

# Statistica I

Unità 0: tabelle di contingenza

**Tommaso Rigon**

**Università Milano-Bicocca**

Anno Accademico 2020-2021

## Argomenti affrontati

- Tabelle di contingenza
- Distribuzione congiunta, marginale e condizionata
- Indipendenza in distribuzione
- Frequenze attese, indice  $\chi^2$  di Pearson

## Riferimenti al libro di testo

- §7.1 — §7.5

# Descrizione del problema

- Dopo il **disastro del Titanic**, una commissione d'inchiesta del **British Board of Trade** ha compilato una lista di tutti i 1316 passeggeri includendo le seguenti aggiuntive:
  - l'esito (salvato, non salvato)
  - la classe (I, II, III) in cui viaggiavano
  - il sesso, l'età, etc.
- In questa unità ci limitiamo a considerare le informazioni sull'esito e la classe. I dati sono quindi costituiti da una lunga lista del tipo:

Passeggero	Classe	Esito
Nome 1	II	Salvato
Nome 2	III	Non salvato
Nome 3	I	Non salvato
⋮	⋮	⋮
Nome 1316	III	Salvato

# Le frequenze marginali

- La variabile **Classe** ha la seguente distribuzione di **frequenza marginale**:

Classe	Frequenze assolute	Frequenze relative
I	325	0.247
II	285	0.216
III	706	0.537

- La variabile **Esito** ha la seguente distribuzione di **frequenza marginale**:

Esito	Frequenze assolute	Frequenze relative
Salvato	499	0.379
Non salvato	817	0.621

# Le frequenze congiunte

- Una sintesi che possiamo operare consiste nel costruire una tabella, detta **tabella di contingenza** oppure **tabella a doppia entrata**.

Esito	Classe			Totale
	I	II	III	
Salvato	203	118	178	499
Non salvato	122	167	528	817
Totale	325	285	706	1316

- In questa tabella sono riportate le **frequenze congiunte**, ad esempio, il valore 203 rappresenta il numero di passeggeri che viaggiavano in I classe e che sono sopravvissuti.
- È quindi evidente che viaggiatori della I classe hanno ricevuto un **trattamento preferenziale**.
- La frazione di individui della I classe che si sono salvati è  $203/325 \approx 0.63$ .
- Invece, la frazione di viaggiatori della III classe che si sono salvati è  $178/706 \approx 0.25$ .

# Le frequenze congiunte relative

- Possiamo anche considerare le **frequenze congiunte relative**, ottenute dividendo le frequenze congiunte per il numero totale  $n = 1316$ .

Esito	Classe			Totale
	I	II	III	
Salvato	0.154	0.090	0.135	0.38
Non salvato	0.093	0.127	0.401	0.62
Totale	0.247	0.217	0.536	1

- La frazione di individui della I classe che si sono salvati è  $0.154/0.247 \approx 0.63$ .
- Invece, la frazione di viaggiatori della III classe che si sono salvati è  $0.135/0.536 \approx 0.25$ .

# Tabella di contingenza

- Siano  $x$  ed  $y$  due variabili aventi modalità  $c_1, \dots, c_h$  e  $d_1, \dots, d_k$ , rispettivamente.
- Una **tabella di contingenza** (a due variabili) per le coppie di dati  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  si presenta nella seguente forma:

Variabile x	Variabile y					Totale
	$d_1$	$\dots$	$d_j$	$\dots$	$d_k$	
$c_1$	$n_{11}$	$\dots$	$n_{1j}$	$\dots$	$n_{1k}$	$n_{1+}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$c_i$	$n_{i1}$	$\dots$	$n_{ij}$	$\dots$	$n_{ik}$	$n_{i+}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$c_h$	$n_{h1}$	$\dots$	$n_{hj}$	$\dots$	$n_{hk}$	$n_{h+}$
<b>Totale</b>	$n_{+1}$	$\dots$	$n_{+j}$	$\dots$	$n_{+k}$	$n$

- La frequenza  $n_{ij}$  è il numero di unità statistica che presentano contemporaneamente le modalità  $c_i$  e  $d_j$ .

# Tabella di contingenza, frequenze relative

- Dividendo per  $n$  ciascun termine della precedente tabella, si ottiene inoltre:

Variabile $x$	Variabile $y$					Totale
	$d_1$	...	$d_j$	...	$d_k$	
$c_1$	$f_{11}$	...	$f_{1j}$	...	$f_{1k}$	$f_{1+}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$c_i$	$f_{i1}$	...	$f_{ij}$	...	$f_{ik}$	$f_{i+}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$c_h$	$f_{h1}$	...	$f_{hj}$	...	$f_{hk}$	$f_{h+}$
<b>Totale</b>	$f_{+1}$	...	$f_{+j}$	...	$f_{+k}$	<b>1</b>

- La frequenza relativa  $f_{ij} = n_{ij}/n$  è quindi la frazione di osservazioni che presentano contemporaneamente le modalità  $c_i$  e  $d_j$ .



# Alcune proprietà

- Proprietà. Per definizione, vale quindi che

$$n_{i+} = \sum_{j=1}^k n_{ij}, \quad n_{+j} = \sum_{i=1}^h n_{ij}, \quad n = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k n_{ij}.$$

- Proprietà. Sempre per definizione, vale quindi che

$$f_{i+} = \frac{n_{i+}}{n} = \sum_{j=1}^k f_{ij}, \quad f_{+j} = \frac{n_{+j}}{n} = \sum_{i=1}^h f_{ij}, \quad \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k f_{ij} = 1.$$

- Esercizio. Si verifichino le proprietà precedenti nel caso del Titanic.

# Terminologia & notazione

## Distribuzione congiunta

- Una tabella di contingenza nel suo complesso ci mostra la distribuzione congiunta di  $x$  ed  $y$ . Le  $n_{ij}$  per  $i = 1, \dots, h$  e  $j = 1, \dots, k$  sono chiamate frequenze congiunte.
- I valori  $f_{ij}$  per  $i = 1, \dots, h$  e  $j = 1, \dots, k$  sono chiamate frequenze congiunte relative.

## Distribuzione marginale

- Le distribuzioni marginali per  $x$  e per  $y$  sono invece pari a

<b>Variabile <math>x</math></b>	$c_1$	$\dots$	$c_i$	$\dots$	$c_h$	<b>Totale</b>
Frequenze assolute	$n_{1+}$	$\dots$	$n_{i+}$	$\dots$	$n_{h+}$	$n$
Frequenze relative	$f_{1+}$	$\dots$	$f_{i+}$	$\dots$	$f_{h+}$	1

<b>Variabile <math>y</math></b>	$d_1$	$\dots$	$d_j$	$\dots$	$d_k$	<b>Totale</b>
Frequenze assolute	$n_{+1}$	$\dots$	$n_{+j}$	$\dots$	$n_{+k}$	$n$
Frequenze relative	$f_{+1}$	$\dots$	$f_{+j}$	$\dots$	$f_{+k}$	1

# Terminologia & notazione

## Distribuzione condizionata ( $x \mid y = d_j$ )

- La  $j$ -esima colonna mostra la distribuzione di  $x$  **condizionata** ad  $y = d_j$  oppure, equivalentemente, la distribuzione di  $x$  dato  $y = d_j$ .

Distribuzione $x \mid y = d_j$	$c_1$	...	$c_i$	...	$c_h$	Totale
Frequenze assolute	$n_{1j}$	...	$n_{ij}$	...	$n_{hj}$	$n_{+j}$
Frequenze relative	$n_{1j}/n_{+j}$	...	$n_{ij}/n_{+j}$	...	$n_{hj}/n_{+j}$	1

## Distribuzione condizionata ( $y \mid x = c_i$ )

- La  $i$ -esima colonna mostra la distribuzione di  $y$  **condizionata** ad  $x = c_i$  oppure, equivalentemente, la distribuzione di  $y$  dato  $x = c_i$ .

Distribuzione $y \mid x = c_i$	$d_1$	...	$d_j$	...	$d_k$	Totale
Frequenze assolute	$n_{i1}$	...	$n_{ij}$	...	$n_{ik}$	$n_{i+}$
Frequenze relative	$n_{i1}/n_{i+}$	...	$n_{ij}/n_{i+}$	...	$n_{ik}/n_{i+}$	1

# Il disastro del Titanic, distribuzioni condizionate

(Esito   Classe = I)	Salvato	Non Salvato	Totale
Frequenze assolute	203	122	325
Frequenze relative	0.625	0.375	1

(Esito   Classe = II)	Salvato	Non Salvato	Totale
Frequenze assolute	118	167	285
Frequenze relative	0.41	0.59	1

(Esito   Classe = III)	Salvato	Non Salvato	Totale
Frequenze assolute	178	528	706
Frequenze relative	0.25	0.75	1

# Il disastro del Titanic, distribuzioni condizionate

(Classe   Esito = Salvato)	I	II	III	Totale
Frequenze assolute	203	118	178	499
Frequenze relative	0.41	0.24	0.36	1

(Classe   Esito = Non salvato)	I	II	III	Totale
Frequenze assolute	122	167	528	817
Frequenze relative	0.15	0.20	0.65	1

## Distribuzione congiunta

- La distribuzione congiunta è il “nucleo” della tabella. Comprende il numero di osservazioni che presentano una modalità della prima variabile contemporaneamente (**congiuntamente**) ad una modalità della seconda variabile.

## Distribuzione condizionata

- Le distribuzioni condizionate considerano le frequenze della prima variabile solamente (**condizionatamente**) per certi valori della seconda variabile.

## Distribuzione marginale

- Le distribuzioni marginali considerano le frequenze della prima variabile a prescindere (**marginalmente**) dall'esito della seconda variabile.

# La dipendenza tra variabili

- Ri-consideriamo i dati del disastro del Titanic.
- Abbiamo notato che la sopravvivenza **dipende** dalla classe in cui viaggiava il passeggero visto che la frazione di sopravvissuti all'incidente varia al variare della classe.
- Indichiamo con  $y$  la **Classe** e con  $x$  l'**Esito**. Diremo quindi che la variabile  $x$  **dipende** dalla variabile  $y$ .
- Dipendenza di  $x$  dato  $y$ . La variabile  $x$  **dipende** dalla variabile  $y$  se le distribuzioni condizionate di  $x$  dato  $y$  sono tra loro diverse in termini di **frequenze relative**.
- La dipendenza di  $y$  dato  $x$  ovviamente è definita in maniera speculare.

# Indipendenza tra variabili

- Supponiamo che la distribuzione congiunta sia la seguente.

Esito	Classe			Totale
	I	II	III	
Salvato	150	200	300	650
Non salvato	300	400	600	1300
Totale	450	600	900	1950

- Nonostante le frequenze assolute delle distribuzioni condizionate (**Esito** | **Classe**) siano diverse tra loro, le frequenze relative risultano invece uguali.

Esito	Classe		
	I	II	III
Salvato	0.33	0.33	0.33
Non salvato	0.67	0.67	0.67
Totale	1	1	1



# Indipendenza tra variabili

- Nel caso della tabella precedente è quindi ragionevole affermare non esiste dipendenza di  $x$  da  $y$ .
- Si ricordi che  $n_{ij}/n_{+j}$  è la frequenza relativa di  $c_i$  nella distribuzione di  $x$  condizionata a  $y = d_j$ .
- **Indipendenza di  $x$  da  $y$ .** La variabile  $x$  è **indipendente in distribuzione** da  $y$  se per ogni  $i = 1, \dots, h$  vale che

$$\frac{n_{i1}}{n_{+1}} = \dots = \frac{n_{ij}}{n_{+j}} = \dots = \frac{n_{ik}}{n_{+k}}.$$

Viceversa, diremo che  $x$  dipende in distribuzione da  $y$ .

- In altri termini,  $x$  è indipendente da  $y$  se tutte le distribuzioni condizionate ( $x \mid y = d_j$ ) sono uguali in termini di frequenze relative, per ogni  $j = 1, \dots, k$ .

# Indipendenza, distribuzione marginale

- **Proprietà.** Se  $x$  è indipendente da  $y$ , allora le distribuzioni condizionate sono tutte uguali e pari alla distribuzione marginale di  $x$ . In altri termini

$$f_{i+} = \frac{n_{i+}}{n} = \frac{n_{ij}}{n_{+j}}, \quad i = 1, \dots, h,$$

per ogni valore di  $j = 1, \dots, k$ .

- Per dimostrare questa proprietà, si noti anzitutto che l'indipendenza implica che

$$\frac{n_{ij'}}{n_{+j'}} = \frac{n_{ij}}{n_{+j}} \implies n_{ij'} = n_{ij} \frac{n_{+j'}}{n_{+j}},$$

per ogni  $j, j' = 1, \dots, k$  e  $i = 1, \dots, h$ . Quindi:

$$\frac{n_{i+}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j'=1}^k n_{ij'} = \frac{1}{n} \sum_{j'=1}^k \frac{n_{ij} n_{+j'}}{n_{+j}} = \frac{n_{ij}}{n_{+j}} \sum_{j'=1}^k \frac{n_{+j'}}{n} = \frac{n_{ij}}{n_{+j}} \frac{n}{n} = \frac{n_{ij}}{n_{+j}}.$$

# Indipendenza tra variabili

- **Proprietà.** Se  $x$  è indipendente in distribuzione da  $y$ , allora  $y$  è indipendente in distribuzione da  $x$ . In altri termini, per ogni  $j = 1, \dots, k$  vale anche che

$$\frac{n_{1j}}{n_{1+}} = \dots = \frac{n_{ij}}{n_{i+}} = \dots = \frac{n_{hj}}{n_{h+}} = \frac{n_{+j}}{n} = f_{+j}.$$

- **Nota.** L'indipendenza è pertanto un concetto **simmetrico**. Possiamo quindi parlare di indipendenza tra  $x$  ed  $y$  senza dover indicare necessariamente una direzione.
- Per dimostrare questa proprietà, si noti che se  $x$  è indipendente da  $y$ , allora per la proprietà precedente

$$f_{i+} = \frac{n_{i+}}{n} = \frac{n_{ij}}{n_{+j}}, \quad i = 1, \dots, h, \quad j = 1, \dots, k.$$

Di conseguenza, avremo che

$$\frac{n_{ij}}{n_{i+}} = \frac{n_{+j}}{n} = f_{+j}, \quad i = 1, \dots, h, \quad j = 1, \dots, k.$$

# Le frequenze attese

- Supponiamo siano note le **distribuzioni marginali** delle variabili  $x$  ed  $y$ .
- Inoltre, supponiamo che  $x$  ed  $y$  siano indipendenti in distribuzione. Le frequenze congiunte pertanto devono essere necessariamente pari a  $n_{ij} = (n_{i+}n_{+j})/n$ .
- **Frequenze attese**. Le frequenze attese (assolute e relative) sono definite a partire dalle frequenze marginali come segue

$$\hat{n}_{ij} = \frac{n_{i+}n_{+j}}{n}, \quad \hat{f}_{ij} = \frac{\hat{n}_{ij}}{n} = f_{i+}f_{+j}, \quad i = 1, \dots, h, \quad j = 1, \dots, k.$$

- In altri termini, le frequenze attese sono le frequenze **congiunte** che è lecito attendersi sotto l'**ipotesi di indipendenza** tra le variabili  $x$  ed  $y$ .

# Disastro del Titanic, frequenze attese

## ■ Frequenze attese

Esito	Classe			Totale
	I	II	III	
Salvato	123.2	108.1	267.7	499
Non salvato	201.8	176.9	438.3	817
Totale	325	285	706	1316

## ■ Frequenze attese relative

Esito	Classe			Totale
	I	II	III	
Salvato	0.094	0.082	0.203	0.38
Non salvato	0.153	0.134	0.333	0.62
Totale	0.247	0.217	0.536	1

- **Esercizio.** Si verifichi che le frequenze condizionate relative sono tutte uguali.

# La massima dipendenza

- La **massima dipendenza** di  $x$  dato  $y$  si verifica, viceversa, quando la conoscenza della variabile  $y$  determina univocamente la variabile  $x$ .
- Supponiamo di osservare il seguente insieme di dati

Esito	Classe			Totale
	I	II	III	
Salvato	325	285	0	610
Non salvato	0	0	706	706
Totale	325	285	706	1316

- Condizionatamente alla variabile **Classe**, la variabile **Esito** è univocamente determinata.
- Il viceversa non è vero. Conoscere l'**Esito** non determina univocamente la **Classe**.
- **Nota.** La (perfetta) dipendenza è quindi un concetto **asimmetrico**. La perfetta dipendenza di  $x$  dato  $y$  non implica il contrario.

# Connessione e indice $\chi^2$

- Siamo interessati a trovare un indice di **connessione**, ovvero un indice utilizzato per **quantificare la dipendenza** tra due variabili  $x$  ed  $y$ .
- È ragionevole basare tale indice sulle **contingenze**, ovvero sulle differenze

$$(\text{contingenza}_{ij}) = n_{ij} - \hat{n}_{ij}, \quad i = 1, \dots, h, \quad j = 1, \dots, k.$$

- Indice  $\chi^2$  di Pearson. L'indice di connessione  $\chi^2$  è definito come

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k \frac{(n_{ij} - \hat{n}_{ij})^2}{\hat{n}_{ij}} = n \left( \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k \frac{f_{ij}^2}{f_{i+} f_{+j}} - 1 \right).$$

- L'indice  $\chi^2$  è pertanto sempre maggiore o uguale a zero. È pari a zero in particolare in caso di indipendenza.

# Indice $\chi^2$ normalizzato

## Teorema (senza dimostrazione)

- L'indice  $\chi^2$  di Pearson è tale che

$$\chi^2 \leq n \min\{h - 1, k - 1\}.$$

- Se  $k \leq h$  l'indice raggiunge il suo massimo in caso di dipendenza perfetta di  $x$  dato  $y$ .
- Se  $h \leq k$  l'indice raggiunge il suo massimo in caso di dipendenza perfetta di  $y$  dato  $x$ .

- Il precedente teorema consente di definire un indice  $\chi^2$  **normalizzato**, ovvero

$$\chi_{\text{norm}}^2 = \frac{\chi^2}{(\text{massimo valore di } \chi^2)} = \frac{\chi^2}{n \min\{h - 1, k - 1\}},$$

che è ovviamente tale che  $0 \leq \chi_{\text{norm}}^2 \leq 1$ .

- Utilizzando i dati del Titanic, si ottiene  $\chi^2 = 133.05$  e  $\chi_{\text{norm}}^2 = 0.1011$ .