\{x_{(1)} + (x_{(1)} + x_{(2)}) \cdots + (x_{(1)} + \cdots + x_{(n)})\right\} \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} i\, x_{(i)} - 2\left\{nx_{(1)} + (n-1)x_{(2)} + \cdots + 2x_{(n-1)} + x_{(n)}\right\} \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} i\, x_{(i)} - 2\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)x_{(i)} \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} i\, x_{(i)} + 2\sum_{i=1}^{n} i\, x_{(i)} - 2(n+1)\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} \\
&= 4\sum_{i=1}^{n} i\, x_{(i)} - 2n(n+1)\bar{x}
\end{aligned}$$

Proprietà della differenza semplice media

- **Proprietà**. La differenza semplice media è per costruzione sempre **maggiore o uguale a zero**, ovvero

$$\Delta \geq 0.$$

- Inoltre, la differenza semplice media è esattamente pari a zero solo se i dati sono uguali tra loro.

- Infatti ad esempio se

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = a,$$

dove $a \in \mathbb{R}$ è una costante qualsiasi, allora

$$\Delta = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j| = \frac{1}{n(n-1)} \left(|a-a| + \cdots + |a-a| \right) = 0.$$

- Si può dimostrare anche il viceversa: se $\Delta = 0$ allora necessariamente le osservazioni sono uguali tra loro.

Proprietà della differenza semplice media

- **Proprietà**. Se consideriamo i dati trasformati $y_1, \ldots, y_n$, tali che

$$y_i = a + bx_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ sono due numeri qualsiasi e siano Δ_x e Δ_y i rispettivi indici. Allora:

$$\Delta_y = |b|\Delta_x.$$

- La dimostrazione segue dalle proprietà delle sommatorie. Infatti:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|y_i - y_j| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a + bx_i - a - bx_j| = |b|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|.$$

Il risultato segue dividendo il tutto per $n(n-1)$.

- La differenza media semplice delle y_i pertanto non dipende dalla costante a, come accade per la varianza.

Commento al problema

	Anno 2010	Anno 2021
Somma di `valore`	2867.2	4916.01
Scarto quadratico medio di `valore`	106.98	178.11
Differenza semplice media di `valore`	117.68	206.27

- La differenza semplice media è un indice **complementare** alla varianza.
- Tuttavia, questo indice non consente di rispondere alla domanda originaria, ovvero misurare la **disuguaglianza** tra le disponibilità economiche tra le varie squadre.
- Sebbene la variabilità dell'anno 2021 sia maggiore di quella dell'anno 2010, questo è dovuto al fatto che il valore complessivo è differente nei due anni.
- Abbiamo pertanto bisogno di una sorta di indice **normalizzato**.

Caratteri trasferibili

- Una variabile si dice **trasferibile**, se è possibile immaginare il "trasferimento" di un certo ammontare da un'unità statistica ad un'altra.
- Sono esempi di variabili trasferibili il reddito, il consumo di un bene, i finanziamenti alle imprese, le nascite rispetto al comune di residenza della madre, etc.
- Consideriamo in questo contesto distribuzioni $x_1, \ldots, x_n$ a **valori positivi**.
- Il totale di un certo bene presente nella popolazione è pari alla somma

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

ovvero valore complessivo.

- Nel caso di variabili trasferibili è pertanto possibile la determinazione teorica della **variabilità minima** e **variabilità massima** all'interno di una prefissata distribuzione.

Minima e massima variabilità

Minima variabilità

- La minima variabilità (disuguaglianza) si osserva se le unità statistiche sono tutte uguali. Le unità statistiche sono equamente distribuite.

- Si osservi che in questo caso i dati sono nella forma:

$$x_1 = \cdots = x_n = S/n.$$

Di conseguenza di avrà che $\Delta = 0$.

Massima variabilità

- La massima variabilità (disuguaglianza) si osserva se una singola unità statistica racchiude l'intero ammontare, mentre le rimanenti unità sono pari a 0.

- Si osservi che in questo caso i dati sono ad esempio nella forma:

$$x_1 = S, \qquad x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Massima variabilità

- La differenza media semplice dei dati, in condizione di massima variabilità è tale che

$$\Delta = \frac{4n}{n(n-1)} n\bar{x} - 2\bar{x}\frac{n+1}{(n-1)} = 2\bar{x}.$$

- Il teorema successivo chiarisce inoltre che $2\bar{x}$ è il massimo valore ottenibile.

Teorema

La differenza semplice dei dati $x_1, \ldots, x_n$ tali che $\sum_{i=1}^{n} x_i = S$ è tale che

$$\Delta \leq 2\bar{x},$$

ed è pari al valore massimo $\Delta = 2\bar{x}$ **se e solo se** una singola osservazione è pari a S.

- La dimostrazione del teorema verrà affrontata in un momento successivo.

Il rapporto di concentrazione di Gini

- Questi risultati portano alla definizione di un indice di variabilità **normalizzato**.
- **Rapporto di concentrazione di Gini**. L'indice di concentrazione di Gini della variabile trasferibile $x_1, \ldots, x_n$ è:

$$\mathcal{R} = \frac{\Delta}{(\text{massimo valore di } \Delta)} = \frac{\Delta}{2\bar{x}}.$$

- Per definizione, si ha che $0 \leq \mathcal{R} \leq 1$.
- L'interpretazione dell'indice è agevole: vale 0 in caso di **perfetta redistribuzione** del totale S, mentre vale 1 in condizione di **massima disuguaglianza**.

Proprietà del rapporto di concentrazione di Gini

- **Proprietà**. Se consideriamo i dati trasformati $y_1, \ldots, y_n$, tali che

$$y_i = b\, x_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

dove $b > 0$ è un numero positivo e siano $\mathcal{R}_x$ e $\mathcal{R}_y$ i rispettivi indici. Allora:

$$\mathcal{R}_y = \mathcal{R}_x.$$

- La dimostrazione segue dalle proprietà di Δ e della media aritmetica. Infatti:

$$\mathcal{R}_y = \frac{\Delta_y}{2\bar{y}} = \frac{|b|\Delta_x}{2b\bar{x}} = \frac{b\Delta_x}{2b\bar{x}} = \frac{\Delta_x}{2\bar{x}} = \mathcal{R}_x.$$

- Questa proprietà implica che una generica trasformazione di scala non modifica il valore di $\mathcal{R}$. In particolare, potremmo considerare equivalentemente i dati $y_i = x_i/S$.

- Poiché l'indice **non dipende dal totale** S, è possibile usare il rapporto di concentrazione di Gini per confrontare scenari in cui i valori complessivi differiscono.

Risultati e commento al problema

	Anno 2010	Anno 2021
Somma di `valore`	2867.2	4916.01
Media di `valore`	143.36	245.80
Differenza semplice media di `valore`	117.68	206.27
Rapporto di concentrazione (Gini) di `valore`	0.4105	0.4196

- L'indice di concentrazione di Gini è abbastanza elevato: questo indica una pronunciata disuguaglianza in entrambi gli anni.
- Complessivamente, i due campionati di Serie A sono **molto simili** in termini di disuguaglianza.

La curva di Lorenz

- La **curva di Lorenz** è uno strumento grafico con il quale possiamo analizzare la disuguaglianza di una distribuzione.

- Siano $x_1, \ldots, x_n$ dei dati a valori positivi. La curva di Lorenz è la **spezzata** che unisce le coppie di punti (p_i, q_i), dove

$$p_i = \frac{i}{n}, \qquad q_i = \frac{1}{S} \sum_{j=1}^{i} x_{(j)},$$

per $i = 1, \ldots, n$ e dove si pone $p_0 = q_0 = 0$ per convenzione.

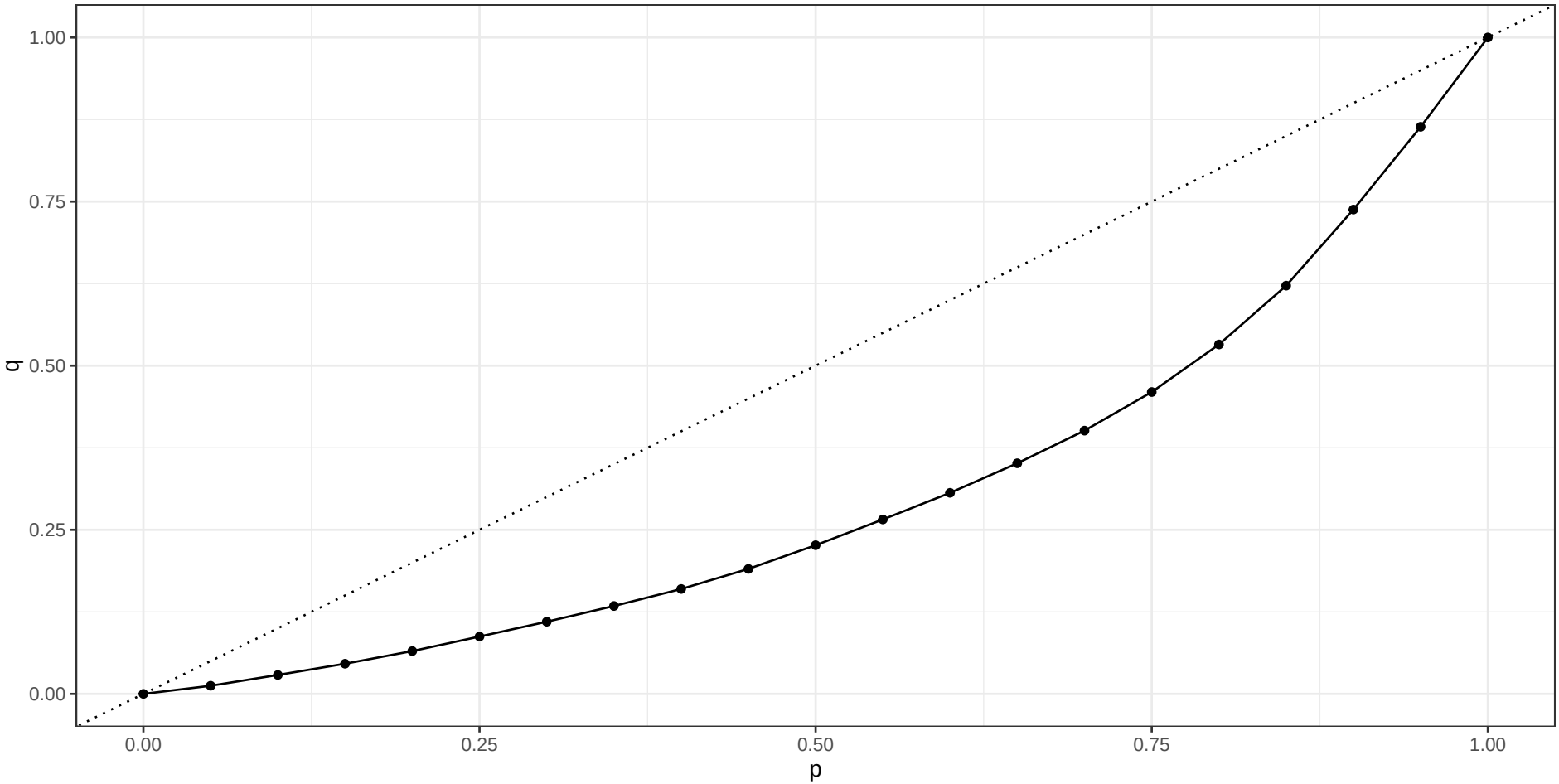
- In altri termini i punti della curva sono così composti:

$$p_i = (\text{“Frazione cumulata cumulata dei primi } i \text{ individui”}),$$

mentre si ha che

$$q_i = (\text{“Frazione cumulata di } S \text{ posseduta dai primi } i \text{ individui”}).$$

La curva di Lorenz



- Curva di Lorenz calcolata con i dati del **2010**.

La curva di Lorenz

- Se tutte le osservazioni $x_1 = \cdots = x_n = S/n$ sono uguali, ovvero ne caso di **minima variabilità**, allora

$$p_i = \frac{i}{n}, \qquad q_i = \frac{1}{S}\sum_{j=1}^{i} x_{(j)} = \frac{1}{S}\frac{S}{n}i = \frac{i}{n},$$

ovvero si ottiene $p_i = q_i$, per $i = 1, \ldots, n$.

- In altri termini, quando la **disuguaglianza** (variabilità) è **nulla** allora la curva di Lorenz coincide con la **bisettrice**.

- Nel caso di **massima variabilità**, ovvero quando $x_{(1)} = \cdots = x_{(n-1)} = 0$ e quando $x_{(n)} = S$, allora

$$p_i = \frac{i}{n}, \qquad q_i = 0, \qquad i = 0, \ldots, n-1,$$

mentre $p_n = q_n = 1$.

- In altri termini quando la **disuguaglianza** (variabilità) è **massima** la curva di Lorenz coincide con una retta costante pari a 0, con un salto nell'ultimo punto.

La curva di Lorenz

- La **prima coppia di valori** della curva di Lorenz è

$$(p_1, q_1) = \left(\frac{1}{n}, \frac{x_{(1)}}{S} \right),$$

  e rappresenta l'individuo più povero.

- **Esercizio - proprietà**. Per costruzione, le coordinate dei punti della curva di Lorenz sono tali che

$$q_i \leq p_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

- Pertanto, le differenze $(p_i - q_i) \geq 0$ costituiscono misure dirette della **concentrazione**.

- In altri termini, la differenza $p_i - q_i$ misura in proporzione la quota di S che manca ai primi i individui per trovarsi in una posizione di equidistribuzione, ovvero $p_i = q_i$.

Rapporto di concentrazione di Gini

- Pertanto, un indice di concentrazione potrebbe basarsi sulle **differenze normalizzate**

$$\frac{p_i - q_i}{p_i}, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

  le quali sono tali che $0 \leq (p_i - q_i)/p_i \leq 1$.

- Una possibilità è considerare la **media aritmetica ponderata** di queste differenze, ottenendo il seguente indice di concentrazione.

- **Rapporto di concentrazione di Gini**. L'indice di concentrazione di Gini della variabile trasferibile $x_1, \ldots, x_n$ è:

$$\mathcal{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} p_i \left(\frac{p_i - q_i}{p_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} (p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i} = 1 - \frac{2}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} q_i,$$

  sfruttando nell'ultimo passaggio il fatto che $\sum_{i=1}^{n-1} p_i = (n-1)/2$.

- Il rapporto di concentrazione di Gini è **standardizzato**, ovvero tale che $0 \leq \mathcal{R} \leq 1$, perchè è una media ponderata dei valori $(p_i - q_i)/q_i$, a loro volta compresi tra 0 e 1.

Rapporto di concentrazione di Gini

- Il rapporto di concentrazione di gini $\mathcal{R}$ è stato apparentemente definito due volte, tramite strumenti diversi.
- Sebbene questo non sia immediatamente ovvio, le due **definizioni coincidono**.

Teorema

L'indice di concentrazione di Gini della variabile trasferibile $x_1, \ldots, x_n$ è:

$$\mathcal{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}(p_i - q_i)}{\sum_{i=1}^{n-1} p_i} = \frac{\Delta}{2\bar{x}}.$$

- Questa equivalenza è di grande importanza a fini **interpretativi**.
- Inoltre, poichè $\mathcal{R} \leq 1$, questa equivalenza **dimostra** anche la disequazione $\Delta \leq 2\bar{x}$.

Dimostrazione

- In primo luogo, si mostra che:

$$\sum_{i=1}^{n-1} q_i = \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i} x_{(i)} = \frac{1}{S}\left\{x_{(1)} + (x_{(1)} + x_{(2)}) \cdots + (x_{(1)} + \cdots + x_{(n-1)})\right\}$$

$$= \frac{1}{S}\left\{(n-1)x_{(1)} + (n-2)x_{(2)} + \cdots + x_{(n-1)} + 0 \times x_{(n)}\right\}$$

$$= \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n}(n-i)x_{(i)} = \frac{n}{S}\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} - \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} i\, x_{(i)} = n - \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} i\, x_{(i)}.$$

- Di conseguenza sostituendo e ricordando che $S = n\bar{x}$, si ottiene

$$\mathcal{R} = 1 - \frac{2}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} q_i = 1 - \frac{2}{n-1}\left[n - \frac{1}{S}\sum_{i=1}^{n} i\, x_{(i)}\right]$$

$$= \frac{1}{2\bar{x}}\left[\frac{4}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} i\, x_{(i)}\right) - 2\,\bar{x}\,\frac{n+1}{n-1}\right] = \frac{\Delta}{2\bar{x}}.$$

Area sopra la curva di Lorenz

- Un modo per quantificare la disuguaglianza è calcolare l'**area** compresa tra la **curva di Lorenz** e la **bisettrice**.
- L'area tra la curva e la bisettrice è necessariamente compresa tra 0 (minima disuguaglianza) e 1/2 (massima disuguaglianza).
- Di conseguenza è possibile considerare la quantità: $2 \times$ ("Area di concentrazione").

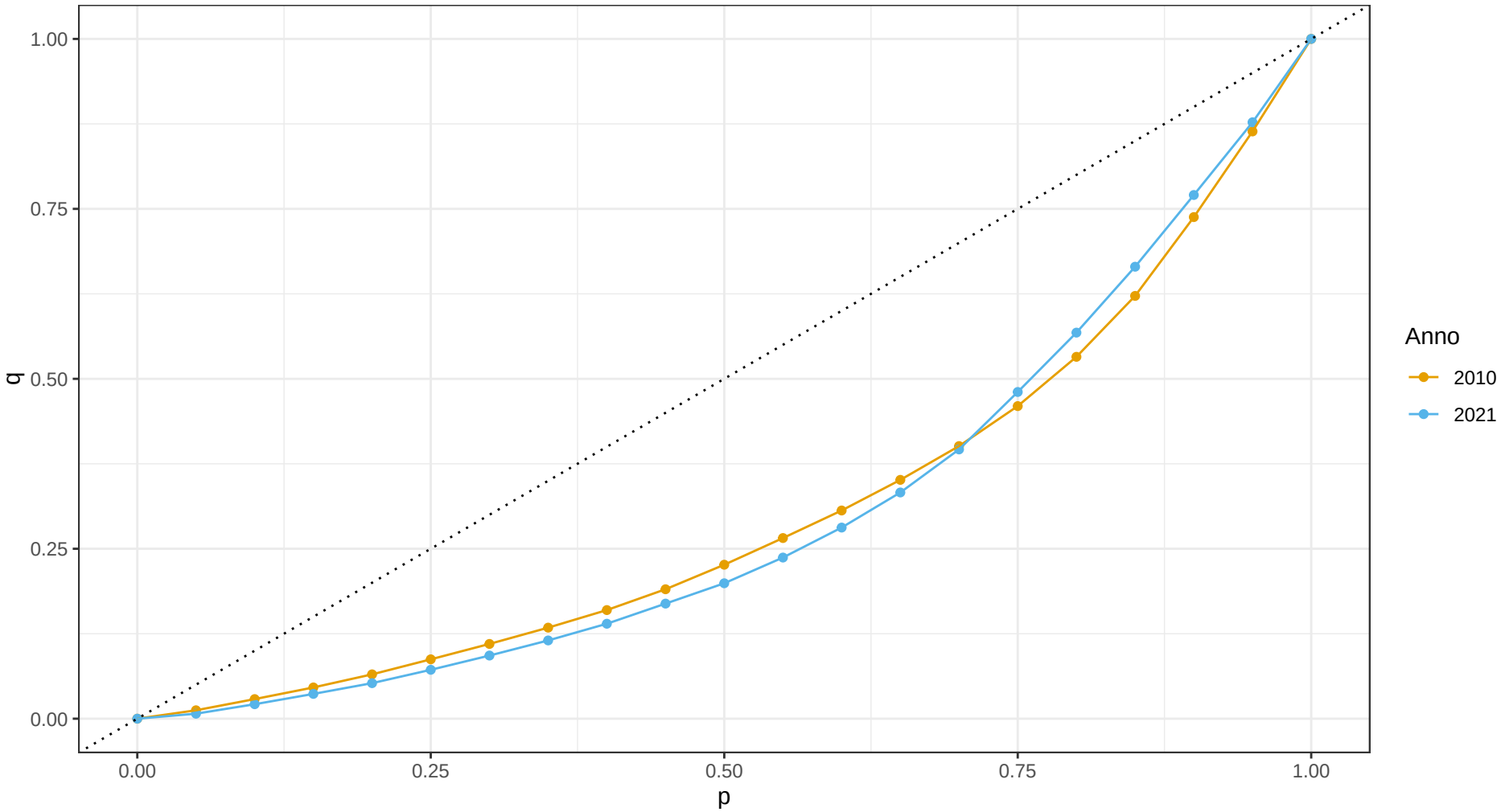
Teorema (senza dimostrazione)

L'indice di concentrazione di Gini della variabile trasferibile $x_1, \ldots, x_n$ è:

$$\mathcal{R} = \frac{n-1}{n} [2 \times (\text{"Area di concentrazione"})]$$

- Questo risultato fornisce un'ulteriore giustificazione ed interpretazione dell'indice di concentrazione di Gini.

Confronto tra le curve di Lorenz



- Curva di Lorenz calcolata con i dati del **2010** e del **2021**.