

R per l'analisi statistica multivariata

Unità G: analisi descrittiva dei dati TITANIC

Tommaso Rigon

Università Milano-Bicocca



Argomenti affrontati

- Dati qualitativi
- Tabelle di contingenza
- Distribuzioni condizionate
- Indipendenza e indice di connessione χ^2
- Esercizi **R** associati: https://tommasorigon.github.io/introR/exe/es_2.html

Descrizione del problema

- Dopo il **disastro del Titanic**, una commissione d'inchiesta del **British Board of Trade** ha compilato una lista di tutti i 1316 passeggeri includendo le seguenti informazioni:
 - l'esito (salvato, non salvato)
 - la classe (I, II, III) in cui viaggiavano
 - il sesso, l'età, etc.
- In questa unità ci limitiamo a considerare le informazioni sull'esito e la classe.
- **Nota.** Ovviamente, si tratta degli stessi dati considerati nell'**unità 0** del corso Statistica I.

I dati grezzi (editor di testo)

```
"Salvato", "Classe"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"  
"Si", "I"
```

Importazione dei dati titanic

- Come fatto in precedenza, anzitutto è necessario scaricare il file `titanic.csv` e salvarlo nel proprio computer.
- **Link al file:** <https://tommasorigon.github.io/introR/data/titanic.csv>.
- In alternativa, possiamo scaricare il file direttamente da internet nel modo seguente:

```
path <- "https://tommasorigon.github.io/introR/data/titanic.csv"
titanic <- read.table(path, header = TRUE, sep = ",", stringsAsFactors = TRUE)

str(titanic)
# 'data.frame':      1316 obs. of  2 variables:
# $ Salvato: Factor w/ 2 levels "No","Si": 2 2 2 2 2 2 2 2 2 ...
# $ Classe : Factor w/ 3 levels "I","II","III": 1 1 1 1 1 1 1 1 1 ...
```

Le frequenze assolute e relative (marginali)

- Possiamo ottenere le frequenze assolute (marginali) delle due variabili usando il comando `summary`:

```
summary(titanic)
# Salvato Classe
# No:817 I :325
# Si:499 II :285
# III:706
```

- Ovviamente, possiamo ottenere le frequenze **assolute** e **relative** anche usando il comando `table`. Ad esempio per la variabile classe, possiamo

```
freq_abs_classe <- table(titanic$Classe)
freq_rel_classe <- freq_abs_classe / sum(freq_abs_classe)
tab_summary <- cbind(freq_abs_classe, freq_rel_classe)
tab_summary
#      freq_abs_classe freq_rel_classe
# I              325      0.2469605
# II             285      0.2165653
# III            706      0.5364742
```

Frequenze congiunte

- Una sintesi che possiamo operare consiste nel costruire una tabella, detta **tabella di contingenza** oppure **tabella a doppia entrata**.
- In **R** si usa anche in questo caso il comando `table`, con due argomenti:

```
tab <- table(titanic$Salvato, titanic$Classe)
tab
#           I   II  III
#  No  122  167  528
#  Si  203  118  178
```

- In questa tabella sono riportate le **frequenze congiunte**, ad esempio, il valore 203 rappresenta il numero di passeggeri che viaggiavano in I classe e che sono sopravvissuti.

Tabella di contingenza

- Siano x ed y due variabili aventi modalità c_1, \dots, c_h e d_1, \dots, d_k , rispettivamente.
- Una **tabella di contingenza** (a due variabili) per le coppie di dati $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ si presenta nella seguente forma:

Variabile x	Variabile y					Totale
	d_1	...	d_j	...	d_k	
c_1	n_{11}	...	n_{1j}	...	n_{1k}	n_{1+}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
c_i	n_{i1}	...	n_{ij}	...	n_{ik}	n_{i+}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
c_h	n_{h1}	...	n_{hj}	...	n_{hk}	n_{h+}
Totale	n_{+1}	...	n_{+j}	...	n_{+k}	n

- La frequenza n_{ij} è il numero di unità statistica che presentano contemporaneamente le modalità c_i e d_j .

Tabella di contingenza, frequenze relative

- Dividendo per n ciascun termine della precedente tabella, si ottiene inoltre:

Variabile x	Variabile y					Totale
	d_1	...	d_j	...	d_k	
c_1	f_{11}	...	f_{1j}	...	f_{1k}	f_{1+}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
c_i	f_{i1}	...	f_{ij}	...	f_{ik}	f_{i+}
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
c_h	f_{h1}	...	f_{hj}	...	f_{hk}	f_{h+}
Totale	f_{+1}	...	f_{+j}	...	f_{+k}	1

- La frequenza relativa $f_{ij} = n_{ij}/n$ è quindi la frazione di osservazioni che presentano contemporaneamente le modalità c_i e d_j .

Frequenze congiunte & marginali

- Le tabelle descritte nelle slides precedenti si ottengono in **R** come segue:

```
addmargins(tab) # Aggiunge le distribuzioni marginali (assolute)
```

```
#  
#           I      II     III   Sum  
#  No    122    167    528   817  
#  Si     203    118    178   499  
#  Sum    325    285    706  1316
```

```
tab_rel <- prop.table(tab) # Comando alternativo: table(tab) / sum(tab)  
tab_rel
```

```
#           I           II           III  
#  No 0.09270517 0.12689970 0.40121581  
#  Si 0.15425532 0.08966565 0.13525836
```

```
addmargins(tab_rel) # Aggiunge le distribuzioni marginali relative
```

```
#  
#           I           II           III           Sum  
#  No 0.09270517 0.12689970 0.40121581 0.62082067  
#  Si 0.15425532 0.08966565 0.13525836 0.37917933  
#  Sum 0.24696049 0.21656535 0.53647416 1.00000000
```

Distribuzioni condizionate I

Distribuzione condizionata ($x \mid y = d_j$)

- La j -esima colonna mostra la distribuzione di x **condizionata** ad $y = d_j$ oppure, equivalentemente, la distribuzione di x dato $y = d_j$.

Distribuzione $x \mid y = d_j$	c_1	...	c_i	...	c_h	Totale
Frequenze assolute	n_{1j}	...	n_{ij}	...	n_{hj}	n_{+j}
Frequenze relative	n_{1j}/n_{+j}	...	n_{ij}/n_{+j}	...	n_{hj}/n_{+j}	1

Distribuzione condizionata ($y \mid x = c_i$)

- La i -esima riga mostra la distribuzione di y **condizionata** ad $x = c_i$ oppure, equivalentemente, la distribuzione di y dato $x = c_i$.

Distribuzione $y \mid x = c_i$	d_1	...	d_j	...	d_k	Totale
Frequenze assolute	n_{i1}	...	n_{ij}	...	n_{ik}	n_{i+}
Frequenze relative	n_{i1}/n_{i+}	...	n_{ij}/n_{i+}	...	n_{ik}/n_{i+}	1

Distribuzioni condizionate II

- Il comando `prop.table` consente anche di calcolare le frequenze condizionate relative.
- La distribuzione di ciascuna classe, condizionata all'esito è:

```
prop.table(tab, 1)
#
#           I           II           III
#  No 0.1493268 0.2044064 0.6462668
#  Si 0.4068136 0.2364729 0.3567134
```

- La distribuzione di ciascun esito, condizionata alla classe è:

```
prop.table(tab, 2)
#
#           I           II           III
#  No 0.3753846 0.5859649 0.7478754
#  Si 0.6246154 0.4140351 0.2521246
```

Esercizio di riepilogo

- Le **contingenze** sono pari alla differenza tra frequenze osservate e frequenze attese, sotto l'ipotesi di indipendenza:

$$(\text{contingenza}_{ij}) = n_{ij} - \hat{n}_{ij}, \quad i = 1, \dots, h, \quad j = 1, \dots, k.$$

- Si consulti l'unità O di Statistica I per la definizione di **frequenze attese**.

- Indice χ^2 di Pearson. L'indice di connessione χ^2 è definito come

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k \frac{(n_{ij} - \hat{n}_{ij})^2}{\hat{n}_{ij}} = n \left(\sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^k \frac{f_{ij}^2}{f_{i+} f_{+j}} - 1 \right).$$

- Nota**. Si scriva una funzione **R** chiamata `chi_squared(x, y)` che calcola l'indice χ^2 di Pearson.

```
chi_squared <- function(x, y) {  
  nn <- table(x, y)  
  n <- sum(nn)  
  ff <- nn / n # Frequenze relative congiunte  
  f_x <- table(x) / n # Frequenze relative marginali di x  
  f_y <- table(y) / n # Frequenze relative marginali di y  
  S <- 0  
  for (i in 1:length(f_x)) {  
    for (j in 1:length(f_y)) {  
      S <- S + ff[i, j]^2 / (f_x[i] * f_y[j])  
    }  
  }  
  n * (S - 1)  
}  
chi_squared(titanic$Salvato, titanic$Classe)  
# [1] 133.052
```

Soluzione (alternativa, più concisa)

- La soluzione seguente fa uso delle funzioni `apply` e `outer`.

```
chi_squared <- function(x, y) {  
  nn <- table(x, y)  
  n <- sum(nn)  
  ff <- nn / n  
  f_x <- apply(ff, 1, sum)  
  f_y <- apply(ff, 2, sum)  
  f_e <- outer(f_x, f_y) # Prodotto "esterno" tra vettori  
  n * (sum(ff^2 / f_e) - 1)  
}  
  
chi_squared(titanic$Salvato, titanic$Classe)  
# [1] 133.052  
  
chisq.test(table(titanic$Salvato, titanic$Classe))  
#  
#      Pearson's Chi-squared test  
#  
# data:  table(titanic)  
# X-squared = 133.05, df = 2, p-value < 2.2e-16
```

- Si noti che la funzione `chisq.test` produce lo stesso risultato.