Statistica I

Unità B: Distribuzione di frequenza

Tommaso Rigon

Università Milano-Bicocca

Anno Accademico 2020-2021

Unità B

Argomenti affrontati

- Frequenze assolute, relative e cumulate
- Istogramma
- Funzione di ripartizione empirica

Riferimenti al libro di testo

- §3.1 — §3.5
- **Nota**. Il concetto di densità di frequenza verrà affrontato nell'Unità G.

Il problema epidemiologico

- Il **DDT** è estremamente efficace contro le zanzare da malaria ed è pertanto largamente usato in zone in cui la malaria è endemica.
- Al tempo stesso, il DDT potrebbe costituire un **rischio per la salute**, specialmente nel caso di **donne in gravidanza**.
- Per un campione di 2312 donne in gravidanza, viene misurato il DDE, ovvero una sostanza connessa al DDT, presente nel siero materno durante il terzo trimestre della gravidanza.
- Osserviamo inoltre che 361 donne hanno **partorito prematuramente**, ovvero prima della conclusione della 37a settimana.
- **Domanda di ricerca**: la quantità di DDE è maggiore tra donne che hanno partorito prematuramente?

I dati grezzi

DDE (mg/L), parto non prematuro. Numero di osservazioni = 1951

```
 [1] 24.56 15.56 15.00 33.54 22.68 25.02 31.85 37.45 32.27 31.43
[11] 15.23 31.23 54.39 18.11 79.70 15.68 29.43 12.62 22.92  9.51
[21] 10.94 23.16 10.51 13.82 26.80 17.91 88.65 23.90 16.42 23.47
[31] 20.42 15.94 38.61 34.17 22.60 24.69 40.34 47.29 14.62 22.53
[41] 19.86 17.40 42.06 10.75 11.14 31.81 21.51 12.52 18.54 24.38
 ...
```

DDE (mg/L), parto prematuro. Numero di osservazioni = 361

```
 [1] 54.80 27.37 28.01  6.34  6.28 25.61 25.02 13.08 54.98 34.86
[11] 46.00 19.30 21.98 22.19 31.24 19.94 15.12 24.64 11.91 70.04
[21] 59.52 94.60 19.89 21.95 15.18 27.94 29.46 60.24 37.82 28.07
[31] 23.71 15.09 23.36 17.11 15.38 33.06 19.76 27.49 12.11 12.66
[41] 15.72 36.04 18.01 25.88 76.84 19.94 25.59 45.22 30.75 31.02
 ...
```

Organizzazione dei dati in frequenze

- I dati non sono "tantissimi" rispetto ad altre situazioni.
- Infatti, ci sono "solamente" $n = 361 + 1951 = 2312$ donne in gravidanza.
- Sono però troppi per capire qualcosa solamente "guardandoli", come potremmo fare "guardando" i voti in un libretto universitario. Dobbiamo quindi cercare di **sintetizzarli**.

- Potremmo quindi suddividere l'intervallo che contiene tutti i valori osservati (ovvero $(0, 180]$) in un certo numero di **sotto-intervalli** e poi semplicemente nel **contare** quante osservazioni cadono nei vari sotto-intervalli.
- Questa operazione viene fatta nella tabella seguente, utilizzando 10 sotto-intervalli di lunghezza 18, chiusi a destra.

Frequenze assolute

DDE (mg/L)	Nascita non prematura	Nascita prematura
(0,18]	573	68
(18,36]	906	164
(36,54]	308	65
(54,72]	91	34
(72,90]	40	14
(90,108]	19	10
(108,126]	6	3
(126,144]	5	1
(144,162]	2	1
(162,180]	1	1
Totale	1951	361

Commenti alla tabella

- La prima colonna mostra i sotto-intervalli utilizzati. Le altre mostrano il **numero di donne** la cui dose di DDE appartiene al sotto-intervallo considerato.
- Ad esempio, il 68 che compare nella prima riga alla terza colonna indica che esattamente 68 donne, delle 361 che hanno partorito prematuramente, hanno una dose di DDE (mg/L) strettamente maggiore di 0 e minore o uguale a 18.
- Le ultime due colonne contengono le **frequenze assolute**.
- Le prime due colonne (intervalli + parto non prematuro) mostrano come le donne sono "distribuite" nei vari intervallini. Quando prese congiuntamente, queste due colonne sono chiamate la **distribuzione di frequenza**.
- **Nota**. Dalla tabella delle frequenze assolute non è ancora molto chiaro se, in termini di DDE, ci sia una differenza tra nascite premature e non.

Frequenze assolute

- Siano $x_1, \ldots, x_n$ i valori assunti da una variabile per tutte le n unità statistiche.
- Siano $c_1, \ldots, c_k$ invece
  - le k distinte modalità relative ai dati discreti $x_1, \ldots, x_n$ (**Variabile discreta**);
  - i k sotto-intervalli in cui abbiamo diviso i valori numerici $x_1, \ldots, x_n$ (**Variabile continua**).
- **Frequenze assolute**. Il numero di volte $n_1, \ldots, n_k$ che i valori distinti $c_1, \ldots, c_k$ compaiono nei dati $x_1, \ldots, x_n$ si chiamano frequenze assolute.
- Le frequenze assolute $n_1, \ldots, n_k$ sono quindi numeri interi non-negativi caratterizzati dalle proprietà

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = \sum_{j=1}^{k} n_j = n, \qquad 0 \leq n_j \leq n, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

- **Nota**. Alcuni libri di testo usano $x_1, \ldots, x_k$ per indicare i valori distinti. Questo potrebbe fare confusione, per questo si è preferito usare $c_1, \ldots, c_k$.

Per capire la notazione

DDE (mg/L)	Nascita non prematura
$c_1 = (0, 18]$	$n_1 = 573$
$c_2 = (18, 36]$	$n_2 = 906$
$c_3 = (36, 54]$	$n_3 = 308$
$c_4 = (54, 72]$	$n_4 = 91$
$c_5 = (72, 90]$	$n_5 = 40$
$c_6 = (90, 108]$	$n_6 = 19$
$c_7 = (108, 126]$	$n_7 = 6$
$c_8 = (126, 144]$	$n_8 = 5$
$c_9 = (144, 162]$	$n_9 = 2$
$c_{10} = (162, 180]$	$n_{10} = 1$
Totale	$n = \sum_{j=1}^{10} n_j = 1951$

- Ricordando i dati riportati in precedenza, abbiamo invece che $x_1 = 24.56$, $x_2 = 15.56$, $x_3 = 15.00$, $x_4 = 33.54$, e via dicendo.

Frequenze relative

- Le frequenze assolute non chiariscono se il DDE sia legato ai tempi di gravidanza. Le **numerosità campionarie** delle due distribuzioni di frequenze sono **diverse**.

- Per un confronto più equo, possiamo usare le **frequenze relative**, ovvero

$$(\textbf{frequenze relative}) = \frac{(\text{frequenze assolute})}{(\text{numerosità campionaria})}.$$

- **Frequenze relative**. Siano $n_1, \ldots, n_k$ delle frequenze assolute, allora le frequenze relative $f_1, \ldots, f_k$ sono pari a:

$$f_j = \frac{n_j}{n}, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

- A volte le frequenze relative vengono moltiplicate per 100, in tal caso parleremo di **frequenze percentuali**.

- **Esercizio**. Mostrare che le frequenze relative $f_1, \ldots, f_k$ sono numeri reali non-negativi caratterizzati dalle proprietà

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_k = \sum_{j=1}^{k} f_j = 1, \qquad 0 \leq f_j \leq 1, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

Frequenze relative $f_1, \ldots, f_k$

DDE (mg/L)	Nascita non prematura	Nascita prematura
(0,18]	0.294	0.188
(18,36]	0.464	0.454
(36,54]	0.158	0.180
(54,72]	0.047	0.094
(72,90]	0.021	0.039
(90,108]	0.010	0.028
(108,126]	0.003	0.008
(126,144]	0.003	0.003
(144,162]	0.001	0.003
(162,180]	0.001	0.003
Totale	1	1

- Le distribuzione di frequenze relative sono confrontabili e mostrano che un **basso** dosaggio di DDE è associato a un **minor** numero di parti prematuri (e viceversa). Infatti, confrontando ad esempio i valori della prima riga si nota che $0.294 > 0.188$.

- **Esercizio**. Ricalcolare almeno un paio di queste frequenze relative.

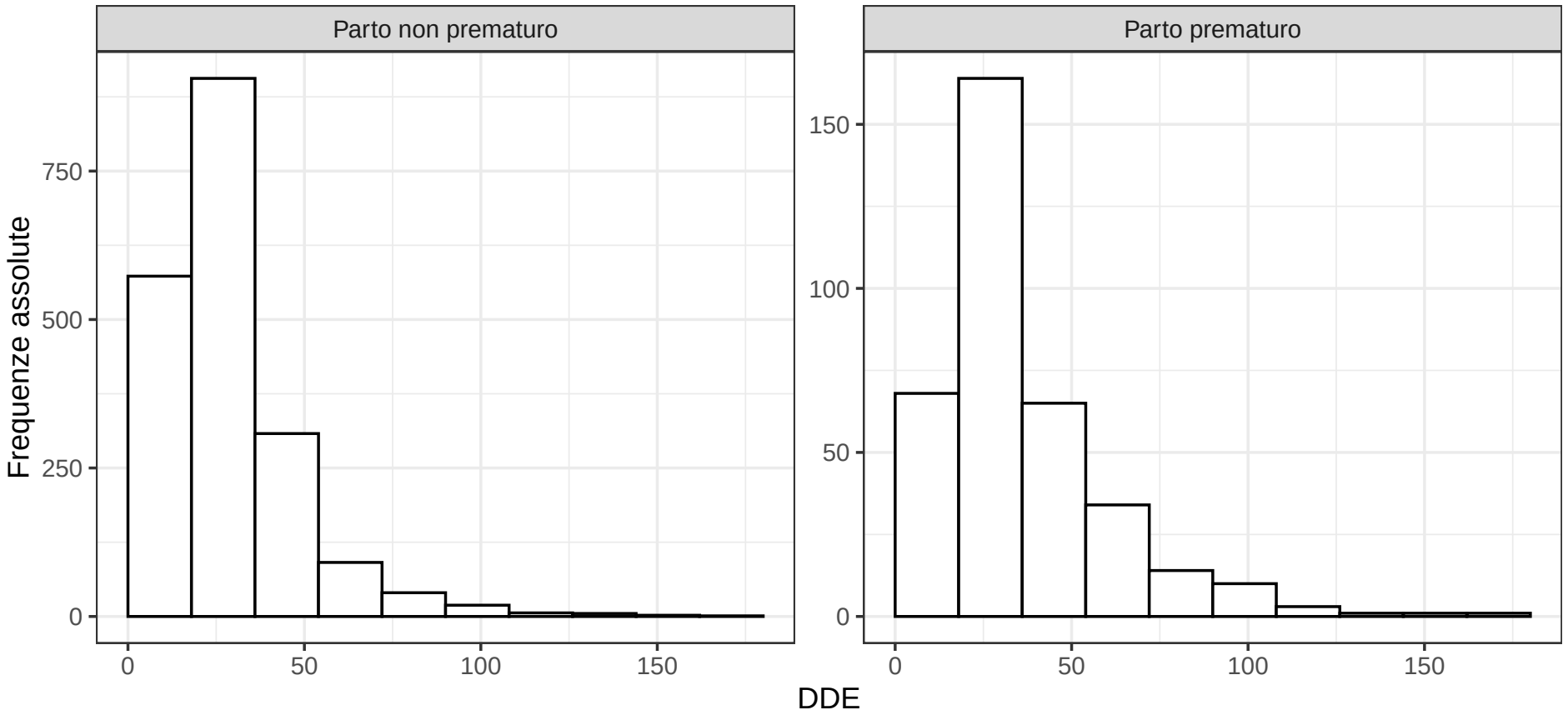
Istogramma

- Le differenze tra le distribuzioni di frequenza sono ancora più evidenti se rappresentate graficamente.
- Una possibilità è utilizzare un **istogramma**. Ne presentiamo qui una versione semplificata (ci torneremo in seguito!)
- Costruiamo il grafico ponendo

$$\text{(base rettangoli)} = \text{(sotto-intervalli)}$$
$$\text{(altezza rettangoli)} = \text{(frequenze assolute)}$$

- Alcuni aspetti che chiariremo in seguito:
  - Quanti intervalli scegliere?
  - Come gestire intervalli di lunghezze diverse?
  - È possibile rappresentare un istogramma che faccia uso di frequenze "relative"?

Istogramma



- La distribuzione di “parto prematuro” è spostata più a destra, ovvero associata a dosi maggiori di DDE.
- **Esercizio**. Ricostruire “a mano" gli istogrammi rappresentati qui sopra.

Funzione di ripartizione empirica

- Una seconda rappresentazione grafica di uso frequente è la cosiddetta **funzione di ripartizione empirica** $F(x)$, ovvero

$$\begin{pmatrix}\text{funzione di ripartizione}\\ \text{empirica calcolata in } x\end{pmatrix} = \frac{(\text{numero di osservazioni minori o uguali di } x)}{(\text{numerosità campionaria})}$$

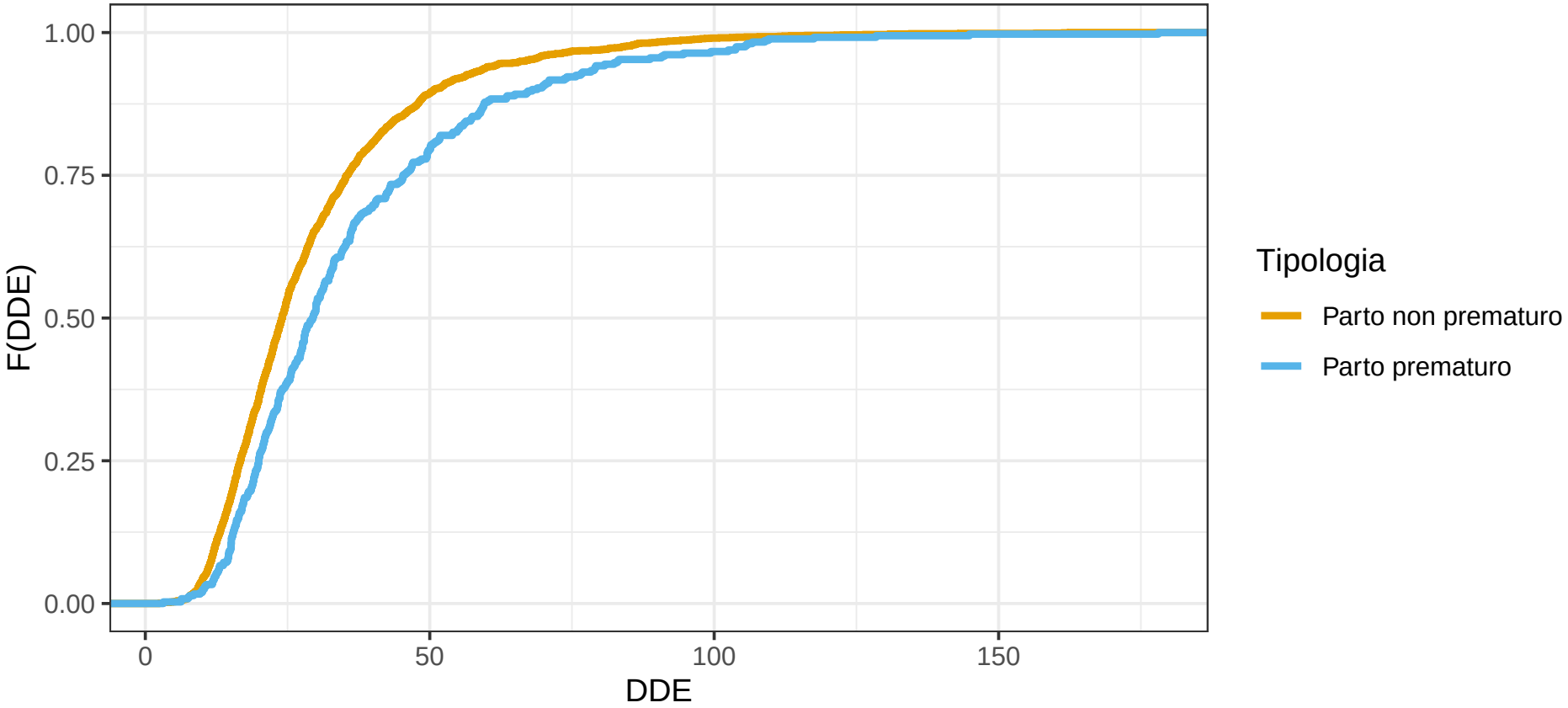
- **Funzione di ripartizione empirica**. Siano $x_1, \ldots, x_n$ una collezione di dati, allora

$$F(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}(x_i \leq x),$$

dove $\mathbb{1}(x_i \leq x)$ si chiama **funzione indicatrice** e vale 1 se $x_i \leq x$ e 0 se $x_i > x$.

- **Esercizio**. Ci si convinca che la definizione informale e quella matematicamente più rigorosa sono equivalenti.

Funzione di ripartizione empirica



- Il "messaggio" può forse sembrare meno evidente di quello contenuto negli istogrammi.
- Lo studente guardi però la definizione precedente e il grafico fino a che non si convince che il "messaggio" è il medesimo.

Funzione di ripartizione empirica

- Operativamente, la funzione $F(x)$ si può ottenere dai dati $x_1, \ldots, x_n$ come segue.
- In primo luogo, si ottengono i **dati ordinati** $x_{(1)}, \ldots, x_{(n)}$ a partire dal valore minimo $x_{(1)}$ fino al massimo $x_{(n)}$.
- Per un certo valore di x avremo quindi che

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x \leq \cdots \leq x_{(n-1)} \leq x_{(n)}.$$

- Il valore di $F(x)$ è la frazione di dati ordinati "a sinistra", ovvero più piccoli, di x.
- **Proprietà** della funzione di ripartizione empirica:

$$0 \leq F(x) \leq 1, \qquad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1,$$

$F(x)$ è non decrescente, $F(x)$ è continua a destra.

Frequenze cumulate

- Le frequenze cumulate si ottengono sommando progressivamente le frequenze e quindi conteggiano il numero (o la frazione) di dati minori di una certa soglia.

- **Frequenze cumulate assolute**. Siano $n_1, \ldots, n_k$ delle frequenze assolute, allora le frequenze cumulate assolute $N_1, \ldots, N_k$ sono pari a:

$$N_j = n_1 + \cdots + n_j = \sum_{j'=1}^{j} n_{j'}, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

- **Frequenze cumulate relative**. Siano $f_1, \ldots, f_k$ delle frequenze relative, allora le frequenze cumulate relative $F_1, \ldots, F_k$ sono pari a:

$$F_j = f_1 + \cdots + f_j = \sum_{j'=1}^{j} f_{j'}, \qquad j = 1, \ldots, k.$$

- **Esercizio**. Si mostri che $N_k = n$ e che $F_k = 1$.

Frequenze cumulate relative

DDE (mg/L)	Nascita non prematura	Nascita prematura
(0,18]	0.294	0.188
(18,36]	0.758	0.643
(36,54]	0.916	0.823
(54,72]	0.963	0.917
(72,90]	0.983	0.956
(90,108]	0.993	0.983
(108,126]	0.996	0.992
(126,144]	0.998	0.994
(144,162]	0.999	0.997
(162,180]	1	1

- Le frequenze cumulate relative sono strettamente connesse alla funzione di ripartizione empirica. Si ragioni sulla loro definizione.
- Ad esempio, dalla tabella si ottiene che $F(18) = 0.294$ e che $F(36) = 0.758$ nel caso di nascita non prematura.
- **Nota**. Dalla tabella non è tuttavia possibile calcolare ad esempio $F(20)$. Come mai?