

R per l'analisi statistica multivariata

Unità H: variabili aleatorie

Tommaso Rigon

Università Milano-Bicocca



Argomenti affrontati

- Variabili aleatorie discrete
- Variabili aleatorie continue
- Simulazione di valori (pseudo) casuali
- Esercizi **R** associati: https://tommasorigon.github.io/introR/exe/es_3.html

Variabili aleatorie (ripasso)

- La **definizione formale** di una **variabile aleatoria** coinvolge concetti di teoria della misura (σ -algebre, misure di probabilità, etc), che lasceremo sullo sfondo.
- Ai fini di questo corso, ci è sufficiente ricordare che una variabile aleatoria X a valori reali è univocamente identificata dalla sua **funzione di ripartizione**, ovvero

$$F(x) := \mathbb{P}(X \leq x).$$

- Se la funzione $F(x)$ è costante a tratti, diremo che X è una variabile aleatoria **discreta**.
- Se la funzione $F(x)$ è continua, diremo che X è una variabile aleatoria **continua**.
- **Nota**. Nel caso non vi ricordaste la definizione di una variabile aleatoria è bene ricontrollare libri e appunti del corso Calcolo delle Probabilità!

Variabili aleatorie discrete I (ripasso)

- Come anticipato, una variabile aleatoria si dice discreta se $F(x)$ è costante a tratti.
- Più precisamente, diremo che X è una variabile aleatoria discreta se esiste un insieme di **cardinalità numerabile** $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$, chiamato **supporto**, tale per cui

$$\mathbb{P}(X \in \mathcal{S}) = \sum_{x \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X = x) = 1.$$

- In pratica, spesso avremo che il supporto $\mathcal{S} \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$ è un sotto-insieme dei numeri naturali. Inoltre, il supporto \mathcal{S} può essere **finito**.
- Intuitivamente, diremo che la variabile aleatoria X può assumere solamente i valori del supporto \mathcal{S} .

Variabili aleatorie discrete II (ripasso)

- La **funzione di probabilità** di una variabile aleatoria discreta è pari a

$$p(x) = \mathbb{P}(X = x).$$

La funzione $p(x)$ **identifica** una variabile aleatoria discreta.

- Pertanto, ovviamente, vale che $p(x) \geq 0$ e che $\sum_{x \in \mathcal{S}} p(x) = 1$.

- Il **valore atteso** di una variabile aleatoria è inoltre definito, se esiste, come

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathcal{S}} x p(x).$$

- Più in generale, il valore atteso di una trasformazione $g(X)$, se esiste, è pari a

$$\mathbb{E}\{g(X)\} = \sum_{x \in \mathcal{S}} g(x) p(x).$$

Distribuzione binomiale (funzione di probabilità)

- Sia $X \sim \text{Bin}(n, \pi)$ una variabile aleatoria **binomiale**, per cui la funzione di probabilità è

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \pi^k (1 - \pi)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

- Supponendo che $n = 10$ e $\pi = 0.6$, allora $\mathbb{P}(X = 4)$ si calcola come segue:

```
n <- 10 # Numero di tentativi
p <- 0.6 # Probabilità di successo
k <- 4 # Numero di successi

choose(n, k) * p^k * (1 - p)^(n - k)
# [1] 0.1114767
```

- Tuttavia, in **R** esiste una funzione apposita per il calcolo della funzione di probabilità:

```
dbinom(k, size = n, prob = p)
# [1] 0.1114767
```

Distribuzione binomiale (funzione di ripartizione)

- In maniera simile, possiamo anche calcolare la probabilità seguente, ovvero

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k=0}^x \mathbb{P}(X = k), \quad X \sim \text{Bin}(n, \pi).$$

- Supponendo che $n = 10$ e $\pi = 0.6$, allora il valore $F(5)$ si calcola come segue:

```
sum(dbinom(0:5, size = n, prob = p))  
# [1] 0.3668967  
pbinom(5, size = n, prob = p) # Funzione specifica di R  
# [1] 0.3668967
```

- Supponiamo di essere invece interessati all'evento complementare, ovvero:

$$\mathbb{P}(X > 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5).$$

```
1 - pbinom(5, size = n, prob = p)  
# [1] 0.6331033  
pbinom(5, size = n, prob = p, lower.tail = FALSE)  
# [1] 0.6331033
```

Distribuzione binomiale (valore atteso)

- Il **valore atteso** di una variabile aleatoria binomiale è pari a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) = np, \quad X \sim \text{Bin}(n, p).$$

- Supponendo come in precedenza che $n = 10$ e $\pi = 0.6$, si ha che:

```
n * p # Valore atteso ottenuto tramite calcoli analitici
# [1] 6
sum(0:n * dbinom(0:n, size = n, prob = 0.6)) # Calcolo numerico
# [1] 6
```

- Tramite il calcolo diretto, possiamo inoltre valutare ad esempio $\mathbb{E}(\sqrt{X})$, infatti:

```
sum(sqrt(0:n) * dbinom(0:n, size = n, prob = 0.6))
# [1] 2.427083
```

- Nota.** Il calcolo del valore atteso è “semplice” quando il supporto della distribuzione discreta è finito.

Distribuzione binomiale (quantili)

- Il **quantile**- p una distribuzione discreta è il più piccolo valore k tale $\mathbb{P}(X \leq k) \geq p$.
Quindi:

$$\mathcal{Q}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}.$$

- Supponendo che $X \sim \text{Bin}(10, 0.6)$, ad esempio il **primo quantile** è

$$\mathcal{Q}(0.25) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq 0.25\} = 5.$$

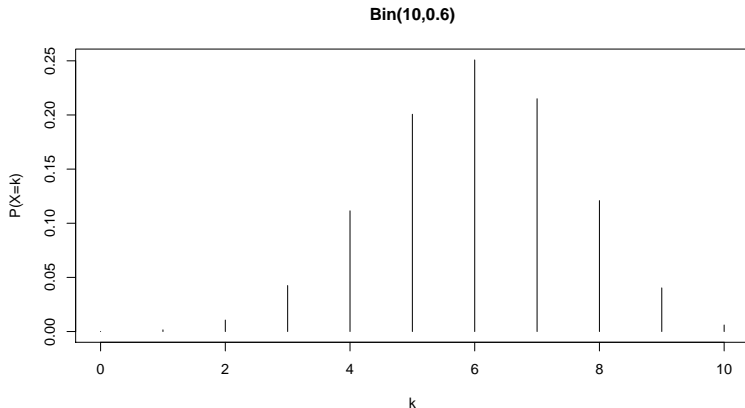
- In R possiamo ottenere questi risultati come segue:

```
qbinom(0.25, size = 10, prob = 0.6) # Primo quantile  
# [1] 5
```

- Infatti, vale che:

```
pbinom(4, size = 10, prob = 0.6) # Il valore è minore di 0.25  
# [1] 0.1662386  
pbinom(5, size = 10, prob = 0.6) # Il valore è maggiore di 0.25  
# [1] 0.3668967
```

Distribuzione binomiale (rappresentazione grafica)



```
kk <- 0:n
prob <- dbinom(0:n, size = n, prob = p)
plot(kk, prob, type = "h", main = "Bin(10,0.6)", xlab = "k", ylab = "P(X=k)")
```

Variabili aleatorie continue I (ripasso)

- Una variabile aleatoria si dice **continua** se $F(x)$ è continua.
- La funzione di **densità** di una variabile aleatoria continua è una funzione $f(x) \geq 0$ tale per cui

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx, \quad f(x) = \frac{\partial}{\partial x} F(x).$$

- Pertanto, per definizione:

$$\mathbb{P}(X \leq b) = F(b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx.$$

- Inoltre, il **valore atteso** di una trasformazione $g(X)$, se esiste, è pari a

$$\mathbb{E}\{g(X)\} = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx.$$

Distribuzione normale (funzione di densità)

- Sia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ una **variabile gaussiana** di media μ e varianza σ^2 , ovvero avente densità

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (x - \mu)^2 \right\}.$$

- Se $X \sim N(3, 10)$ allora possiamo calcolare il valore $f(1)$ utilizzando i comandi di **R**:

```
x <- 1 # Punto in cui calcolare f(x)
mu <- 3 # Media
sigma2 <- 10 # Varianza

1 / sqrt(2 * pi * sigma2) * exp(-1 / (2 * sigma2) * (x - mu)^2)
# [1] 0.1032883

dnorm(x, mean = 3, sd = sqrt(sigma2))
# [1] 0.1032883
```

- **Nota.** Il comando `dnorm` ha come argomento lo scarto quadratico medio σ , non la varianza σ^2 .

Distribuzione normale (funzione di ripartizione)

- Sia $X \sim N(0, 1)$ una **normale standard**. Siamo interessati a calcolare la probabilità dell'evento seguente:

$$\mathbb{P}(|X| \leq 1) = \mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1) = \mathbb{P}(X \leq 1) - \mathbb{P}(X < -1).$$

- Possiamo calcolare questa probabilità (in modo inefficiente) tramite il comando `integrate`, pertanto:

```
integrate(dnorm, lower = -1, upper = 1)  
# 0.6826895 with absolute error < 7.6e-15
```

- Trattandosi di una variabile continua, otteniamo che $\mathbb{P}(X < -1) = \mathbb{P}(X \leq -1)$.
- Quindi, possiamo calcolare questa probabilità in **R** utilizzando i comandi appositi:

```
pnorm(1) - pnorm(-1)  
# [1] 0.6826895
```

Distribuzione normale (funzione quantile)

- La continuità della funzione di ripartizione $F(x)$ implica che la **funzione quantile** è pari a $Q(\cdot) = F^{-1}(\cdot)$.
- Per esempio, si consideri il terzo quartile di una distribuzione normale standard, ovvero

```
qnorm(0.75)  
# [1] 0.6744898
```

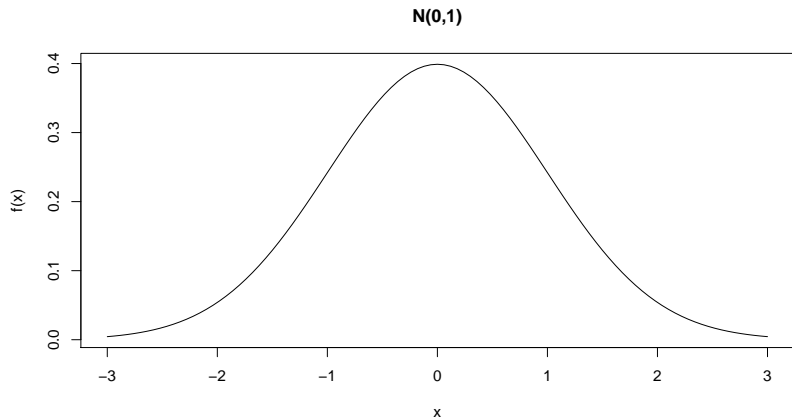
- Di conseguenza, la funzione quantile e di ripartizione sono tale per cui

$$F(Q(0.75)) = F(F^{-1}(0.75)) = 0.75.$$

- Infatti:

```
pnorm(qnorm(0.75))  
# [1] 0.75
```

Distribuzione normale (rappresentazione grafica)



```
curve(dnorm(x, mean = 0, sd = 1), from = -3, to = 3, ylab = "f(x)", main = "N(0,1)")
```

Tabella riassuntiva I

- **R** dispone di un'estesa **collezione di funzioni** dedicate alle principali distribuzioni di probabilità. Sia X una variabile casuale.
- **ddist** (dove la d iniziale sta per **density**). Calcola la **densità** $f(x)$ di una variabile continua X oppure la funzione di probabilità $p(x) = \mathbb{P}(X = x)$ nel caso X sia discreta.
- **pdist** (dove la p iniziale sta per **probability**), che permette di calcolare il valore della **funzione di ripartizione** in un punto specificato, ovvero calcola $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.
- **qdist** (dove la q iniziale sta per **quantile**), che rappresenta la **funzione quantile**, ovvero:
$$Q(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}, \quad p \in (0, 1).$$
- **rdist** (dove la r iniziale sta per **random**), che permette di generare numeri **pseudo-casuali**, che verranno illustrati nel seguito.

Tabella riassuntiva II

Distribuzione	Comando R	Parametri	Default
Binomiale	<code>binom</code>	<code>size, prob</code>	-
Geometrica	<code>geom</code>	<code>prob</code>	-
Poisson	<code>pois</code>	<code>lambda</code>	-
Uniforme	<code>unif</code>	<code>min, max</code>	0, 1
Gamma	<code>gamma</code>	<code>shape, rate</code>	-, 1
Esponenziale	<code>exp</code>	<code>rate</code>	1
Chi-quadrato	<code>chisq</code>	<code>df</code>	-
Normale	<code>norm</code>	<code>mean, sd</code>	0, 1

- **Nota.** Attenzione alla parametrizzazioni e/o ai significati degli argomenti. Si consulti la documentazione per sapere come sono definiti.
- **Esercizio.** Si rappresentino graficamente tutte le precedenti distribuzioni, per diverse scelte di parametri.

Numeri pseudo-casuali I

- La quarta classe di funzioni nella nostra lista è quella del tipo `rdist`, che permette quindi di ottenere dei **valore casuali** da una distribuzione.
- Per esempio, per campionare 5 valori indipendenti e identicamente distribuiti (iid) da una normale standard, ovvero

$$X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, 1), \quad i = 1, \dots, 5$$

possiamo usare in **R** il comando seguente:

```
R <- 5  
rnorm(R, mean = 0, sd = 1)  
# [1] 0.4902692 0.7456112 0.8494438 0.1338959 0.7298006
```

Numeri pseudo-casuali II

- I valori generati dal comando `rdist` imitano i risultati di un processo casuale, ma sono in realtà **deterministici**. Tali valori sono quindi chiamati **pseudo-casuali**.
- Esistono in realtà dei metodi per generare numeri **davvero casuali**, basate ad esempio su rilevazioni atmosferiche.
- Al sito <https://www.random.org/gaussian-distributions/> è possibile ottenere un numero limitato di valori casuali da una distribuzione gaussiana.
- Lo svantaggio di quest'ultima classe di metodi è che sono relativamente **costosi** da ottenere \implies ne vale la pena?
- A meno che non sussistano specifici problemi di sicurezza, i numeri pseudo-casuali costituiscono il lo standard usato dalla quasi totalità degli utenti.

Numeri pseudo-casuali in $(0, 1)$

- Supponiamo di saper simulare dei valori U_1, \dots, U_n da una **distribuzione uniforme** in $(0, 1)$, ovvero quanto si ottiene ad esempio tramite il comando `runif`.
- Possiamo “facilmente” ottenere i valori casuali di una qualsiasi distribuzione considerando un’opportuna trasformazione dei valori U_1, \dots, U_n .
- La **parte difficile** è quindi simulare valori pseudo-casuali U_1, \dots, U_n in maniera tale che questi assomiglino il più possibile a realizzazioni iid da una distribuzione uniforme.
- Trattandosi di numeri pseudo-casuali, siamo quindi alla ricerca di un vero e proprio **algoritmo** che a partire da delle condizioni iniziali, produca U_1, \dots, U_n .
- La condizione iniziale viene tipicamente chiamata **seme** (seed).

Numeri pseudo-casuali in $(0, 1)$

188

APPLIED STATISTICS

Algorithm AS 183

An Efficient and Portable Pseudo-random Number Generator

By B. A. WICHMANN

and

I. D. HILL

*National Physical Laboratory,
Teddington, Middx, TW11 0LW, UK*

*Clinical Research Centre,
Harrow, Middx, HA1 3UJ, UK*

[Received April 1981. Revised February 1982]

Keywords: PSEUDO-RANDOM NUMBERS; EFFICIENCY; PORTABILITY

LANGUAGE

Fortran 66

DESCRIPTION AND PURPOSE

Schrage (1979) has pointed out the advantages of pseudo-random generators that can be written in a high-level language and produce the same results on any machine. The generator that he presents, however, has the disadvantages: (1) like all simple multiplicative congruential generators, it does not work well at the extremes of the distribution—for any number produced that is less than 5.9499×10^{-5} the next number will simply be 16807 times as much, and similarly at the top end; (2) on a 16-bit machine it has to use double precision arithmetic instead of integer arithmetic, which makes it very slow, and also uncertain that rounding errors could not occur.

Our algorithm does not have these difficulties. We claim that it is reasonably short, reasonably fast, machine-independent, easily programmed in any language, and statistically sound. It has a cycle length exceeding 2.78×10^{13} so that even using 1000 random numbers per second continuously, the sequence would not repeat for over 880 years. Consequently we have tested only small parts of it, consisting of many millions of numbers nevertheless. However, there are theoretical grounds for expecting good results, and the results of the tests we have made have been so satisfactory, that we are prepared to extrapolate our experience and infer that the sequence is satisfactory throughout.

The algorithm produces numbers rectangularly distributed between 0 and 1, excluding the end points.

- Presentiamo un metodo molto semplice per generare numeri pseudo-casuali (Wichmann & Hill, 1982), che tuttavia è stato molto popolare negli anni '80 e '90.

Algoritmo Wichmann & Hill (1982)

- Vogliamo ottenere delle realizzazioni u_1, \dots, u_n da una distribuzione uniforme $(0, 1)$.
- **Inizializzazione**. Si parte da tre numeri interi qualsiasi x_0, y_0, z_0 , che costituiscono la condizione iniziale, il cosiddetto seed.
- **Aggiornamento iterativo** del seme. A ciascuna iterazione, si aggiornano i 3 numeri x_i, y_i, z_i a partire da quelli ottenuti alla iterazione precedente:

$$x_i = (171 \times x_{i-1}) \pmod{30269}$$

$$y_i = (172 \times y_{i-1}) \pmod{30307}$$

$$z_i = (170 \times z_{i-1}) \pmod{30323}$$

per ogni $i = 1, \dots, n$. La funzione mod (equivalente a %% in **R**) calcola il **resto**, per cui ad esempio $205 \pmod{10} = 5$.

- **Output**. Si ottiene una sequenza di realizzazioni come segue:

$$u_i = \left(\frac{x_i}{30269} + \frac{y_i}{30307} + \frac{z_i}{30323} \right) \pmod{1}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Algoritmo Wichmann & Hill (1982)

- L'algoritmo pertanto aggiorna **iterativamente** la condizione iniziale (seed). I valori finali x_n, y_n, z_n possono essere usati come seed per estrazioni successive.
- Non c'è nulla di "casuale" in questa sequenza di numeri. Per definizione, se i tre numeri di partenza x_0, y_0, z_0 sono gli stessi, l'output sarà sempre uguale.
- Questo algoritmo ha **periodo** circa pari a $m = 6.95 \times 10^{12}$. Pertanto

$$u_{i+m} = u_i.$$

- Pertanto, se eseguiamo questo metodo per un tempo sufficientemente lungo, la sequenza di numeri ottenuti è destinata a ripetersi!
- Una sequenza che si ripete è un problema? In teoria sì, in pratica m negli algoritmi moderni ($m \approx 2^{19937}$) è talmente grande che questo fattore è trascurabile.
- **Nota.** La sequenza ottenuta andrebbe **testata** per verificare che in effetti "sembri" casuale ed uniforme in $(0, 1)$.

Algoritmo Wichmann & Hill (1982)

```
runif.wh <- function(n) {  
  a <- c(171, 172, 170)  
  b <- c(30269, 30307, 30323)  
  s <- .current.seed # Il seed corrent è presente nel "global environment"  
  u <- rep(0, n) # Inizializzazione dell'output  
  for (i in 1:n) {  
    s <- (a * s) %% b  
    u[i] <- sum(s / b) %% 1  
  }  
  .current.seed <- s # Salva il seed finale nel "global environment"  
  u  
}  
  
.current.seed <- c(123, 456, 789)  
runif.wh(5)  
# [1] 0.7061613 0.9181272 0.1477225 0.6591895 0.3623401  
  
.current.seed  
# [1] 24178 7775 9310
```

Simulazione di variabili discrete

- Supponiamo di voler estrarre dei valori iid X_1, \dots, X_n da una **legge discreta**.

- Per semplicità, assumiamo che il supporto $\mathcal{S} = \{x_1, \dots, x_K\}$ sia finito e che (π_1, \dots, π_K) siano le probabilità associate, per cui

$$\mathbb{P}(X_i = x_k) = \pi_k, \quad k = 1, \dots, K.$$

- A partire dalle variabili uniformi U_1, \dots, U_n in $(0, 1)$ è semplice ottenere X_1, \dots, X_n .
- Dividiamo l'intervallo $(0, 1)$ in K sotto-intervalli, ciascuno di lunghezza π_k . Il valore X_i corrisponde al valore associato all'intervallo a cui U_i appartiene.
- Infatti, sia $a_0 = 0$ e (a_{k-1}, a_k) il k -esimo intervallo tale che $a_k - a_{k-1} = \pi_k$. Allora

$$\mathbb{P}(a_{k-1} < U_i < a_k) = \pi_k \implies \mathbb{P}(X_i = x_k) = \pi_k,$$

per $k = 1, \dots, K$.

Esempio: distribuzione binomiale

- Possiamo sfruttare la nostra funzione `runif.wh` per ottenere valori pseudo-casuali da una distribuzione binomiale.

```
rbinom.wh <- function(n, size, prob){  
  u <- runif.wh(n)  
  probs <- dbinom(0:size, size = size, prob = prob)  
  breaks <- cumsum(c(0, probs))  
  as.numeric(cut(u, breaks)) - 1 # Converte la variabile "factor" in numeri interi  
}  
  
.current.seed <- c(100, 200, 300)  
rbinom.wh(20, size = 5, prob = 0.5)  
# [1] 2 3 2 2 1 2 4 2 1 4 3 3 0 3 2 4 4 2 4 4
```

- **Nota.** Questo codice è riportato a soli fini didattici. In realtà, esistono modi più intelligenti (e molto più veloci!) per ottenere questo risultato.

Esempio: il lancio di un dado a sei facce

- Un **dado a sei facce** rappresenta una variabile casuale discreta X con funzione di probabilità chiamata **Uniforme Discreta**, ovvero

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6}, \quad k = 1, \dots, 6.$$

- Per simulare lancio di un dado a sei facce, costruiamo anzitutto un vettore contenente una **sequenza di numeri** da 1 a 6 corrispondenti ai possibili esiti del lancio.

```
dice <- 1:6
```

- Possiamo usare il comando `sample` per effettuare il lancio:

```
set.seed(123) # Comando di R per identificare il "seed"  
sample(x = dice, size = 1) # size = 1 implica che viene lanciato un solo dado  
# [1] 3
```

- **Nota.** Il comando `set.seed(numero)` è il comando che consente di fissare il seme in R.

Il comando `sample`

- Più in generale, la funzione `sample(x, size, replace, prob)` estrae casualmente un numero `size` di elementi da un'**urna** contenente gli oggetti `x`
 - con reinserimento, se `replace = TRUE`;
 - senza reinserimento, se `replace = FALSE`.
- Se l'argomento `prob` non viene specificato, la funzione `sample` assegna ad ogni elemento di `x` uguale probabilità.
- Se volessimo campionare con **probabilità non uniformi**, dovremmo indicare un vettore di probabilità di lunghezza pari agli elementi di `x` (provate per esercizio!)
- **Esempio.** Il campionamento con reinserimento equivale a fare n estrazioni indipendenti dalla stessa variabile aleatoria X . Pertanto, per lanciare lo stesso dado 10 volte:

```
set.seed(140)
n <- 10
# replace = TRUE implica che il dado è lanciato 10 volte
sim <- sample(dice, size = n, replace = TRUE)
sim
# [1] 3 1 1 1 3 6 4 5 1 6
```

Campionamento senza reinserimento

- **Esempio.** Per effettuare una ipotetica estrazione del Lotto, si devono estrarre da un'urna 5 numeri, tra l'1 e il 90, **senza reinserimento**.

- In R quindi:

```
sample(1:90, size = 5, replace = FALSE)
# [1] 61 77 83 25 6
```

- Se specifichiamo solamente il seguente comando:

```
sample(dice)
# [1] 2 5 1 6 4 3
```

otteniamo una **permutazione** casuale degli elementi di `x`.

- Infatti, i valore predefiniti sono `replace = FALSE` e `size = length(x)`, ovvero un campionamento **senza reinserimento** di tutti gli elementi dell'urna.

Il metodo dell'inversione

Il metodo dell'inversione

Sia X una variabile aleatoria con funzione di ripartizione $F(x)$ e funzione quantile

$$Q(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}.$$

Inoltre, sia $U \sim U(0, 1)$. Allora, vale che

$$X \stackrel{d}{=} Q(U).$$

Dimostrazione (schema)

$$\mathbb{P}(Q(U) \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x).$$

- **Risultato chiave.** Se la funzione quantile $Q(p)$ è facile da calcolare, per simulare una variabile aleatoria è quindi sufficiente simulare $U \sim U(0, 1)$ e poi calcolare $Q(U)$.

Il metodo dell'inversione: distribuzione gaussiana

- Supponiamo di voler generare dei valori X_1, \dots, X_n da una distribuzione gaussiana.
- Possiamo usare il **metodo dell'inversione**, usando la funzione `qnorm`.

```
rnorm.wh <- function(n, mean, sd){  
  u <- runif.wh(n)  
  qnorm(u, mean = mean, sd = sd)  
}  
  
.current.seed <- c(100, 200, 300)  
rnorm.wh(n = 10, mean = 0, sd = 1) # 10 valori da una normale standard  
# [1] -0.30055385 0.68773053 -0.60218766 -0.09437046 -1.79635403 -0.56676389  
# [7] 1.37283913 -0.41755131 -1.26972731 1.73470371
```

- **Nota.** La funzione `qnorm` è lenta e non facile da calcolare. Esistono modi ben più efficienti per campionare da una gaussiana.

Il metodo dell'inversione: distribuzione binomiale

- Supponiamo di voler generare dei valori X_1, \dots, X_n da una distribuzione binomiale.
- Possiamo usare anche in questo caso il **metodo dell'inversione**, usando la funzione `qnorm`.

```
rbinom.wh2 <- function(n, size, prob){  
  u <- runif.wh(n)  
  qbinom(u, size = size, prob = prob)  
}
```

```
.current.seed <- c(100, 200, 300)  
rbinom.wh(n = 10, size = 5, prob = 0.5)  
# [1] 2 3 2 2 1 2 4 2 1 4
```

```
.current.seed <- c(100, 200, 300)  
rbinom.wh2(n = 10, size = 5, prob = 0.5)  
# [1] 2 3 2 2 1 2 4 2 1 4
```

- **Esercizio - proprietà.** Si dimostri che il metodo “diretto” per variabili discrete che abbiamo introdotto in precedenza coincide con il metodo dell'inversione.

Esercizio riassuntivo I

- La distribuzione continua chiamata **half-normal** ha la seguente densità:

$$f(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{y^2}{2} \right\}, \quad y > 0.$$

Inoltre, è noto che se $X \sim N(0, 1)$ allora $Y = |X|$ segue una distribuzione half-normal.

- Si scriva in **R** la funzione `dhalf(y)` che calcola la densità $f(y)$.
- Si sviluppi una strategia per campionare dei valori pseudo-casuali da una half normal e la si implementi in **R**.
- **Nota.** In generale, si deduca come campionare una variabile aleatoria Y tale che $Y = g(X)$, dove X è una variabile aleatoria che è facile da campionare.

Soluzione esercizio riassuntivo I

- Implementiamo in primo luogo la funzione `dhalf`, come richiesto:

```
dhalf <- function(y){  
  sqrt(2 / pi) * exp(- y^2 / 2)  
}  
  
# Non richiesto, controllo che integri a 1  
integrate(function(x) dhalf(x), 0, Inf)  
# 1 with absolute error < 9.4e-05
```

- Per generare valori casuali da una **half-normal** è sufficiente generare valori pseudo-casuali da una normale standard e quindi considerarne il valore assoluto.

```
# 10^5 campioni da un distribuzione half-normal  
y <- abs(rnorm(10^5))
```

- In generale, se vale $Y = g(X)$ allora è sufficiente campionare i valori di X e poi trasformarli.

Esercizio riassuntivo II

- La distribuzione continua **Weibull** ha la seguente densità:

$$f(x) = \alpha \beta x^{\beta-1} \exp \{ -\alpha x^{\beta} \}, \quad x > 0.$$

- Si scriva in **R** la funzione `dweibull` che calcola la densità $f(x)$.
- Dopo averla ottenuta analiticamente, si implementi in **R** la funzione `pweibull` per la funzione di ripartizione $F(x)$.
- Dopo averla ottenuta analiticamente, si implementi in **R** la funzione `qweibull` per la funzione quantile $Q(p)$.
- Si sviluppi una strategia per campionare dei valori pseudo-casuali da una Weibull basata sul **metodo dell'inversione** e si implementi in **R** la funzione `rweibull`.

Soluzione esercizio riassuntivo II

- Implementiamo in primo luogo la funzione `dweibull(x, alpha, beta)`:

```
dweibull <- function(x, alpha, beta) {  
  alpha * beta * x^(beta - 1) * exp(-alpha * x^beta)  
}
```

- Quindi, ricordiamo che la funzione di ripartizione è pari a

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds = \alpha\beta \int_0^x s^{\beta-1} \exp\{-\alpha s^\beta\} ds = 1 - e^{-\alpha x^\beta}, \quad x > 0.$$

- Quindi invertendo $F(x)$ si ottiene che la funzione quantile è pari a

$$Q(p) = F^{-1}(p) = \left(-\frac{\log(1-p)}{\alpha} \right)^{1/\beta},$$

per $p \in (0, 1)$.

Soluzione esercizio riassuntivo II

```
pweibull <- function(x, alpha, beta) {  
  1 - exp(-alpha * x^beta)  
}
```

```
qweibull <- function(p, alpha, beta) {  
  (-log(1 - p) / alpha)^(1 / beta)  
}
```

```
rweibull <- function(R, alpha, beta) {  
  qweibull(runif(R), alpha, beta)  
}
```

```
rweibull(10, 2, 2)
```

```
# [1] 0.2817004 0.2839622 0.2442779 0.4201544 0.5793797 0.9094175  
# [7] 0.2321329 0.9621806 0.2935367 0.2562159
```
