

# Statistica I

Unità K: regressione lineare semplice

**Tommaso Rigon**

**Università Milano-Bicocca**



## Argomenti affrontati

- Modello di regressione lineare semplice
- Minimi quadrati
- Media e varianza residua, coefficiente di determinazione ( $R^2$ )

## Riferimenti al libro di testo

- §22.1 — §22.4
- §22.8
- **Nota.** Alcuni paragrafi richiedono la conoscenza di nozioni di calcolo delle probabilità. Tali passaggi non sono materia d'esame.

# Descrizione del problema

- Per  $n = 31$  **alberi di ciliegio** nero sono disponibili le misure del diametro del tronco (misurato a circa 1m dal suolo) ed il volume ricavato dall'albero dopo l'abbattimento.
- Si vogliono utilizzare i dati per ottenere un'**equazione** che permetta di **prevedere** il volume, ottenibile solo dopo l'abbattimento dell'albero, avendo a disposizione il diametro, che è invece facilmente misurabile.
- In altri termini, stiamo cercando una qualche funzione  $f(\cdot)$  tale che

$$(\text{volume}) \approx f(\text{diametro}).$$

- Una simile equazione ha differenti utilizzi.
- Ad esempio, può essere utilizzata per decidere quanti e quali alberi tagliare per ricavare un certo ammontare di legno, oppure per determinare il “prezzo” di un bosco.

# I dati grezzi

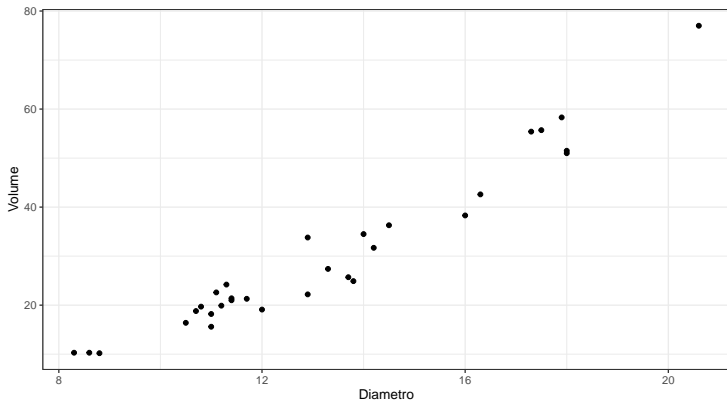
## Diametro

```
[1] 8.3 8.6 8.8 10.5 10.7 10.8 11.0 11.0 11.1 11.2 20.6 11.3
[13] 11.4 11.4 11.7 12.0 12.9 12.9 13.3 13.7 13.8 14.0 14.2 14.5
[25] 16.0 16.3 17.3 17.5 17.9 18.0 18.0
```

## Volume

```
[1] 10.3 10.3 10.2 16.4 18.8 19.7 15.6 18.2 22.6 19.9 77.0 24.2
[13] 21.0 21.4 21.3 19.1 22.2 33.8 27.4 25.7 24.9 34.5 31.7 36.3
[25] 38.3 42.6 55.4 55.7 58.3 51.5 51.0
```

# Diagramma di dispersione



- Possiamo quindi calcolare la correlazione:

$$\text{cor}(\text{diametro}, \text{volume}) = 0.967.$$

- È quindi evidente una **forte relazione** di tipo sostanzialmente lineare.

# Un primo modello

- Adottiamo per il momento l'ipotesi di una relazione lineare.

- Possiamo allora definire un **modello lineare** del tipo

$$(\text{volume}) = \alpha + \beta (\text{diametro}) + (\text{errore}).$$

- L'ultima componente esprime la parte delle oscillazioni del volume non legate al diametro o che non è catturata dalla relazione lineare.
- Se  $y_1, \dots, y_n$  rappresentano i volumi e  $x_1, \dots, x_n$  rappresentano i diametri, allora scriveremo:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

dove  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  rappresentano invece gli errori.

# Modello di regressione lineare: terminologia

- Il modello che abbiamo appena descritto viene tipicamente chiamato **modello di regressione lineare semplice**.
- In generale, vogliamo spiegare una variabile  $y$  utilizzando un'altra variabile  $x$ , mediante un modello del tipo

$$y = \alpha + \beta x + \epsilon.$$

- La variabile  $y$  viene tipicamente chiamata **variabile risposta** o **variabile dipendente**.
- La variabile  $x$  viene chiamata **variabile esplicativa**, **regressore** oppure **variabile indipendente**.
- I valori  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  sono i **parametri** del modello.

# Metodo dei minimi quadrati: idea

- In pratica, è necessario **determinare il valore** dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$ .
- Se avessimo a disposizione un valore ragionevole dei parametri, diciamo  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ , potremmo prevedere il volume del legno usando

$$(\text{volume}) \approx \hat{\alpha} + \hat{\beta}(\text{diametro}).$$

- Sembra ragionevole cercare di determinare  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  in modo tale da ottenere buone **previsioni** sull'insieme di dati osservato.
- Vogliamo quindi trovare dei valori per i parametri tali che

$$y_1 \approx \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_1,$$

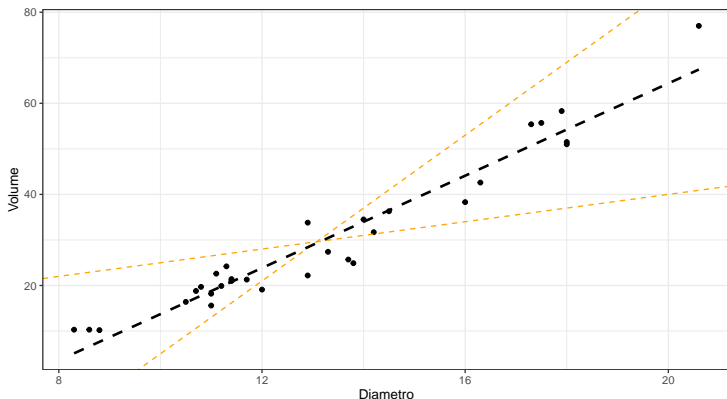
$$y_2 \approx \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_2,$$

$$\vdots$$

$$y_n \approx \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_n.$$



# Differenti scelte dei parametri



- Le linee **arancioni** rappresentano delle scelte **non ottimali** a fini previsivi.
- Viceversa, la linea nera attraversa la nuvola di punti e sembra una scelta appropriata.

# Metodo dei minimi quadrati: la funzione di perdita

- Per rendere operativa la precedente intuizione, dobbiamo decidere cosa si intende precisamente per

$$y_i \approx \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

- Una possibile soluzione, è scegliere i parametri che **minimizzano la funzione di perdita**

$$\ell(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2,$$

ovvero scegliendo  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  tali che

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \arg \min_{\alpha, \beta} \ell(\alpha, \beta).$$

- Questo criterio viene detto il **metodo dei minimi quadrati**, poiché minimizza la somma degli scarti al quadrato, ovvero la somma degli errori al quadrato.

# Minimi quadrati: determinazione dei parametri

- Il criterio dei minimi quadrati è molto popolare perché la soluzione del problema di minimizzazione è semplice da calcolare.

## Minimi quadrati

- L'unica soluzione al problema

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \arg \min_{\alpha, \beta} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2$$

è pari a

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \bar{x}, \quad \hat{\beta} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)}.$$

- La soluzione del problema è **ben definita** solamente se  $\text{var}(x) > 0$ .
- Questo è molto ragionevole: il parametro  $\beta$  indica quanto varia la risposta al variare della esplicativa, ma se  $\text{var}(x) = 0$  allora l'esplicativa non varia affatto.

# Dimostrazione I

- Per ogni prefissato  $\beta$ , conosciamo già la soluzione del seguente problema

$$\arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n (w_i - \alpha)^2,$$

avendo posto  $w_i = y_i - \beta x_i$  per ogni  $i = 1, \dots, n$ . Infatti, dall'unità C sappiamo che il valore che minimizza tale funzione è la media aritmetica.

- Pertanto per qualsiasi valore di  $\beta$ , otteniamo che

$$\hat{\alpha}(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i) = \bar{y} - \bar{x}\beta.$$

- Dalla definizione di  $\hat{\alpha}(\beta)$  segue che per ogni  $\alpha, \beta$

$$\ell(\alpha, \beta) \geq \ell(\hat{\alpha}(\beta), \beta).$$

# Dimostrazione II

- Abbiamo quindi ridotto il problema iniziale al seguente sotto-problema

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}} \ell(\hat{\alpha}(\beta), \beta) = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n [(y_i - \bar{y}) - \beta(x_i - \bar{x})]^2$$

e ovviamente porremo  $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\hat{\beta}) = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$ .

- Prendendo la derivata rispetto a  $\beta$  e ponendola pari a 0, si ottiene che

$$-2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})[(y_i - \bar{y}) - \beta(x_i - \bar{x})] = 0,$$

che possiamo riscrivere come

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \beta \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

# Dimostrazione III

- Quindi, se  $\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 > 0$  la soluzione al problema è pari a

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{var}(x)},$$

dove l'ultimo passaggio si ottiene moltiplicando numeratore e denominatore per  $n$ .

- **Nota matematica.** Per concludere la dimostrazione bisogna infine verificare che la soluzione trovata è un punto di minimo e non, ad esempio, un massimo.
- **Esercizio.** Si verifichi che la soluzione è effettivamente un punto di minimo, ad esempio valutando il segno della derivata seconda di  $\ell(\hat{\alpha}(\beta), \beta)$ .

# Calcolo dei parametri: gli alberi di ciliegio

- In questo caso abbiamo che

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n y_i &= 935.3, & \sum_{i=1}^n x_i &= 410.7, \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 &= 5736.55, & \sum_{i=1}^n x_i y_i &= 13887.86.\end{aligned}$$

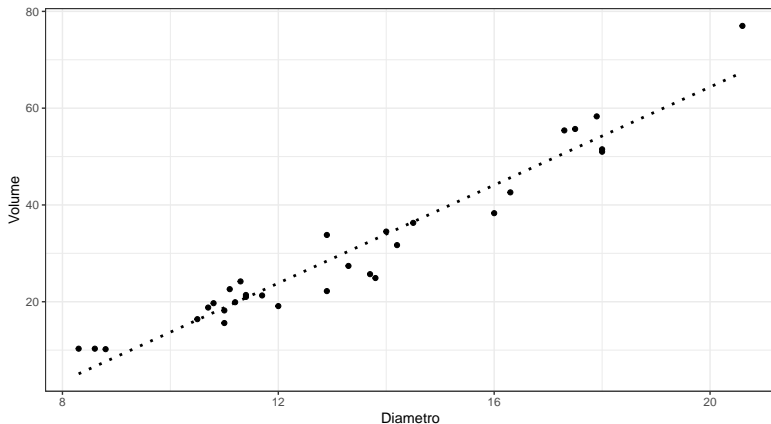
- Perciò possiamo calcolare medie, varianza e covarianza

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{935.5}{31} = 30.17, & \bar{x} &= \frac{410.7}{31} = 13.25, \\ \text{var}(x) &= \frac{5736.55}{31} - 13.25^2 = 9.53, & \text{cov}(x, y) &= \frac{13887.86}{31} - 13.25 \times 30.17 = 48.24.\end{aligned}$$

- Possiamo quindi determinare i parametri

$$\hat{\beta} = \frac{48.24}{9.53} = 5.06, \quad \hat{\alpha} = 30.17 - 5.06 \times 13.25 = -36.88.$$

# Diagramma di dispersione con retta di regressione



- La capacità di descrivere le variazioni del volume sembra buona, con l'eccezione forse delle osservazioni più esterne.



# I residui: media e varianza

- Le differenze tra i valori osservati della variabile risposta ed i valori previsti dal modello, ovvero

$$r_i = y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

vengono spesso chiamati **residui**.

- Proprietà. La media dei residui è nulla, infatti:

$$\sum_{i=1}^n r_i = \sum_{i=1}^n y_i - n\hat{\alpha} - \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i = n\bar{y} - n(\bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}) - n\hat{\beta}\bar{x} = 0.$$

- La varianza dei residui essere utilizzata per valutare la **bontà di adattamento** del modello ai dati.
- Infatti, quanto più la varianza dei residui è piccola, tanto più la retta di regressione è vicina alle osservazioni.

# I residui: media e varianza

- **Proprietà.** La varianza dei residui è sempre minore di quella della variabile risposta. Infatti:

$$\text{var}(y) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha)^2 \geq \min_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha - \beta x_i)^2 = \text{var}(r).$$

- **Proprietà.** La varianza dei residui è pari a

$$\text{var}(r) = \text{var}(y) - \frac{\text{cov}(x, y)^2}{\text{var}(x)}.$$

Infatti, usando le proprietà della varianza, otteniamo che

$$\begin{aligned} \text{var}(r) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(y_i - \hat{\beta} x_i) - (\bar{y} - \hat{\beta} \bar{x})]^2 = \text{var}(y - \hat{\beta} x) \\ &= \text{var}(y) + \hat{\beta}^2 \text{var}(x) - 2\hat{\beta} \text{cov}(x, y) \\ &= \text{var}(y) + \frac{\text{cov}(x, y)^2}{\text{var}(x)} - 2 \frac{\text{cov}(x, y)^2}{\text{var}(x)} = \text{var}(y) - \frac{\text{cov}(x, y)^2}{\text{var}(x)}. \end{aligned}$$

# Coefficiente di determinazione $R^2$

- La varianza dei residui dipende dalla scala del fenomeno osservato. Pertanto per valutare la bontà di adattamento si utilizza spesso l'indice  $R^2$ .
- Coefficiente di determinazione  $R^2$ . Il coefficiente  $R^2$  per un modello di regressione lineare semplice è definito come:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{var}(r)}{\text{var}(y)}.$$

- L'indice  $R^2$  misura la frazione di varianza della variabile risposta (**varianza totale**) spiegata dal modello. Si ha pertanto che  $0 \leq R^2 \leq 1$ .
- Si ha che  $R^2 = 0$  se  $\text{var}(r) = \text{var}(y)$ , ovvero quando il modello non “spiega” la risposta.
- Viceversa, si ha che  $R^2 = 1$  quando  $\text{var}(r) = 0$ , ovvero quando il modello “spiega” perfettamente la risposta.

# Coefficiente di determinazione: gli alberi di ciliegio

- Abbiamo calcolato in precedenza le seguenti quantità:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= 30.17, & \bar{x} &= 13.25, \\ \text{var}(x) &= 9.53, & \text{cov}(x, y) &= 48.24.\end{aligned}$$

È inoltre noto che  $\sum_{i=1}^n y_i^2 = 36324.99$ .

- Pertanto possiamo ottenere

$$\text{var}(y) = \frac{36324.99}{31} - 30.17^2 = 261.54, \quad \text{var}(r) = 261.54 - \frac{48.24^2}{9.53} = 17.35.$$

- Pertanto, il **coefficiente di determinazione** vale circa

$$R^2 = 1 - \frac{17.35}{261.54} = 0.934,$$

ovvero il modello spiega poco meno del 95% della varianza totale.

# Correlazione e coefficiente di determinazione

- **Proprietà.** Il coefficiente di determinazione è pari al coefficiente di correlazione al quadrato, infatti:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{var}(r)}{\text{var}(y)} = \frac{\text{cov}(x, y)^2}{\text{var}(x)\text{var}(y)} = \text{cor}(x, y)^2.$$

- Questa equivalenza chiarisce che il coefficiente di correlazione (e quindi la covarianza) misura una relazione di tipo lineare.
- Infatti, il coefficiente  $R^2$  e quindi  $\text{cor}(x, y)$  catturano la vicinanza dei dati ad una retta.
- **Nota.** Nel caso dei ciliegi, abbiamo ottenuto  $R^2 = 0.934$  e  $\text{cor}(x, y) = 0.967^2 = 0.935$ . Questa leggera discrepanza è dovuta alle varie approssimazioni numeriche effettuate.
- Se avessimo tenuto traccia di un maggior numero di decimali, avremmo ottenuto

$$\text{cor}(x, y) = 0.9671194, \quad R^2 = 0.9353199.$$

# Regressione e correlazione

- Le analogie con l'unità J, dove abbiamo introdotto la covarianza e la correlazione, sono molte.
- Il problema di base è lo stesso (studio delle relazioni tra variabili) e gli “ingredienti” che abbiamo maneggiato pure (medie, varianze e covarianze).
- Nonostante ciò, si noti che esiste una **importante differenza**.
- In questa unità abbiamo considerato l'effetto di una variabile esplicativa su una variabile risposta. Le variabili erano poste in maniera **asimmetrica**, poichè eravamo interessati ad una relazione del tipo diametro  $\rightarrow$  volume.
- Viceversa nell'unità J ci siamo posti in maniera **simmetrica** rispetto alle variabili. Non abbiamo cercato di spiegarne una sulla base di un'altra ma abbiamo semplicemente valutato le relazioni intercorrenti.