R per l'analisi statistica multivariata

Unità J: casinò, roulette e simulazioni Monte Carlo

Tommaso Rigon

Università Milano-Bicocca

Un breve sommario

- In questa unità studieremo tramite simulazione alcuni **giochi d'azzardo**.
- In particolare, analizzeremo cosa succede ad un ipotetico giocatore che persiste a scommettere per varie volte alla roulette.
- Considereremo scenari progressivamente più complessi, ipotizzando da principio un **semplice gioco** in cui due giocatori si sfidano al lancio della monetina.
- In seguito, considereremo il caso in cui il gioco sia "truccato" ovvero **non equo**, ovvero ad esempio la roulette di un casinò.
- Infine, considereremo un'ulteriore elaborazione del caso precedente, includendo il fatto che i giocatori coinvolti hanno un **budget limitato**.

Un primo semplice gioco

Il lancio della monetina

Due persone A e B si sfidano al (non così appassionante) gioco del lancio della monetina. Se esce testa, il giocatore A consegna 10 euro al giocatore B; viceversa se esce croce.

- Assumiamo quindi che A e B giochino ad esempio 50 volte al lancio della monetina.
- Quanti soldi avrà **mediamente** vinto / perso il giocatore A al termine dei 50 lanci?
- Qual è la distribuzione del **guadagno** finale?
- Qual è la probabilità di vittoria, ovvero la probabilità che il guadagno sia positivo?

Il lancio della monetina

- Il comando che simula una **singola partita**, ovvero 50 lanci di monetina dal punto di vista del giocatore A, è il seguente:

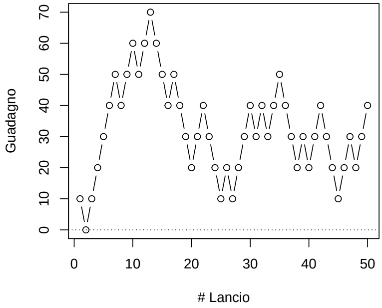
```
set.seed(123)
sample(c(-10, 10), 50, replace = TRUE) # Gioco 50 volte ai dadi contro B
#  [1] -10 -10 -10  10 -10  10  10  10 -10 -10  10  10  10 -10  10 -10  10 -10 -10
# [20] -10 -10  10 -10 -10 -10 -10  10  10 -10  10 -10  10 -10  10  10 -10 -10 -10
# [39] -10  10 -10  10  10 -10 -10 -10 -10  10 -10 -10
```

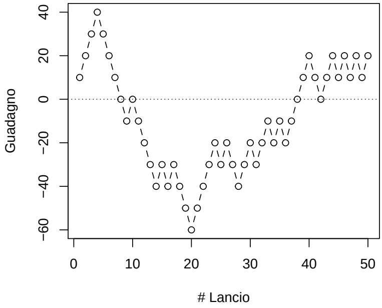
- Noi siamo tuttavia interessati al guadagno del giocatore A; ovviamente per B basta cambiare il segno dei risultati.

- Il **guadagno** del giocatore A dopo ciascun lancio di monetina è pari a

```
set.seed(123)
cumsum(sample(c(-10, 10), 50, replace = TRUE))
#  [1]  -10  -20  -30  -20  -30  -20  -10    0  -10  -20  -10    0   10    0   10
# [16]    0   10    0  -10  -20  -30  -20  -30  -40  -50  -60  -50  -40  -50  -40
# [31]  -50  -40  -50  -40  -30  -40  -50  -60  -70  -60  -70  -60  -50  -60  -70
# [46]  -80  -90  -80  -90 -100
```

Il lancio della monetina






```
par(mfrow=c(1,2))
set.seed(250)
plot(1:50, cumsum(sample(c(-10, 10), 50, replace = TRUE)), type = "b", xlab = "# Lancio", ylab = "Guadagno")
abline(h = 0, lty = "dotted")
plot(1:50, cumsum(sample(c(-10, 10), 50, replace = TRUE)), type = "b", xlab = "# Lancio", ylab = "Guadagno")
abline(h = 0, lty = "dotted")
```

Simulazione di un'intera partita

- Siamo interessati ad indagare la **variabile aleatoria** X, che rappresenta il guadagno finale del giocatore A, ovvero la somma algebrica dei guadagni e delle perdite.

- Per esempio, un'**estrazione casuale** dalla distribuzione di X, ovvero il risultato finale di una partita si ottiene come segue:

```r
# Ottengo il guadagno finale (una volta sola)
set.seed(123)
sum(sample(c(-10, 10), 50, replace = TRUE))
# [1] -100
```

- Possiamo quindi usare il comando `replicate`, che **ripete la stessa operazione** varie volte. In questo modo otteniamo R copie iid $X_1, \dots, X_R$.

```r
# Ripeto questa operazione R volte per ottenere dei campioni
set.seed(123)
R <- 10^5
# Otteniamo 10^5 copie iid aventi la stessa distribuzione di X
final_earning <- replicate(R, sum(sample(c(-10, 10), 50, replace = TRUE)))
final_earning[1:5]
# [1] -100  -40  120  -40  100
```

Analisi dei risultati

- Grazie ai risultati teorici dell'**unità I**, possiamo utilizzare i valori simulati $X_1, \dots, X_R$ per imparare qualcosa sulla distribuzione di X.

- In primo luogo approssimiamo il **valore atteso** tramite la somma

$$\mathbb{E}(X) \approx \frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R} X_r.$$

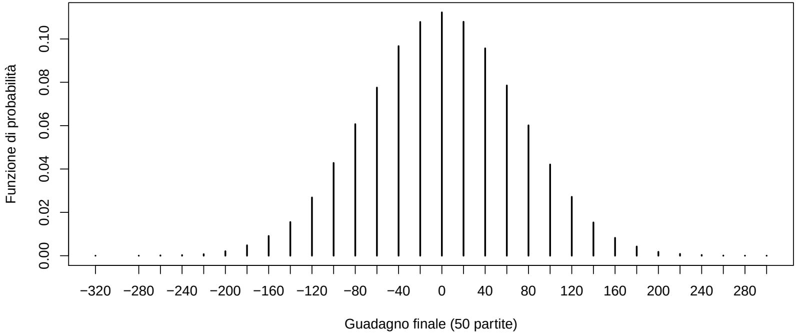
```
mean(final_earning) # Media del guadagno finale
# [1] -0.3518
```

- Ne concludiamo quindi che si tratta di un **gioco equo**, dato che mediamente né vince né si perde, ovvero $\mathbb{E}(X) \approx 0$.

- Tuttavia, i risultati differiscono molto da una partita ad un'altra, dato che:

```
sd(final_earning) # Deviazione standard del guadagno finale
# [1] 70.65155
```

Analisi dei risultati




```
par(mfrow = c(1, 1))
plot(table(final_earning) / R, xlab = "Guadagno finale (50 partite)", ylab = "Funzione di probabilità")
```

Analisi dei risultati

- La distribuzione del guadagno finale è quindi **simmetrica** attorno allo zero.
- Vogliamo infine calcolare la **probabilità di vittoria**, definita come

$$\mathbb{P}(X > 0).$$

- Consideriamo quindi la variabile aleatoria binaria $Z = \mathbb{1}(X > 0)$.
- Approssimiamo l'**evento** contando i successi verificatisi tra le variabili $Z_1, \dots, Z_R$.

```r
mean(final_earning > 0) # Probabilità di vincere, ovvero P(X > 0)
# [1] 0.44253
```

- La probabilità di vittoria è pertanto inferiore a 0.5, mentre la probabilità di **parità**, ovvero $\mathbb{P}(X = 0)$, è positiva:

```r
mean(final_earning == 0) # Probabilità di pareggiare, ovvero P(X = 0)
# [1] 0.11225
```

La roulette americana

- Il gioco del "lancio della monetina" è concettualmente identico ad un gioco d'azzardo ben più popolare, la **roulette**.
- Supponendo di scommettere sul rosso (o sul nero) 10 euro, questo gioco d'azzardo può essere simulato usando sostanzialmente lo stesso codice discusso finora.
- C'è pero' una differenza importante, soprattutto da un punto di vista finanziario: la **presenza dello zero** e del **doppio zero**.

La roulette americana

- Supponendo di **scommettere 10 euro** sul **rosso**, la probabilità di vincerne altrettanti non è più $1/2$, come nel caso del lancio della monetina, bensì:

$$\mathbb{P}(\text{“Vincere puntando sul rosso”}) = \frac{18}{38} \approx 0.474.$$

- Si tratta quindi, come ben noto, di un gioco **non equo**, in cui il banco dispone di un vantaggio.
- Siamo interessati ad indagare la **variabile aleatoria** X, che rappresenta il guadagno finale del giocatore nei confronti del banco:

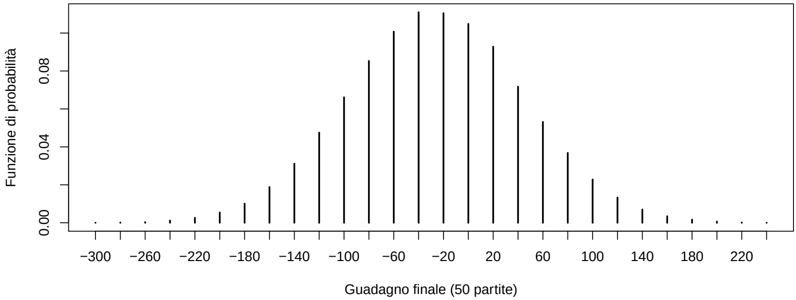
```r
p_winning <- 18 / 38
p_winning

# Ottengo il guadagno finale (una volta sola)
set.seed(123)
sum(sample(c(-10, 10), 50, replace = TRUE, prob = c(1 - p_winning, p_winning)))
# [1] 0
```

Simulazione ed analisi dei risultati

- Tramite gli stessi comandi usati in precedenza, **ripetiamo** R volte l'operazione per studiare la distribuzione di X.

```r
set.seed(123)
R <- 10^5
final_earning <- replicate(R, sum(sample(c(-10, 10), 50, replace = TRUE,
                                         prob = c(1 - p_winning, p_winning))))

# Media del guadagno finale
mean(final_earning)
# [1] -26.3814

# Deviazione standard del guadagno finale
sd(final_earning)
# [1] 70.54601

# Probabilità di vittoria, ovvero P(X > 0)
mean(final_earning > 0)
# [1] 0.30387

# Probabilità di pareggio, ovvero P(X == 0)
mean(final_earning == 0)
# [1] 0.10483
```

Distribuzione di probabilità




```r
par(mfrow = c(1, 1))
plot(table(final_earning) / R, xlab = "Guadagno finale (50 partite)", ylab = "Funzione di probabilità")
```

Commenti ai risultati

- Il valore atteso del guadagno finale $\mathbb{E}(X)$ è **negativo** e circa pari a -26.
- La probabilità di vittoria e di pareggio **diminuiscono** rispetto al "lancio della monetina".
- L'intera distribuzione è spostata verso **valori negativi** rispetto al primo scenario.
- Questi risultati sono una formalizzazione del detto popolare "**il banco vince sempre**". Per questo gli statistici non giocano d'azzardo, o quantomeno non alla roulette!
- **Esercizio proprietà**. I valori attesi, le varianze e le probabilità calcolate tramite simulazione possono essere in realtà ottenute anche analiticamente. Si provi a calcolarle tramite "carta e penna".
- Nelle ultime slides considereremo quindi un esempio leggermente più sofisticato, che renderebbe molto più difficile fare i conti analitici.

Uno scenario più realistico

- L'implicita ipotesi delle simulazioni precedenti è sia il giocatore che il banco avessero budget superiore a 500 euro, ovvero la perdita massima.
- Consideriamo quindi il caso in cui il giocatore abbia un **budget massimo**, diciamo 100 euro, così come il banco, diciamo $100,000$ euro.
- Se questi numeri sembrano troppo piccoli, è sufficiente ripetere la nostra simulazione cambiando ordine di grandezza, ad esempio moltiplicando tutto per 10 o 100.
- Il giocatore continua a scommettere fino ad un massimo di 50 volte solo **se ha ancora soldi a disposizione**. Altrimenti, è costretto a fermarsi.
- Sebbene molto improbabile, consideriamo anche il caso in cui in banco possa finire in bancarotta.

Implementazione

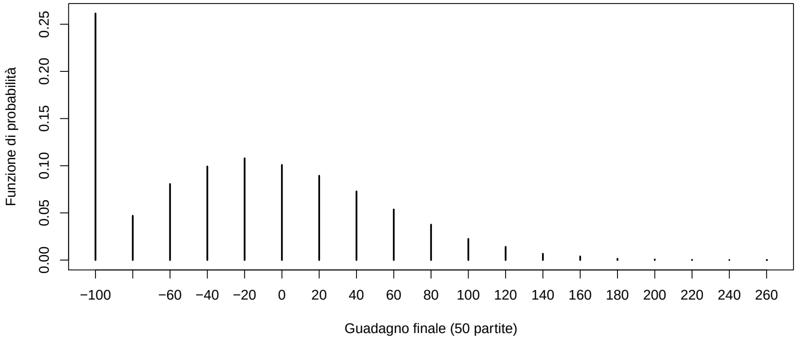
```r
# Funzione che simula il guadagno finale dopo 50 scommesse
sim_match <- function(player_budget, casino_budget, p_winning){

  player_money <- player_budget
  casino_money <- casino_budget

  for(r in 1:50){
    outcome <- sample(c(-10, 10), 1, prob = c(1 - p_winning, p_winning))
    player_money <- player_money + outcome # Aggiorno il budget giocatore
    casino_money <- casino_money - outcome # Aggiorno il budget casinò
    if(player_money <= 0){
      # Giocatore in rovina: il giocatore perde tutto il budget
      return(- player_budget)
    }
    if(casino_money <= 0){
      # Casinò in rovina: il casinò perde tutto il budget
      return(- casino_budget)
    }
  }
  player_money - player_budget # guadagno rispetto al valore iniziale
}

set.seed(220)
sim_match(100, 100000, p_winning)
# [1] -60
```

Simulazione ed analisi dei risultati

- Tramite gli stessi comandi usati in precedenza, **ripetiamo** R volte l'operazione per studiare la distribuzione di X.

```
set.seed(123)
R <- 10^5
final_earning <- replicate(10^5, sim_match(100, 100000, p_winning))

# Media del guadagno finale
mean(final_earning)
# [1] -24.0002

# Deviazione standard del guadagno finale
sd(final_earning)
# [1] 64.52637

# Probabilità di vittoria, ovvero P(X > 0)
mean(final_earning > 0)
# [1] 0.30288

# Probabilità di pareggio, ovvero P(X == 0)
mean(final_earning == 0)
# [1] 0.10084
```

Distribuzione di probabilità




```
plot(table(final_earning) / R, xlab = "Guadagno finale (50 partite)", ylab = "Funzione di probabilità")
```

Commenti ai risultati

- Possiamo osservare un "picco" di probabilità nel valore -100 e pertanto circa il 25% delle volte il giocatore finisce in bancarotta.

- Al tempo stesso, il valore atteso rimane negativo, ovvero $\mathbb{E}(X) = -24$, ma è superiore a quello che abbiamo ottenuto nel modello con budget illimitato, ovvero circa -26.

- In un certo senso, se il giocatore ha pochi soldi il banco non glieli può sottrarre.

- Da questo desumiamo la **strategia di gioco ottimale** alla roulette: bisogna entrare nel casinò con pochi spiccioli in portafoglio o, idealmente, con assolutamente nulla.