Guida Pratica all'Ottimizzazione con MATLAB

Contents

1 Introduzione

L'ottimizzazione è un argomento fondamentale della matematica applicata e dell'informatica. Si tratta di trovare il miglior valore possibile (massimo o minimo) di una funzione, chiamata **funzione obiettivo**, rispettando o meno dei vincoli.

Un problema di ottimizzazione è caratterizzato da:

- Una **funzione obiettivo**, che vogliamo minimizzare o massimizzare.
- Un insieme di **vincoli**, che limitano i valori delle variabili.

In questa guida, esploreremo:

1. L'ottimizzazione libera, dove non ci sono restrizioni sui valori delle variabili.
2. L'ottimizzazione vincolata, dove le variabili devono rispettare determinati limiti.

MATLAB offre funzioni predefinite per risolvere problemi di ottimizzazione:

- `fminunc`: per problemi di ottimizzazione libera.
- `fmincon`: per problemi di ottimizzazione vincolata.

—

2 Funzioni MATLAB per l'Ottimizzazione

Questa sezione spiega nel dettaglio le funzioni MATLAB utilizzate per risolvere problemi di ottimizzazione.

2.1 `fminunc`: Ottimizzazione Libera

La funzione `fminunc` cerca il minimo di una funzione obiettivo senza vincoli.

Sintassi di Base:

```
[zmin, fval] = fminunc(fun, z0, options)
```

Parametri di Input:

- `fun`: funzione obiettivo da minimizzare.
- `z0`: punto iniziale per la ricerca del minimo.
- `options`: struttura che specifica i parametri per controllare l'algoritmo.

Parametri di Output:

- `zmin`: valore ottimale delle variabili.
- `fval`: valore della funzione obiettivo nel punto $zmin$.

Opzioni: Le opzioni possono essere configurate con la funzione `optimset`. Ad esempio:

```
options = optimset('Display', 'iter', 'TolFun', 1e-6, 'TolX', 1e-6);
```

—

2.2 `fmincon`: Ottimizzazione Vincolata

La funzione `fmincon` cerca il minimo di una funzione obiettivo con vincoli lineari o non lineari.

Sintassi Completa:

```
[z, fval, exitflag, output, lambda, grad, hessian] = ...
    fmincon(@fun, z0, A, b, Aeq, beq, LB, UB, @nonlcon, options)
```

Parametri di Input:

- `@fun`: funzione obiettivo da minimizzare.
- `z0`: punto iniziale per la ricerca del minimo.
- `A, b`: vincoli lineari di disuguaglianza ($Az \leq b$).
- `Aeq, beq`: vincoli lineari di uguaglianza ($A_{eq}z = b_{eq}$).
- `LB, UB`: limiti inferiori e superiori ($LB \leq z \leq UB$).
- `@nonlcon`: funzione per vincoli non lineari.
- `options`: parametri per controllare l'algoritmo.

Parametri di Output:

- `z`: valore ottimale delle variabili.
- `fval`: valore della funzione obiettivo nel punto ottimale.
- `exitflag`: stato di uscita dell'algoritmo.
- `output`: informazioni sull'esecuzione.
- `lambda`: moltiplicatori di Lagrange.
- `grad`: gradiente della funzione obiettivo.
- `hessian`: matrice hessiana della funzione obiettivo.

—

3 Ottimizzazione Libera

Un problema di ottimizzazione libera si scrive come:

$$\min_z f(z), \quad z \in \mathbb{R}^n$$

dove $f(z)$ è la funzione obiettivo e $z = [z_1, z_2, \ldots, z_n]$ è il vettore delle variabili.

3.1 Esempio Pratico

Minimizzare:

$$f(z) = \exp(z_1) + (z_1 + z_2)^2$$

Codice MATLAB:

```
fun = @(z) exp(z(1)) + (z(1) + z(2))^2; % Funzione obiettivo
z0 = [0, 0]; % Punto iniziale
options = optimset('Display', 'iter', 'TolFun', 1e-6, 'TolX', 1e-6);
[zmin, fval] = fminunc(fun, z0, options);
disp('Valore minimo delle variabili:');
disp(zmin);
disp('Valore della funzione obiettivo:');
disp(fval);
```

—

4 Ottimizzazione Vincolata

Un problema di ottimizzazione vincolata si scrive come:

$$\min_z f(z)$$

soggetto a:

$$Az \leq b, \quad A_{eq}z = b_{eq}, \quad C(z) \leq 0, \quad C_{eq}(z) = 0, \quad LB \leq z \leq UB$$

dove:

- A, b: vincoli di disuguaglianza lineare.
- A_{eq}, b_{eq}: vincoli di uguaglianza lineare.
- $C(z), C_{eq}(z)$: vincoli non lineari.
- LB, UB: limiti inferiori e superiori delle variabili.

4.1 Esempio: Vincoli Lineari

Minimizzare:

$$f(z) = z_1^2 + z_2^2$$

soggetto a:

$$z_1 - z_2 \leq 1, \quad z_1 + z_2 \geq 0$$

Codice MATLAB:

```
fun = @(z) z(1)^2 + z(2)^2;
A = [-1, 1]; b = 1; % Vincoli di disuguaglianza lineare
Aeq = []; beq = []; % Nessun vincolo di uguaglianza
LB = []; UB = []; % Nessun limite
z0 = [0, 0]; % Punto iniziale
options = optimset('Display', 'iter', 'TolFun', 1e-6, 'TolX', 1e-6);
[zmin, fval] = fmincon(fun, z0, A, b, Aeq, beq, LB, UB, [], options);
disp('Valori ottimizzati:');
disp(zmin);
disp('Valore della funzione obiettivo:');
disp(fval);
```

4.2 Esempio: Vincoli Non Lineari

Minimizzare:

$$f(z) = z_1^2 + z_2^2$$

soggetto a:

$$z_1^2 + z_2^2 \leq 1, \quad \exp(z_1) - z_2 = 0$$

Codice MATLAB per i vincoli:

```
function [C, Ceq] = nonlcon(z)
    C = [z(1)^2 + z(2)^2 - 1; % disuguaglianza non lineare
         exp(z(1)) - z(2)];  % uguaglianza non lineare
    Ceq = []; % Nessun vincolo di uguaglianza
end
```

—