

Mémoire de Groupe de Travail présenté devant l'Ecole Nationale de
la Statistique et de l'Administration Economique
pour l'obtention du diplôme de l'ENSAE
et l'admission à l'Institut des Actuaire

le _____

Par : Eugène KOUADIO et Victorien PONCELET

Titre: **MODÉLISATION DE LA MORTALITÉ À L'AIDE DE
PROCESSUS DE LÉVY**

Confidentialité : ☐ NON ☐ OUI (Durée : ☐ 1 an ☐ 2 ans)

*Membre présent du jury de l'Institut
des Actuaire*

Entreprise :

ENSAE ParisTech

Membres présents du jury ENSAE

Directeur de mémoire en entreprise :
Donatien HAINAUT

Invité :

**Autorisation de publication et de
mise en ligne sur un site de
diffusion de documents actuariels**
(après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)

Signature du responsable entreprise

Secrétariat :

Signature des candidats

Bibliothèque :

RESUME

Solvabilité II, le futur cadre réglementaire de l'industrie des assurances de la zone euro, a mis un accent particulier sur la gestion des risques au sein des sociétés d'assurances. La règle sera désormais une exigence de solvabilité fondée sur l'analyse et la gestion des risques.

Aujourd'hui plus que jamais, il est donc primordial pour les sociétés d'assurances proposant des contrats de type rentes viagères de disposer de modèles leur permettant d'anticiper les changements de tendance dans l'évolution de la mortalité, mais également les risques de court terme avec une composante catastrophique (pandémie, sécheresse, vents, etc....). Cet exercice reste toutefois assez peu évident.

Sur le constat de cette difficulté à prévoir l'évolution de la mortalité, plusieurs modèles stochastiques ont été proposés ces deux dernières décennies pour représenter la dynamique de la mortalité. Parmi ces modèles, celui de Lee Carter fait aujourd'hui référence. Néanmoins, des améliorations y ont été apportées par plusieurs auteurs. Le modèle originel ainsi que certains des modèles alternatifs ont traité les discontinuités comme des événements exceptionnels. Or, il est aujourd'hui démontré que la prise en compte des sauts dans la modélisation stochastique de la mortalité donne de meilleurs résultats que les modèles sans diffusion par sauts.

Le but de la présente étude est donc d'explorer l'extension multifactorielle du modèle de Lee Carter et la modélisation de la mortalité par des processus de Levy. Après mise en œuvre du modèle de Lee Carter et de son extension à deux facteurs du modèle Renhaw-Haberman (2003), la calibration de la composante temporelle par les processus de sauts de Merton et Kou ainsi que par les processus subordonné variance gamma et normal inverse gaussien est examinée. Les modèles calibrés avec succès sont ensuite utilisés pour prévoir l'évolution future du taux de mortalité. Ces prévisions sont alors comparées à celles obtenues par le modèle Lee Carter classique mais également avec les taux réels pour en mesurer la performance.

Mots clés : Modélisation de la mortalité, modèle de Lee Carter, modèle de Renshaw Haberman, sauts de mortalité, processus de Levy, Merton, Kou, variance gamma, VG, normal inverse gaussien, NIG, projection des taux de mortalité

ABSTRACT

Solvency II, the future regulatory regime for the European insurance industry, sets out stronger risk management for insurers. Risk-based solvency requirements will be introduced.

Subsequently, it has become essential for life insurance companies with portfolios of pension annuities to develop models able to estimate and forecast time-dependence in the mortality rate and to capture both short term risk and catastrophic components (pandemic, heat, wave, ...), which is but an obvious part.

Thus, a wide variety of stochastic models has been proposed for modeling the dynamics of mortality over the last two decades. The Lee-Carter model is one of the most popular choices. Nevertheless, Lee-Carter approach has been extended by many authors. Based on some of these models setup, short-term shocks and jumps were regarded as non-repetitive exogenous interventions and removed. But recently, it has been found by some researchers that a jump process is better than a diffusive component alone in stochastic mortality modeling.

Therefore, the aim of this study is to explore the extended Lee Carter model with two factors and to incorporate a Levy process into the original Lee Carter model. First, we implement the Lee Carter model and Renshaw-Haberman two factors model. We examine in a second time the calibration of the time component parameter with Merton and Kou jumps processes and with Variance Gamma and Normal Inverse Gaussian subordinated processes. The fitted models are used to forecast mortality rates to be compared with the real rates and the rates from Lee Carter model.

Key words: Mortality modeling, Lee Carter model, Renshaw Haberman model, mortality jumps, Levy process, Merton, Kou, Variance Gamma, VG, Normal Inverse Gaussian, NIG

SOMMAIRE

RESUME	2
ABSTRACT	3
SOMMAIRE	4
INTRODUCTION	7
Première Partie : PRINCIPALES APPROCHES DE LA MORTALITE	9
I. LE MODELE DE LEE CARTER.....	9
A. Présentation du modèle	9
B. Estimation des paramètres.....	11
1. Etape 1	12
2. Etape 2	12
3. Etape 3	13
C. Mesure de la qualité du modèle.....	14
D. Un cas particulier : la tendance linéaire temporelle a priori	15
II. LES ALTERNATIVES A LEE CARTER.....	16
A. L'extension multifactorielle de Renhaw-Haberman.....	16
B. Le modèle de Poisson	17
C. Le modèle log-linéaire	20
D. Le modèle logistique décalé	21
E. Les modèles avec sauts.....	22
III. APPLICATION DU MODELE DE LEE CARTER A LA POPULATION FRANCAISE	24
A. Les données	24
B. La mise en œuvre du modèle	25
1. Estimation des paramètres	25
2. Analyse des résultats	26
3. Validation du modèle.....	28
C. Une amélioration du modèle de Lee Carter : le modèle Renshaw-Haberman	29
1. Estimation des paramètres	29
2. Qualité du modèle et analyse des résultats.....	30
3. Qualité du modèle	32
D. Une modélisation classique des κ_t : le modèle ARIMA(p,d,q)	34
1. Identification du modèle.....	34
2. Estimation des paramètres	37
3. Validation du modèle.....	37
4. Prévision.....	38

Deuxième Partie : MODELISATION DE LA COMPOSANTE TEMPORELLE DE LA MORTALITE PAR DES PROCESSUS DE LEVY.....	41
I. LES PROCESSUS DE LEVY.....	41
A. Définition et premières propriétés.....	41
B. Transformation des processus de Lévy	44
1. Transformations linéaires	44
2. Subordination.....	44
3. Tempérer une mesure de Lévy	45
C. Modèles de diffusion par sauts	46
1. Modèle de Merton	46
2. Le processus de Kou.....	46
D. Construction d'un processus de Lévy par subordination d'un brownien.....	47
1. Exemples de processus subordonnés	48
2. Le processus Variance gamma	49
3. Le processus Normal inverse gaussien.....	49
E. Calcul stochastique pour les processus de Lévy	50
II. LA MODELISATION DES K_T PAR UN PROCESSUS DE MERTON	52
A. Présentation du modèle	52
B. Estimation par maximum de vraisemblance	52
C. Projections	53
III. LA MODELISATION DES K_T PAR UN PROCESSUS DE KOU	55
A. Présentation du modèle	55
B. Estimation des paramètres.....	55
1. Approximation d'Edgeworth	57
2. Méthode des moments.....	58
IV. LA MODELISATION DES K_T PAR UN PROCESSUS VARIANCE GAMMA	60
A. Présentation du modèle	60
C. Estimation des paramètres.....	64
D. Projection.....	66
V. LA MODELISATION DES K_T PAR UN PROCESSUS NORMAL INVERSE GAUSSIEN	67
A. Présentation du modèle	67
B. Estimation des paramètres.....	68
VI. COMPARAISON DE LA PERFORMANCE DE PREDICTION DES MODELES DE LEVY ET DE LEE CARTER	69
CONCLUSION	71
BIBLIOGRAPHIE.....	73

ANNEXES.....	77
I. Rappels sur la décomposition en valeurs singulières	i
II. Evolution du taux brut de mortalité des hommes	ii
III.Les paramètres du modèle de Lee Carter	iii
IV.Les graphes de l'analyse des résidus des femmes du modèle de Lee Carter et du modèle RH	vi
V. Les coefficients de la tendance linéaire des k_t	vii
VI.Les coefficients du modèle ARIMA	vii
VII.Estimation des paramètres VG (hommes)	vii
VIII.Comparaison des taux projetés des hommes suivant les modèles	viii
IX.Les taux centraux projetés	ix

INTRODUCTION

À partir de 2013, les compagnies d'assurances de l'Union Européenne seront soumises à un nouveau dispositif prudentiel désigné sous le terme Solvabilité II. Dans la lignée de Bâle II, la maîtrise du risque est désormais placée, avec cette réforme, au cœur du dispositif de solvabilité des sociétés d'assurances.

Si le principal risque des compagnies d'assurance qui gèrent des portefeuilles de rentes porte sur les aléas financiers, ces dernières restent confrontées en second lieu au risque de longévité. Ce risque aura donc une influence notable sur leur SCR (Solvency Capital Requirement) ou capital de solvabilité requis. Dans le contexte de la réglementation Solvabilité II, ce risque doit donc être correctement quantifié. En conséquence, disposer d'outils permettant de projeter l'évolution de la mortalité constitue aujourd'hui l'un des principaux défis des services chargés de l'identification, de la quantification et de la gestion des risques au sein de ces sociétés d'assurance.

Utilisé pour la première fois en 1992 pour modéliser et projeter la mortalité aux Etats-Unis, le modèle de Lee-Carter s'est progressivement imposé comme une référence pour la construction des tables de mortalité prospectives, à la fois du fait de sa robustesse et de sa relative simplicité de mise en œuvre.

Toutefois, ce modèle a connu de nombreux amendements. Entre autres, Renshaw et Haberman (2003) en ont proposé une version multifactorielle mieux à même de capter des effets propres à l'âge, en incorporant aux premiers termes de la décomposition en valeurs singulières (SVD) retenus par Lee et Carter, les termes de second ordre.

Par ailleurs, la modélisation des facteurs du modèle de Lee-Carter, et en particulier de sa composante temporelle notée κ_t , ouvre de nouveaux horizons de recherche. Si certains des développements ignorent les sauts dans l'évolution de la mortalité ou ne l'intègrent pas de manière explicite, des travaux réalisés par Biffis (2005), Cox, Lin et Wang (2006), Hainaut et Devolder (2008), Hua Chen and Samuel H. Cox (2009) ainsi que Brockett Patrick L, Deng Yinglu (2010), MacMinn Richard et Chou, Hong et I-Chien (2010) ont proposé des modèles de diffusion permettant de rendre compte des discontinuités constatées dans l'évolution du taux de mortalité.

La présente étude s'inscrit dans cette lignée. En effet, il nous a paru pertinent de modéliser la composante temporelle κ_t , non pas par des processus ARIMA, mais plutôt par des processus qui puissent rendre compte non seulement des modifications dans la tendance mais également des oscillations constatées autour de cette tendance dans l'évolution de la mortalité.

En effet, plusieurs études récentes sur la modélisation stochastique de la mortalité attestent que les modèles intégrant des sauts rendent mieux compte de l'évolution

de la mortalité (Luciano et Vigna (2005), Cox, Lu et Wang (2006), Chou and al. (2010)). Il s'agit donc dans cette étude d'explorer la modélisation de la composante temporelle de la mortalité à l'aide de processus de Lévy.

En particulier, les processus de Merton et de Kou, pour les processus à activité finie, ainsi que les processus dits variance gamma et normal inverse gaussien à activité infinie seront explorés. La composante à estimer étant celle obtenue par le modèle de Lee Carter classique, la première partie de cette étude porte sur sa mise en œuvre et une revue de ses améliorations.

Première Partie : PRINCIPALES APPROCHES DE LA MORTALITE

L'exigence de base d'un modèle de mortalité est de rendre compte, aussi fidèlement que possible, des caractéristiques liées à l'âge et au temps calendaire. Divers modèles ont ainsi été mis en œuvre par des chercheurs au cours des deux dernières décennies dans l'optique d'approcher au mieux la réalité. La plupart de ces modèles sont basés sur le modèle de Lee-Carter à un facteur utilisé pour la première fois pour la modélisation de la mortalité de la population américaine (Lee et Carter, 1992). On consultera avec profit l'ouvrage de Delwarde et Denuit (2005) ou encore Planchet (2010) pour de plus amples détails sur ces modèles. Pour des comparaisons entre les modèles, on se référera à Pitacco (2004), Cairns (2008), Dowd *et al.* (2008) ou encore Wang et Liu (2010).

I. LE MODELE DE LEE CARTER

A. Présentation du modèle

Le modèle de Lee-Carter a été introduit par Lee (1992) avant d'être corrigé par Lee (2000) et Lee et Miller (2001) et de donner lieu à une littérature surabondante.

Le principe fondamental du modèle de Lee et Carter consiste à décomposer la mortalité en deux composantes, la première relative à l'âge et la seconde relative au temps calendaire, puis à extrapoler l'évolution de ces facteurs dans l'avenir à partir des tendances passées.

Il convient de noter d'emblée que cette méthodologie s'appuie uniquement sur les observations passées et n'intègre aucun avis autorisé d'expert concernant l'évolution présumée de la médecine ou encore l'apparition de nouvelles maladies, ce qui peut lui être reproché, mais présente le grand avantage d'écarter des biais impossible à contrôler.

Si l'on note μ_{xt} le taux instantané de mortalité des individus d'âge x à la date t , le modèle de Lee-Carter s'écrit simplement :

$$\mu_{xt} = \exp \{ \alpha_x + \beta_x \kappa_t \}$$

Soit encore, puisque nous n'accédons jamais qu'à des valeurs estimées des taux de mortalité :

$$\ln \hat{\mu}_{xt} = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{xt}$$

Les ε_{xt} sont des résidus reflétant les particularités propres à un âge x ou à une année t non capturées par le modèle. Ils sont supposés par hypothèse centrés indépendants et homoscedastiques (de même variance). Une hypothèse que certains auteurs ont fortement critiquée (voir le modèle log-Poisson développé par Brouhns *et al.* (2002) comme alternative pour contourner cette difficulté, par exemple).

On peut observer que le modèle de Lee-Carter n'est pas identifiable car sur-paramétré. Par exemple, si l'on prend c un réel différent de 0, et qu'on fait les transformations :

$$\begin{cases} \beta_x \leftarrow c\beta_x \\ \kappa_t \leftarrow \kappa_t/c \end{cases}$$

On retombe bien sur le même modèle. C'est pourquoi plusieurs contraintes supplémentaires sur les paramètres sont nécessaires pour garantir l'identifiabilité du modèle. Dans la suite, nous retiendrons les deux contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_m}^{t_M} \kappa_t &= 0 \\ \sum_{x=x_m}^{x_M} \beta_x &= 1 \end{aligned}$$

qui sont les contraintes les plus usuelles.

Toutefois, d'autres contraintes sont parfois adoptées par certains auteurs pour les β_x , telles que :

$$\sum_{x=x_m}^{x_M} \beta_x^2 = 1 \text{ ou } \beta_{x_m} = 1$$

En s'intéressant de plus près à la signification des facteurs, on peut remarquer que :

- α_x (composante spécifique à l'âge) rend compte du comportement moyen du taux central de mortalité (pris en logarithme) au cours du temps (voir l'étape 1 ci-dessous).
- β_x (composante propre à l'âge croisée avec l'effet temporel) décrit l'évolution du taux central de mortalité (pris en logarithme) à l'âge x relativement aux autres âges. On peut ainsi écrire :

$$\frac{d}{dt}(\ln \mu_{xt}) = \beta_x \frac{d}{dt}(\kappa_t)$$

- κ_t (composante temporelle) traduit quand à elle l'évolution temporelle de la mortalité. On pourra remarquer que, dans le cadre des projections, c'est la modélisation de ce κ_t qui permettra d'explorer de nouveaux modèles. Chez Lee et Carter (1992), il s'agissait d'une marche aléatoire et depuis Renshaw et Haberman (2003) il est classiquement modélisé par un processus ARIMA.

B. Estimation des paramètres

Le membre de droite de l'équation (2) ne comportant pas de variables observables, le modèle ne peut être ajusté par une régression linéaire. L'estimation des paramètres se fait donc par la méthode des moindres carrés. Ce qui peut être réalisé grâce à une décomposition aux valeurs singulières (SVD) d'une matrice adaptée ou directement à l'aide d'un système d'algorithmes itératifs de type Newton-Raphson. Le problème d'optimisation des moindres carrés s'écrit alors :

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\kappa}) = \arg \min_{\alpha, \beta, \kappa} \sum_{x=x_m}^{x_M} \sum_{t=t_m}^{t_M} (\ln \hat{\mu}_{xt} - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2$$

On remarquera avec profit que plusieurs variantes à ces estimations des moindres carrés ont été proposées : ainsi Wilmoth (1993) a introduit la formule des moins carrés pondérés où les poids w_{xt} rendent compte de la contribution des couples (x, t) au nombre de décès. Le problème d'optimisation devient alors, en notant d_{xt} les décès observés chez les individus d'âge x pendant l'année t :

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\kappa}) = \arg \min_{\alpha, \beta, \kappa} \sum_{x=x_m}^{x_M} \sum_{t=t_m}^{t_M} d_{xt} (\ln \hat{\mu}_{xt} - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2$$

Dans l'optique de lisser les courbes des paramètres obtenus (dont les discontinuités et les aspérités ne trouvent pas d'origine logique et peuvent conduire à des taux centraux de mortalité estimés erratiques ans le futur), la méthode des moindres carrés pénalisés a également été développée. Le problème d'optimisation devient alors, avec π_x les paramètres de lissage obtenus par validation croisée :

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\kappa}) = \arg \min_{\alpha, \beta, \kappa} \sum_{x=x_m}^{x_M} \sum_{t=t_m}^{t_M} (\ln \hat{\mu}_{xt} - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2 + {}^t\alpha P_\alpha \alpha + {}^t\beta P_\beta \beta + {}^t\kappa P_\kappa \kappa$$

$$\text{où } P_X = \pi_X D'_X D_X$$

On choisira d'ordinaire pour les matrices D des matrices de différenciation du second ordre, qui pénaliserons les écarts du second ordre (par exemple $\beta_{x+2} - \beta_x$). En notant n le nombre de paramètres, D est alors de dimensions (n-2) x n et peut s'écrire :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

La résolution des problèmes de moindres carrés pondérés et pénalisés se fait de manière itérative par un système d'algorithmes de type Newton-Raphson qui ressemble formellement à celui utilisé dans le cas général, à quelques amendements près.

Dans la suite, nous nous concentrerons sur l'estimation des paramètres à l'aide de la décomposition en valeurs singulières (SVD) d'une matrice choisie dans le cadre des moins carrés ordinaires. Pour une présentation un peu plus détaillée de la SVD, on se reportera à l'annexe au présent rapport.

L'estimation des paramètres peut être résumée en trois étapes.

1. Etape 1

En observant que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_x} \sum_{x,t} (\ln \hat{\mu}_{xt} - \alpha_x - \beta_x \kappa_t)^2 = 2(t_M - t_m + 1)\alpha_x - 2 \sum_{t=t_m}^{t_M} (\ln \hat{\mu}_{xt} - \alpha_x - \beta_x \kappa_t) = 0$$

Avec la contrainte :

$$\sum_{t=t_m}^{t_M} \kappa_t = 0$$

On obtient :

$$\hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \ln \hat{\mu}_{xt}$$

2. Etape 2

Les paramètres β_x et κ_t sont quant à eux endogènes et se déduisent de la SVD de la matrice Z définie comme :

$$Z = [\ln \hat{\mu}_{xt} - \hat{\alpha}_x]_{x_m \leq x \leq x_M, t_m \leq t \leq t_M}$$

On a alors, en notant u_i les vecteurs singuliers à droite et v_i les vecteurs singuliers à gauche :

$$Z = V \Sigma^t U = \sum_i \sigma_i v_i^t u_i$$

Et on rappelle, en notant λ_i les valeurs propres de ${}^t Z Z$, la relation :

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad \forall i$$

En supposant les λ_i et les σ_i ordonnés.

On introduit alors la mesure du taux d'inertie aussi appelé pourcentage de variance expliquée :

$$\tau_i = \frac{\lambda_i}{\sum_i \lambda_i}$$

Et on remarque que, si $\tau_1 \sim 1$, on faire l'approximation qui justifie la construction du modèle original de Lee-Carter à un facteur :

$$Z \approx \sigma_1 v_1^t u_1$$

Pour estimer les β_x et κ_t , on exprime :

$$Z \approx \hat{\beta}^t \hat{\kappa}$$

Et en comparant cette expression avec la précédente tout en gardant à l'esprit les contraintes exprimées plus haut, il vient naturellement :

$$\hat{\beta}_x = \frac{1}{\sum_{x=x_m}^{x_M} v_{1x}} v_1$$

$$\hat{\kappa}_t = \sigma_1 \left(\sum_{x=x_m}^{x_M} v_{1x} \right) u_1$$

On remarquera que ces estimations vérifient bien les contraintes définies précédemment.

3. Etape 3

On introduit ensuite l'exposition au risque :

$$er_{xt} = \frac{d_{xt}}{\mu_{xt}}$$

On souhaite alors voir vérifiée l'équation suivante qui, au prix d'un réajustement des $\hat{\kappa}_t$ en $\hat{\hat{\kappa}}_t$, assurera que le modèle reproduit bien le nombre total de décès observés pour une année donnée :

$$\sum_{x=x_m}^{x_M} d_{xt} = \sum_{x=x_m}^{x_M} er_{xt} \exp\{\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t\}$$

On rappelle alors le principe de la méthode itérative devenue classique de Newton-Raphson, qui donnera un résultat unique en un faible nombre d'itérations pourvu que les β_x soient tous de même signe (ce qui est souvent le cas en pratique). Lorsque cette condition n'est pas vérifiée, ce qui arrive quelquefois dans des tables non fermées traitant des très grands âges, l'algorithme peut ne pas converger et le réajustement n'est pas possible. Dans le cas général, l'algorithme de Newton-Raphson s'exprime sous la forme :

$$\kappa^{(k+1)} = \kappa^{(k)} - \frac{F(\kappa^{(k)})}{F'(\kappa^{(k)})}$$

Ce qui se réécrit, dans le cas particulier qui nous intéresse :

$$\kappa_t^{(k+1)} = \kappa_t^{(k)} - \frac{U_t^k - D_t}{V_t^k}$$

Avec :

$$D_t = \sum_{x=x_m}^{x_M} d_{xt}$$

$$U_t^k = \sum_{x=x_m}^{x_M} er_{xt} e^{\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \kappa_t^{(k)}}$$

$$V_t^k = \sum_{x=x_m}^{x_M} \hat{\beta}_x er_{xt} e^{\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \kappa_t^{(k)}}$$

L'algorithme itère la transformation jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit atteint :

$$\left| \frac{\kappa_t^{(k+1)} - \kappa_t^{(k)}}{\kappa_t^{(k)}} \right| < \varepsilon$$

Dans le cas qui nous intéresse, l'initialisation de l'algorithme est très naturelle et l'on définit d'ordinaire :

$$\kappa_t^{(0)} = \hat{\kappa}_t$$

Une fois les κ_t estimés réajustés, les contraintes sur les paramètres ne sont toutefois plus vérifiées et il faut procéder à de nouvelles transformations des facteurs. On définit alors :

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_x \leftarrow \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \bar{k} \\ \hat{\kappa}_t \leftarrow \hat{\kappa}_t - \bar{k} \end{cases}$$

avec \bar{k} la moyenne des $\hat{\kappa}_t$ issus de l'algorithme itératif

On dispose ainsi de la donnée des estimateurs de nos trois paramètres d'intérêt.

C. Mesure de la qualité du modèle

Pour mesurer la qualité du modèle, on peut s'intéresser en premier lieu au taux d'inertie τ_1 qui donne une bonne idée de la justesse de l'approximation :

$$Z \approx \sigma_1 v_1^t u_1.$$

Ainsi, si τ_1 est jugé trop faible, on pourra mettre en œuvre l'extension multifactorielle proposée par Renshaw et Haberman (2003) qui consiste à considérer d'autres termes successifs de la SVD de Z (la théorie en est présentée plus loin dans ce chapitre). De manière générale, il est très fréquent de trouver $\tau_1 > 90 \%$, ce qui explique que le modèle de Lee-Carter, malgré sa relative simplicité, se soit rapidement imposé comme un modèle fiable.

Il est également d'usage de considérer la part de la variance temporelle expliquée par le modèle (à un âge donné). On peut l'exprimer par la formule suivante :

$$1 - \frac{\frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} [\hat{\mu}_{xt} - \exp \{ \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t \}]^2 - \left[\frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} (\hat{\mu}_{xt} - \exp \{ \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t \}) \right]^2}{\frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} [\hat{\mu}_{xt}]^2 - \left[\frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \hat{\mu}_{xt} \right]^2}$$

Nous verrons plus loin que la variance temporelle expliquée, si elle est généralement bonne, peut accuser de fortes baisses pour certaines tranches d'âges particulières.

Enfin, comme pour tous les modèles, une analyse des résidus est généralement pertinente. Ainsi, si l'adéquation au modèle est bonne, le graphe des résidus ne devrait pas comporter de structure identifiable. La définition des résidus est naturelle :

$$r_{xt} = \ln \hat{\mu}_{xt} - (\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{\kappa}_t)$$

D. Un cas particulier : la tendance linéaire temporelle a priori

Lorsqu'on estime les κ_t , il n'est pas rare de voir apparaître une structure linéaire assez marquée ou, plus généralement, linéaire par morceaux. Dès lors, en se restreignant aux intervalles de temps où l'on observe cette tendance linéaire, il peut être intéressant de simplifier le modèle afin d'obtenir des prédictions plus cohérentes. On remplace alors la formule générale du modèle de Lee-Carter par la formule suivante :

$$\ln \hat{\mu}_{xt} = \alpha_x + \beta_x(\varphi_1 + \varphi_2 t) + \varepsilon_{xt}$$

Où les ε_{xt} sont des résidus à nouveau supposés centrés, indépendants et homoscedastiques. Pour garantir l'identifiabilité du modèle, on peut alors soit fixer φ_1 et φ_2 et se passer des conditions supplémentaires sur les paramètres, soit respecter ces deux conditions et laisser φ_1 et φ_2 varier.

En faisant la transformation suivante sur les paramètres :

$$\begin{cases} \alpha_x \leftarrow \alpha_x + \varphi_1 \beta_x \\ \beta_x \leftarrow \varphi_2 \beta_x \end{cases}$$

On peut grandement simplifier le modèle et se ramener au cas particulier d'une tendance en t égale à :

$$\ln \hat{\mu}_{xt} = \alpha_x + \beta_x t + \varepsilon_{xt}$$

Il n'y a plus, dès lors, qu'à effectuer une régression linéaire pour estimer les facteurs. On introduit M et T tels que :

$$M = [\ln \hat{\mu}_{xt}]_{x_m \leq x \leq x_M, t_m \leq t \leq t_M}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & t_m \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_M \end{pmatrix}$$

Et on a alors : $\begin{pmatrix} {}^t\hat{\alpha} \\ {}^t\hat{\beta} \end{pmatrix} = ({}^tTT)^{-1}{}^tTM$

II. LES ALTERNATIVES A LEE CARTER

La gestion du risque de mortalité est fondamentale pour les sociétés d'assurances vie dont les engagements courent sur le très long terme. Par conséquent, il est primordiale pour elles de disposer de modèles leur permettant d'anticiper et quantifier les risques qu'elles couvrent. De la précision des modèles dépend la suffisance du tarif des contrats commercialisés, mais également la bonne évaluation de leurs engagements envers leurs assurés.

La modélisation de la mortalité par des processus stochastique n'est donc pas une idée nouvelle. L'incertitude dans l'évolution de la mortalité apparaît naturelle et a fait l'objet de plusieurs travaux. La plupart de ces travaux s'appuie sur le travail de Lee et Carter (1992) exposé ci-dessus qu'ils essayent d'améliorer.

Il s'agit de résumer dans ce paragraphe les principales innovations apportées à la modélisation de la mortalité en général et au modèle originel de Lee Carter en particulier.

A. L'extension multifactorielle de Renhaw-Haberman

Le modèle de Lee-Carter, on l'a vu, ne prend en compte dans son approximation que le premier terme de la décomposition aux valeurs singulières. Or, si le taux d'inertie τ_1 n'est pas jugé suffisamment élevé ou si l'on constate la persistance d'une structure dans le graphe des résidus, il peut être intéressant de tenir compte de termes supplémentaires dans la SVD.

Booth *et al.* (2002) ont les premiers suggéré une version multifactorielle de Lee-Carter, idée reprise par Renshaw et Haberman (2003) qui ont ainsi proposé une extension à deux facteurs du modèle de Lee-Carter : la prise en compte de termes du second ordre devrait en effet permettre d'être mieux à même de capter des effets propres à l'âge. En notant à nouveau ε_{xt} des résidus centrés, indépendants et homoscédastiques, le modèle devient alors :

$$\ln \hat{\mu}_{xt} = \alpha_x + \beta_{x,1}\kappa_{t,1} + \beta_{x,2}\kappa_{t,2} + \varepsilon_{xt}$$

Le choix d'un modèle bidimensionnel se justifie par le fait que la tendance temporelle sera cette fois résumée par deux paramètres, c'est-à-dire par une série temporelle bivariée.

La modélisation de séries temporelles multivariées étant beaucoup plus complexe que la modélisation d'une série univariée, s'arrêter au cas bivarié semble un compromis raisonnable, d'autant plus que l'approximation $\tau_1 + \tau_2 \sim 100\%$ est généralement assez bonne.

Comme pour le modèle de Lee-Carter, on définit des contraintes sur les paramètres afin de garantir l'identifiabilité du modèle :

$$\sum_{t=t_m}^{t_M} \kappa_{t,1} = \sum_{t=t_m}^{t_M} \kappa_{t,2} = 0$$

$$\sum_{x=x_m}^{x_M} \beta_{x,1} = \sum_{x=x_m}^{x_M} \beta_{x,2} = 1$$

L'estimation des paramètres s'effectue à nouveau par la SVD de la matrice Z, où les α_x sont comme précédemment estimés par la moyenne des logarithmes des $\hat{\mu}_{xt}$. On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\alpha}_x = \frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \ln \hat{\mu}_{xt} \\ \hat{\beta}_{x,1} = \frac{1}{\sum_{x=x_m}^{x_M} v_{1x}} v_1 \\ \hat{\kappa}_{t,1} = \sigma_1 \left(\sum_{x=x_m}^{x_M} v_{1x} \right) u_1 \\ \hat{\beta}_{x,2} = \frac{1}{\sum_{x=x_m}^{x_M} v_{2x}} v_2 \\ \hat{\kappa}_{t,2} = \sigma_2 \left(\sum_{x=x_m}^{x_M} v_{2x} \right) u_2 \end{array} \right.$$

Comme pour le modèle unidimensionnel de Lee-Carter, il est intéressant de réajuster les paramètres de façon à faire correspondre le nombre annuel total de décès observés et les estimations du modèle. Ce réajustement ne peut se faire que sur un seul paramètre et l'usage veut qu'on réajuste plutôt les $\hat{\kappa}_{t,1}$. Cette opération se fait comme précédemment et suppose de semblables transformations pour garantir le respect des contraintes d'identifiabilité.

B. Le modèle de Poisson

Le modèle de Lee-Carter (comme ses amendements) souffre d'une faiblesse importante de ses hypothèses de base, à savoir l'homoscédasticité des taux de mortalité. En effet, cette hypothèse très forte est peu réaliste étant donné qu'aux grands âges le manque d'observations entraîne une forte augmentation de la variance des taux de décès. Par ailleurs, le critère des moindres carrés, et donc la décomposition en valeurs singulières, utilisé dans les modèles de Lee-Carter n'est pas optimal s'il est mis en regard d'un critère de maximum de vraisemblance, qui permet l'utilisation de statistiques de mortalité qui ne soient pas sous forme rectangulaire.

Par conséquent, Brouhns *et al.* (2002) ont développé un modèle dit de Poisson, ou log-Poisson, qui ne modélise cette fois plus les taux instantanés de décès mais directement le nombre de décès, ce qui évite d'avoir à réestimer a posteriori les paramètres κ_t . Ce modèle, qui repose sur l'hypothèse de constance de μ_{xt} sur chaque carré du diagramme de Lexis, peut s'exprimer ainsi :

$$E(d_{xt}) = er_{xt} \mu_{xt}$$

$$\mu_{xt} = \exp \{ \alpha_x + \beta_x k_t \}$$

Il s'agit, essentiellement, d'une adaptation du modèle de Lee-Carter. Il en découle d'une part que les paramètres α_x , β_x et k_t peuvent s'interpréter de la même façon et que, de l'autre, des contraintes d'identifiabilité similaires sont nécessaires. On retiendra classiquement :

$$\sum_{t=t_m}^{t_M} k_t = 0$$

$$\sum_{x=x_m}^{x_M} \beta_x = 1$$

L'estimation des paramètres se fait par maximum de vraisemblance. On remarque que :

$$P(d_{xt} = d) = \frac{(er_{xt} \mu_{xt})^d}{d!} \exp\{-er_{xt} \mu_{xt}\}$$

Et on en déduit l'équation de vraisemblance suivante (à une constante près) :

$$\ln L(\alpha, \beta, k) = \sum_{x=x_m}^{x_M} \sum_{t=t_m}^{t_M} [d_{xt}(\alpha_x + \beta_x k_t) - er_{xt} \exp \{ \alpha_x + \beta_x k_t \}]$$

Du fait de la présence d'un terme non linéaire dans l'équation, il n'y a pas de solution analytique, mais on peut estimer des solutions numériques de α_x , β_x et k_t à l'aide, par exemple, de la méthode classique de Newton-Raphson.

$$k^{(i+1)} = k^{(i)} - \frac{F(k^{(i)})}{F'(k^{(i)})}$$

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_x^{(i+1)} = f \{ d_{xt}, er_{xt}, \hat{\alpha}_x^{(i)}, \hat{k}_t^{(i)}, \hat{\beta}_x^{(i)} \} \\ \hat{k}_t^{(i+1)} = g \{ d_{xt}, er_{xt}, \hat{\alpha}_x^{(i+1)}, \hat{k}_t^{(i)}, \hat{\beta}_x^{(i)} \} \\ \hat{\beta}_x^{(i+1)} = h \{ d_{xt}, er_{xt}, \hat{\alpha}_x^{(i+1)}, \hat{k}_t^{(i+1)}, \hat{\beta}_x^{(i)} \} \end{cases}$$

L'identifiabilité n'étant plus vérifiée, il convient de réajuster les différents paramètres :

$$\begin{cases} \hat{\alpha}_x \leftarrow \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \bar{k} \\ \hat{k}_t \leftarrow (\hat{k}_t - \bar{k}) \ddot{\beta} \\ \hat{\beta}_x \leftarrow \frac{\hat{\beta}_x}{\ddot{\beta}} \end{cases}$$

avec $\ddot{\beta}$ la somme des $\hat{\beta}_x$ initiaux

On obtient alors les valeurs des paramètres du modèle. On remarquera que, de manière générale, ces valeurs sont relativement proches des valeurs obtenues dans le modèle de Lee-Carter.

Il existe plusieurs façons de mesurer la qualité du modèle. La plus classique, quand on travaille sur un modèle de Poisson, est d'utiliser la déviance, qui peut s'exprimer dans le cas particulier du modèle choisi :

$$Dev(d, \hat{\delta}) = 2 \sum_{x=x_m}^{x_M} \sum_{t=t_m}^{t_M} \left[d_{xt} \ln \frac{d_{xt}}{\hat{\delta}_{xt}} \right]$$

$$\text{Où } \hat{\delta}_{xt} = \exp \{ \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t \}$$

La déviance permet alors d'exprimer le pseudo- R^2 dont une valeur proche de 1 induira une bonne adéquation du modèle aux données :

$$pseudo R^2 = 1 - \frac{Dev(d, \hat{\delta})}{Dev(d, \delta^*)}$$

Il convient alors d'introduire un modèle de base, usuellement spécifié par $\mu_{xt} = \exp\{\alpha_x\}$, d'où l'on peut déduire :

$$\delta_{xt}^* = er_{xt} \exp \{ \hat{\alpha}_x \}$$

On peut également s'intéresser à nouveau à la variance temporelle expliquée (à x donné), qui présente l'avantage de pouvoir être comparée aux résultats de Lee-Carter, dont elle est généralement très proche :

$$1 - \frac{\frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} [\hat{\mu}_{xt} - \exp \{ \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t \}]^2 - \left[\frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} (\hat{\mu}_{xt} - \exp \{ \hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t \}) \right]^2}{\frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} [\hat{\mu}_{xt}]^2 - \left[\frac{1}{t_M - t_m + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \hat{\mu}_{xt} \right]^2}$$

Il est également d'usage, une fois les paramètres du modèle estimés, de vérifier que les résidus ne comportent pas de structure.

Comme pour le modèle de Lee-Carter, plusieurs amendements à la méthode originale existent. Le pendant des moindres carrés pénalisés proposés pour lisser les paramètres du modèle se retrouve dans la méthode du maximum de vraisemblance pénalisé proposé par Eilers & Marx (1996), dont la log-vraisemblance pénalisée s'exprime (matriciellement, notations évidentes) :

$$\ln L_p(\alpha, \beta, k) = \ln L(\alpha, \beta, k) - \frac{1}{2} \alpha' P_\alpha \alpha - \frac{1}{2} \beta' P_\beta \beta - \frac{1}{2} k' P_k k$$

$$\text{où } P_X = \pi_X D_X' D_X$$

Toujours comme pour Lee-Carter, il est également possible d'introduire a priori une tendance linéaire temporelle. On exprime alors le taux de mortalité :

$$\mu_{xt} = \exp \{ \alpha_x + \beta_x (\varphi_1 + \varphi_2 t) \}$$

On rappellera que Renshaw & Haberman ont, de la même façon que pour le modèle de Lee-Carter, proposé une extension bilinéaire au modèle de Poisson. La spécification du taux de mortalité est alors :

$$\mu_{xt} = \exp \{ \alpha_x + \beta_{x,1} k_{t,1} + \beta_{x,2} k_{t,2} \}$$

L'identifiabilité se fait sous les mêmes contraintes additionnelles que pour l'extension à deux dimensions de Lee-Carter, et l'estimation des paramètres peut se faire comme précédemment de façon numérique à l'aide de l'algorithme de Newton-Raphson (système à 5 équations, dont les résultats seront réestimés pour satisfaire aux contraintes).

On remarquera que la prévision dans un tel modèle est beaucoup plus complexe du fait que les $k_{t,i}$ constituent des séries temporelles corrélées.

C. Le modèle log-linéaire

Les modèles précédents impliquant un grand nombre de paramètres, il peut être légitime de chercher à se tourner vers des modèles comprenant un nombre plus faible de paramètres et donc d'une plus grande flexibilité. C'est l'exemple du modèle log-linéaire qui introduit la fonction logit. Ce modèle peut s'écrire, en supposant les résidus iid :

$$\text{logit} \{q_{xt}\} = \alpha_x + \beta_x t + \varepsilon_{xt}$$

Où la fonction logit s'explicite :

$$\text{logit} \{x\} = \ln \left\{ \frac{x}{1-x} \right\}$$

On peut remarquer cependant que, pour des taux de mortalité faibles, $\ln\{\mu_{xt}\} \approx \text{logit}\{q_{xt}\}$. Cette approximation n'est plus du tout vérifiée aux âges élevés.

Le nombre de paramètres du modèle est égal à :

$$N = 2(x_M - x_m + 1)$$

Contre un nombre de paramètres dans le modèle de Lee-Carter égal à :

$$N = 2(x_M - x_m + 1) + (t_M - t_m + 1)$$

L'estimation des paramètres du modèle se fait par ailleurs de façon explicite à l'aide des formules suivantes (il ne s'agit de fait de rien d'autre que d'une régression linéaire sur le temps) :

$$\hat{\beta}_x = \frac{\text{cov}(t, \text{logit}\{q_{xt}\})}{\text{var}(t)}$$

$$\hat{\alpha}_x = \overline{\text{logit}\{q_{xt}\}} - \hat{\beta}_x \bar{t}$$

On peut remarquer d'autre part de façon empirique que les séries (α_x) et (β_x) sont fortement corrélées et il est alors légitime, pour diminuer encore la paramétrisation du modèle, de poser :

$$\alpha_x = a\beta_x + b$$

Le modèle devient alors :

$$\text{logit}\{q_{xt}\} = (a + t)\beta_x + b + \varepsilon_{xt}$$

L'estimation des paramètres doit se faire cette fois de façon numérique, mais le modèle a été réduit à un nombre bien plus faible de paramètres :

$$N = 2 + x_M - x_m + 1$$

D. Le modèle logistique décalé

Un autre modèle usuel est le modèle logistique décalé proposé par Bongaart (2004) et qui généralise le modèle de Makeham : $\mu_x = \alpha \exp\{\beta x\} + \gamma$, lequel surestimait les taux de décès aux âges élevés observés en pratique. Le modèle de Bongaart peut donc s'écrire :

$$\mu_{xt} = \frac{\alpha_t \exp\{\beta x\}}{1 + \alpha_t \exp\{\beta x\}} + \gamma_t$$

Et peut se réécrire à l'aide de la fonction logit :

$$\text{logit}\{\mu_{xt} - \gamma_t\} = \beta x + \ln\{\alpha_t\}$$

L'un des avantages de cette méthode sur les modèles de Lee-Carter et de Poisson est que l'extrapolation de la dimension temporelle se fait désormais sur les deux paramètres α_t et γ_t et non plus sur le seul κ_t .

E. Les modèles avec sauts

Une observation commune aux modèles présentés ci-dessus est qu'ils ne prennent pas en compte les sauts dans l'évolution de la mortalité. Même si certains d'entre eux reconnaissent que les chocs à court terme peuvent provoquer des discontinuités, les modèles mis en œuvre ne prennent toutefois pas en compte explicitement les effets de ces chocs.

Par exemple, Lee et Carter (1992) ont traité la pandémie de grippe de 1918 comme un événement exceptionnel et ont calibré un modèle annulant son influence. Li et Chan (2007) ont considéré les pandémies comme des événements non répétitifs et implémenté un modèle qui en détectant ces valeurs « aberrantes » ajuste le « vrai » modèle sous-jacent.

Néanmoins quelques publications considèrent les sauts de mortalité. Pour rendre compte des sauts de mortalité, Biffis (2005) utilise une caractérisation affine pour la diffusion de sauts dans l'analyse des risques et valeur de marché des contrats d'assurance vie en temps continu. Luciano et Vigna (2005) constatent que le processus de saut rend mieux compte de l'évolution de la mortalité qu'un seul élément de diffusion dans la modélisation stochastique de la mortalité des populations italiennes. Cox, Lin et Wang (2006) aboutissent à la même conclusion de la meilleure qualité des modèles avec sauts en combinant un mouvement Brownien et un Poisson Composé.

La modélisation envisagée dans ces études rend cependant les effets des chocs permanents, bien qu'à l'analyse les sauts de mortalité soient causés par des événements de court terme et ont des effets transitoires sur l'évolution de la mortalité (Chen and al.). Partant de ce constat, Hua Chen and Samuel H. Cox ont donc proposé en 2009 d'incorporer dans le modèle de Lee Carter un processus qui restreint les effets des sauts à une période.

Leur modèle peut être résumé comme suit : soit N_t le nombre de sauts pendant l'année t . Ils supposent qu'il n'y a qu'un seul saut par année avec la probabilité p . Ainsi,

$$N = \begin{cases} 1, & \text{avec la probabilité } p \\ 0 & \text{avec la probabilité } 1 - p \end{cases}$$

En supposant que la variable Y , rendant compte de l'amplitude des sauts, est i.i.d. et normale de moyenne m et d'écart type s et indépendant de la variable de fréquence N , ils posent en notant κ_t en absence de saut :

$$\tilde{\kappa}_{t+1} = \tilde{\kappa}_t + \mu + \sigma Z_{t+1}$$

Où μ et σ sont des constants et Z_t une variable aléatoire normal standard, indépendant de N et Y .

En cas de saut lors de l'année $t+1$, c'est-à-dire $N_{t+1} = 1$, le saut Y_{t+1} transforme le facteur κ_t de κ_t' en $\kappa_{t+1}' + Y_{t+1}$, soit :

$$\kappa_{t+1} = \tilde{\kappa}_{t+1} + Y_{t+1}$$

En absence de saut, on obtient ainsi :

$$\kappa_{t+1} = \tilde{\kappa}_{t+1}$$

En combinant les deux équations ci-dessus, on obtient :

$$\kappa_{t+1} = \tilde{\kappa}_{t+1} + Y_{t+1}N_{t+1}$$

La dynamique du paramètre κ_t peut donc être complètement définie par :

$$\begin{cases} \tilde{\kappa}_{t+1} = \tilde{\kappa}_t + \mu + \sigma Z_{t+1} \\ \kappa_{t+1} = \tilde{\kappa}_{t+1} + Y_{t+1}N_{t+1} \end{cases}$$

Soit en définitif :

$$\kappa_{t+1} = \kappa_t + \mu + \sigma Z_{t+1} + Y_{t+1}N_{t+1} - Y_t N_t$$

Au final, si Hainaut et Devolder (2008) proposeront la modélisation du taux de mortalité par un processus de Levy subordonné, ce sont Chou, Hong et I-Chien (2010) qui vont à notre connaissance explorer la modélisation de la composante temporelle issue du modèle de Lee Carter par des processus de Levy.

Partant du constat que l'indice de mortalité n'est pas distribué selon une loi normale, il propose de modéliser la différence première de la composante temporelle du modèle de Lee Carter classique par un processus de Levy à activité infinie. Ainsi, la dynamique des κ_t devient :

$$\kappa_t - \kappa_{t-1} = L_1$$

Où L_1 est un processus de Levy à une échelle de temps unitaire. Ils adopteront dans leur étude deux types de distributions de Levy : les processus hyperboliques généralisés dont le processus Normal Inverse Gaussien et le processus Variance Gamma en sont des particularités et les processus stables tempérés.

En appliquant leur modèle à la base de données des compagnies d'assurance vie de Taiwan et par la suite à la population d'un ensemble de pays dans une deuxième étude, ils constateront que le modèle proposé fournit une meilleure prédiction que ceux du modèle de Lee-Carter classique avec une modélisation des κ_t par un ARIMA (p,d,q) et du modèle proposé par le Hainaut et Devolder (2008).

A la suite de ces derniers auteurs, la présente étude explore, en plus des processus Variance Gamma et Normal Inverse Gaussien, la modélisation de la composante temporelle κ_t issue du modèle de Lee carter par des processus de Levy à activité finie du type des modèles de Merton et Kou, essentiellement utilisé actuellement pour la modélisation de la dynamique des rendements d'actifs.

III. APPLICATION DU MODELE DE LEE CARTER A LA POPULATION FRANCAISE

A. Les données

Les données historiques utilisées pour cette étude proviennent de la base de données de l'HMD : Human Mortality Database (www.mortality.org). Nous disposons ainsi, pour chaque année de la période 1816-2007 et pour chaque âge (jusqu'à « 110 ans et plus »), de la donnée des taux centraux de mortalité et des décès observés, desquels nous pouvions déduire l'exposition au risque.

Pour notre étude, les données utilisées portent sur la population française (hommes et femmes) de la tranche d'âge de 0 ans à 100 ans pour la période allant de 1950 à 2000.

Le graphique ci-dessous (figure 1) donne l'évolution des taux bruts de mortalité de la population féminine selon l'âge et les années sur la période d'étude (1950-2000) :

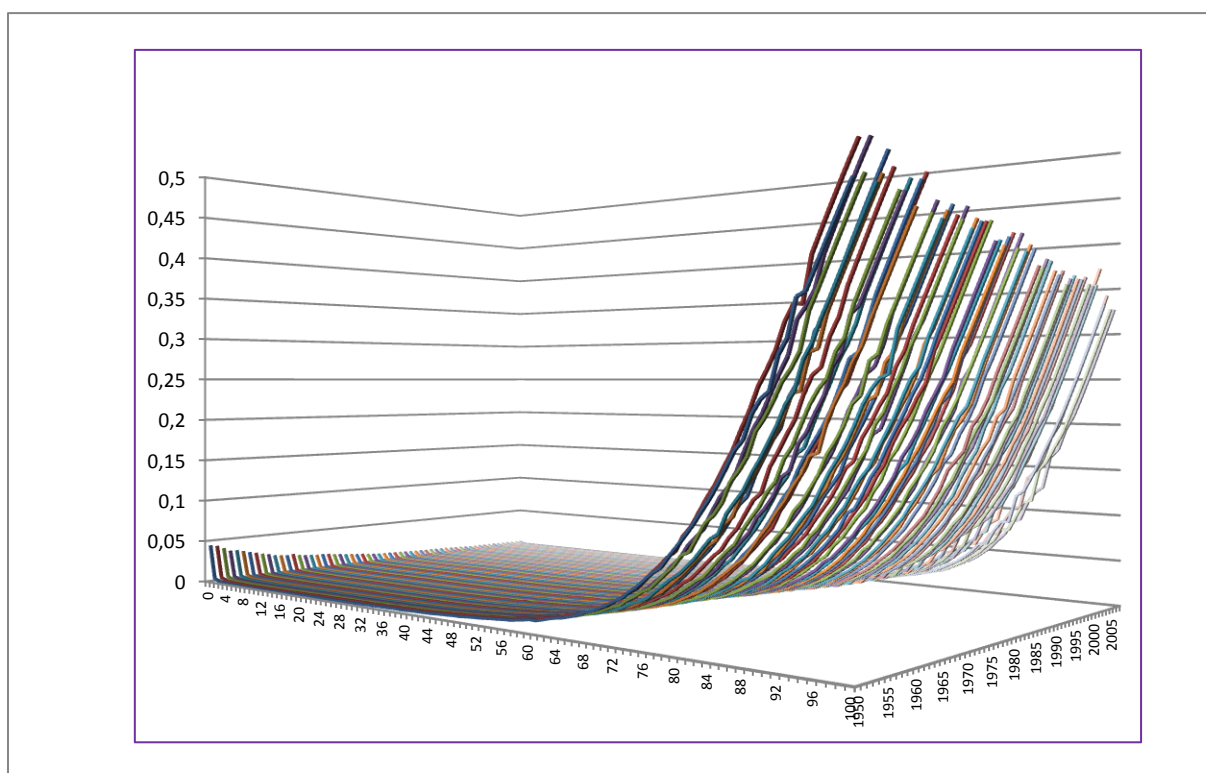


Figure 1 : Evolution des taux bruts de mortalité des femmes entre 1950 et 2007

On observe avec ce graphique, de même qu'avec celui des hommes présenté en annexe au rapport, les deux propriétés de l'évolution de la mortalité :

- une augmentation du taux de mortalité avec l'âge, après un taux relativement élevé pour les nouveaux nés,

- une décroissance du taux de mortalité et donc une augmentation de la longévité au cours du temps aussi bien pour la mortalité infantile que pour les âges les plus élevés.

Une compagnie d'assurance qui utiliserait une table du moment, même la plus récente, pour évaluer ses risques et engagements commettrait donc une erreur d'évaluation pouvant entraîner une perte substantielle pour la société. C'est pourquoi, il est essentiel d'utiliser des tables de mortalité prospectives qui incorporent l'évolution présumée de la durée de vie.

Les différents traitements présentés dans cette étude ont été pour la plupart effectués avec le logiciel R.

Nous avons commencé par implémenter une fonction *extract* qui prend en entrée les années et les âges limites à considérer ainsi que les données de HMD et sort, sous forme matricielle, les quantités d'intérêt : matrice des taux centraux de mortalité, matrice d'exposition au risque et matrice des décès observés. Cette mise en forme est un préliminaire indispensable à la suite de l'étude. L'intérêt de cette fonction est de permettre de fixer et faire varier la période d'observation en cas de besoin et d'examiner la validité des résultats obtenus.

B. La mise en œuvre du modèle

1. Estimation des paramètres

La première étape a consisté à mettre en œuvre une fonction (fonction Lee Carter ou LC) permettant d'extraire les données nécessaires à l'estimation des paramètres d'intérêt, à savoir les coefficients α_x , β_x et κ_t .

La fonction Lee-Carter en elle-même se décompose en plusieurs étapes :

- Extraction des quantités d'intérêt à l'aide de la fonction *extract*
- Estimation des α_x comme la moyenne des taux de mortalité logarithmiques
- Estimation des β_x et κ_t par décomposition en valeurs singulières (1^{er} ordre)
- Réajustement des κ_t à l'aide de l'exposition au risque en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson
- Transformation des α_x et κ_t pour respecter les contraintes d'identifiabilité
- Calcul du taux d'inertie expliqué
- Calcul de la variance temporelle expliquée
- Graphe des résidus

2. Analyse des résultats

Les résultats de cette fonction appliquée aux populations françaises entre 1950 et 2000 apparaissent relativement classiques.

A l'examen de la courbe des α_x (figure 2), on observe une courbe assez élevée pour les nouveau-nés (mortalité infantile) mais qui décroît ensuite très rapidement pour croître quasi régulièrement avec l'âge.

On remarquera en particulier la « bosse-accident » qui rend compte d'un pic de mortalité chez les 18-25 ans. Ce pic est beaucoup plus marqué chez les hommes et pourrait correspondre à des morts violentes de type suicides ou accidents de la route pour cette tranche d'âge caractérisée par une tendance à la prise de risques.

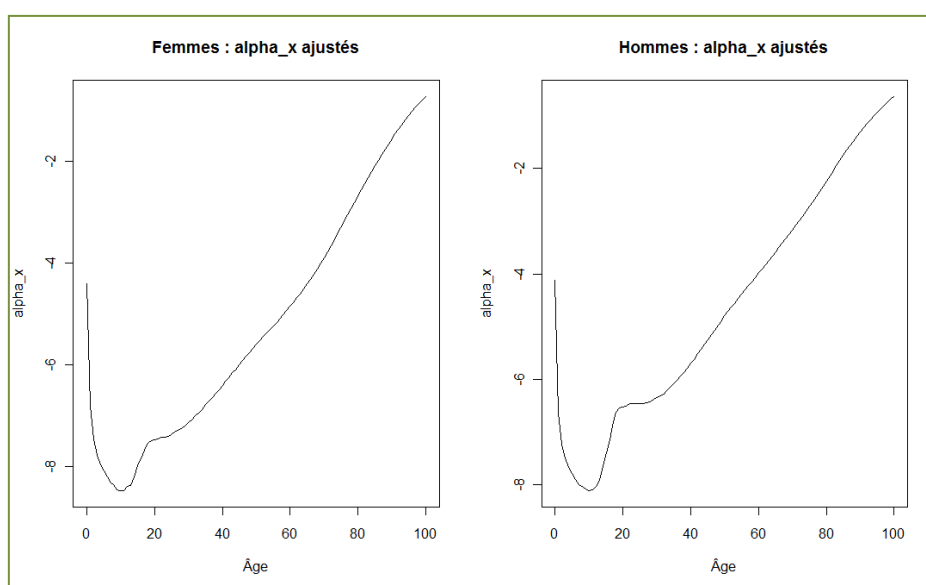


Figure 1 : Courbe d'évolution des α_x

La courbe des κ_t quant à elle (figure 3), qu'on pourrait très grossièrement approcher par une droite décroissante, rend compte du déclin de la mortalité avec le temps. Un phénomène bien connu qui traduit une augmentation de l'espérance de vie et est imputable à de nombreux facteurs, parmi lesquels on pourrait citer les progrès de la médecine, des conditions de vie améliorées, une meilleure hygiène de vie, etc. Il faut toutefois souligner que le modèle ne cherche pas ici à justifier la raison de ce déclin de la mortalité. On se contentera dans le cadre de cette étude d'en extraire la tendance temporelle.

On observe en particulier que jusqu'au début des années 1970, la tendance est assez chaotique, tout particulièrement chez les hommes, mais qu'ensuite elle devient beaucoup plus lisse. Chez les hommes, à nouveau de manière plus marquée, une rupture de pente correspondant à un déclin plus rapide de la mortalité s'observe également en 1970.

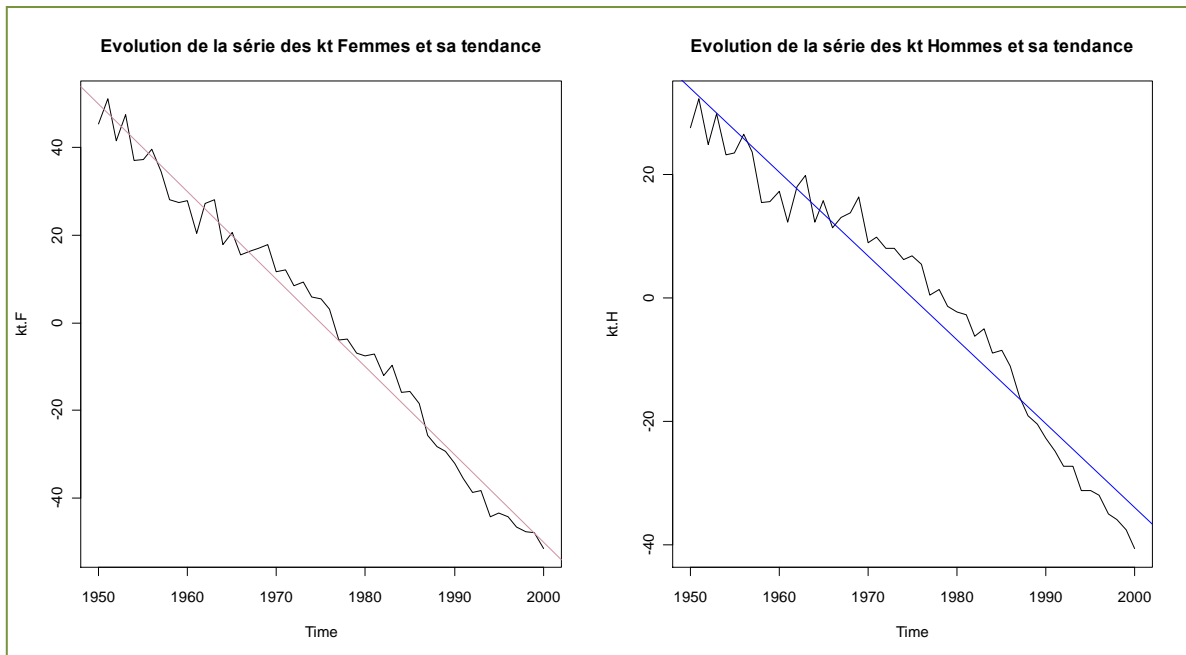


Figure 3 : Courbe d'évolution des κ_t

Enfin, la courbe des β_x (figure 4) met en avant le fait que ce déclin de la mortalité est inhomogène selon les âges. En effet, on peut clairement observer que ce recul est très marqué aux très jeunes âges tandis qu'il est très faible aux âges avancés. On remarquera en particulier que la baisse de la mortalité est quasiment nulle pour la population de 20 ans, plus particulièrement chez les jeunes hommes.

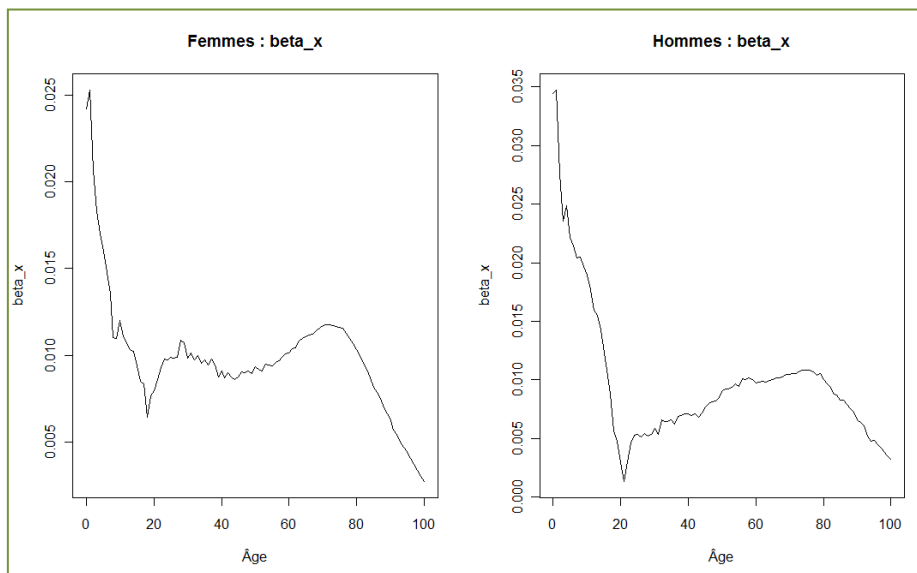


Figure 4 : Courbe d'évolution des β_x selon l'âge

3. Validation du modèle

Pour mesurer la fiabilité du modèle, on pourrait commencer par regarder le taux d'inertie :

τ_{femme}	τ_{homme}
0,935	0,890

Tableau 1 : Les taux d'inertie

Ces taux, comme c'est souvent le cas dans un modèle de Lee-Carter, sont donc très élevés, et *a priori* l'approximation de Lee-Carter qui a été faite semble donc raisonnable.

Pour soutenir cette première observation sur la qualité de l'ajustement, il convient de regarder le graphe de la variance temporelle expliquée en fonction de l'âge (figure 5).

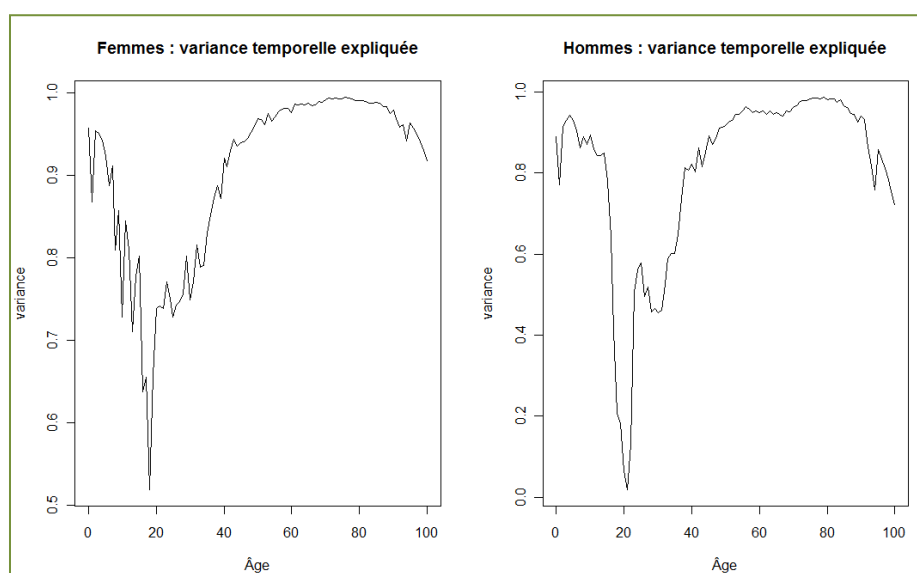


Figure 5 : La variance expliquée selon l'âge

Pour les femmes, la part de variance expliquée reste toujours supérieure à 50% et est même assez souvent supérieure à 80%. Elle se détériore toutefois fortement entre 15 et 20 ans pour n'atteindre un niveau satisfaisant à nouveau que vers 40 ans.

Pour les hommes, la qualité de l'ajustement est globalement moins bonne. Ce qui est cohérent avec le taux d'inertie relativement plus faible. En particulier, autour de 20 ans, la variance expliquée chez les hommes est presque nulle. Ainsi, le modèle semble inapte à rendre compte de manière satisfaisante de la « bosse-accident. »

On fera également la remarque que, pour aussi bien les hommes que les femmes, la qualité de l'ajustement se détériore aussi aux grands âges.

Concernant l'analyse des résidus (figure 6 pour les hommes, annexe pour les femmes) on peut observer, pour certains âges, la présence d'une structure qui trahit les limites de la modélisation à certains âges. Cette structure est particulièrement marquée à 20 ans, ce qui est cohérent avec les précédentes observations. Une autre structure, moins forte, semble apparaître à 60 ans.

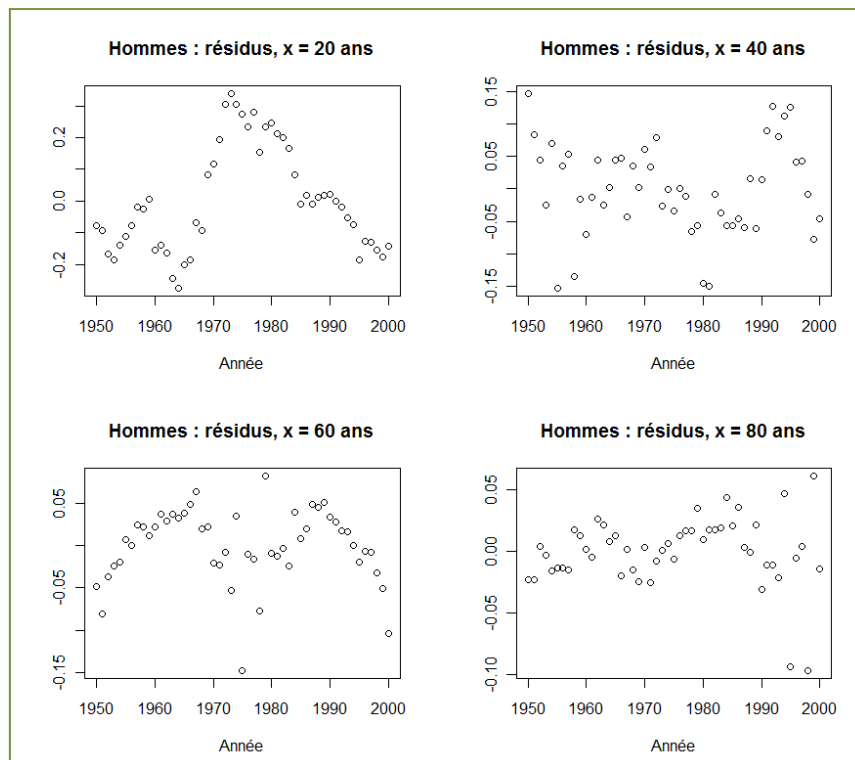


Figure 6 : Structure des résidus selon l'âge (Hommes)

Au total, le modèle de Lee-Carter semble assez bien coller aux données et explique en grande partie la mortalité observée. Toutefois, les limites du modèle sont perceptibles, tout particulièrement au niveau de la « bosse-accident, » et il est alors judicieux de raffiner le modèle en considérant l'extension proposée par Renshaw-Haberman pour mieux tenir compte d'effets de l'âge du second ordre.

C. Une amélioration du modèle de Lee Carter : le modèle Renshaw-Haberman

1. Estimation des paramètres

L'extension de la fonction de Lee-Carter implémentée précédemment à la généralisation du modèle de Renshaw-Haberman ne pose pas de problèmes particuliers, une fois assimilés les grands principes du modèle. Il s'agit

essentiellement de prolonger la décomposition aux valeurs singulières à un ordre supplémentaire.

La fonction Renshaw-Haberman que nous avons implémenté se décompose ainsi :

- Extraction des quantités d'intérêt à l'aide de la fonction *extract*
- Estimation des α_x comme la moyenne des taux de mortalité logarithmiques
- Estimation des $\beta_{x,1}$, $\beta_{x,2}$, $\kappa_{t,1}$ et $\kappa_{t,2}$ par décomposition en valeurs singulières (1^{er} et 2^{ème} ordres)
- Réajustement des $\kappa_{t,1}$ à l'aide de l'exposition au risque en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson
- Transformation des α_x et $\kappa_{t,1}$ pour respecter les contraintes d'identifiabilité
- Calcul des taux d'inertie expliqués
- Calcul de la variance temporelle expliquée
- Graphe des résidus

2. Qualité du modèle et analyse des résultats

Nous avons à nouveau appliqué la fonction aux populations françaises sur la période 1950-2000 et nous trouvons des résultats une fois de plus en accord avec les résultats habituellement observés. Les courbes des α_x , $\beta_{x,1}$, $\kappa_{t,1}$ sont évidemment identiques à celles reproduites aux figures 2, 3 et 4.

L'étude du graphe des $\beta_{x,2}$ (figure 7) est en revanche plus intéressante : on y voit clairement que l'ajout d'une nouvelle composante a un impact très fort autour de 20 ans, donc au niveau de la « bosse-accident » où justement le modèle simple de Lee-Carter était le plus en défaut. On peut donc s'attendre à ce que ce modèle raffiné explique une plus grande part de la variance au niveau de la « bosse-accident. » Ceci semble particulièrement vrai pour les femmes.

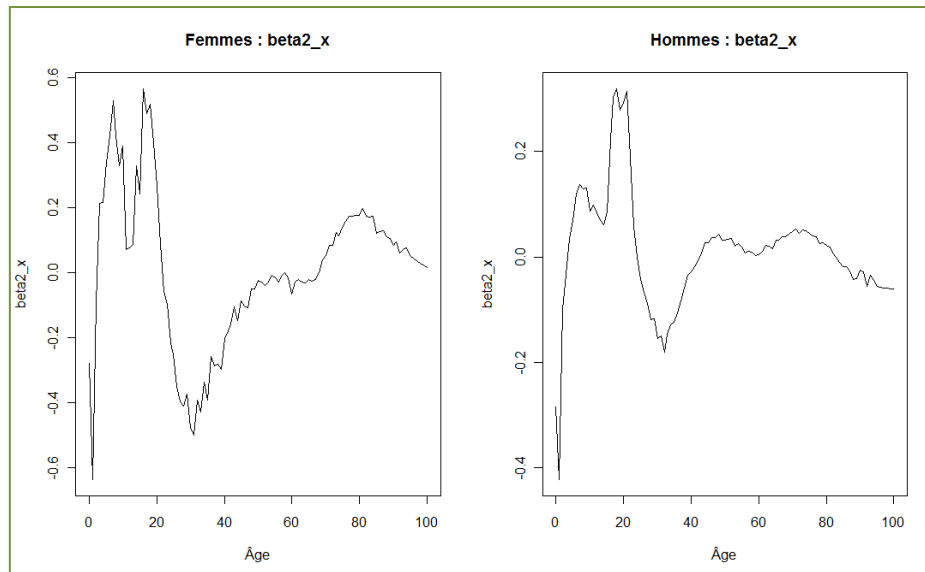


Figure 7 : Evolution des $\beta_{x,2}$ selon l'âge

L'étude des $\kappa_{t,2}$ (figure 8), quant à elle, est relativement complexe avec une structure en cloche. On y lit que les raffinements de Renshaw-Haberman permettent de mettre en avant une mortalité atypique sur la période 1965-1990, tout particulièrement chez les 15-30 ans et chez les hommes. Par rapport aux $\kappa_{t,1}$ qui suivent clairement une tendance, il est difficile de prévoir l'évolution probable des $\kappa_{t,2}$ dans l'avenir.

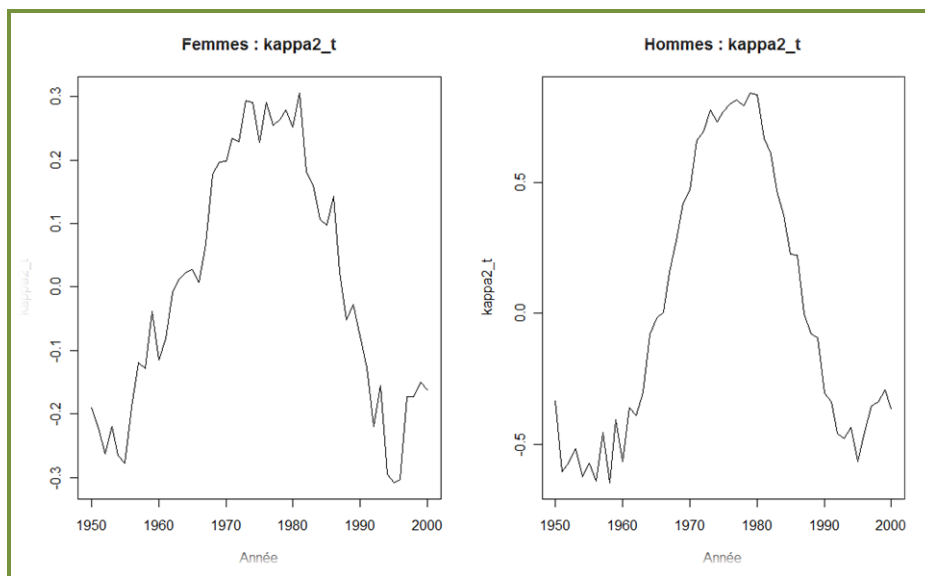


Figure 8 : Evolution des $\kappa_{t,2}$

3. Qualité du modèle

Il convient toutefois de garder à l'esprit que l'importance de ce nouveau terme rajouté à la mortalité est très faible comparé au premier. Le niveau des taux d'inerties expliqués suffit à s'en convaincre. Ainsi, le modèle de Renshaw-Haberman permet plus de finesse dans les effets par âge, mais il ne bouleverse pas le modèle de Lee-Carter du point de vue de l'explication globale.

	Femmes	Hommes
τ_1	0,935	0,890
τ_2	0,020	0,048
$\tau_1 + \tau_2$	0,955	0,938

Tableau 2 : Taux d'inertie du modèle à deux facteurs

Si l'on regarde le graphe de la variance temporelle expliquée (figure 9), que l'on comparera avec profit à celui reproduit à la figure 5, on se rend compte que la part de variance expliquée s'est nettement améliorée avec l'ajout du second terme de la décomposition aux valeurs singulières. Ainsi, autour de 20 ans, alors que cette part n'était que de 50% pour les femmes et parfois inférieure à 10% pour les hommes, elle reste désormais au-dessus de 60% pour les femmes et de 50% pour les hommes. Jusqu'à 40 ans, on observe ainsi une évolution positive très sensible de la variance expliquée. Toutefois, cette évolution est moins marquée pour les âges plus avancés où le modèle unidimensionnel de Lee-Carter captait déjà l'essentiel des effets.

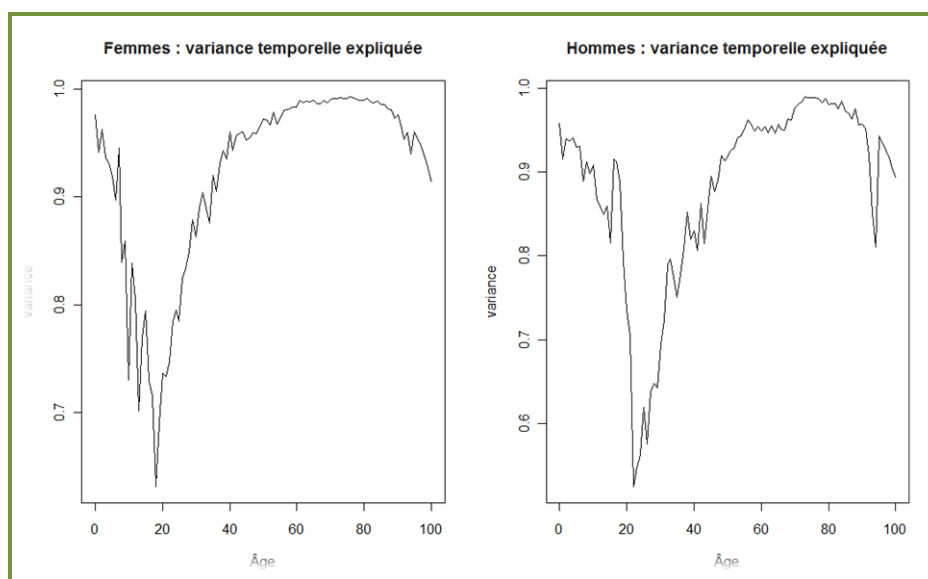


Figure 9 : Courbe de la variance expliquée du modèle de Renshaw-Haberman

Cette amélioration se retrouve sans surprise dans les graphes des résidus. En observant à nouveau ces graphes pour les hommes de 20, 40, 60 et 80 ans (figure 10), on se rend compte que la structure de résidus claire sous Lee-Carter à 20 ans s'est nettement atténuée sous Renshaw-Haberman. En revanche, la structure qui se dessine à 60 ans reste pratiquement inchangée.

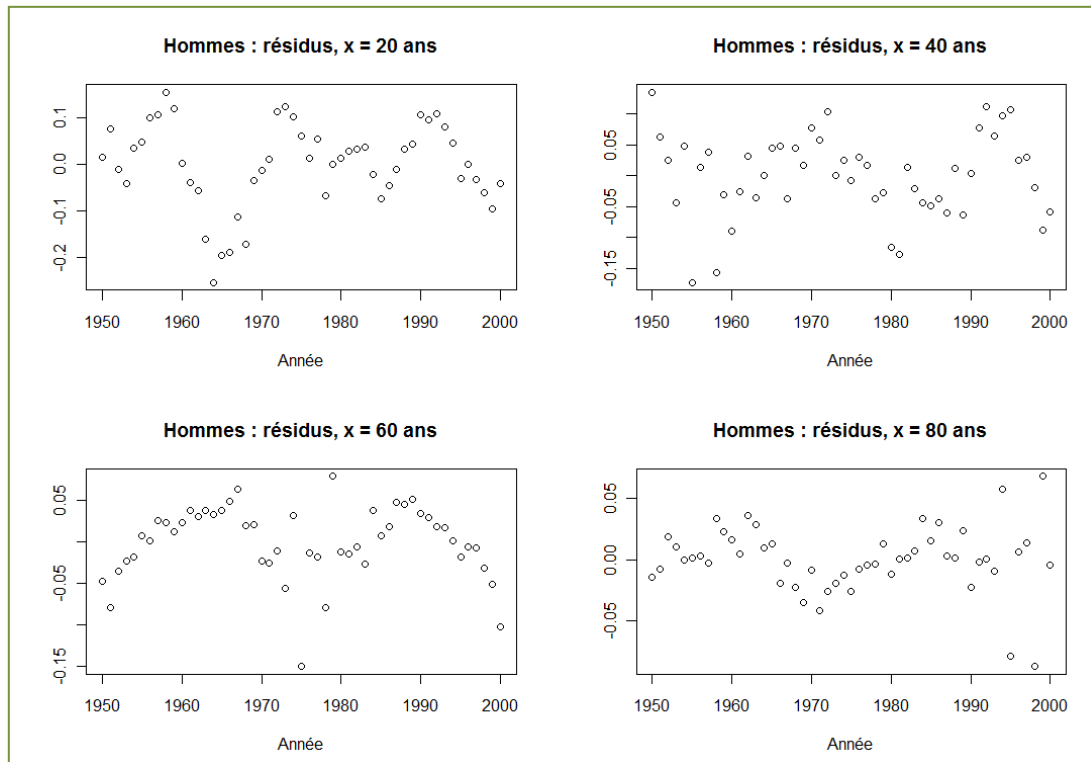


Figure 10 : Graphes des résidus du modèle de Renshaw-Haberman (Hommes)

Le modèle de Renshaw-Haberman bidimensionnel n'expliquant que 96% (respectivement 94%) de l'inertie pour les femmes (respectivement les hommes), on peut penser que de telles structures persistantes disparaîtraient avec l'ajout de nouveaux termes correspondant à des ordres supplémentaires dans la décomposition aux valeurs singulières. Toutefois, le gain d'inertie est à chaque composante plus faible, et la seconde composante étant déjà marginale, il n'apparaît pas nécessaire d'aller au-delà du second ordre dans cette étude.

D. Une modélisation classique des κ_t : le modèle ARIMA(p,d,q)

Dans le modèle de Lee-Carter, les prédictions de la mortalité future peuvent se résumer aux prédictions de la série temporelle des κ_t , ce qui est une des grandes forces du modèle. L'approche la plus standard consiste à effectuer une modélisation de la série sous forme ARIMA (AutoRegressive-Integrated-Moving-Average).

Avec la notation classique où L est l'opérateur retard, on dit que κ_t est un processus ARIMA(p,d,q) si :

$$\left(1 - \sum_{i=1}^p a_i L^i\right) (1 - L^d) \kappa_t = \left(1 + \sum_{j=1}^q \theta_j L^j\right) \varepsilon_t$$

Où les ε_t sont des termes d'erreurs i.i.d. qui suivent une loi normale centrée.

Les paramètres p , d et q désignent respectivement les paramètres autorégressifs, d'intégration et moyenne mobile.

Pour la modélisation des κ_t , il a été mise en œuvre la méthodologie de Box et Jenkins comme suit :

- Identification du modèle
- Estimation des paramètres
- Validation du modèle
- Prévision

1. Identification du modèle

Avant toute démarche de modélisation, il nous a semblé nécessaire de vérifier la stationnarité de notre série des κ_t . En effet, les caractéristiques stochastiques d'une série chronologique ne peuvent être identifiées clairement que si elle est stationnaire. Cette étude de la stationnarité a été effectuée à partir de l'examen des autocorrélogrammes et du test statistique de Dickey-Fuller augmenté.

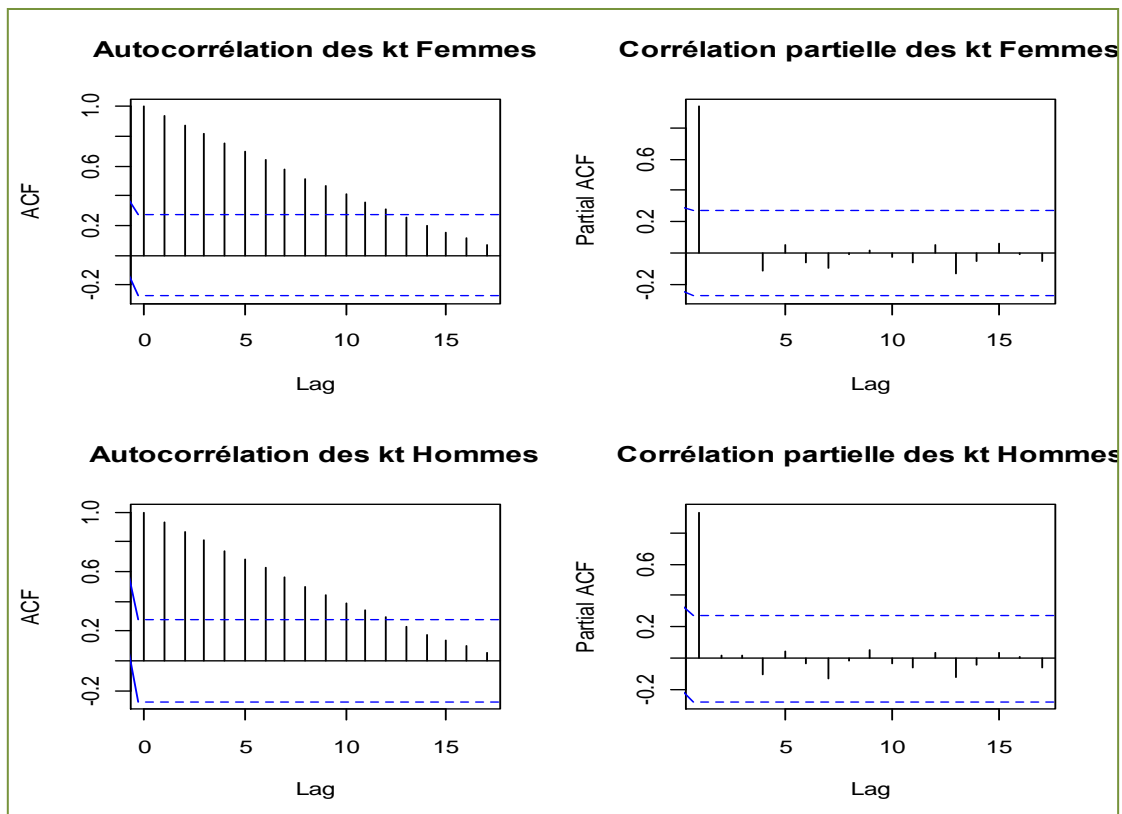


Figure 11 : Autocorrélogrammes des séries κ_t

Le premier graphique des autocorrélogrammes (figure 11) donne le coefficient entre deux éléments de la série en fonction du délai qui les sépare et le second élimine l'influence des variables intermédiaires.

A l'analyse, on observe une décroissance linéaire (et donc non exponentielle) des éléments de l'autocorrélogramme simple et un seul terme de l'autocorrélogramme partiel est significativement différent de zéro. On peut alors en conclure que nos séries ne sont pas stationnaires. Cette non stationnarité est confirmée par le test de Dickey-Fuller.

Cette conclusion est d'ailleurs suggérée par la représentation graphique des κ_t (figure 3) qui laissent apparaître une tendance linéaire (plus évidente pour les femmes) et donc une série de type :

$$\kappa_t = a_0 + a_1 t + e_t \text{ où } e_t \text{ contiendrait éventuellement un retard.}$$

Une telle série (processus Trend Stationary) est non stationnaire car $E[\kappa_t]$ dépend du temps. Après estimation des coefficients par la méthode des moindres carrés ordinaires (MCO), le processus peut être stationnarisé en retranchant de la valeur des κ_t la valeur estimée $\hat{a}_0 + \hat{a}_1 t$. Avec une tendance linéaire, l'effet d'un choc est donc transitoire, la série retrouvant son mouvement de long terme, c'est-à-dire la droite de tendance.

Notre série sera donc modélisée sous la spécification ci-dessus avec e_t , un processus ARMA (p,d,q).

L'estimation de la tendance linéaire par la méthode des moindres carrés ordinaires indique que les coefficients sont tous significatifs et le R^2 est de plus de 95% pour nos deux sous-populations.

L'examen des corrélogrammes et le test de Dickey-Fuller augmenté concluent que la série des e_t n'est pas stationnaire mais que la série différenciée l'est.

L'autocorrélogramme simple et l'autocorrélogramme partiel de la série des e_t différenciée peuvent être consultés à la figure 12 :

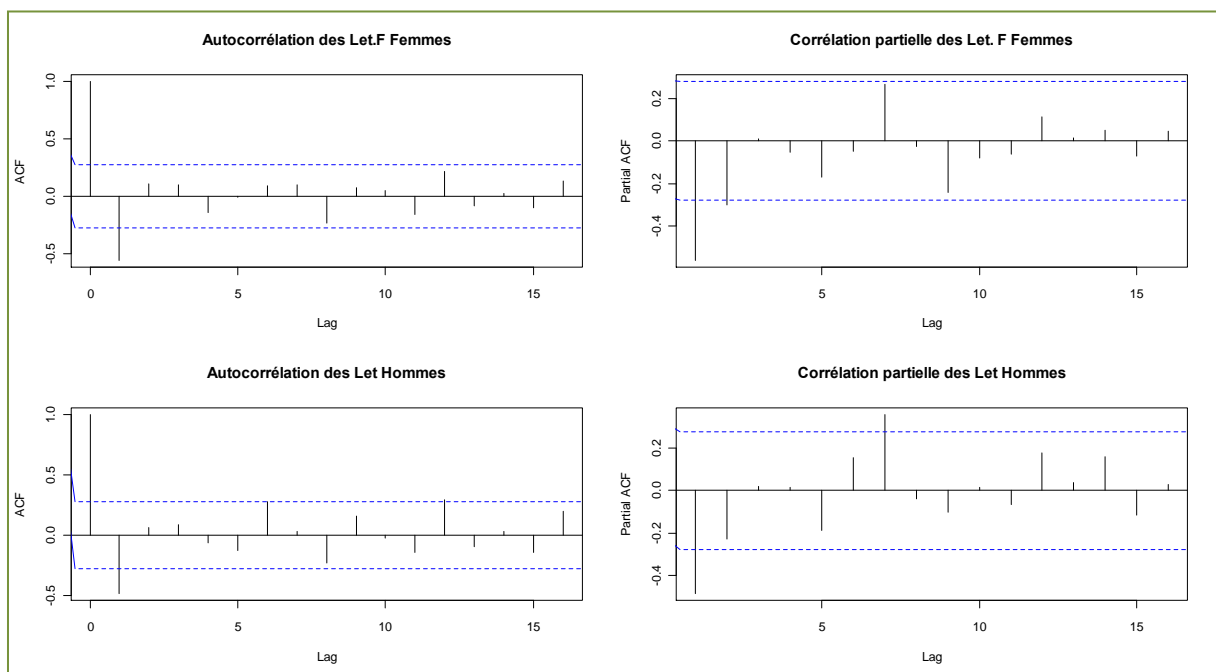


Figure 12 : Autocorrélogrammes de la série différenciée des e_t

Seuls les deux premiers termes de l'autocorrélogramme et le premier terme de l'autocorrélogramme partiel semblent significativement différents de 0. Ces caractéristiques suggèrent un modèle ARIMA d'ordre (1,1,2).

Cependant, pour confirmer notre présomption, nous avons utilisé en appoint la fonction *auto.arima* du package *forecast* de R. Cette fonction procède à une sélection automatique en confrontant plusieurs modèles. Après mise en œuvre de la procédure de cette fonction, R nous conseille un modèle ARIMA(1,1,1) pour la série de la population féminine et un modèle ARIMA(0,1,1) pour la population masculine. Les AIC de ces modèles et ceux des modèles initialement présumés sont résumés dans le tableau 3 ci-après :

	Femmes		Hommes	
	Modèle Initial	Modèle R	Modèle Initial	Modèle R
Type	ARIMA(1,1,2)	ARIMA(1,1,1)	ARIMA(1,1,2)	ARIMA(0,1,1)
AIC	261,4	259,4	250,5	247,9

Tableau 3 : Comparaison des AIC

Nous décidons donc de choisir les modèles proposés par la sélection automatique.

2. Estimation des paramètres

L'estimation des paramètres de notre modèle par la fonction *arima* de la library *stats* de R nous donne les résultats suivants :

Call: (Femmes) arima(x = et.F, order = c(1, 1, 1)) Coefficients: ar1 ma1 -0.3244 -0.4449 s.e. 0.2034 0.1892	Call: (Hommes) arima(x = et.H, order = c(0, 1, 1)) Coefficients: ma1 -0.5237 s.e. 0.1004
--	---

3. Validation du modèle

En vue de valider la compatibilité du modèle, plusieurs tests d'adéquation ont été effectués sur les résidus : absence d'autocorrélation, normalité, homoscedasticité, moyenne nulle.

Le test de Box-Pierce nous donne ainsi :

Box-Pierce test (Femmes) data: fit2.F\$residuals X-squared = 0.0081, df = 1, p-value = 0.9285	Box-Pierce test (Hommes) data: fit2.H\$residuals X-squared = 0.3073, df = 1, p-value = 0.5793
---	---

On peut donc en conclure que les résidus ne sont pas corrélés.

La représentation graphique des résidus avec la fonction *qqnorm* nous donne :

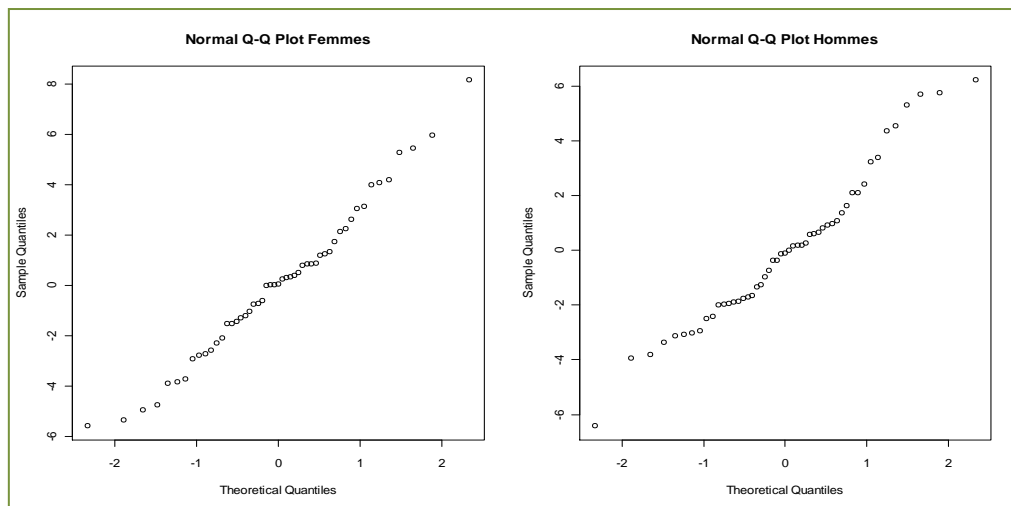


Figure 13 : Représentation du Q-Q Normal plot des résidus

On peut constater que les points ont tendance à s'aligner le long d'une droite : il n'y a pas d'écart significatif, aucun point ne se démarque des autres. Le test de Jarque et Bera ne permettant pas non plus de conclure à la non normalité des erreurs, on peut ainsi accepter l'hypothèse de normalité des résidus.

Avec la fonction R *t.test* (qui fait un t-test), on obtient pour l'hypothèse de nullité de la moyenne des résidus les résultats ci-après :

<p>One Sample t-test (Femmes)</p> <p>data: residuals(fit2.F)</p> <p>t = 0.1931, df = 50, p-value = 0.8477</p> <p>alternative hypothesis: true mean is not equal to 0</p> <p>95 percent confidence interval:</p> <p>-0.7704186 0.9342781</p> <p>sample estimates:</p> <p>mean of x</p> <p>0.08192976</p>	<p>One Sample t-test (Hommes)</p> <p>data: residuals(fit2.H)</p> <p>t = -0.0074, df = 50, p-value = 0.9941</p> <p>alternative hypothesis: true mean is not equal to 0</p> <p>95 percent confidence interval:</p> <p>-0.7803608 0.7746510</p> <p>sample estimates:</p> <p>mean of x</p> <p>-0.002854892</p>
---	--

On peut ainsi accepter l'hypothèse nulle que la moyenne est nulle avec une probabilité de 85% pour la série des femmes et une probabilité de plus de 99% pour celle des hommes.

A la lumière de ces résultats, on peut alors effectuer des prévisions valables.

4. Prévision

Pour la prédiction des valeurs futures, on commence par rappeler la structure de notre modèle après estimation de nos différents paramètres :

$$\hat{\kappa}_t = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 t + ARIMA(p, d, q)$$

Pour la partie estimée avec l'ARIMA(p,d,q), nous avons utilisé la fonction *predict* de R pour effectuer nos prévisions. La représentation graphique d'une prédiction sur 25 ans, à partir de 2000, peut être consultée à la figure 14 :

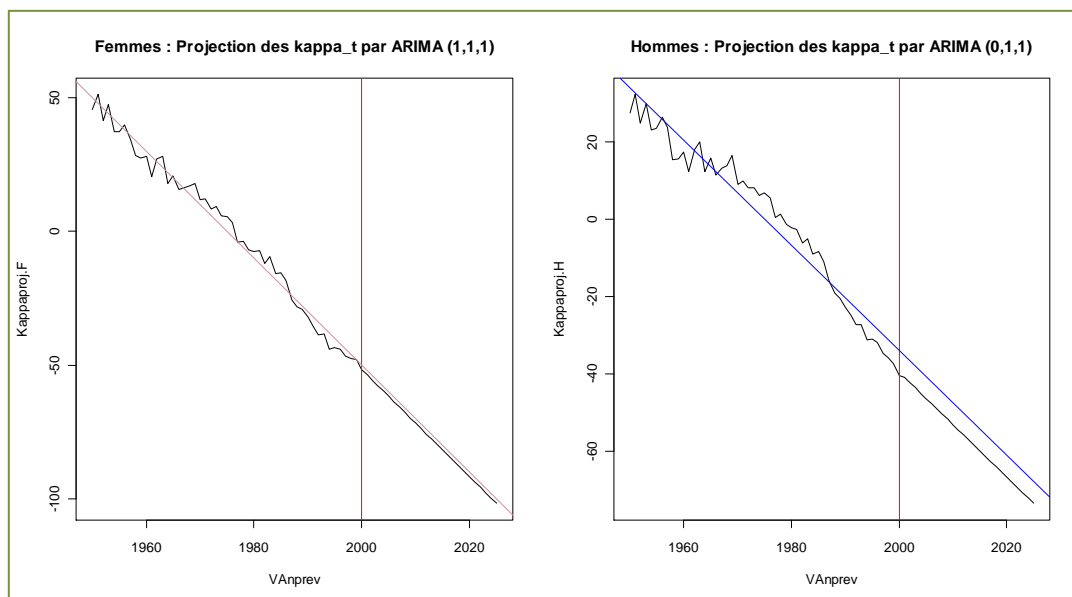


Figure 14 : Graphique de projection des κ_t

La projection des κ_t ne laisse apparaître quasiment aucun saut : cette extrapolation semble portée essentiellement sur la tendance linéaire, ce qui est en accord avec la spécification du modèle. L'ARIMA(p,d,q) rend compte du bruit d'oscillation autour de la tendance linéaire et modélise la série des résidus.

La projection des taux centraux de mortalité est donnée à la figure 15 :

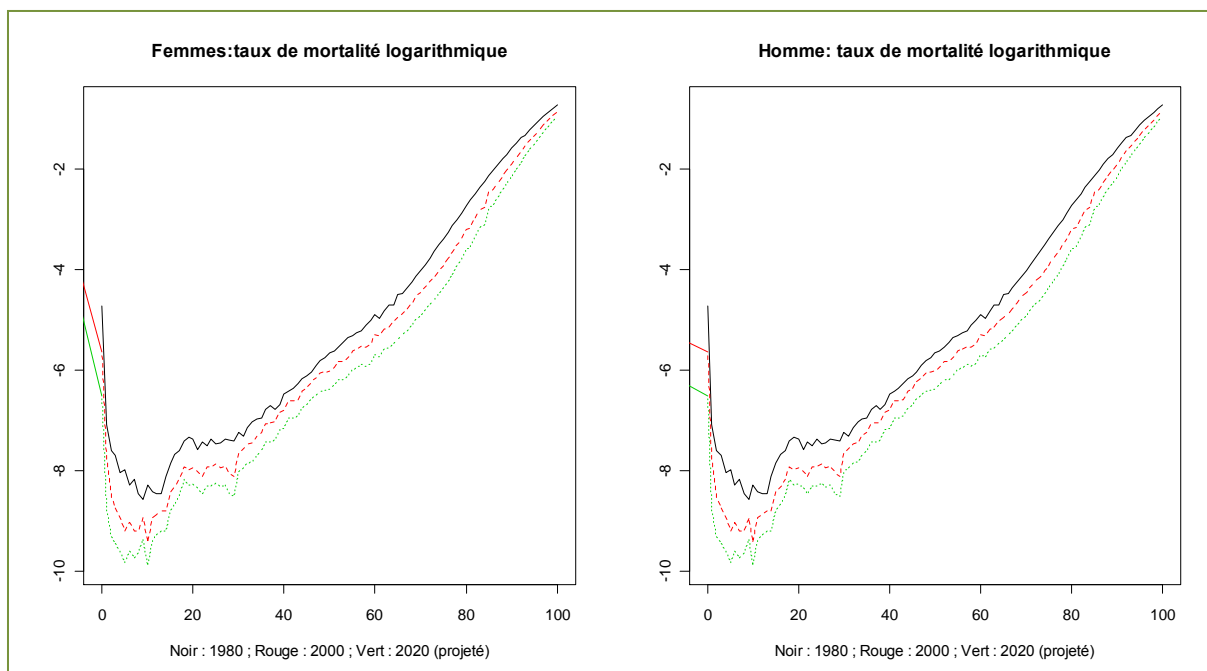


Figure 15 : Graphiques de projection des taux centraux de mortalité

On constate que si l'allure générale de l'évolution de la mortalité est conservée, le taux de mortalité baisse au cours du temps.

Après la mise en œuvre de la procédure classique du modèle de Lee Carter nous explorerons dans le paragraphe suivant une approche de la série des κ_t par des processus de levy.

En effet, la variable d'intérêt pour la tarification des contrats d'assurances vie et des fonds de pension étant le paramètre κ_t , la modélisation de la série des κ_t devra alors rendre compte aussi bien du risque de longévité que du risque de mortalité. Meilleure est la modélisation de cette tendance temporelle, meilleure sera la quantification du risque pour une tarification précise et un provisionnement suffisant des engagements. Pour ce faire, le modèle à mettre en œuvre devrait pouvoir capter l'ensemble des caractéristiques de forme, de tendance, mais également rendre compte au mieux des discontinuités dans l'évolution de la série chronologiques des κ_t .

Deuxième Partie : MODELISATION DE LA COMPOSANTE TEMPORELLE DE LA MORTALITE PAR DES PROCESSUS DE LEVY

Dans cette partie, nous allons explorer la modélisation de la composante temporelle extraite de l'application du modèle de Lee Carter pour des processus de Levy en vue de tenir compte de discontinuités éventuelles dans la projection nécessaire à la quantification du risque de longévité.

I. LES PROCESSUS DE LEVY

A. Définition et premières propriétés

Nous introduisons dans cette section des définitions et quelques généralités sur les processus de Lévy. Définitions et notations sont essentiellement basées sur les ouvrages de Cont et Tankov (2004) et Applebaum (2009), dont la lecture permettra d'approfondir avec profit le sujet.

Définition 1 : Un processus stochastique continu à droite, limite à gauche (càdlàg) $(X_t)_{t \geq 0}$ sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) à valeur dans \mathbb{R}^d , tel que $X_0 = 0$ p.s, est un processus de Lévy s'il possède les 3 propriétés suivantes :

1. Accroissements indépendants : pour toute suite croissante de temps $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < \infty$, les variables aléatoires $X_{t_2} - X_{t_1}$, $X_{t_3} - X_{t_2}$, \dots , $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes
2. Accroissements stationnaires : la loi de $X_{t+h} - X_t$ ne dépend pas de t
3. Continuité stochastique : $\forall \epsilon > 0, \lim_{h \rightarrow 0} P(|X_{t+h} - X_t| \geq \epsilon) = 0$

On observe alors que le mouvement brownien est un processus de Lévy dont toutes les trajectoires sont continues. Les processus de Lévy incluent également les processus de sauts purs tels que les processus de Poisson.

Une conséquence directe de la stationnarité des accroissements est l'infinie divisibilité du processus de Lévy. Plus généralement, nous avons :

Proposition 2 : Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy. Alors pour tout t , la loi de X_t , est infiniment divisible. Réciproquement, si F est une distribution infiniment divisible, alors il existe un processus de Lévy $(X_t)_{t \geq 0}$ tel que la distribution de X_1 soit donnée par F .

De l'indépendance des accroissements et de la continuité stochastique, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Proposition 3 : Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy défini sur \mathbb{R}^d . Il existe une fonction $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ appelée fonction caractéristique exponentielle de X_t telle que :

$$E(e^{izX_t}) = e^{t\psi(z)} \quad z \in \mathbb{R}^d$$

Si X_t est un processus de Lévy, alors ses trajectoires sont càdlàg. On introduit X_{t-} la version càdlàg de X_t , et on définit le saut ΔX_t du processus par $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$. On peut alors définir la mesure de Lévy comme suit :

Définition 4 : Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy sur \mathbb{R}^d . On définit la mesure de Lévy par :

$$\nu(A) = E(\#\{t \in [0,1] \mid \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A\}) \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

Où $\nu(A)$ compte le nombre de sauts par unité de temps.

Définition 5 : Pour tout processus $(X_t)_{t \geq 0}$ càdlàg défini sur \mathbb{R}^d , on peut définir une mesure aléatoire sur $\mathbb{R}^d \times [0, \infty[$ décrivant le saut de X et définie pour tout ensemble mesurable $B \subset \mathbb{R}^d \times [0, \infty[$ par :

$$J_X(B) = \#\{(t, X_t - X_{t-}) \in B\}$$

Pour tout ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^d$, $J_X([t_1, t_2] \times A)$ compte le nombre de sauts de X entre t_1 et t_2 tels que la longueur de chaque saut est comprise dans A . La mesure aléatoire J_X est un Poisson d'intensité de mesure $\nu(dx).dt$:

$$P(J_X([t_1, t_2] \times A) = k) = e^{-\int_{t_1}^{t_2} \int_A \nu(dx).dt} \frac{\left(e^{-\int_{t_1}^{t_2} \int_A \nu(dx).dt} \right)^k}{k!}$$

Proposition 5 (décomposition de Lévy-Itô) : Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy sur \mathbb{R}^d et ν sa mesure de Lévy telle qu'introduite à la définition 4. Alors :

1. ν est une mesure aléatoire définie sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et vérifie :

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \nu(x) < \infty \quad \int_{|x| \leq 1} \nu(dx) < \infty$$

2. La mesure de saut de X , notée J_X , est une mesure aléatoire de Poisson sur $[0, \infty[\times \mathbb{R}^d$ avec comme mesure d'intensité $\nu(dx).dt$

3. Il existe un vecteur γ et un mouvement brownien de dimension d $(B_t)_{t \geq 0}$ de matrice de covariance A tels que :

$$X_t = \gamma t + B_t + X_t^l + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tilde{X}_t^\varepsilon$$

Avec :

$$X_t^l = \int_{|x| \geq 1, s \in [0, t]} x J_X(ds \times dx)$$

$$\tilde{X}_t^\varepsilon = \int_{|x| \geq 1, s \in [0, t]} x \{J_X(ds \times dx) - v(dx) \cdot dt\} = \int_{|x| \geq 1, s \in [0, t]} x \tilde{J}_X(ds \times dx)$$

La décomposition de Lévy-Itô implique que pour chaque processus de Lévy, il existe un vecteur γ , une matrice définie positive A et une mesure positive ν qui définit de manière unique sa distribution. Le triplet (A, ν, γ) est appelé triplet caractéristique ou triplet de Lévy du processus X_t . La structure des trajectoires d'un processus de Lévy permet d'obtenir le second résultat fondamental de la théorie : l'expression de la fonction caractéristique d'un processus par son triplet (A, ν, γ) .

Théorème 6 (représentation de Lévy-Khintchine) : Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy sur \mathbb{R}^d avec pour triplet caractéristique (A, ν, γ) . Alors :

$$E(e^{izX_t}) = e^{t\psi(z)} \quad z \in \mathbb{R}^d$$

Avec :

$$\psi(z) = -\frac{1}{2}zAz + i\gamma z + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{izx} - 1 - izx1_{|x| \leq 1})\nu(dx)$$

Définition 6 : Les accroissements des processus de Lévy sont appelés subordonateurs. Ils sont utilisés comme des changements de temps pour d'autres processus de Lévy (en particulier pour les subordonateurs browniens). On peut remarquer que les subordonateurs ne contiennent pas de composante brownienne.

Définition 7 : Les processus strictement α -stable forment une classe importante des processus de Lévy qui vérifient ($\alpha \in]0, 2]$) :

$$\forall a > 0, \left(\frac{X_{at}}{a^{1/\alpha}} \right)_{t \geq 0} = (X_t)_{t \geq 0}$$

Pour les processus de Lévy stable à valeurs réelles, la mesure de Lévy est de la forme, avec A et B des constantes :

$$\nu(x) = \frac{A}{x^{\alpha+1}} 1_{x>0} + \frac{B}{|x|^{\alpha+1}} 1_{x<0}$$

Proposition 7 : Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus à valeurs réelles et à accroissements indépendants. Alors :

1. $\left(\frac{e^{iuX_t}}{E(e^{iuX_t})} \right)_{t \geq 0}$ est une martingale $\forall u \in \mathbb{R}$.
2. Si pour $u \in \mathbb{R}$ $E(e^{iuX_t}) < 0 \forall t \geq 0$, alors $\left(\frac{e^{iuX_t}}{E(e^{iuX_t})} \right)_{t \geq 0}$ est une martingale.
3. Si $E(X_t) < \infty \forall t \geq 0$, alors $M_t = X_t - E(X_t)$ est une martingale.
4. Si $V(X_t) < \infty \forall t \geq 0$, alors $(M_t)^2 - E(M_t^2)$ est une martingale.

B. Transformation des processus de Lévy

1. Transformations linéaires

Théorème 8 : Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy sur \mathbb{R}^d avec pour triplet caractéristique (A, ν, γ) et M une matrice de dimension $n \times d$. Alors $Y_t = M.X_t$ est un processus de Lévy de triplet caractéristique comme suit :

$$\begin{aligned} A_Y &= M A^t M \\ \nu_Y(B) &= \nu(\{x : Mx \in B\}) \\ \gamma_Y &= M\gamma + \int_{\mathbb{R}^n} y \left(1_{|y| < 1}(y) - 1_{S_1}(y) \right) \nu_Y(dy) \end{aligned}$$

Où S_1 est l'image de la boule unité dans \mathbb{R}^d : $S_1 : \{M.x : |x| \leq 1\}$

L'une des applications les plus intéressantes de ce théorème est la somme de processus de Lévy indépendants : soient $(X_t)_{t \geq 0}$ et $(Y_t)_{t \geq 0}$ deux processus de Lévy indépendants de triplet caractéristique (A_1, ν_1, γ_1) et (A_2, ν_2, γ_2) . Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $Z_t = X_t + Y_t$. Le triplet caractéristique de Z est donné par :

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ \nu(B) &= \nu_1(B_1) + \nu_2(B_2) \quad \forall B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \\ \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2 - \int_{[-\sqrt{2}, 1] \cup [1, \sqrt{2}]} y \nu(dy) \end{aligned}$$

Car nous avons en effet $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \sqrt{2}$

2. Subordination

Soit $(S_t)_t$ un subordonateur dont les trajectoires sont presque sûrement croissantes. Alors, pour tout t , (S_t) est une variable aléatoire positive, qu'on représente par sa transformée de Laplace. Son triplet caractéristique est de la forme $(0, \rho, b)$. La fonction caractéristique des moments de (S_t) vérifie donc :

$$E(e^{uS_t}) = e^{tl(u)} \quad \forall u \leq 0$$

$$l(u) = bu + \int_0^\infty (e^{ux} - 1)\rho(dx)$$

On appelle $l(u)$ l'exposant de Laplace de S .

Théorème 9 : On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit alors $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy d'exposant caractéristique $\psi(u)$, de triplet caractéristique (A, ν, γ) et soit $(S_t)_t$ un subordonateur d'exposant de Laplace $l(u)$ et de triplet caractéristique $(0, \rho, b)$. Le processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ défini pour tout $\omega \in \Omega$ par $Y(t, \omega) = X(S(t, \omega), \omega)$ est alors un processus de Lévy et sa fonction caractéristique vérifie :

$$E(e^{iuY_t}) = e^{t.l(\psi(u))}$$

En d'autres termes, cela revient à dire que l'exposant caractéristique de Y est obtenu par composition de l'exposant de Laplace de S avec l'exposant caractéristique de X . Le triplet caractéristique de Y_t est donné par :

$$A^Y = bA$$

$$\nu^Y(B) = b\nu(B) + \int_0^\infty p_s^X(B)\rho(ds) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

$$\gamma^Y = b\gamma + \int_0^\infty \rho(ds) \int_{|x| \leq 1} x p_s^X(dx)$$

Où p_t^X représente la distribution de probabilité de X_t .

3. Tempérer une mesure de Lévy

Une mesure de Lévy doit vérifier les contraintes suivantes :

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \nu(x) < \infty \quad \int_{|x| \leq 1} \nu(dx) < \infty$$

Toute transformation de la mesure de Lévy vérifiant les contraintes ci-dessus donne un nouveau processus de Lévy. Une classe importante de transformation est obtenue en multipliant $\nu(\cdot)$ par une fonction exponentielle :

$$\nu^*(dx) = e^{\theta x} \nu(dx)$$

est ainsi un processus de Lévy. Pour un processus de Lévy $(X_t)_{t \geq 0}$ de triplet (A, ν, γ) , le processus de triplet (A, ν^*, γ) est appelé la transformée d'Esscher de $(X_t)_{t \geq 0}$. ν^* est appelé inclinaison exponentielle.

C. Modèles de diffusion par sauts

Un processus de Lévy de type diffusion par saut est un processus Poisson-composé avec mouvement brownien de la forme :

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

Où (N_t) est le processus de Poisson de comptage de sauts (de paramètre d'intensité de saut λ) et où les Y_i sont les amplitudes (i.i.d.) des sauts.

Le modèle est ensuite entièrement paramétré par le choix de la distribution de l'amplitude de saut v_0 . On présente ci-après à titre illustratif les deux modèles de diffusion par sauts les plus utilisés, à savoir le processus de Merton et le processus de Kou, mais ceux-ci seront exposés de manière plus approfondie dans les parties suivantes.

1. Modèle de Merton

Dans le processus de Merton, on considère des sauts de distribution gaussienne : $Y_i \sim N(\mu, \delta^2)$. La mesure de Lévy est alors :

$$\nu(x) = \lambda v_0(x) = \frac{\lambda}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\delta^2}}$$

On obtient facilement sa fonction caractéristique :

$$E(e^{iuX_t}) = \exp\left(-\frac{t\sigma^2 u^2}{2} + iut\mu + \lambda \left[e^{-\frac{\delta^2 u^2}{2} + i\mu u} - 1 \right]\right)$$

Qui permet un calcul simple des cumulants (cf. tableau 3).

La densité de probabilité peut également s'exprimer de façon analytique sous la forme d'une série infinie :

$$f(X_t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 t + k\delta^2)}} e^{-\frac{(X_t - \gamma t - k\mu)^2}{2(\sigma^2 t + k\delta^2)}}$$

2. Le processus de Kou

Dans le modèle de Kou, la distribution de l'amplitude des sauts est cette fois une exponentielle asymétrique. Sa mesure de Lévy vaut :

$$\nu(x) = \lambda v_0(x) = \lambda [p\eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{y \geq 0} + (1-p)\eta_2 e^{\eta_2 y} 1_{y < 0}]$$

Où η_1 et η_2 positifs paramètrent les queues de distribution des sauts positifs et négatifs tandis que $p \in [0,1]$ représente la probabilité d'un saut positif.

On obtient facilement sa fonction caractéristique :

$$E(e^{iuX_t}) = \exp\left(-\frac{t\sigma^2 u^2}{2} + iut\mu + \lambda t \left[\frac{p\eta_1}{\eta_1 - iu} + \frac{(1-p)\eta_2}{\eta_2 + iu} - 1 \right]\right)$$

On en déduit la fonction génératrice des cumulants et leur expression en fonction des paramètres du modèle (cf. tableau 3).

Cumulants	Modèle de Merton	Modèle de Kou
$E[X_t]$	$t(b + \lambda\mu)$	$t\left(\mu + \frac{p\lambda}{\eta_1} - \frac{(1-p)\lambda}{\eta_2}\right)$
$V[X_t]$	$t(\sigma^2 + \lambda\delta^2 + \lambda\mu^2)$	$2t\left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{p\lambda}{\eta_1^2} + \frac{(1-p)\lambda}{\eta_2^2}\right)$
c_3	$t\lambda(3\delta^2\mu + \mu^3)$	$6t\left(\frac{p\lambda}{\eta_1^3} - \frac{(1-p)\lambda}{\eta_2^3}\right)$
c_4	$t\lambda(3\delta^3 + 6\mu^2\delta^2 + \mu^4)$	$24t\left(\frac{p\lambda}{\eta_1^4} + \frac{(1-p)\lambda}{\eta_2^4}\right)$

Tableau 3 : Récapitulatif des quatre premiers cumulants des processus de Merton et de Kou

D. Construction d'un processus de Lévy par subordination d'un brownien

Nous présentons dans ce paragraphe un théorème de représentation des processus de sauts par subordination de mouvements browniens. Soit $(S_t)_t$ un subordonateur d'exposant de Laplace $l(u)$ et soit $(W_t)_t$ un mouvement brownien indépendant de S_t . En subordonnant le mouvement brownien de dérive μ par le processus S_t , on obtient de nouveau un processus de Lévy définie par $X_t = \sigma.W(S_t) + \mu.S_t$. Ce processus est alors un mouvement brownien observé sur une nouvelle échelle de temps donnée par S_t .

D'après le théorème 9, la fonction caractéristique de X_t est donnée par :

$$E(e^{iuX_t}) = e^{tl\left(-u^2\frac{\sigma^2}{2} + iu\mu\right)}$$

Théorème 10 : Soit ν une mesure de Lévy sur \mathbb{R} et $\mu \in \mathbb{R}$. Il existe un processus de Lévy $(X_t)_{t \geq 0}$ de mesure de Lévy ν tel que $X_t = W(Z_t) + \mu.Z_t$ pour un subordonateur Z_t et un mouvement brownien $(W_t)_{t \geq 0}$ indépendant de Z si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1. ν est absolument continue de densité $\nu(x)$
2. $\nu(x).e^{-\mu.x} = \nu(-x).e^{\mu.x} \quad \forall x$
3. $\nu(\sqrt{u})e^{-\mu\sqrt{u}}$ est une fonction complètement monotone sur $(0, \infty)$

Définition 8 : Une fonction $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite complètement monotone si toutes ses dérivées existent et si :

$$(-1)^k \frac{\partial^k f(u)}{\partial u^k} > 0 \quad \forall k \geq 1$$

Considérons à présent un subordonateur de dérive nulle et une mesure de Lévy ρ . Un mouvement brownien de dérive μ dont le temps est changé par ce subordonateur aura une mesure de Lévy donné par :

$$\nu(x) = \int_0^\infty e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2t}} \frac{\rho(dt)}{\sqrt{2\pi t}}$$

1. Exemples de processus subordonnés

Considérons le subordonateur stable tempéré avec la mesure de Lévy suivante :

$$\rho(x) = \frac{c e^{-\lambda x}}{x^{\alpha+1}} 1_{x>0}$$

Où c et λ sont des constantes positives et $0 \leq \alpha < 1$. Le paramètre c modifie l'intensité des sauts de toutes tailles simultanément, tandis que le paramètre α détermine l'importance accordée aux sauts de faible amplitude. Quand $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, les subordonateurs sont respectivement appelés processus gamma et processus inverse gaussien.

On rappelle la forme de la fonction gamma et quelques une de ses propriétés :

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt \\ \Gamma(n+1) &= n \cdot \Gamma(n) \\ \Gamma(n+1) &= n! \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Pour les calculs propres aux modèles subordonnés, il peut être intéressant de reparamétriser (S_t) en introduisant κ la variance du subordonateur. On a alors :

$$\rho(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{1-\alpha}{\kappa} \right)^{1-\alpha} \frac{e^{-\frac{(1-\alpha)x}{\kappa}}}{x^{1+\alpha}}$$

Ce qui se réécrit pour les subordonateurs respectivement gamma ($\alpha = 0$) et inverse gaussien ($\alpha = \frac{1}{2}$) :

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{1}{\kappa} \frac{e^{-\frac{x}{\kappa}}}{x} \\ \rho(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa}} \frac{e^{-\frac{x}{2\kappa}}}{x^{3/2}} \end{aligned}$$

En faisant le changement de temps d'un mouvement brownien indépendant (de volatilité σ et de dérive θ) par un subordonateur stable tempéré, on obtient le soi-

disant processus stable tempéré normal ('normal' étant utilisé dans la littérature pour spécifier la nature brownienne de la subordination). Nous allons à présent développer un peu plus précisément les modèles variance gamma et normal inverse gaussien basés sur les subordonateurs gamma et inverse gaussiens, qui seront étudiés de manière plus systématique dans les parties suivantes.

2. Le processus Variance gamma

Il s'agit d'un processus à variations finies (X_t) avec une activité infinie mais relativement basse de sauts de faible amplitude. Les paramètres en sont la volatilité σ et la dérive θ du mouvement brownien ainsi que κ la variance du subordonateur. La mesure de Lévy du variance gamma est :

$$\nu(x) = \frac{1}{\kappa|x|} e^{Ax-B|x|}$$

Avec :

$$A = \frac{\theta}{\sigma^2}$$

$$B = \frac{\sqrt{\theta^2 + 2\sigma^2/\kappa}}{\sigma^2}$$

Sa fonction caractéristique vaut :

$$E(e^{iuX_t}) = \exp\left(-\frac{t}{\kappa} \ln\left(1 + \frac{u^2\sigma^2\kappa}{2} - i\theta\kappa u\right)\right)$$

Ce qui permet un calcul simple des cumulants (cf. tableau 4).

La densité de probabilité peut également s'exprimer de façon analytique :

$$f(X_t) = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi g}} \frac{g^{\frac{t}{\kappa}-1} e^{-\frac{g}{\kappa}}}{\kappa^{\frac{t}{\kappa}} \Gamma\left(\frac{t}{\kappa}\right)} e^{-\frac{(X_t-\theta g)^2}{2\sigma^2 g}} dg$$

3. Le processus Normal inverse gaussien

Il s'agit d'un processus à variations infinies avec comportement quasi-stable de sauts de faible amplitude. Comme pour le variance gamma, les paramètres en sont la volatilité σ et la dérive θ du mouvement brownien ainsi que κ la variance du subordonateur. La mesure de Lévy du normal inverse gaussien est :

$$\nu(x) = \frac{C}{|x|} e^{Ax} K_1(B|x|)$$

Avec

$$A = \frac{\theta}{\sigma^2}$$

$$B = \frac{\sqrt{\theta^2 + \sigma^2/\kappa}}{\sigma^2}$$

$$C = \frac{\sqrt{\theta^2 + \sigma^2/\kappa}}{\pi\sigma\sqrt{\kappa}}$$

Et K la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce (cf. la présentation détaillée du Normal Inverse Gaussien à la section V pour plus de détails sur les fonctions de Bessel).

Sa fonction caractéristique vaut :

$$E(e^{iuX_t}) = \exp\left(\frac{t}{\kappa} - \frac{t}{\kappa} \sqrt{1 + u^2\sigma^2\kappa - 2i\theta\kappa u}\right)$$

Ce qui permet un calcul simple des cumulants (cf. tableau récapitulatif).

La densité de probabilité peut également s'exprimer de façon analytique.

Cumulants	Modèle variance gamma	Modèle normal inverse gaussien
$E[X_t]$	θt	θt
$V[X_t]$	$\sigma^2 t + \theta^2 \kappa t$	$\sigma^2 t + \theta^2 \kappa t$
c_3	$3\sigma^2 \kappa t + 2\theta^3 \kappa^2 t$	$3\sigma^2 \theta \kappa t + 3\theta^3 \kappa^2 t$
c_4	$3\sigma^4 \kappa t + 6\theta^4 \kappa^3 t + 12\sigma^2 \theta^2 \kappa^2 t$	$3\sigma^4 \kappa t + 15\theta^4 \kappa^3 t + 18\sigma^2 \theta^2 \kappa^2 t$

Tableau 4 : Récapitulatif des cumulants des processus VG et NIG

E. Calcul stochastique pour les processus de Lévy

Dans cette section, nous énoncerons la formule d'Itô pour les processus de Lévy scalaires, ainsi que pour les exponentielles ordinaires des processus de Lévy.

Proposition 11 : Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ un processus de Lévy de triplet caractéristique (σ^2, ν, γ) et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^2 . Alors :

$$f(X_t) = f(0) + \int_0^t f'(X_{s-}) dX_s + \int_0^t \frac{\sigma^2}{2} f''(X_s) ds$$

$$+ \sum_{0 \leq s \leq t, \Delta X_s \neq 0} [f(X_{s-} + \Delta X_s) - f(X_{s-}) - \Delta X_s f'(X_{s-})]$$

Si l'on définit $Y_t = \exp(X_t)$ avec (X_t) processus de Lévy de mesure de saut J_X , on a alors :

$$Y_t = 1 + \int_0^t Y_{s-} dX_s + \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t Y_{s-} ds + \int_{[0,t] \times \mathbb{R}} Y_{s-} (e^z - 1 - z) J_X(ds, dz)$$

Soit encore :

$$\frac{dY_t}{Y_t} = dX_t + \frac{\sigma^2}{2} dt + (e^{\Delta X_t} - 1 - \Delta X_t)$$

On peut également donner le résultat suivant sur l'équivalence des mesures pour les processus de Lévy.

Proposition 12 : Soit (X_t, \mathbb{P}) et (X_t, \mathbb{Q}) deux processus de Lévy sur \mathbb{R} de triplets caractéristiques (σ^2, ν, γ) et $(\sigma'^2, \nu', \gamma')$. Alors \mathbb{P} et \mathbb{Q} sont équivalents pour tout t si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\sigma = \sigma'$
2. Les mesures de Lévy sont équivalentes avec $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{\frac{\varphi(x)}{2}} - 1 \right)^2 \nu(dx) < \infty$ où $\varphi(x) = \ln \frac{d\nu'}{d\nu}$
3. Si $\sigma = 0$, on a de plus $\gamma' - \gamma = \int_{-1}^1 x(\nu' - \nu)(dx)$

Quand \mathbb{P} et \mathbb{Q} sont équivalents, la dérivée de Radon-Nykodym vaut :

$$\frac{d\mathbb{Q}|\mathfrak{F}_t}{d\mathbb{P}|\mathfrak{F}_t} = e^{U_t}$$

Avec :

$$U_t = \eta X_t^c - \frac{\eta^2 \sigma^2 t}{2} - \eta \gamma t + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\sum_{s \leq t, |\Delta X_s| > \varepsilon} \varphi(\Delta X_s) - t \int_{|x| > \varepsilon} (e^{\varphi(x)} - 1) \nu(dx) \right)$$

Où X_t^c est la partie continue de X_t et où η est tel que $\gamma' - \gamma - \int_{-1}^1 x(\nu' - \nu)(dx) = \sigma^2 \eta$ si $\sigma > 0$ ($\eta = 0$ sinon).

On pourra remarquer que U_t est un processus de Lévy de triplet caractéristique (a_U, ν_U, γ_U) :

$$\begin{aligned} a_U &= \eta^2 \sigma^2 \\ \nu_U &= \nu \varphi^{-1} \\ \gamma_U &= -\frac{1}{2} a_U \eta^2 - \int_{-\infty}^{+\infty} (e^z - 1 - z 1_{|z| \leq 1}) \nu_U(dz) \end{aligned}$$

Une application directe de cette proposition est l'équivalence pour les processus de Poisson : soit $(N, \mathbb{P}_{\lambda_1})$ un processus de Poisson d'intensité λ_1 sous \mathbb{P}_{λ_1} (sauts de taille a). On peut alors définir une nouvelle probabilité \mathbb{P}_{λ_2} sous laquelle N est un processus de Poisson d'intensité λ_2 (sauts de taille a) par la dérivée de Radon-Nykodym :

$$\frac{d\mathbb{P}_{\lambda_1}}{d\mathbb{P}_{\lambda_2}} = \exp \left((\lambda_2 - \lambda_1)T - N_T \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)$$

II. LA MODELISATION DES K_T PAR UN PROCESSUS DE MERTON

A. Présentation du modèle

Le modèle de Merton, développé au milieu des années 70 par Merton (1976), est un modèle de diffusion par sauts. On appelle ainsi un mélange de processus continus et de sauts. Le modèle de Merton est le pionnier de ce type de modèles. Elaboré pour le pricing d'options, il répond initialement au modèle de Black-Scholes.

Le modèle de Merton peut s'exprimer formellement sous la forme canonique des modèles de diffusion par saut :

$$d\kappa_t = \gamma dt + \sigma dW_t + d\left(\sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right)$$

Où l'on note W_t un mouvement brownien, N_t un processus de Poisson de paramètre λ et Y_i des processus i.i.d. gaussiens tels que $Y_i \sim N(\mu, \delta^2)$ pour tout i . N_t définit ainsi l'intensité des sauts et les Y_i leur amplitude.

Toutes les composantes aléatoires du modèle, W_t , N_t et les Y_i , sont supposées indépendantes.

Le modèle peut se résumer à 5 paramètres qui le caractérisent complètement : les deux paramètres généraux du processus continu, la dérive γ et la volatilité σ , l'intensité de sauts λ , ainsi que la moyenne et la volatilité des sauts gaussiens μ et δ . La calibration du modèle passe donc par l'estimation de ces 5 paramètres en fonction des données passées des κ_t . Une fois ces quantités connues, la projection des κ_t et partant des μ_{xt} pourra alors être implémentée.

Une des forces du modèle de Merton est que, contrairement à d'autres modèles de diffusion par sauts, comme par exemple celui de Kou que nous verrons plus loin, il possède une forme analytique de sa densité. Celle-ci s'exprime toutefois sous la forme d'une série infinie (Labahn (2003)).

$$f(\kappa_t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 t + k\delta^2)}} e^{\frac{-(\kappa_t - \kappa_0 - \gamma t - k\mu)^2}{2(\sigma^2 t + k\delta^2)}}$$

B. Estimation par maximum de vraisemblance

La manière la plus naturelle de calibrer le modèle, étant donné que la densité de la loi des κ_t a une forme connue, est de procéder par maximum de vraisemblance. Pour ce faire nous avons implémenté sous R une fonction qui calcule le minimum de l'inverse de la log-vraisemblance. La somme infinie est alors capée quand les termes supplémentaires deviennent non significatifs :

$$L(x; \{\gamma, \sigma, \lambda, \mu, \delta\}) = - \sum_{t=t_1}^{t_n} \ln[f(x)]$$

Une telle fonction prend en entrée une série chronologique x (les dk_t) et un vecteur de 5 paramètres. Il est alors possible, grâce à la procédure *nlm* de R, basée sur des algorithmes de type Newton, de minimiser la fonction L en fonction de ces 5 paramètres. L'algorithme est convergent au bout de 58 itérations.

Les valeurs approchées des paramètres obtenues par cette méthode sont repris dans le tableau suivant :

	γ	σ	λ	μ	δ	-Log-vrais
Femmes	-2,2111	0,1441	0,1829	2,5489	0,2241	158,172
Hommes	-1,7611	0,2029	0,3342	2,1055	0,219	168,493

Tableau 5 : Coefficient du modèle de Merton

On constate sans surprise une dérive négative, qui correspond à la pente décroissante observée historiquement dans la série des κ_t (cf. figure 3).

Etant donné que N_t suit une loi de Poisson, on a $E[N_t] = \lambda$ et par conséquent on peut dire qu'en moyenne on observe un saut tous les cinq ans pour la population féminine et tous les trois ans pour les hommes.

Quand il y a un saut, ce saut est en moyenne d'une amplitude du même ordre de grandeur que la dérive, quoique légèrement supérieure. Les années à saut unique, les κ_t sont donc très légèrement croissants, contre une croissance franche les années à sauts multiples.

Puisque la volatilité de l'amplitude des sauts est de l'ordre d'un dixième à peine de leur amplitude, il est donc en effet extrêmement rare d'observer des sauts négatifs.

C. Projections

Une fois les paramètres du modèle connus, il est possible de projeter les κ_t dans le futur. Nous avons pour cela suivi la règle empirique qui veut que l'on ne projette pas au-delà de la moitié de la durée de la plage de données utilisée pour la calibration, et nous avons ainsi résolu d'extrapoler le comportement des κ_t jusqu'en 2025. Pour simplifier l'implémentation de cette projection, nous sommes revenus à une forme différentielle du modèle, qui permet de retrouver les termes de proche en proche avec un pas de temps annuel :

$$\kappa_t = \kappa_{t-1} + \gamma + \sigma \cdot N(0,1) + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

L'évolution des κ_t et des taux de mortalité est donnée par les graphes figurants à la figure 16 :

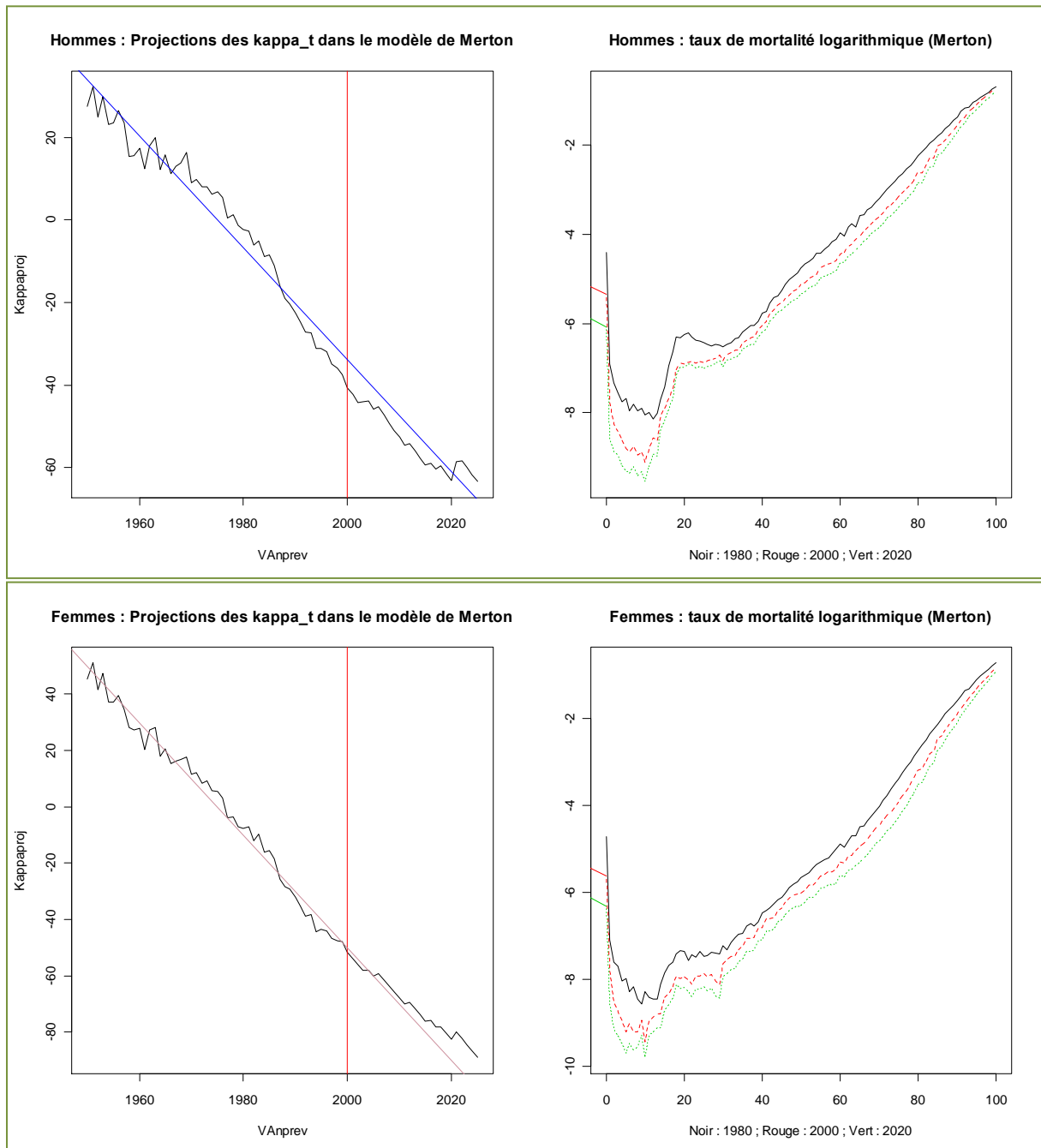


Figure 16 : Projection des κ_t par le processus de Merton.

Contrairement à l'extrapolation classique par $ARIMA(p,d,q)$, on observe ici que la projection par un processus avec sauts de Merton met en évidence des sauts dans l'évolution de la composante temporelle, tout en gardant la tendance linéaire décroissante empirique.

III. LA MODELISATION DES K_T PAR UN PROCESSUS DE KOU

A. Présentation du modèle

Le modèle de Kou, introduit par Kou (2002) et développé par Kou & Wang (2004), est un modèle de diffusion par sauts élaboré pour le *pricing* d'options. En particulier, l'objectif de Kou était de rendre compte des effets d'asymétrie des queues de distribution.

Ce modèle repose sur une double exponentielle asymétrique et peut s'exprimer formellement de la même façon que le modèle de Merton. On écrit ainsi dans notre cas :

$$d\kappa_t = \mu dt + \sigma dW_t + d \left(\sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right)$$

Avec $N_t \sim P(\lambda)$ et où les Y_i (i.i.d.) suivent une double exponentielle asymétrique de paramètres p , η_1 et η_2 . Autrement dit, les Y_i sont caractérisés par la densité suivante :

$$f_Y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{y \geq 0} + (1-p)\eta_2 e^{\eta_2 y} 1_{y < 0}$$

Toutes les composantes aléatoires du modèle, W_t , N_t et les Y_i , sont supposées indépendantes.

On pourra par ailleurs remarquer que dans le modèle de Kou originel, les sauts étaient exprimés non pas directement par les Y_i mais par des variables V_i telles que $Y_i = \log(V_i)$.

Le modèle de Kou se résume donc à six paramètres qui le caractérisent complètement : les deux paramètres généraux classiques, μ et σ , l'intensité de sauts λ , la probabilité de faire un saut positif p et les paramètres des sauts exponentiels positifs et négatifs η_1 et η_2 tels que les moyennes respectives des deux distributions exponentielles soient $1/\eta_1$ et $1/\eta_2$.

On se reportera à Ramezani (2004) et Tuzov (2006) pour plus de détails sur les double-exponentielles.

B. Estimation des paramètres

La principale limite du modèle de Kou est qu'il ne dispose toutefois pas d'une densité sous forme finie. Dès lors, l'estimation des paramètres du modèle ne peut pas se faire directement sous forme d'une estimation par maximum de vraisemblance et des approximations apparaissent nécessaires.

Les estimations reposeront essentiellement sur les moments et les cumulants. Il est donc nécessaire d'introduire la fonction génératrice des cumulants du modèle de

Kou, que l'on notera $C(\cdot)$. On la déduira de la relation suivante qui explicite la fonction caractéristique du modèle :

$$E(e^{iuk_t}) = \exp\left(-\frac{t\sigma^2 u^2}{2} + iut\mu + \lambda t \left[\frac{p\eta_1}{\eta_1 - iu} + \frac{(1-p)\eta_2}{\eta_2 + iu} - 1 \right]\right)$$

Il en découle que :

$$C(x) = t\mu x - \frac{1}{2}t\sigma^2 x^2 + \lambda t \left[\frac{p\eta_1}{\eta_1 - x} + \frac{(1-p)\eta_2}{\eta_2 + x} - 1 \right]$$

En effet si $\phi_X(s) = E(e^{Xs})$ est la fonction génératrice des moments d'une variable aléatoire X , alors la fonction génératrice des cumulants est définie par :

$$C_X(s) = \ln \phi_X(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{i!} t^i$$

Ainsi, moments et cumulants sont liés par la relation :

$$c_1 t + \frac{c_2 t^2}{2!} + \dots + \frac{c_i t^i}{i!} + \dots = \ln \left(E(X)t + \frac{E(X^2)t^2}{2!} + \dots + \frac{E(X^i)t^i}{i!} + \dots \right)$$

Les cumulants se déduisent facilement des moments non centrés à partir de la relation suivante (Stuart et Ord (1977)) :

$$c_n = m_n - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} c_k m_{n-k}$$

Et donc les premiers cumulants sont par :

$$c_1 = m_1$$

$$c_2 = m_2 - m_1^2$$

$$c_3 = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3$$

$$c_4 = m_4 - 4m_3 m_1 - 3m_2^2 + 12m_2 m_1^2 - 6m_1^4$$

$$c_5 = m_5 - 5m_4 m_1 - 10m_3 m_2 + 20m_3 m_1^2 + 30m_1 m_2^2 - 60m_2 m_1^3 + 24m_1^5$$

$$c_6 = m_6 - 6m_5 m_1 - 15m_4 m_2 + 30m_4 m_1^2 - 10m_3^2 + 120m_3 m_2 m_1 - 120m_3 m_1^2 + 30m_2^3 - 270m_2^2 m_1^2 + 360m_2 m_1^4 - 120m_1^6$$

Or, on sait que les cumulants d'une variable aléatoire sont égaux aux dérivées successives de la fonction génératrice des cumulants prises en zéro. Dans le cas d'un processus de Kou, les dérivées non conditionnelles successives s'expriment par :

$$\begin{cases} C'(x) = t\mu + t\sigma^2 x + \lambda t \left[\frac{p\eta_1}{(\eta_1 - x)^2} - \frac{(1-p)\eta_2}{(\eta_2 + x)^2} \right] \\ C''(x) = t\sigma^2 + 2\lambda t \left[\frac{p\eta_1}{(\eta_1 - x)^3} + \frac{(1-p)\eta_2}{(\eta_2 + x)^3} \right] \\ C^{(3)}(x) = 6\lambda t \left[\frac{p\eta_1}{(\eta_1 - x)^4} - \frac{(1-p)\eta_2}{(\eta_2 + x)^4} \right] \\ \text{etc.} \end{cases}$$

On en déduit donc le système suivant reliant les cumulants du processus de Kou et ses paramètres, en notant $\lambda_1 = p\lambda$ et $\lambda_2 = (1-p)\lambda$:

$$c_1 = G'(0) = t \left(\mu + \frac{\lambda_1}{\eta_1} - \frac{\lambda_2}{\eta_2} \right)$$

$$c_2 = G''(0) = 2t \left(\frac{\sigma^2}{2} + \frac{\lambda_1}{\eta_1^2} + \frac{\lambda_2}{\eta_2^2} \right)$$

$$c_3 = G^{(3)}(0) = 6t \left(\frac{\lambda_1}{\eta_1^3} - \frac{\lambda_2}{\eta_2^3} \right)$$

$$c_4 = G^{(4)}(0) = 24t \left(\frac{\lambda_1}{\eta_1^4} + \frac{\lambda_2}{\eta_2^4} \right)$$

$$c_5 = G^{(5)}(0) = 120t \left(\frac{\lambda_1}{\eta_1^5} - \frac{\lambda_2}{\eta_2^5} \right)$$

$$c_6 = G^{(6)}(0) = 720t \left(\frac{\lambda_1}{\eta_1^6} + \frac{\lambda_2}{\eta_2^6} \right)$$

1. Approximation d'Edgeworth

La première piste que nous avons explorée pour la calibration des six paramètres du modèle de Kou a été l'approximation de la densité de κ_t par la méthode d'Edgeworth, ou plus spécifiquement par les séries dites de Gram-Charlier A. Ces résultats découlent essentiellement de Charlier (1905) et Wallace (1958).

Cette approximation repose sur l'égalité formelle entre les deux quantités suivantes, où l'on note respectivement f , F et c_r la densité, la fonction caractéristique et les cumulants de la loi à approcher, et ψ , Ψ et γ_r la densité, la fonction caractéristique et les cumulants d'une loi connue :

$$f(t) = \exp \left[\sum_{r=1}^{\infty} (c_r - \gamma_r) \frac{(it)^r}{r!} \right] \psi(t)$$

En notant D l'opérateur différentiel, on remarque alors que $(it)^r \psi(t)$ est la transformée de Fourier de $(-D)^r \Psi(x)$ et il vient naturellement :

$$F(x) = \exp \left[\sum_{r=1}^{\infty} (c_r - \gamma_r) \frac{(-D)^r}{r!} \right] \Psi(x)$$

Si l'on choisit en particulier comme loi connue la loi normale de paramètres $\mu = c_1$ et $\sigma^2 = c_2$, on obtient alors l'égalité suivante et on en déduit la série dite de Gram-Charlier A.

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi c_2}} \exp \left[-\frac{(x - c_1)^2}{2c_2} \right] \exp \left[\sum_{r=3}^{\infty} c_r \frac{(-D)^r}{r!} \right] \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi c_2}} e^{-\frac{(\kappa_t - c_1)^2}{2c_2}} \left[1 + \frac{c_3}{3! * c_2^{3/2}} H_3 \left(\frac{\kappa_t - c_1}{\sqrt{c_2}} \right) + \frac{c_4}{4! * c_2^2} H_4 \left(\frac{\kappa_t - c_1}{\sqrt{c_2}} \right) \right] \end{aligned}$$

On note, dans l'expression ci-dessus, H_3 et H_4 les polynômes hermitiens de troisième et quatrième degré. On remarquera qu'il s'agit des polynômes hermitiens dits « probabilistes » et non des polynômes hermitiens « physiciens. » Ces polynômes répondent à la définition :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Et en particulier les polynômes de troisième et quatrième degrés s'expriment :

$$\begin{cases} H_3(x) = x^3 - 3x \\ H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3 \end{cases}$$

Grâce à cette approximation de la densité des κ_t , il était en théorie possible de calibrer les paramètres par maximum de vraisemblance. Il suffisait pour cela d'exprimer la log-vraisemblance comme une fonction des cumulants, eux-mêmes fonctions des moments qui dépendent, elles, des six paramètres d'intérêt, toutes fonctions connues et explicitées ci-dessus. Soit,

$$L = \sum_{t=t_1}^{t_n} \ln[f(\kappa_t)] = g_1(c_1, c_2, c_3, c_4) = g_2(m_1, m_2, m_3, m_4) = g_3(\mu, \sigma, \lambda_1, \lambda_2, \eta_1, \eta_2)$$

Nous avons donc implémenté sous R une procédure de minimisation de cette quantité en fonction des six paramètres d'intérêt, à l'aide de plusieurs sous-fonctions, toutefois le résultat n'a pas été à la hauteur de nos attentes du fait de divergences.

2. Méthode des moments

Avec les mauvais résultats obtenus par l'approximation d'Edgeworth de la densité, nous avons résolu de nous tourner vers d'autres méthodes. Nous avons alors opté pour la méthode des moments, relativement naturelle à mettre en place une fois les moments successifs de κ_t déterminés en fonction des paramètres d'intérêt.

En premier lieu, les valeurs des six premiers cumulants ont été estimées à partir des six équations exprimées en fonction des six premiers moments de κ_t . En effet,

la valeur des moments peut être supposée connue car approchée par les moments empiriques non centrés :

$$\hat{m}_h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^h$$

Dans la suite, pour ne pas alourdir les notations, nous noterons simplement m_h les différents moments empiriques.

Dès lors, les différents paramètres peuvent s'obtenir de proche en proche. En premier lieu, il convient de remarquer l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{20} \left(\frac{c_4 c_6}{6} - \frac{c_5^2}{5} \right) \eta_1^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{c_4 c_5}{2} - \frac{c_3 c_6}{3} \right) \eta_1 + \left(\frac{c_3 c_5}{5} - \frac{c_4^2}{4} \right) \\ = 144 t^2 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\eta_1^6 \eta_2^6} [(\eta_1^4 + 2\eta_1^3 \eta_2 + \eta_1^2 \eta_2^2) + (\eta_1^2 \eta_2^2 - \eta_1^3 \eta_2 + \eta_2^3 \eta_1 - \eta_1^4) \\ + (-2\eta_1^2 \eta_2^2 - \eta_2^3 \eta_1 - \eta_1^3 \eta_2)] = 0 \end{aligned}$$

Il apparait donc que η_1 peut être estimé par une simple résolution d'un trinôme du second degré. Par suite, en remarquant que :

$$\frac{5c_4 \eta_1 - 20c_3}{5c_4 - c_5 \eta_1} = \frac{120t \left[\left(\frac{\lambda_1}{\eta_1^3} + \frac{\lambda_2 \eta_1}{\eta_2^4} \right) - \left(\frac{\lambda_1}{\eta_1^3} - \frac{\lambda_2}{\eta_2^3} \right) \right]}{120t \left[\left(\frac{\lambda_1}{\eta_1^4} + \frac{\lambda_2}{\eta_2^4} \right) - \left(\frac{\lambda_1}{\eta_1^4} - \frac{\lambda_2 \eta_1}{\eta_2^5} \right) \right]} = \frac{\frac{\lambda_2}{\eta_2^4} (\eta_1 + \eta_2)}{\frac{\lambda_2}{\eta_2^5} (\eta_1 + \eta_2)} = \eta_2$$

On obtient l'expression de η_2 également uniquement en fonction des moments d'ordre 3 à 6.

L'obtention de λ_1 et λ_2 se fait quant à elle de manière symétrique à l'aide des expressions des troisièmes et quatrièmes moments, et μ et σ^2 s'obtiennent ensuite simplement en inversant les expressions des deux premiers moments. On pourra remarquer que ces 4 paramètres dépendent du temps t (avec un paramètre $1/t$ qui peut à chaque fois être sorti en facteur).

En définitive, on obtient le système suivant, où η_1 s'obtient par résolution d'un trinôme du second degré et où les autres paramètres s'en déduisent de proche en proche :

$$\frac{1}{20} \left(\frac{c_4 c_6}{6} - \frac{c_5^2}{5} \right) \eta_1^2 + \frac{1}{10} \left(\frac{c_4 c_5}{2} - \frac{c_3 c_6}{3} \right) \eta_1 + \left(\frac{c_3 c_5}{5} - \frac{c_4^2}{4} \right) = 0$$

$$\eta_2 = \frac{5c_4 \eta_1 - 20c_3}{5c_4 - c_5 \eta_1}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{t} \frac{\eta_1^4}{\eta_1 + \eta_2} \left(\frac{c_4 \eta_2}{24} - \frac{c_3}{6} \right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{t} \frac{\eta_2^4}{\eta_1 + \eta_2} \left(\frac{c_4 \eta_1}{24} - \frac{c_3}{6} \right)$$

$$\sigma^2 = \frac{c_2}{t} - 2 \left(\frac{\lambda_1}{\eta_1^2} + \frac{\lambda_2}{\eta_2^2} \right)$$

$$\mu = \frac{c_1}{t} - \frac{\lambda_1}{\eta_1} + \frac{\lambda_2}{\eta_2}$$

Le calcul des quantités empiriques ne posant pas de problèmes sous R, la calibration des paramètres aurait pu sembler acquise. Cependant, le calcul du discriminant du trinôme du second degré devait poser problème puisqu'il était négatif, induisant donc une estimation de η_1 comme un nombre imaginaire. Ce qui n'a évidemment pas de sens. De plus, la partie entière de ce nombre était négative, ce qui est également incohérent. Ces difficultés semblent donc malheureusement interdire la calibration des paramètres du modèle par la méthode des moments.

Avec l'échec de la résolution analytique, nous nous sommes tournés vers l'estimation par des méthodes numériques, avec la méthode des moments généralisée et la méthode de Newton, qui reposent toutes deux sur les relations entre cumulants et moments non centrés. La mise en œuvre de ces méthodes n'a cependant pas convergé non plus.

Les difficultés liées à la calibration par la méthode des moments proviennent probablement du nombre élevé de paramètres à estimer (6), ce qui implique de prendre des moments d'ordre également élevé et partant d'autant moins stables. Dans notre cas le moment d'ordre 6 des κ_t est par exemple de 2 788 151 001. L'ordre de grandeur de ces chiffres pourrait expliquer les instabilités numériques.

D'ailleurs, on pourrait rappeler que Nik Tuzov, pour essayer de contourner la mise en œuvre difficile d'une estimation par maximum de vraisemblance, a testé dans une étude parue en 2006 la méthode des moments généralisée sur le rendement des actifs financiers. Il y a conclu après analyse que l'estimation des paramètres d'une exponentielle double par la méthode des moments est inopérante pour les actifs financiers.

Les difficultés soulignées ci-dessus pourraient amener à penser que cette méthode est également inapplicable pour les données de mortalité. Toutefois, la non convergence de la méthode des moments pourrait résulter des six conditions utilisées qu'on a pu exhiber. Rien n'indique que si on arrive à établir d'autres conditions initiales pour les moments, cette méthode ne donnerait pas de résultats satisfaisants.

IV. LA MODELISATION DES K_T PAR UN PROCESSUS VARIANCE GAMMA

A. Présentation du modèle

Introduit par Madan et Seneta (1990) et développé par Madan *et al.* (1998) pour la modélisation de la dynamique des rendements financiers, le processus Variance Gamma (VG) est un processus de Levy, obtenu par subordination d'un mouvement

brownien standard avec drift, noté dans la suite W_{Γ_t} , à un processus gamma. En termes simples, le processus VG est obtenu en soumettant le mouvement brownien à un changement de temps aléatoires obéissant à un processus gamma. Il décrit un mouvement avec sauts infinis de faibles amplitudes.

De manière formelle le modèle Variance Gamma de paramètres (θ, σ, ν) s'écrit dans notre cas :

$$\kappa_t - \kappa_{t-1} = X_1$$

Où X_t suit un processus variance gamma spécifié comme suit :

$$X_t = \theta \Gamma_t(\nu) + \sigma W(\Gamma_t(\nu))$$

Notre modèle est ainsi caractérisé par trois paramètres :

- Le drift du mouvement brownien : θ
- La volatilité du mouvement brownien : σ
- La variance du changement de temps gamma : ν

La fonction de densité du processus VG peut être donnée sous forme intégrale par :

$$f_{X_t}(x_t) = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi u}} \exp\left(-\frac{(x_t - \theta u)^2}{2\sigma^2 u}\right) \frac{u^{\frac{t}{\nu}-1} \exp\left(-\frac{u}{\nu}\right)}{\nu^{\frac{t}{\nu}} \Gamma\left(\frac{t}{\nu}\right)} du$$

Ou sous forme finie par :

$$f_{X_t}(x_t) = \frac{\sqrt{2} \left(\frac{|x_t|}{\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\nu} + \theta^2}} \right)^{\frac{t}{\nu} - \frac{1}{2}}}{\sigma\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{t}{\nu}\right) \nu^{\frac{t}{\nu}}} \exp\left(\frac{\theta}{\sigma^2} x_t\right) K_{\frac{t}{\nu} - \frac{1}{2}}\left(\frac{|x_t| \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\nu} + \theta^2}}{\sigma^2}\right)$$

Où K_p est la fonction de Bessel modifiée de troisième espèce (on se reportera au paragraphe ci-après pour une présentation théorique des fonctions de Bessel).

Les deux formes de la densité sont bien identiques. Si l'identité formelle est très calculatoire et peu évidente à établir, on peut s'en convaincre à peu de frais de façon numérique. Nous avons, sous R, travaillé indifféremment avec les deux formes de la densité et obtenu des résultats similaires, aux approximations du logiciel près.

On appelle *équation de Bessel d'ordre ν* (où ν est un réel) l'équation suivante :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

Avec x réel. La solution générale de cette équation prend une forme sérielle lorsque $\nu \notin \mathbb{Z}$ et s'exprime alors de la manière suivante :

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)$$

En notant C_1 et C_2 des constantes arbitraires et J_ν une *fonction de Bessel de première espèce*. On exprime une telle fonction à l'aide d'une série (une représentation intégrale existe aussi en généralisant la fonction gamma aux réels positifs) :

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}$$

On pourra remarquer que les fonctions de Bessel ressemblent à des fonctions sinusoïdales décroissant proportionnellement à $\frac{1}{\sqrt{x}}$, toutefois leurs racines ne sont généralement pas périodiques.

On peut définir la propriété élémentaire suivante pour les fonctions de Bessel de première espèce pour n entier :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

Ainsi, les deux termes de la solution ne sont pas linéairement indépendants pour n entier et il est ainsi souvent préféré à cette première formulation une représentation alternative de la solution, qui peut s'exprimer sous la forme :

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$$

Où cette fois Y_ν est une *fonction de Bessel de deuxième espèce*. On peut exprimer cette fonction par (si ν est entier, on obtient la valeur de la fonction par passage à la limite) :

$$Y_\nu(x) = 2\pi e^{i\pi\nu} \frac{J_\nu(x) \cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\pi\nu)}$$

Ces fonctions sont également quelquefois appelés fonctions de Neumann.

Il existe également des fonctions de Bessel de troisième espèce, ou fonctions de Hankel, qui s'expriment par :

$$\begin{cases} H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x) = \frac{J_{-\nu}(x) - e^{-i\pi\nu} J_\nu(x)}{i \sin(\pi\nu)} \\ H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x) = \frac{J_{-\nu}(x) - e^{i\pi\nu} J_\nu(x)}{-i \sin(\pi\nu)} \end{cases}$$

On appelle désormais *équation de Bessel modifiée d'ordre ν* l'équation :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 - v^2)y = 0$$

À l'aide des fonctions précédemment introduites, on peut sans difficultés exprimer la solution générale sous la forme :

$$y(x) = C_1 J_v(ix) + C_2 J_{-v}(ix)$$

Mais l'on préfère en général introduire, puisque l'on travaille sur des valeurs réelles, la *fonction de Bessel modifiée de première espèce* (ou *fonction de Bessel hyperbolique*) :

$$I_v(x) = e^{-\frac{i\pi v}{2}} J_v(ix)$$

Il est également intéressant d'introduire la *fonction de Bessel modifiée de troisième espèce* (parfois appelée *fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce*, *fonction de Macdonald* ou encore *fonction de Basset*), qui trouve de nombreux champs d'application :

$$K_v(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-v}(x) - I_v(x)}{\sin(\pi v)}$$

On pourra remarquer que les fonctions de Bessel modifiées de première et troisième espèces sont respectivement exponentiellement croissantes et décroissantes.

La fonction de Bessel modifiée de troisième espèce vérifie deux propriétés fondamentales, à savoir une propriété de récurrence extrêmement utile :

$$K_{v+1}(x) = K_{v-1}(x) + \frac{2v}{x} K_v(x)$$

Et une expression intégrale :

$$K_v(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty u^{v-1} \exp\left[-\frac{1}{2}x\left(u + \frac{1}{u}\right)\right] du$$

En particulier, on a :

$$K_{\frac{1}{2}}(x) = \int_0^\infty \exp\left[-\frac{1}{2}x\left(u^2 + \frac{1}{u^2}\right)\right] du = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$$

On peut également approcher asymptotiquement K_v pour des arguments très grands ou très petits. Ainsi on aura :

$$K_v(x) \approx \begin{cases} -\ln\left(\frac{x}{2}\right) - \gamma, & 0 < x \ll \sqrt{v+1}, v = 0 \\ \frac{\Gamma(v)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^v, & 0 < x \ll \sqrt{v+1}, v > 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}, & x \gg \left|v^2 - \frac{1}{4}\right| \end{cases}$$

On se reportera avec profit à Watson (1922) et Abramowitz et Stegun (1965) pour de plus amples détails sur les propriétés de ces fonctions.

B. Estimation des paramètres

Nous avons dans un premier temps exploré l'estimation des paramètres par la méthode de maximum de vraisemblance. Les résultats présentés ici se focalisent sur l'expression de la fonction de densité sous forme finie.

En posant : $\alpha v = 1$, $\sigma = \tilde{\sigma}\sqrt{\alpha}$ et $\theta = \alpha\tilde{\theta}$, la fonction de densité devient :

$$f_{x_t}(x_t) = \frac{\sqrt{2} \left(\frac{|x_t|}{\sqrt{2\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\theta}^2}}\right)^{\alpha t - \frac{1}{2}}}{\tilde{\sigma}\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha t)} \exp\left(\frac{\tilde{\theta}}{\tilde{\sigma}^2} x_t\right) K_{\alpha t - \frac{1}{2}}\left(\frac{|x_t|\sqrt{2\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\theta}^2}}{\tilde{\sigma}^2}\right)$$

Et la log-vraisemblance du modèle est alors donnée par :

$$\begin{aligned} L(t, \tilde{\theta}, \tilde{\sigma}, \alpha) = & \frac{T}{2} \log\left(\frac{2}{\pi}\right) + \sum_{t=1}^T \frac{\tilde{\theta} x_t}{\tilde{\sigma}^2} - \sum_{t=1}^T \log(\Gamma(\alpha t) \tilde{\sigma}) \\ & + \sum_{t=1}^T \log\left(K_{\alpha t - \frac{1}{2}}\left(\frac{|x_t|\sqrt{2\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\theta}^2}}{\tilde{\sigma}^2}\right)\right) \\ & + \sum_{t=1}^T \left(\alpha t - \frac{1}{2}\right) \left[\log\left(|x_t| - \frac{1}{2} \log(2\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\theta}^2)\right)\right] \end{aligned}$$

L'optimisation directe de cette fonction de vraisemblance apparait difficile dans son implémentation, car les algorithmes ont tôt fait de diverger. Par ailleurs, le résultat reste fortement influencé par les valeurs initiales des paramètres. Pour essayer de surmonter ce problème, il est souvent recommandé dans la littérature y

consacrée d'initialiser les paramètres à leur valeur obtenue par la méthode des moments.

En considérant la densité ayant servi au calcul de la log-vraisemblance, la moyenne, la variance, le skewness et le kurtosis du modèle sont donnés comme suit (Angela Loregian and al.) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(X) = \alpha \tilde{\theta} \\ Var(X) = \alpha(\tilde{\theta}^2 + \tilde{\sigma}^2) \\ skew(X) = \frac{\tilde{\theta}(2\tilde{\theta}^2 + 3\tilde{\sigma}^2)}{\sqrt{\alpha} \sqrt{(\tilde{\theta}^2 + \tilde{\sigma}^2)^3}} \\ kurt(X) = 3 \left\{ 1 + \frac{2\tilde{\theta}^4 + \sigma^4 + 4\sigma^2\theta^2}{\alpha(\theta^2 + \sigma^2)^2} \right\} \end{array} \right.$$

En utilisant les trois premières égalités comme les conditions de la méthode des moments généralisée, on obtient les estimations et les statistiques figurant au tableau 6 pour la population féminine (le récapitulatif des estimations obtenues pour les hommes est en annexe) :

Paramètres	Estimation	Std. Error	t value	Pr(> t)
$\tilde{\theta}_0$	-7,43096	3,3658	-2,20779	0,02726
$\tilde{\sigma}_0$	1,82495	0,4849	3,78419	0,00015
α_0	0,25884	413,81	0,00063	0,99984

Tableau 6 : paramètres modifiés du modèle Variance-Gamma (Femmes)

Ce qui donne pour la méthode des moments les valeurs suivantes de nos paramètres :

Paramètres	Femmes	Hommes
$\hat{\theta}_0$	-1,9234	-1,3425
$\hat{\sigma}_0$	0,9336	0,6594
$\hat{\nu}_0$	3,8634	5,5475

Tableau 7 : paramètres du modèle Variance-Gamma (Femmes)

On observera que la valeur estimée de θ est sensiblement égale à la moyenne de la série différenciée des κ_t qui est de -1,9394 pour les femmes et -1,3620 pour les hommes.

Nous avons donc implémenté la log-vraisemblance en initialisant nos paramètres à leur première approximation par la méthode des moments. Toutefois, l'exécution des codes R mise en œuvre n'a pas donné de résultats probants.

Nous avons alors résolu pour la suite de l'étude de retenir comme valeur de nos paramètres la première approximation obtenue par la méthode des moments.

C. Projection

Partant de ces valeurs, nous avons simulé des processus variance gamma suivant la procédure ci-après :

- Input : X_t un processus VG de paramètres θ, σ, ν – espacement de temps Δt_i avec $\sum_{i=1}^N \Delta t_i = T$ où $T = N$
- Initialisation : Prendre $X_0 = 0$
- Boucle : Pour $i = 1$ à N ,

1. Générer indépendamment $\Gamma_{\Delta t_i} \left(\frac{\Delta t_i}{\nu}, \frac{1}{\nu} \right)$ et $N(0,1)$

2. Prendre $X_{t_i} = X_{t_{i-1}} + \theta \Gamma_{\Delta t_i} \left(\frac{\Delta t_i}{\nu}, \frac{1}{\nu} \right) + \sigma \sqrt{\Gamma_{\Delta t_i} \left(\frac{\Delta t_i}{\nu}, \frac{1}{\nu} \right)} N_i(0,1)$

Ce qui donne pour notre composante temporelle κ_t la projection suivante pour la population féminine :

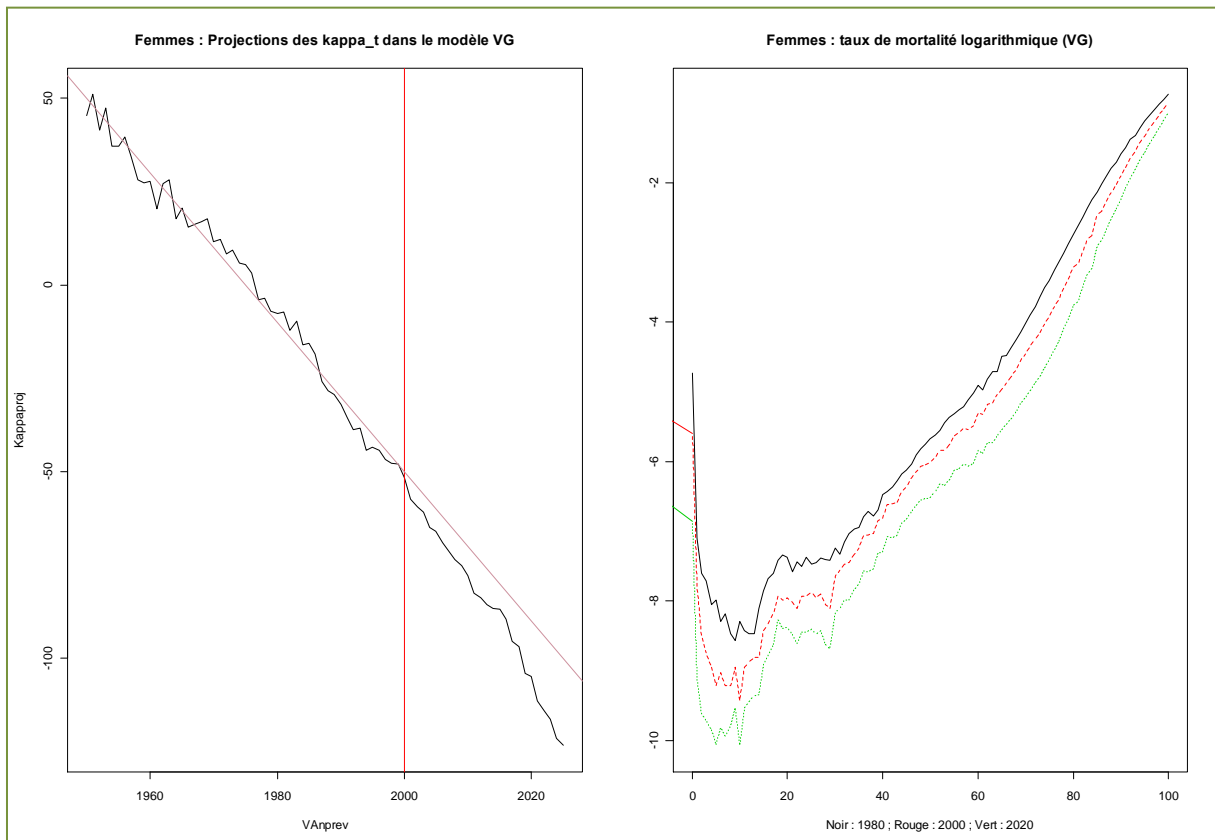


Figure 17 : Projections des κ_t et évolution des taux centraux de la population féminine obtenue par VG

V. LA MODELISATION DES K_T PAR UN PROCESSUS NORMAL INVERSE GAUSSIEN

A. Présentation du modèle

La distribution normale inverse gaussienne a été introduite par Barndorff-Nielsen (1995, 1997) pour la modélisation des rendements d'actifs. Son nom dérive de sa représentation comme la distribution d'un mouvement brownien avec drift soumis à un changement de temps distribué suivant un processus inverse gaussien.

Les trajectoires d'un processus normal inverse gaussien (NIG) sont utilisées pour décrire les mouvements composés d'un très grand nombre de petits sauts.

Comme pour le processus variance gamma, nous supposons ici également que c'est la série différenciée des κ_t qui est distribuée suivant un processus normal inverse gaussien. On pose alors :

$$\kappa_t - \kappa_{t-1} = X_t$$

Où X_t suit un processus normal inverse gaussien spécifié comme suit :

$$X_t = \theta Z_t(v) + \sigma W(Z_t(v))$$

Notre modèle est ainsi caractérisé par trois paramètres :

- Le drift du mouvement brownien : θ
- La volatilité du mouvement brownien : σ
- La variance du changement de temps inverse gaussien : v

La densité du NIG usuellement rencontrée a été introduite par Barndorff-Nielsen et est définie par :

$$f(x, \alpha, \beta, \delta) = \frac{\alpha}{\pi} \exp\left(\delta t \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right) \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x}{\delta t}\right)^2}} e^{\beta x} K_1\left(\delta t \alpha \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\delta t}\right)^2}\right)$$

On fera la remarque qu'un quatrième paramètre μ est parfois introduit aux fins de « recentrer » la variable x .

Une autre forme de la densité coexiste toutefois chez certains auteurs, notamment chez Cont et Tankov :

$$f(x, \theta, \sigma, \kappa) = \frac{t}{\pi \sigma \sqrt{v}} e^{\frac{t}{v}} \sqrt{\theta^2 + \frac{\sigma^2}{v}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{t^2 \sigma^2}{v}}} e^{\frac{\theta}{\sigma^2} x} K_1\left[\frac{\theta^2 + \frac{\sigma^2}{v}}{\sigma^2} \sqrt{x^2 + \frac{t^2 \sigma^2}{v}}\right]$$

Le passage entre les deux paramétrisations est peu évident de prime abord, et plusieurs incohérences de détail apparaissent lorsque l'on compare les résultats

suivant les choix des auteurs. Néanmoins, pour les deux formes de la densité mises en avant, on peut obtenir numériquement une intégrale qui est bien égale à 1 :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, \theta, \sigma, \kappa) dx = 1$$

Le changement de paramétrisation est le suivant :

$$\begin{cases} \delta = \sigma \\ \beta = \theta / \sigma^2 \\ \alpha = \frac{1}{\sigma^2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{\nu^2} + \theta^2} \end{cases}$$

B. Estimation des paramètres

A partir de la forme de la densité de Cont et Tankov, nous avons implémenté l'estimation par la méthode du maximum de vraisemblance. Comme pour le variance gamma, la littérature portant sur l'estimation des rendements d'actifs financiers souligne également la complexité de la mise en œuvre de cette méthode. Nous avons donc tenté une estimation de la valeur initiale des paramètres par la méthode des moments généralisée. Cette méthode, en indiquant des problèmes de convergence, donne les valeurs du triplet $(-1.94, 3.89, -9 \cdot 10^{-6})$ pour nos paramètres (θ, σ, ν) .

Nous avons donc tenté une résolution numérique par la méthode de Newton des trois équations entre les moments empiriques et leur expression avec nos paramètres. Là également on obtient comme triplet solution $(-1.93, 3.89, 4 \cdot 10^{-10})$.

La minimisation de la log-vraisemblance avec des paramètres initiaux arbitraires donne des résultats du même ordre tout en signalant des problèmes de convergence.

A l'évidence, ces paramètres ne sont pas satisfaisants car la simulation d'un inverse gaussien avec une valeur de ν qui est très proche de zéro est impossible. La procédure s'apparenterait autrement de très près à celle mise en œuvre précédemment pour le processus gamma.

L'implémentation des trois procédures pour l'autre forme de densité ne donne pas non plus de résultats probants.

VI. COMPARAISON DE LA PERFORMANCE DE PREDICTION DES MODELES DE LEVY ET DE LEE CARTER

En vue de tester la performance des modèles qui ont pu être calibrés à anticiper le taux réel de mortalité constaté, nous avons simulé pour chacun de ces modèles 1 000 trajectoires et calculé le taux de mortalité moyen estimé par âge et par année de projection selon la formule suivante :

$$\bar{u}_{xt} = E(\hat{u}_{xt}^i) = E\left(\exp(a_x + \beta_x \hat{k}_t^i)\right) = \frac{1}{Nsim} \sum_{i=1}^{Nsim} \exp(a_x + \beta_x \hat{k}_t^i)$$

Où *Nsim* est le nombre de simulations

Pour les analyses, nous avons limité la période de projection à 2001-2007. Pour cette période, nous disposons des taux de mortalité historiques. Ils peuvent alors être comparés avec les prévisions des modèles et vérifier ainsi la capacité desdits modèles à prévoir l'évolution de la mortalité dans le temps.

Les graphiques ci-dessous (figure 18) donnent à titre d'exemple la comparaison de l'évolution du niveau du taux de mortalité aux âges 20, 30 et 60 ans de la population féminine.

D'une manière générale, on observe que les modèles avec sauts ont des prévisions plus près de la réalité que le modèle de Lee Carter dit classique.

En outre, les taux donnés par le modèle de Lee Carter classique se situent toujours au dessus des taux réels et des taux des modèles prenant en compte les sauts. Les taux de Lee Carter surestiment ainsi les risques décès et partant les engagements qui y sont relatifs, mais sous-estiment le risque de longévité et ses engagements de long terme.

Aux grands âges, les taux issus des modèles avec sauts se rapprocheraient d'avantage de la réalité et seraient des taux prudents pour les âges où commencent généralement les paiements de rente (les personnes âgées de 60 ans et plus).

L'ensemble de ces observations restent valables pour la population masculine (voir les graphiques en annexes).

Sur la période 2001-2007, l'évolution de la mortalité de chaque modèle et par âge est jointe en annexe.

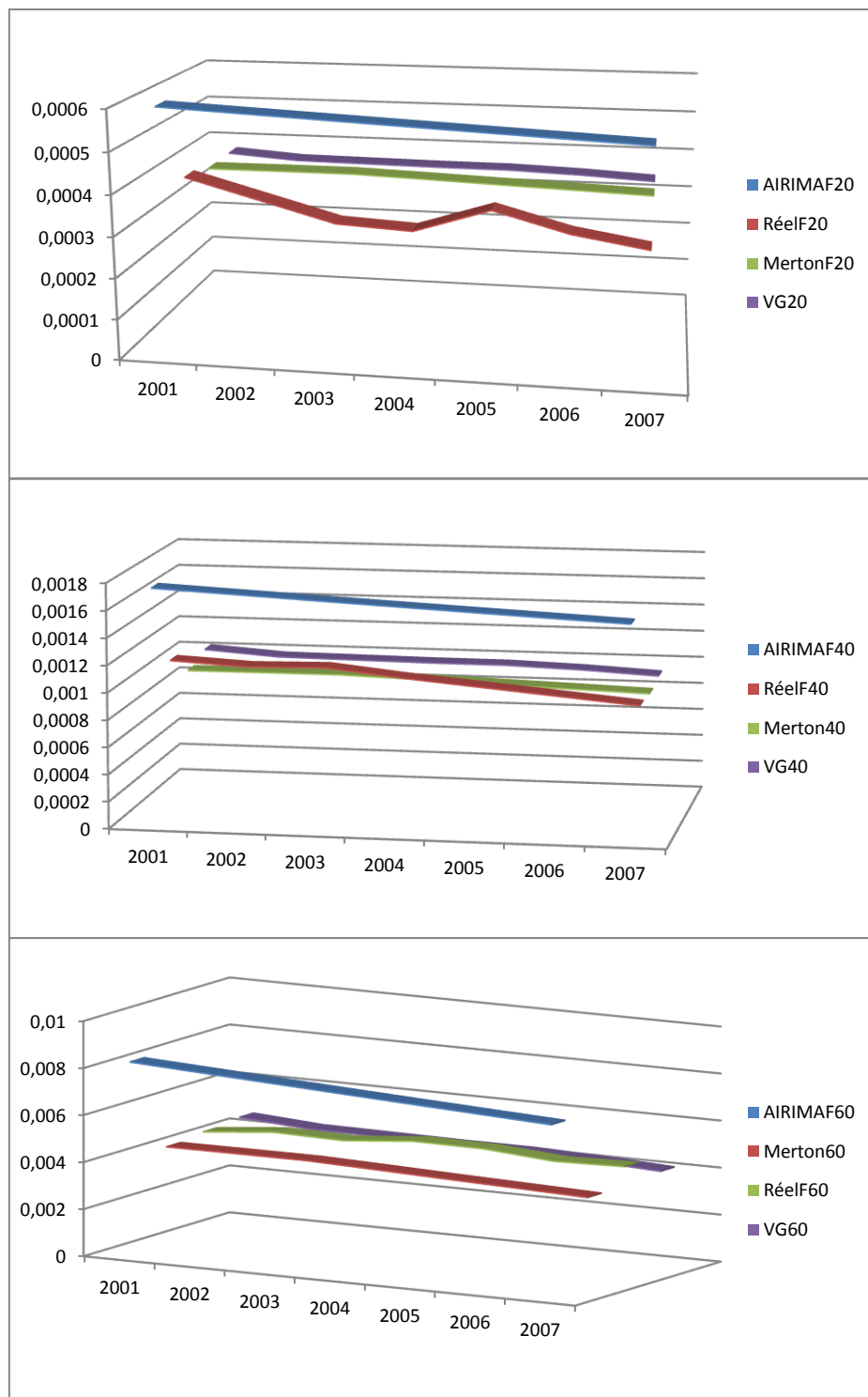


Figure 18 : Comparaison du taux de mortalité des modèles avec les taux réels

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons examiné l'extension multifactorielle du modèle de Lee Carter proposée par Renhaw-Haberman ainsi que l'utilisation de processus de Levy pour la modélisation de la composante temporelle du taux de mortalité.

Pour la calibration, nous nous sommes appuyés sur les données relatives à la population française disponibles sur le site « The Human Mortality Database » (HMD).

Afin d'isoler la composante temporelle dont la modélisation est l'objet principal de ce mémoire, nous avons déroulé les différentes étapes de l'estimation des paramètres du modèle de Lee Carter. L'analyse des composantes extraites ne laisse apparaître aucune structure particulière par rapport à ce qui est généralement observé dans l'évolution de la mortalité. On pourrait toutefois souligner une tendance chaotique de la décroissance de la composante temporelle κ_t jusqu'au début des années 1970, fait de sauts sporadiques, tout particulièrement chez les hommes. Toujours chez les hommes, une rupture de pente correspondant à un déclin plus rapide de la mortalité s'observe en 1970. Ces deux observations mettent en exergue les deux types de risques auxquels peut faire face toute société d'assurances dont les opérations dépendent de la durée de la vie humaine, le risque de mortalité et le risque de longévité.

Comme attendu, l'ajout de termes supplémentaires dans la spécification du modèle à deux facteurs de Renshaw-Haberman permet de mieux capter certains aspects non révélés par le modèle de Lee Carter classique. Un axe d'étude qui pourrait être exploré et que nous n'avons pas pu aborder dans la présente étude est la modélisation de la dépendance entre les deux facteurs temporels du modèle de Renshaw-Haberman. Cette dépendance pourrait être examinée au travers des copules. En effet, avec la structure non régulière de la deuxième composante temporelle, on pourrait alors caractériser cette dépendance sans une préoccupation relative à la détermination des lois marginales. Une fois cette dépendance identifiée, la modélisation temporelle pourrait ainsi se réduire à la seule composante semblable en structure à celui identifié dans le modèle de Lee Carter classique.

Pour ce qui est de l'approche classique du κ_t par une série ARIMA, on constate sans surprise qu'elle ne capture que la tendance de l'évolution de ce paramètre. Il n'est donc pas étonnant que les dernières recherches prouvent la supériorité des modèles incorporant des diffusions de sauts sur ceux sans prise en compte des discontinuités.

Dès lors nous avons considéré dans la deuxième partie de notre étude la possibilité de modéliser la composante temporelle du taux de mortalité par des processus de sauts à activité finie (les modèles de Merton et de Kou), mais également par les

browniens subordonnés à activité infinie (les processus variance gamma et normal inverse gaussien). Pour les processus dont les densités sont connues, nous avons envisagé une calibration par la méthode du maximum de vraisemblance. Autrement, les possibilités de la méthode des moments et de l'approximation d'Edgeworth ont été explorées pour le processus de Kou dont la densité n'est pas connue.

A l'issue de la mise en œuvre de ces méthodes, nous n'avons, du fait de divergences, pu calibrer que le modèle de Merton (par maximum de vraisemblance) et le processus variance gamma (par la méthode des moments).

Comme observé par Nik Tuzov (2006) pour les actifs financiers, l'application de la méthode des moments pour l'estimation des paramètres du modèle de sauts exponentiel double de Kou a abouti dans notre étude sur un échec également. Nous pouvons donc conclure avec lui que dans l'incapacité de pouvoir établir d'autres conditions pour les paramètres du modèle, les praticiens voulant utiliser ce processus pour suivre la dynamique des taux de mortalité devront recourir à la méthode de maximum de vraisemblance mis en œuvre dans le secteur financier par approche d'une densité de transition (Ramezani et Zeng (1998)) et utilisé par Brockett *et al.* (2010) pour modéliser de la dynamique du κ_t , avec toutefois des coûts en calcul importants fréquemment soulignés à prendre en compte.

Concernant le processus normal inverse gaussien, dont la densité est explicitement connue, ni la méthode du maximum de vraisemblance, ni les résolutions numériques utilisant les correspondances entre les moments et les cumulants n'ont donné de résultats satisfaisants. Chou *et al.* (2010) ayant obtenu des résultats probants pour la calibration des processus hyperboliques généralisés dont le variance gamma et le normal inverse gaussien sont des cas particuliers, les difficultés rencontrées dans le cadre de cette étude pourraient résulter de problèmes d'instabilité numérique.

Dans la dernière partie de l'étude, les modèles calibrés ont été utilisés pour projeter les taux de mortalité afin de les comparer avec les taux donnés par le modèle de Lee Carter classique. Globalement, on constate que les taux obtenus par les processus de Levy qui intègrent les sauts de diffusion donnent de meilleurs résultats que le modèle de Lee Carter classique. Aux grands âges, ces modèles matcheraient quasi-parfaitement les taux réels.

Il faut souligner que comme cette étude, la plupart des études réalisés jusqu'à présent pour l'incorporation des processus de Levy au modèle de Lee Carter ont porté sur la population globale. Il serait donc utile d'explorer la mise en œuvre de ces modèles sur des populations d'assurés dont le comportement démographique pourrait être sensiblement différent de celui de la population dans son ensemble.

BIBLIOGRAPHIE

I. OUVRAGES

1. Abramowitz, M., Stegun, I. (1965) : Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, New-York, Chap. 9
2. Applebaum D. (2009) : Lévy processes and stochastic calculus. Cambridge university press.
3. Cont R. and Tankov P. (2004) : Financial modelling with jump processes. Chapman & Hall, CRC financial mathematics series.
4. Delwarde A., Denuit M. (2005) : Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives. Economica.
5. Stuart Alan and Ord Keith (1977) : Kendall's Advanced Theory of statistics, Volume I, Distribution theory, sixth edition, Kendall's Library of statistics.

II. ARTICLES

6. Barndorff-Nielsen (1995) : Normal Inverse Gaussian processes and the modeling of stock returns, Research reports, Department of theoretical statistics-Institute of mathematics, University of AARHUS.
7. Barndorff-Nielsen (1997) : Processes of Normal Inverse Gaussian type, Finance And Stochastics, Vol 2 No 1.
8. Biffis, E. (2005) : Affine Processes for Dynamic Mortality and Actuarial Valuations, Insurance: Mathematics and economics 37, 443-468.
9. Mathematics and Economics, 37: 443-468
10. Brockett Patrick L, Deng Yinglu and MacMinn Richard D. (2010) : Longevity/Mortality Risk Modeling and Securities Pricing, McCombs Research Paper Series No. IROM-05-10, University of Texas at Austin
11. Booth H, Maindonald J, Smith L (2002): Applying Lee-Carter under conditions of variable mortality decline. Popul Stud (Camb).
12. Brouhns, N., M. Denuit, and J. K. Vermunt (2002) : A Poisson Log-Bilinear Regression Approach to the Construction of Projected Lifetables. Insurance: Mathematics and Economics 31: 373-93.
13. Cairns, A. J. G., D. Blake and K. Dowd (2006a) : Pricing Death: Frameworks for the Valuation and Securitization of Mortality Risk. ASTIN Bulletin. 36(1): 79-120.
14. Cairns, A. J. G., D. Blake and K. Dowd (2006b) : A Two-Factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration. The Journal of Risk and Insurance. 73(4): 687-718.
15. Cairns A.J.C.(2008) : Modelling and management of mortality risk: a review. Scandinavian Actuarial Journal 2-3, p79-113.

- 16.Charlier, C. (1905) : Über das Fehlergesetz. Ark. Math. Astr. och Phys. 2, No. 8, 1-9.
- 17.Chen, H. Cox, S. H. (2009) : Modeling Mortality with Jumps: Applications to Mortality Securitization. Journal of Risk and Insurance, 76(3): 727-751.
- 18.Chou-Wen Wang, Hong-Chih Huang and I-Chien Liu (2010) : Stochastic Mortality Modeling with Lévy processes.
- 19.Cox, S. H., Y. Lin, Wang S. S.. (2006) : Multivariate Exponential Tilting and Pricing Implications for Mortality Securitization. The Journal of Risk and Insurance. 73(4): 719-736.
- 20.Dowd, K., Cairns, A. J. G., D. Blake, G. D. Coughlan, D. Epstein, Khalaf-Allah M. (2008) : Evaluating the goodness of fit of stochastic mortality models. Pensions Institute Discussion Paper PI-0802.
- 21.Fu M. (2007) : Variance-Gamma and Monte Carlo. Advances in mathematical finance, M.C. Fu, R.A. Jarrow, J.-Y. Yen, and R.J. Elliott (Editors), Birkhäuser, Boston, MA, 2007, p. 21-35.
- 22.Guterman S., Vanderhoof I. T. (1999) : Forecasting changes in mortality: a search for a law of causes and effects. North American Actuarial Journal, 2, 135-138.
- 23.Hainaut D. (2010a) : Insurance: Mathematics and Economics 46: 470-478
- 24.Hainaut D. (2010b) : Multi Dimensions Lee-Carter model with switching mortality processes.
- 25.Hainaut D., Devolder P. (2008) : Mortality modelling with Lévy processes.
- 26.Kou, S.G. (2002) : A jump diffusion model for option pricing. Management Science 48 (8), 1086-1101.
- 27.Kou, S.G., Wang, H. (2004) : Option pricing under a double diffusion model. Management Science 50 (9), 117-1192.
- 28.Labahn G; (2003) : Closed form PDF for Merton's jump diffusion model. Working paper.
- 29.Lee, R. D., Carter L. (1992) : Modelling and Forecasting the Time Series of US Mortality. Journal of the American Statistical Association, 87(419): 659-671.
- 30.Lee, R. D. (2000) : The Lee-Carter Method of Forecasting Mortality, With Various Extensions and Applications. North American Actuarial Journal, 4(11): 80-93.
- 31.Lee, R. Miller. T. (2001) : Evaluating the Performance of Lee-Carter Mortality Forecasts. Demography. 38(4): 537-549.
- 32.Loregian Angela, Mercuri Lorenzo and Rroji Edit (2011) : Approximation of the variance gamma model with a finite mixture of normals, Dipartimento di Metodi Quantitativi per le Scienze Economiche ed Aziendali, Università degli Studi di Milano Bicocca. European Finance Review 2:79-105.
- 33.Madan D., Seneta E. (1990) : The Variance Gamma model for share market returns. The Journal of Business, 63:4, p511-524.

34. Madan D, Carr P., Chang E. (1998) : The Variance Gamma Process and Option Pricing.
35. McDonald A.S., Cairns A.J.C., Gwilt P.L., Miller K.A. (1998) : An international comparison of recent trends in mortality. *British Actuarial Journal*, 4, p3-141.
36. Merton, R. (1976) : Option Pricing when Underlying Stock Returns Are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1-2, pp. 125-144.
37. Pitacco E. (2004) : Survival models in a dynamic context: a survey. *Insurance: Mathematics and Economics*, 35 p279-298.
38. Planchet F., Lelièvre Vincent (2007) : Utilisation des méthodes de Lee Carter et Log-Poisson pour l'ajustement de tables de mortalité dans le cas de petits échantillons, *Bulletin Français d'Actuariat*, Vol. 7, n° 14, pp. 118-146.
39. Renshaw A.E., Haberman S. (2003a) : Lee-Carter mortality forecasting with age-specific enhancement. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33 p255-272.
40. Renshaw A., Haberman S. (2003b) : Lee-Carter mortality forecasting incorporating bivariate time series. *Actuarial Research Paper no 153*, Cass Business School, City University, London.
41. Renshaw, A.E. and S. Haberman (2003c) : On the forecasting of mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 32(3): p. 379-401.
42. Renshaw A., Haberman S. (2008) : Mortality, longevity and experiments with the Lee-Carter model. *Lifetime Data Anal* (2008) 14: 286-315.
43. Ramezani, Zeng (2004) : An empirical assessment of the double exponential jump-diffusion Process.
44. Sweeting P. (2009) : A Trend-Change Extension of the Cairns- Blake-Dowd Model. Working paper of the Pension Institute, Cass Business School.
45. Tuzov Nik (2006), GMM parameter estimation for the Double Exponential Jump-Diffusion Process, Purdue University.
46. Wallace, D. (1958) : Asymptotic Approximations to Distributions. *Ann. Math. Stat.* 29, 635-654.
47. Wang C.W., Liu Y.L. (2010) : Comparisons of Mortality Modelling and Forecasting — Empirical Evidence from Taiwan. *International Research Journal of Finance and Economics* (37).
48. Watson G. (1922) : A Treatise on the Theory of Bessel Functions. Cambridge University Press.
49. Wong-Fupuy C., Haberman (2004) : Projecting mortality trends: recent developments in the UK and the US. *North American Actuarial Journal*, 8, p56-83.

III. COURS

- 50. Cliff Kitchen (2009), Normal Inverse Gaussian process with applications in mathematical finance, University of Calgary
- 51. Planchet F. (2010) : Modèles de durée. IFSA.
- 52. Dénuit Michel () : Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives, Institut des Sciences Actuarielles.

IV. MEMOIRES

- 53. Guerin Laurent (2005), Construction de tables de mortalité féminines par génération à partir d'une approche par grandes causes médicales de décès - modélisations Lee-Carter.
- 54. Guette Vivien (2010), La prise en compte des catastrophes dans la modélisation de la mortalité, Centre d'études actuarielles.
- 55. Lelieur V (2005), Utilisation des méthodes de Lee-Carter et Log-Poisson pour l'ajustement de tables de mortalité dans le cas de petits échantillons.

V. SITE INTERNET

- 56. www.mortality.org

ANNEXES

I. Rappels sur la décomposition en valeurs singulières

Soit M une matrice carrée, on appelle vecteur propre de M pour la valeur propre λ le vecteur u qui vérifie $Mu = \lambda u$. On dit que M est diagonalisable si elle est semblable à la matrice diagonale de ses valeurs propres, i.e. s'il existe une matrice diagonale Λ et P inversible telles que $M = P \Lambda P^{-1}$. P est alors la matrice des vecteurs propres de M et on parle, pour la relation précédente, de décomposition en valeurs propres.

Soit désormais M une matrice de taille quelconque : on dit que σ est une valeur singulière de M si et seulement s'il existe deux vecteurs unitaires u et v (appelés vecteurs singuliers à gauche et à droite) tels que :

$$Mv = \sigma u \text{ et } {}^tMu = \sigma v$$

Le concept est, on le voit, assez proche de celui des valeurs propres, quoique beaucoup plus général car il concerne une matrice quelconque. On peut, comme on avait parlé de décompositions en valeurs propres, parler de décomposition en valeurs singulières (SVD). En notant Σ la matrice diagonale des valeurs singulières, U la matrice des vecteurs singuliers à gauche et V la matrice des vecteurs singuliers à droite on montre en effet que l'on peut réécrire M sous la forme :

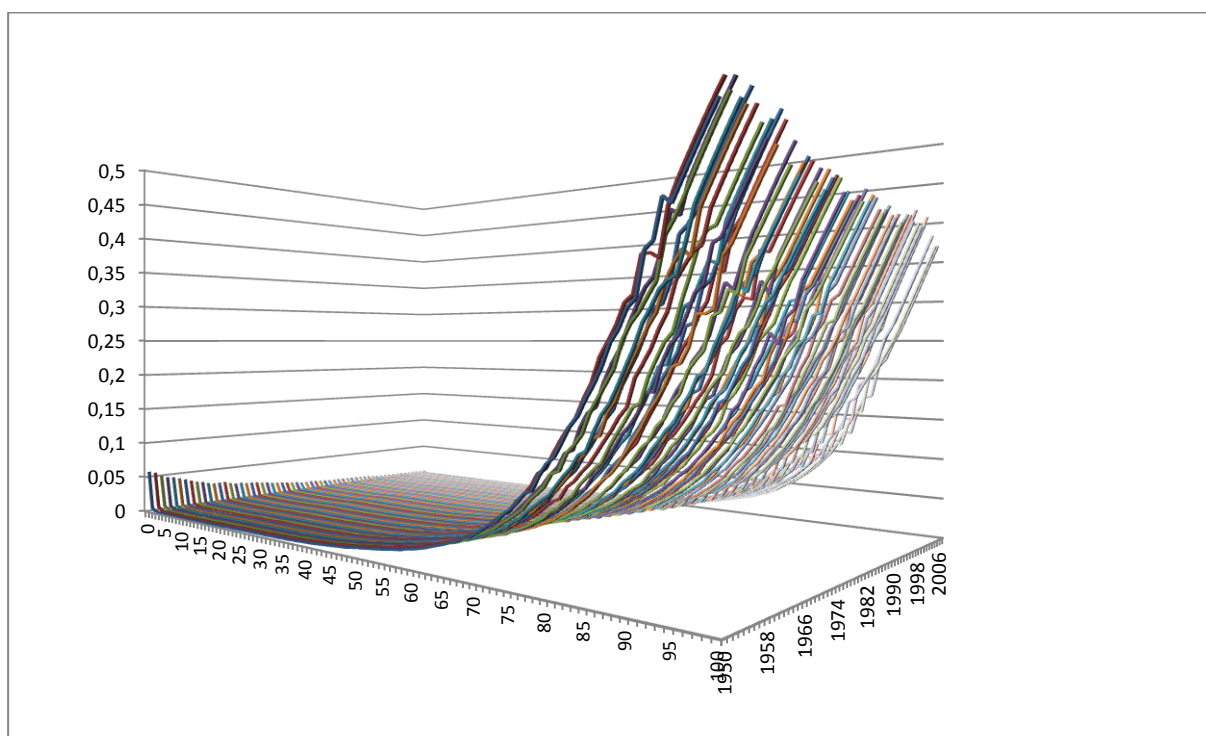
$$M = U\Sigma {}^tV$$

On peut d'emblée remarquer qu'il y a identité entre ces deux décompositions (et donc entre les valeurs propres et les valeurs singulières) dans le cas particulier où M est une matrice hermitienne semi-définie positive. De manière plus générale, le carré de la valeur absolue de chaque valeur singulière non nulle de M correspond à la valeur absolue de la valeur propre correspondante de tMM et de MtM . Par ailleurs, on retrouve les vecteurs propres de MtM dans les colonnes de U et ceux de tMM dans ceux de V . Ces propriétés découlent des égalités :

$${}^tMM = (V {}^t\Sigma {}^tU)(U\Sigma {}^tV) = V({}^t\Sigma \Sigma) {}^tV$$

$$M {}^tM = (U\Sigma {}^tV)(V {}^t\Sigma {}^tU) = U(\Sigma {}^t\Sigma) {}^tU$$

II. Evolution du taux brut de mortalité des hommes



III. Les paramètres du modèle de Lee Carter

1. Calcul des k_t

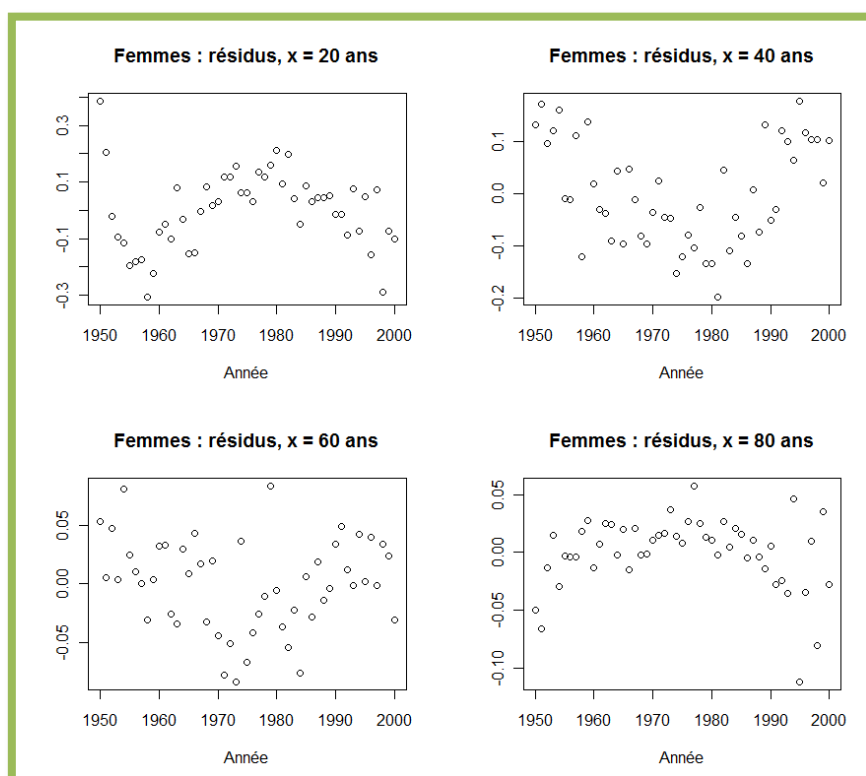
Année	Femmes	Hommes	Année	Femmes	Hommes
1950	45,36676	27,50662	1975	5,53473	6,82218
1951	51,06213	32,14612	1976	3,19659	5,42543
1952	41,48705	24,86798	1977	-3,99060	0,42542
1953	47,42687	29,78694	1978	-3,62318	1,29586
1954	37,16360	23,12339	1979	-6,92144	-1,34125
1955	37,27044	23,49145	1980	-7,63108	-2,30072
1956	39,68604	26,39932	1981	-7,12160	-2,69354
1957	34,50823	23,58336	1982	-12,03246	-6,17998
1958	28,17553	15,37619	1983	-9,60744	-5,03217
1959	27,38016	15,61769	1984	-15,96466	-8,96576
1960	27,87188	17,27508	1985	-15,60192	-8,46516
1961	20,41242	12,32137	1986	-18,46033	-11,06633
1962	27,19902	17,97381	1987	-25,76851	-15,96211
1963	28,16276	19,84235	1988	-28,29778	-19,08314
1964	17,85484	12,20880	1989	-29,29841	-20,38129
1965	20,72039	15,65733	1990	-32,06810	-22,62255
1966	15,48603	11,27122	1991	-35,44335	-24,85854
1967	16,37233	13,03707	1992	-38,76970	-27,23921
1968	16,89790	13,78996	1993	-38,26709	-27,29744
1969	17,76216	16,40809	1994	-44,24242	-31,19109
1970	11,68753	8,91896	1995	-43,36978	-31,11881
1971	12,18223	9,76741	1996	-44,18342	-31,89762
1972	8,41337	7,96779	1997	-46,69499	-34,87127
1973	9,38589	8,05178	1998	-47,64897	-35,92201
1974	5,87322	6,17479	1999	-47,92880	-37,45216
			2000	-51,60412	-40,59162

2. Calcul de α_x et β_x

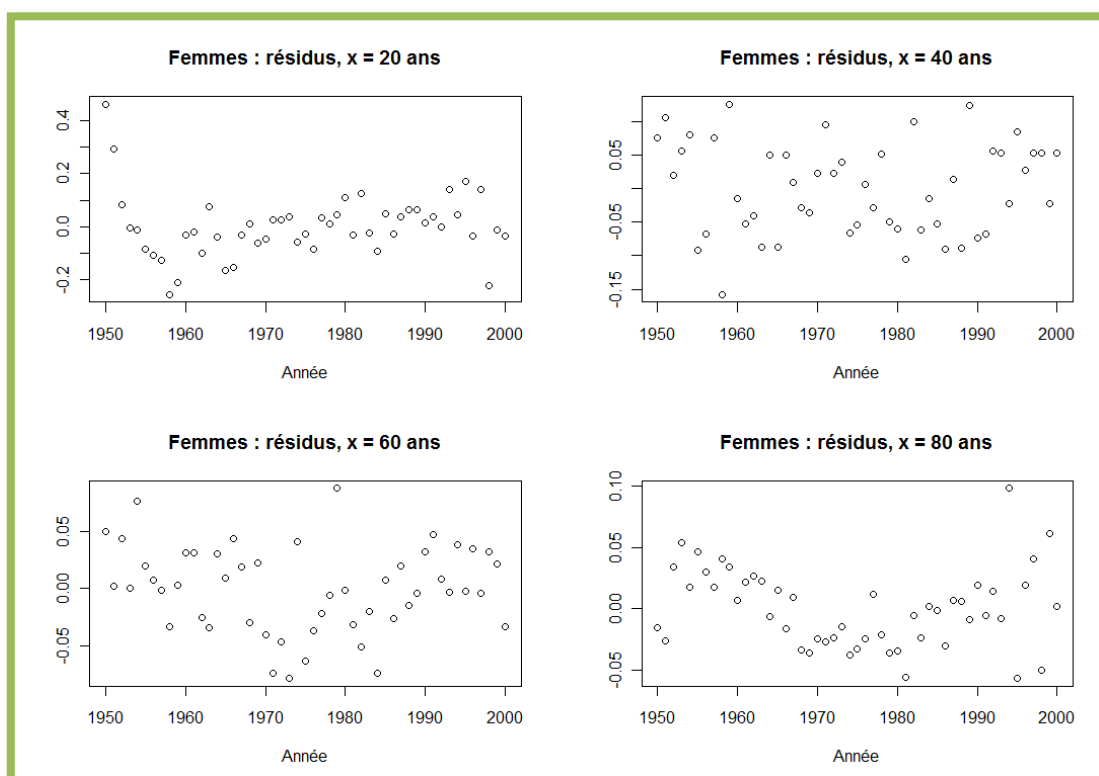
Age	Femmes		Hommes		Age	Femmes		Hommes	
	a_x	b_x	a_x	b_x		a_x	b_x	a_x	b_x
0	-4,40129	0,02420	-4,12759	0,03448	25	-7,36200	0,00987	-6,45782	0,00538
1	-6,79952	0,02531	-6,64101	0,03478	26	-7,31222	0,00982	-6,45889	0,00514
2	-7,45834	0,02064	-7,22493	0,02758	27	-7,28864	0,00987	-6,44403	0,00545
3	-7,76563	0,01834	-7,49016	0,02359	28	-7,25281	0,01085	-6,42374	0,00524
4	-7,96843	0,01700	-7,68186	0,02489	29	-7,19574	0,01074	-6,37944	0,00533
5	-8,08593	0,01598	-7,79097	0,02219	30	-7,12297	0,00980	-6,34809	0,00584
6	-8,19249	0,01477	-7,91046	0,02144	31	-7,07510	0,01013	-6,31762	0,00539
7	-8,31219	0,01355	-7,99327	0,02041	32	-6,99926	0,00975	-6,27744	0,00659
8	-8,35140	0,01102	-8,03172	0,02047	33	-6,94284	0,00995	-6,22145	0,00643
9	-8,45168	0,01097	-8,08621	0,01966	34	-6,86986	0,00951	-6,15425	0,00642
10	-8,47301	0,01203	-8,12042	0,01896	35	-6,77881	0,00972	-6,08657	0,00658
11	-8,46585	0,01105	-8,09353	0,01774	36	-6,70584	0,00945	-6,02469	0,00622
12	-8,38846	0,01073	-8,03134	0,01594	37	-6,63182	0,00980	-5,94597	0,00687
13	-8,36233	0,01031	-7,92712	0,01549	38	-6,55558	0,00945	-5,87189	0,00697
14	-8,20035	0,01022	-7,63647	0,01428	39	-6,49185	0,00873	-5,79386	0,00711
15	-7,97096	0,00937	-7,39306	0,01228	40	-6,39967	0,00910	-5,69878	0,00710
16	-7,84023	0,00851	-7,14454	0,01034	41	-6,31698	0,00869	-5,61978	0,00698
17	-7,67432	0,00834	-6,89132	0,00881	42	-6,25658	0,00897	-5,51715	0,00709
18	-7,54468	0,00642	-6,63189	0,00567	43	-6,15455	0,00873	-5,42914	0,00683
19	-7,49081	0,00764	-6,54317	0,00477	44	-6,08790	0,00858	-5,33594	0,00719
20	-7,46529	0,00796	-6,53288	0,00297	45	-5,99919	0,00872	-5,24880	0,00772
21	-7,45843	0,00860	-6,50434	0,00132	46	-5,91274	0,00903	-5,16117	0,00801
22	-7,41746	0,00929	-6,46867	0,00301	47	-5,82701	0,00898	-5,07471	0,00814
23	-7,41143	0,00978	-6,46290	0,00462	48	-5,75278	0,00910	-4,97458	0,00822
24	-7,39987	0,00971	-6,45733	0,00525	49	-5,67229	0,00892	-4,89497	0,00847

Age	Femmes		Hommes		Age	Femmes		Hommes	
	a_x	b_x	a_x	b_x		a_x	b_x	a_x	b_x
50	-5,59152	0,00931	-4,79860	0,00899	50	-3,05332	0,01126	-2,52973	0,01073
51	-5,52698	0,00920	-4,71859	0,00920	75	-3,29999	0,01161	-2,71859	0,01085
52	-5,44060	0,00910	-4,63667	0,00922	76	-3,17696	0,01154	-2,62508	0,01085
53	-5,37351	0,00950	-4,55800	0,00941	77	-3,05332	0,01126	-2,52973	0,01073
54	-5,30375	0,00943	-4,46813	0,00966	78	-2,93078	0,01096	-2,43376	0,01044
55	-5,23649	0,00938	-4,38617	0,00944	79	-2,80427	0,01069	-2,33732	0,01055
56	-5,16799	0,00959	-4,30683	0,01008	80	-2,68216	0,01030	-2,23818	0,01006
57	-5,08523	0,00968	-4,22794	0,01003	81	-2,56246	0,00999	-2,14196	0,00971
58	-5,01491	0,00988	-4,14794	0,01015	82	-2,43747	0,00954	-2,04004	0,00940
59	-4,93235	0,01006	-4,06759	0,01003	83	-2,31499	0,00918	-1,94508	0,00888
60	-4,84944	0,01012	-3,98235	0,00973	84	-2,19755	0,00870	-1,85092	0,00873
61	-4,77637	0,01038	-3,90422	0,00983	85	-2,08443	0,00815	-1,75586	0,00830
62	-4,68025	0,01041	-3,82504	0,00988	86	-1,97094	0,00787	-1,65761	0,00830
63	-4,59757	0,01079	-3,74259	0,00981	87	-1,85988	0,00751	-1,57326	0,00788
64	-4,50369	0,01098	-3,66531	0,00994	88	-1,75652	0,00697	-1,48053	0,00753
65	-4,40716	0,01106	-3,58588	0,01003	89	-1,65195	0,00661	-1,39361	0,00725
66	-4,30939	0,01114	-3,50696	0,01019	90	-1,55185	0,00627	-1,31143	0,00657
67	-4,21494	0,01123	-3,42520	0,01020	91	-1,46033	0,00567	-1,21946	0,00635
68	-4,10820	0,01141	-3,33784	0,01027	92	-1,36245	0,00544	-1,14690	0,00606
69	-4,00063	0,01153	-3,25791	0,01044	93	-1,27831	0,00498	-1,07164	0,00523
70	-3,88833	0,01169	-3,16661	0,01047	94	-1,18990	0,00471	-0,99731	0,00479
71	-3,77804	0,01177	-3,08242	0,01058	95	-1,09263	0,00444	-0,93131	0,00486
72	-3,65942	0,01178	-2,99311	0,01056	96	-1,00969	0,00407	-0,86428	0,00452
73	-3,54370	0,01169	-2,90389	0,01073	97	-0,93049	0,00371	-0,80037	0,00418
74	-3,42005	0,01165	-2,81269	0,01085	98	-0,85515	0,00336	-0,73963	0,00385
					99	-0,78376	0,00302	-0,68209	0,00353
					100	-0,71640	0,00270	-0,62775	0,00322

IV. Les graphes de l'analyse des résidus des femmes du modèle de Lee Carter et du modèle RH



Graphes des résidus du modèle de Lee-Carter (Femmes)



Graphes des résidus du modèle de Renshaw-Haberman (Femmes)

V. Les coefficients de la tendance linéaire des k_t (avec t la valeur année)

Hommes	Estimat.	Std Error	t value	Pr(> t)
Intercept	2 682,04	84,6095	31,7	< 2.10 ⁻¹⁶
t	-1,358	0,0428	-31,7	<2.10 ⁻¹⁶
RSE	4,503 on 49 DF			
Mult R-squared	0,9535	Adj. R-squared	0,9526	
F-statistics	1005 on 1 and 49 DF, p-value<2,2.10 ⁻¹⁶			

Femmes	Estimat.	Std Error	t value	Pr(> t)
Intercept	-3941,5404	69,3676	56,96	< 2.10 ⁻¹⁶
t	-1,9998	0,03511	56,96	<2.10 ⁻¹⁶
RSE	3,69 on 49 DF			
Mult R-squared	0,9851	Adj. R-squared	0,9848	
F-statistics	3245 on 1 and 49 DF, p-value<2,2.10 ⁻¹⁶			

VI. Les coefficients du modèle ARIMA

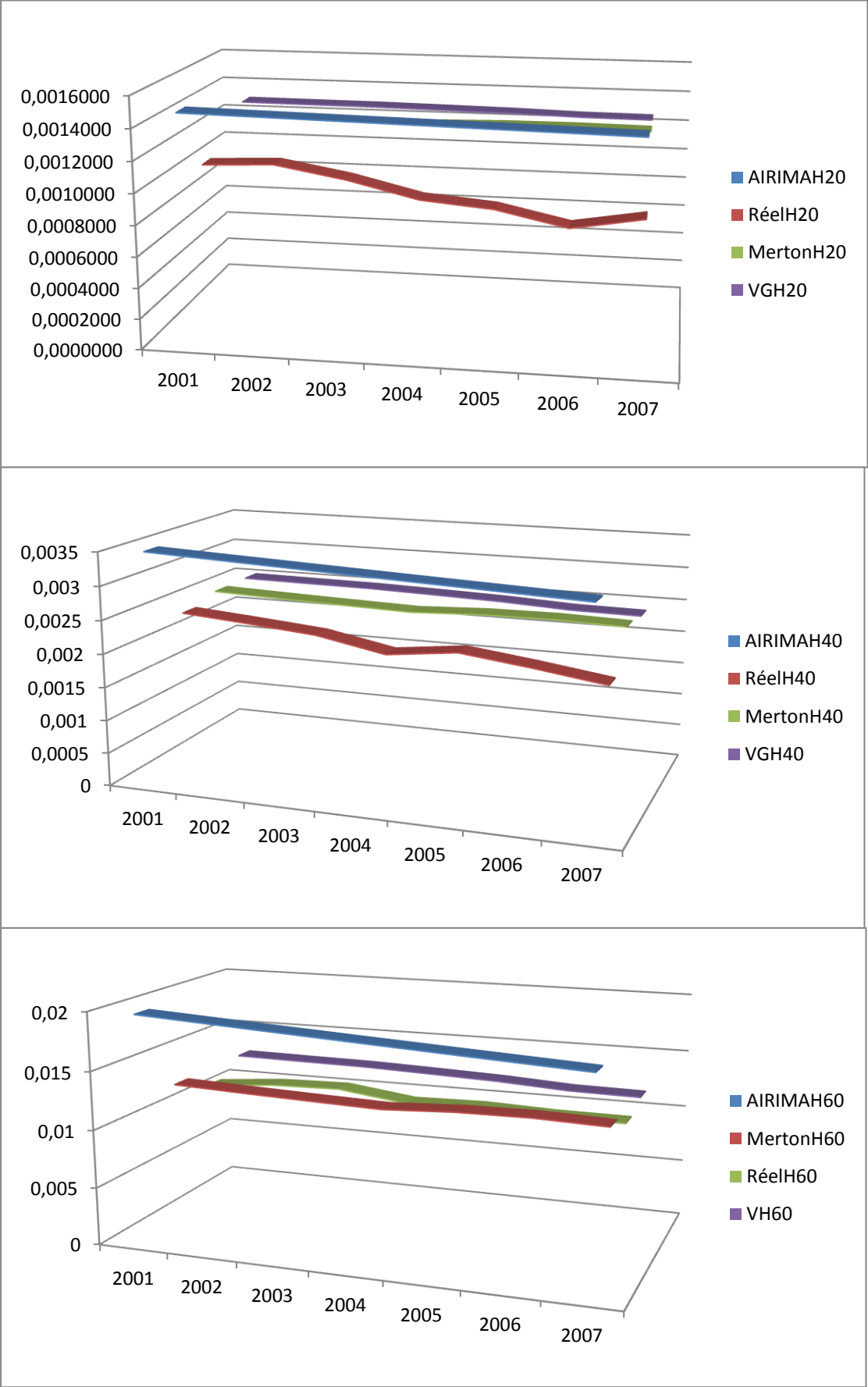
Femmes	AR1	MA1
	-0,32	-0,4449
se	0,2034	0,1892
sigma^2	as 9,19	
Log lik.	-126,7	
AIC	259,41	

Hommes	AR1
	-0,52
se	0,1004
sigma^2	as 7,642
Log lik.	-121,95
AIC	247,9

VII. Estimation des paramètres VG (hommes)

	Valeur estimée	Std. Error	t value	Pr(> t)
$\tilde{\theta}_0$	-7,44776	1,60759	-4,63287	0
$\tilde{\sigma}_0$	1,553	0,27831	5,5801	0
α_0	0,18026	350,21494	0,00051	0.99959
Paramètres	Valeur MM			
$\hat{\theta}_0$	-1,3425			
$\hat{\sigma}_0$	0,6594			
$\hat{\nu}_0$	5,5475			

VIII. Comparaison des taux projetés des hommes suivant les modèles



IX. Les taux centraux projetés

1. Les femmes

a. ARIMA

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
0	0,0139585	0,0133515	0,0127708	0,0122154	0,0116841	0,0111760	0,0106899
1	0,0012761	0,0012181	0,0011628	0,0011099	0,0010595	0,0010113	0,0009654
2	0,0006440	0,0006201	0,0005970	0,0005748	0,0005534	0,0005328	0,0005129
3	0,0004678	0,0004523	0,0004373	0,0004229	0,0004088	0,0003953	0,0003822
4	0,0003792	0,0003676	0,0003563	0,0003453	0,0003347	0,0003244	0,0003144
5	0,0003354	0,0003256	0,0003162	0,0003071	0,0002982	0,0002896	0,0002812
6	0,0002995	0,0002915	0,0002837	0,0002761	0,0002687	0,0002615	0,0002545
7	0,0002640	0,0002575	0,0002512	0,0002450	0,0002390	0,0002331	0,0002274
8	0,0002504	0,0002454	0,0002405	0,0002357	0,0002309	0,0002263	0,0002218
9	0,0002265	0,0002219	0,0002175	0,0002132	0,0002089	0,0002048	0,0002007
10	0,0002229	0,0002181	0,0002133	0,0002086	0,0002041	0,0001996	0,0001953
11	0,0002234	0,0002189	0,0002145	0,0002102	0,0002060	0,0002018	0,0001978
12	0,0002409	0,0002362	0,0002316	0,0002271	0,0002227	0,0002183	0,0002141
13	0,0002468	0,0002421	0,0002376	0,0002331	0,0002287	0,0002245	0,0002202
14	0,0002900	0,0002846	0,0002793	0,0002741	0,0002690	0,0002640	0,0002591
15	0,0003631	0,0003569	0,0003508	0,0003448	0,0003390	0,0003332	0,0003275
16	0,0004119	0,0004055	0,0003992	0,0003931	0,0003870	0,0003810	0,0003750
17	0,0004858	0,0004784	0,0004712	0,0004640	0,0004570	0,0004500	0,0004432
18	0,0005474	0,0005410	0,0005347	0,0005284	0,0005222	0,0005161	0,0005100
19	0,0005815	0,0005734	0,0005654	0,0005575	0,0005498	0,0005421	0,0005345
20	0,0005976	0,0005889	0,0005803	0,0005719	0,0005636	0,0005554	0,0005474
21	0,0006037	0,0005943	0,0005850	0,0005758	0,0005668	0,0005579	0,0005491
22	0,0006313	0,0006206	0,0006101	0,0005998	0,0005897	0,0005797	0,0005699
23	0,0006368	0,0006255	0,0006143	0,0006034	0,0005926	0,0005821	0,0005717
24	0,0006440	0,0006326	0,0006214	0,0006104	0,0005996	0,0005890	0,0005786
25	0,0006694	0,0006574	0,0006456	0,0006340	0,0006226	0,0006114	0,0006004
26	0,0007034	0,0006908	0,0006784	0,0006663	0,0006544	0,0006427	0,0006312
27	0,0007204	0,0007074	0,0006947	0,0006822	0,0006699	0,0006579	0,0006461
28	0,0007505	0,0007357	0,0007212	0,0007070	0,0006930	0,0006794	0,0006660
29	0,0007942	0,0007786	0,0007634	0,0007485	0,0007339	0,0007196	0,0007055
30	0,0008498	0,0008347	0,0008198	0,0008051	0,0007908	0,0007766	0,0007628
31	0,0008931	0,0008766	0,0008604	0,0008446	0,0008290	0,0008137	0,0007987
32	0,0009615	0,0009444	0,0009276	0,0009112	0,0008950	0,0008791	0,0008635
33	0,0010184	0,0009999	0,0009818	0,0009640	0,0009466	0,0009294	0,0009126
34	0,0010929	0,0010740	0,0010554	0,0010371	0,0010191	0,0010015	0,0009841
35	0,0011985	0,0011772	0,0011564	0,0011359	0,0011158	0,0010960	0,0010766
36	0,0012873	0,0012651	0,0012433	0,0012219	0,0012009	0,0011802	0,0011599
37	0,0013888	0,0013640	0,0013397	0,0013157	0,0012923	0,0012692	0,0012465
38	0,0014960	0,0014702	0,0014449	0,0014201	0,0013956	0,0013716	0,0013480
39	0,0015883	0,0015630	0,0015381	0,0015137	0,0014896	0,0014659	0,0014426

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
40	0,0017451	0,0017162	0,0016877	0,0016597	0,0016322	0,0016052	0,0015786
41	0,0018914	0,0018614	0,0018319	0,0018029	0,0017744	0,0017463	0,0017187
42	0,0020122	0,0019793	0,0019470	0,0019151	0,0018838	0,0018530	0,0018227
43	0,0022255	0,0021901	0,0021552	0,0021209	0,0020871	0,0020539	0,0020212
44	0,0023770	0,0023398	0,0023032	0,0022671	0,0022317	0,0021967	0,0021624
45	0,0025994	0,0025581	0,0025174	0,0024774	0,0024380	0,0023993	0,0023612
46	0,0028388	0,0027921	0,0027461	0,0027010	0,0026565	0,0026128	0,0025698
47	0,0030921	0,0030415	0,0029917	0,0029428	0,0028946	0,0028472	0,0028006
48	0,0033324	0,0032772	0,0032229	0,0031695	0,0031169	0,0030653	0,0030144
49	0,0036083	0,0035496	0,0034919	0,0034352	0,0033794	0,0033245	0,0032704
50	0,0039201	0,0038536	0,0037882	0,0037239	0,0036608	0,0035987	0,0035376
51	0,0041790	0,0041089	0,0040400	0,0039723	0,0039057	0,0038402	0,0037759
52	0,0045535	0,0044780	0,0044038	0,0043307	0,0042589	0,0041883	0,0041188
53	0,0048800	0,0047955	0,0047125	0,0046310	0,0045508	0,0044721	0,0043947
54	0,0052306	0,0051408	0,0050524	0,0049656	0,0048803	0,0047964	0,0047140
55	0,0055928	0,0054973	0,0054034	0,0053111	0,0052204	0,0051312	0,0050436
56	0,0059963	0,0058915	0,0057886	0,0056875	0,0055881	0,0054905	0,0053946
57	0,0065167	0,0064019	0,0062890	0,0061782	0,0060693	0,0059623	0,0058572
58	0,0069992	0,0068732	0,0067495	0,0066280	0,0065087	0,0063916	0,0062765
59	0,0076087	0,0074694	0,0073325	0,0071982	0,0070664	0,0069369	0,0068099
60	0,0082689	0,0081166	0,0079672	0,0078204	0,0076764	0,0075351	0,0073963
61	0,0089083	0,0087400	0,0085749	0,0084129	0,0082539	0,0080980	0,0079450
62	0,0098086	0,0096228	0,0094405	0,0092617	0,0090862	0,0089141	0,0087453
63	0,0106760	0,0104664	0,0102608	0,0100594	0,0098619	0,0096682	0,0094784
64	0,0117384	0,0115040	0,0112742	0,0110491	0,0108285	0,0106122	0,0104003
65	0,0129335	0,0126734	0,0124185	0,0121688	0,0119240	0,0116842	0,0114492
66	0,0142682	0,0139791	0,0136959	0,0134184	0,0131466	0,0128802	0,0126193
67	0,0156890	0,0153686	0,0150547	0,0147473	0,0144461	0,0141511	0,0138621
68	0,0174734	0,0171108	0,0167557	0,0164080	0,0160676	0,0157341	0,0154076
69	0,0194706	0,0190623	0,0186626	0,0182713	0,0178881	0,0175130	0,0171458
70	0,0218032	0,0213398	0,0208862	0,0204423	0,0200078	0,0195826	0,0191663
71	0,0243556	0,0238345	0,0233245	0,0228255	0,0223372	0,0218592	0,0213916
72	0,0274238	0,0268368	0,0262624	0,0257002	0,0251501	0,0246118	0,0240849
73	0,0307734	0,0301196	0,0294798	0,0288535	0,0282405	0,0276406	0,0270534
74	0,0348171	0,0340797	0,0333580	0,0326515	0,0319599	0,0312831	0,0306205
75	0,0392507	0,0384220	0,0376108	0,0368167	0,0360394	0,0352785	0,0345337
76	0,0443713	0,0434406	0,0425293	0,0416372	0,0407637	0,0399086	0,0390715
77	0,0501363	0,0491097	0,0481042	0,0471192	0,0461544	0,0452094	0,0442837
78	0,0565808	0,0554529	0,0543476	0,0532642	0,0522025	0,0511619	0,0501421
79	0,0641190	0,0628720	0,0616493	0,0604503	0,0592747	0,0581219	0,0569915
80	0,0722959	0,0709405	0,0696105	0,0683054	0,0670248	0,0657682	0,0645352
81	0,0813537	0,0798741	0,0784214	0,0769951	0,0755948	0,0742199	0,0728701
82	0,0919650	0,0903663	0,0887954	0,0872517	0,0857349	0,0842445	0,0827800
83	0,1037442	0,1020092	0,1003032	0,0986257	0,0969763	0,0953545	0,0937598

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
84	0,1163728	0,1145277	0,1127119	0,1109248	0,1091661	0,1074352	0,1057318
85	0,1299280	0,1279966	0,1260940	0,1242196	0,1223732	0,1205541	0,1187621
86	0,1453268	0,1432398	0,1411828	0,1391554	0,1371570	0,1351874	0,1332460
87	0,1620816	0,1598604	0,1576696	0,1555089	0,1533778	0,1512759	0,1492028
88	0,1792126	0,1769321	0,1746806	0,1724577	0,1702631	0,1680964	0,1659573
89	0,1985784	0,1961826	0,1938158	0,1914775	0,1891675	0,1868853	0,1846306
90	0,2190946	0,2165837	0,2141015	0,2116478	0,2092222	0,2068245	0,2044541
91	0,2393153	0,2368362	0,2343829	0,2319549	0,2295520	0,2271741	0,2248208
92	0,2636059	0,2609833	0,2583868	0,2558161	0,2532710	0,2507512	0,2482565
93	0,2860367	0,2834316	0,2808502	0,2782923	0,2757577	0,2732462	0,2707576
94	0,3120179	0,3093317	0,3066687	0,3040286	0,3014112	0,2988164	0,2962439
95	0,3434055	0,3406149	0,3378469	0,3351015	0,3323783	0,3296773	0,3269982
96	0,3723622	0,3695880	0,3668344	0,3641014	0,3613887	0,3586963	0,3560239
97	0,4022743	0,3995424	0,3968290	0,3941340	0,3914573	0,3887988	0,3861583
98	0,4329409	0,4302770	0,4276295	0,4249983	0,4223833	0,4197843	0,4172014
99	0,4641407	0,4615695	0,4590126	0,4564698	0,4539411	0,4514265	0,4489257
100	0,4956337	0,4931783	0,4907350	0,4883039	0,4858848	0,4834777	0,4810825

b.Merton

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
1	0,0033312	0,0033529	0,0033564	0,0031853	0,0030070	0,0028502	0,0026915
2	0,0002851	0,0002871	0,0002874	0,0002721	0,0002562	0,0002422	0,0002281
3	0,0001897	0,0001908	0,0001909	0,0001826	0,0001738	0,0001661	0,0001582
4	0,0001580	0,0001587	0,0001589	0,0001527	0,0001462	0,0001404	0,0001344
5	0,0001386	0,0001392	0,0001393	0,0001343	0,0001290	0,0001242	0,0001193
6	0,0001302	0,0001307	0,0001308	0,0001264	0,0001217	0,0001174	0,0001131
7	0,0001249	0,0001254	0,0001255	0,0001216	0,0001174	0,0001136	0,0001097
8	0,0001183	0,0001188	0,0001188	0,0001154	0,0001117	0,0001084	0,0001050
9	0,0001304	0,0001308	0,0001308	0,0001278	0,0001244	0,0001214	0,0001183
10	0,0001183	0,0001186	0,0001187	0,0001159	0,0001129	0,0001102	0,0001074
11	0,0001094	0,0001097	0,0001098	0,0001070	0,0001040	0,0001012	0,0000984
12	0,0001161	0,0001165	0,0001165	0,0001138	0,0001108	0,0001081	0,0001053
13	0,0001276	0,0001280	0,0001280	0,0001251	0,0001220	0,0001191	0,0001161
14	0,0001340	0,0001344	0,0001344	0,0001315	0,0001283	0,0001254	0,0001224
15	0,0001583	0,0001588	0,0001588	0,0001554	0,0001516	0,0001482	0,0001447
16	0,0002085	0,0002090	0,0002091	0,0002049	0,0002004	0,0001963	0,0001919
17	0,0002489	0,0002495	0,0002496	0,0002450	0,0002401	0,0002356	0,0002309
18	0,0002966	0,0002972	0,0002973	0,0002920	0,0002863	0,0002811	0,0002756
19	0,0003743	0,0003749	0,0003750	0,0003699	0,0003643	0,0003591	0,0003537
20	0,0003699	0,0003706	0,0003707	0,0003647	0,0003581	0,0003521	0,0003458
21	0,0003730	0,0003738	0,0003739	0,0003675	0,0003606	0,0003543	0,0003477
22	0,0003628	0,0003637	0,0003638	0,0003571	0,0003499	0,0003433	0,0003364
23	0,0003643	0,0003652	0,0003653	0,0003581	0,0003502	0,0003431	0,0003356
24	0,0003568	0,0003578	0,0003579	0,0003504	0,0003423	0,0003350	0,0003273

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
25	0,0003624	0,0003634	0,0003635	0,0003560	0,0003478	0,0003404	0,0003327
26	0,0003732	0,0003742	0,0003744	0,0003665	0,0003579	0,0003502	0,0003421
27	0,0003933	0,0003943	0,0003945	0,0003862	0,0003773	0,0003692	0,0003607
28	0,0004015	0,0004026	0,0004028	0,0003943	0,0003851	0,0003768	0,0003681
29	0,0003949	0,0003961	0,0003962	0,0003871	0,0003772	0,0003682	0,0003589
30	0,0004205	0,0004217	0,0004219	0,0004123	0,0004019	0,0003924	0,0003826
31	0,0004756	0,0004769	0,0004771	0,0004671	0,0004563	0,0004465	0,0004362
32	0,0004902	0,0004915	0,0004918	0,0004811	0,0004696	0,0004592	0,0004483
33	0,0005397	0,0005411	0,0005414	0,0005301	0,0005179	0,0005068	0,0004953
34	0,0005650	0,0005665	0,0005667	0,0005547	0,0005417	0,0005299	0,0005175
35	0,0006224	0,0006240	0,0006243	0,0006116	0,0005979	0,0005854	0,0005724
36	0,0006739	0,0006756	0,0006759	0,0006619	0,0006467	0,0006330	0,0006185
37	0,0007356	0,0007374	0,0007377	0,0007228	0,0007067	0,0006921	0,0006768
38	0,0007774	0,0007794	0,0007797	0,0007634	0,0007458	0,0007298	0,0007130
39	0,0008552	0,0008573	0,0008577	0,0008403	0,0008217	0,0008047	0,0007869
40	0,0009475	0,0009497	0,0009501	0,0009323	0,0009131	0,0008957	0,0008774
41	0,0010184	0,0010209	0,0010213	0,0010014	0,0009800	0,0009604	0,0009400
42	0,0011310	0,0011336	0,0011340	0,0011129	0,0010902	0,0010694	0,0010476
43	0,0011830	0,0011858	0,0011863	0,0011635	0,0011389	0,0011165	0,0010930
44	0,0013269	0,0013300	0,0013306	0,0013057	0,0012788	0,0012543	0,0012286
45	0,0014298	0,0014331	0,0014337	0,0014073	0,0013789	0,0013529	0,0013257
46	0,0015513	0,0015550	0,0015556	0,0015265	0,0014952	0,0014666	0,0014366
47	0,0016632	0,0016673	0,0016679	0,0016357	0,0016009	0,0015692	0,0015360
48	0,0018171	0,0018214	0,0018221	0,0017871	0,0017493	0,0017149	0,0016788
49	0,0019447	0,0019494	0,0019502	0,0019122	0,0018713	0,0018340	0,0017949
50	0,0021282	0,0021333	0,0021341	0,0020934	0,0020494	0,0020093	0,0019673
51	0,0022589	0,0022645	0,0022654	0,0022203	0,0021716	0,0021273	0,0020809
52	0,0024238	0,0024298	0,0024307	0,0023829	0,0023313	0,0022842	0,0022350
53	0,0026567	0,0026632	0,0026643	0,0026124	0,0025564	0,0025054	0,0024520
54	0,0027806	0,0027877	0,0027889	0,0027322	0,0026711	0,0026155	0,0025573
55	0,0029923	0,0029999	0,0030012	0,0029406	0,0028753	0,0028159	0,0027537
56	0,0032104	0,0032185	0,0032198	0,0031552	0,0030856	0,0030222	0,0029558
57	0,0033982	0,0034070	0,0034084	0,0033385	0,0032631	0,0031946	0,0031228
58	0,0036741	0,0036837	0,0036852	0,0036089	0,0035267	0,0034520	0,0033738
59	0,0038984	0,0039087	0,0039104	0,0038277	0,0037387	0,0036578	0,0035732
60	0,0041936	0,0042050	0,0042068	0,0041163	0,0040189	0,0039303	0,0038378
61	0,0045430	0,0045553	0,0045574	0,0044588	0,0043527	0,0042563	0,0041556
62	0,0048180	0,0048314	0,0048336	0,0047264	0,0046110	0,0045062	0,0043968
63	0,0052963	0,0053111	0,0053135	0,0051953	0,0050682	0,0049527	0,0048322
64	0,0056351	0,0056514	0,0056541	0,0055237	0,0053836	0,0052565	0,0051239
65	0,0061282	0,0061462	0,0061492	0,0060050	0,0058501	0,0057096	0,0055631
66	0,0067204	0,0067404	0,0067437	0,0065844	0,0064133	0,0062582	0,0060965
67	0,0073781	0,0074002	0,0074038	0,0072276	0,0070385	0,0068670	0,0066883
68	0,0080696	0,0080940	0,0080980	0,0079038	0,0076953	0,0075063	0,0073094
69	0,0088906	0,0089178	0,0089223	0,0087049	0,0084716	0,0082602	0,0080400

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
70	0,0098358	0,0098662	0,0098712	0,0096281	0,0093674	0,0091312	0,0088852
71	0,0109113	0,0109455	0,0109512	0,0106778	0,0103847	0,0101193	0,0098431
72	0,0121323	0,0121706	0,0121769	0,0118710	0,0115430	0,0112461	0,0109370
73	0,0136562	0,0136994	0,0137065	0,0133619	0,0129926	0,0126582	0,0123102
74	0,0154056	0,0154539	0,0154619	0,0150761	0,0146625	0,0142880	0,0138981
75	0,0174673	0,0175219	0,0175309	0,0170949	0,0166273	0,0162039	0,0157631
76	0,0197345	0,0197961	0,0198062	0,0193151	0,0187885	0,0183115	0,0178149
77	0,0224091	0,0224785	0,0224899	0,0219359	0,0213416	0,0208033	0,0202427
78	0,0257417	0,0258195	0,0258323	0,0252111	0,0245444	0,0239401	0,0233104
79	0,0295732	0,0296603	0,0296745	0,0289798	0,0282337	0,0275569	0,0268512
80	0,0340525	0,0341502	0,0341662	0,0333858	0,0325471	0,0317859	0,0309916
81	0,0392879	0,0393966	0,0394144	0,0385465	0,0376129	0,0367647	0,0358791
82	0,0450319	0,0451527	0,0451725	0,0442075	0,0431687	0,0422244	0,0412375
83	0,0522648	0,0523987	0,0524207	0,0513502	0,0501967	0,0491470	0,0480490
84	0,0602487	0,0603972	0,0604215	0,0592344	0,0579543	0,0567883	0,0555676
85	0,0695337	0,0696960	0,0697226	0,0684239	0,0670218	0,0657433	0,0644034
86	0,0801905	0,0803659	0,0803947	0,0789906	0,0774728	0,0760872	0,0746331
87	0,0911856	0,0913783	0,0914099	0,0898674	0,0881991	0,0866750	0,0850747
88	0,1039034	0,1041128	0,1041472	0,1024700	0,1006545	0,0989946	0,0972502
89	0,1186165	0,1188384	0,1188748	0,1170970	0,1151703	0,1134065	0,1115505
90	0,1342997	0,1345377	0,1345768	0,1326686	0,1305989	0,1287025	0,1267055
91	0,1511214	0,1513758	0,1514176	0,1493780	0,1471640	0,1451339	0,1429944
92	0,1710995	0,1713596	0,1714023	0,1693152	0,1670465	0,1649634	0,1627650
93	0,1909990	0,1912779	0,1913236	0,1890861	0,1866527	0,1844171	0,1820566
94	0,2130025	0,2132870	0,2133337	0,2110496	0,2085628	0,2062759	0,2038586
95	0,2361472	0,2364454	0,2364943	0,2341007	0,2314932	0,2290937	0,2265558
96	0,2640108	0,2643254	0,2643769	0,2618511	0,2590978	0,2565626	0,2538795
97	0,2926273	0,2929468	0,2929992	0,2904326	0,2876326	0,2850521	0,2823188
98	0,3229684	0,3232897	0,3233424	0,3207604	0,3179412	0,3153410	0,3125844
99	0,3548594	0,3551791	0,3552315	0,3526613	0,3498528	0,3472603	0,3445098
100	0,3880713	0,3883860	0,3884376	0,3859071	0,3831400	0,3805837	0,3778695

c. Variance Gamma

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
0	0,0032855	0,0029479	0,0029007	0,0028540	0,0028459	0,0027029	0,0024833
1	0,0002810	0,0002509	0,0002467	0,0002426	0,0002418	0,0002292	0,0002097
2	0,0001875	0,0001709	0,0001686	0,0001663	0,0001659	0,0001587	0,0001477
3	0,0001563	0,0001440	0,0001422	0,0001405	0,0001402	0,0001348	0,0001264
4	0,0001373	0,0001272	0,0001258	0,0001243	0,0001241	0,0001197	0,0001128
5	0,0001290	0,0001201	0,0001188	0,0001176	0,0001173	0,0001134	0,0001072
6	0,0001239	0,0001160	0,0001148	0,0001137	0,0001135	0,0001100	0,0001044
7	0,0001174	0,0001105	0,0001095	0,0001085	0,0001083	0,0001053	0,0001004
8	0,0001296	0,0001233	0,0001224	0,0001215	0,0001214	0,0001185	0,0001141
9	0,0001175	0,0001119	0,0001111	0,0001103	0,0001101	0,0001076	0,0001035
10	0,0001086	0,0001029	0,0001021	0,0001013	0,0001012	0,0000986	0,0000945
11	0,0001154	0,0001098	0,0001090	0,0001082	0,0001081	0,0001055	0,0001015
12	0,0001268	0,0001209	0,0001200	0,0001192	0,0001190	0,0001163	0,0001120
13	0,0001332	0,0001272	0,0001263	0,0001255	0,0001253	0,0001226	0,0001182
14	0,0001574	0,0001504	0,0001493	0,0001483	0,0001481	0,0001449	0,0001398
15	0,0002074	0,0001988	0,0001976	0,0001964	0,0001961	0,0001923	0,0001861
16	0,0002477	0,0002385	0,0002371	0,0002358	0,0002355	0,0002313	0,0002245
17	0,0002952	0,0002843	0,0002828	0,0002812	0,0002809	0,0002760	0,0002680
18	0,0003729	0,0003623	0,0003608	0,0003592	0,0003590	0,0003541	0,0003462
19	0,0003682	0,0003558	0,0003540	0,0003522	0,0003519	0,0003462	0,0003371
20	0,0003713	0,0003583	0,0003564	0,0003545	0,0003542	0,0003482	0,0003386
21	0,0003611	0,0003474	0,0003454	0,0003434	0,0003431	0,0003369	0,0003269
22	0,0003623	0,0003476	0,0003454	0,0003433	0,0003429	0,0003362	0,0003254
23	0,0003548	0,0003396	0,0003374	0,0003352	0,0003348	0,0003279	0,0003169
24	0,0003604	0,0003451	0,0003429	0,0003406	0,0003402	0,0003333	0,0003221
25	0,0003711	0,0003551	0,0003527	0,0003504	0,0003500	0,0003427	0,0003311
26	0,0003911	0,0003743	0,0003718	0,0003694	0,0003690	0,0003613	0,0003491
27	0,0003993	0,0003820	0,0003795	0,0003770	0,0003766	0,0003687	0,0003562
28	0,0003925	0,0003738	0,0003712	0,0003685	0,0003680	0,0003596	0,0003462
29	0,0004180	0,0003983	0,0003955	0,0003927	0,0003922	0,0003833	0,0003691
30	0,0004730	0,0004526	0,0004497	0,0004467	0,0004462	0,0004370	0,0004222
31	0,0004874	0,0004658	0,0004626	0,0004595	0,0004589	0,0004491	0,0004335
32	0,0005367	0,0005138	0,0005104	0,0005071	0,0005065	0,0004961	0,0004795
33	0,0005618	0,0005373	0,0005337	0,0005302	0,0005295	0,0005184	0,0005007
34	0,0006191	0,0005932	0,0005895	0,0005858	0,0005851	0,0005734	0,0005546
35	0,0006702	0,0006416	0,0006374	0,0006333	0,0006326	0,0006196	0,0005989
36	0,0007316	0,0007013	0,0006969	0,0006925	0,0006917	0,0006779	0,0006558
37	0,0007730	0,0007398	0,0007350	0,0007302	0,0007293	0,0007143	0,0006902
38	0,0008506	0,0008153	0,0008102	0,0008051	0,0008042	0,0007882	0,0007625
39	0,0009428	0,0009066	0,0009014	0,0008961	0,0008952	0,0008787	0,0008523
40	0,0010131	0,0009727	0,0009668	0,0009609	0,0009599	0,0009415	0,0009120
41	0,0011254	0,0010824	0,0010762	0,0010699	0,0010688	0,0010492	0,0010178
42	0,0011769	0,0011305	0,0011238	0,0011171	0,0011159	0,0010948	0,0010609

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
43	0,0013203	0,0012697	0,0012623	0,0012549	0,0012536	0,0012305	0,0011935
44	0,0014229	0,0013692	0,0013614	0,0013535	0,0013522	0,0013277	0,0012884
45	0,0015436	0,0014845	0,0014759	0,0014673	0,0014658	0,0014388	0,0013956
46	0,0016547	0,0015891	0,0015795	0,0015700	0,0015683	0,0015384	0,0014906
47	0,0018078	0,0017365	0,0017261	0,0017158	0,0017139	0,0016815	0,0016294
48	0,0019346	0,0018573	0,0018461	0,0018349	0,0018329	0,0017978	0,0017414
49	0,0021174	0,0020344	0,0020224	0,0020103	0,0020082	0,0019704	0,0019098
50	0,0022469	0,0021551	0,0021418	0,0021284	0,0021261	0,0020843	0,0020175
51	0,0024111	0,0023137	0,0022996	0,0022854	0,0022829	0,0022386	0,0021677
52	0,0026429	0,0025373	0,0025220	0,0025067	0,0025040	0,0024559	0,0023789
53	0,0027656	0,0026503	0,0026336	0,0026169	0,0026140	0,0025616	0,0024778
54	0,0029763	0,0028531	0,0028352	0,0028173	0,0028142	0,0027582	0,0026686
55	0,0031933	0,0030619	0,0030428	0,0030238	0,0030204	0,0029607	0,0028651
56	0,0033797	0,0032375	0,0032169	0,0031963	0,0031927	0,0031281	0,0030248
57	0,0036539	0,0034988	0,0034763	0,0034538	0,0034499	0,0033795	0,0032669
58	0,0038764	0,0037085	0,0036842	0,0036598	0,0036556	0,0035794	0,0034576
59	0,0041696	0,0039858	0,0039592	0,0039326	0,0039279	0,0038446	0,0037115
60	0,0045169	0,0043167	0,0042877	0,0042587	0,0042537	0,0041630	0,0040181
61	0,0047896	0,0045719	0,0045403	0,0045089	0,0045034	0,0044049	0,0042476
62	0,0052649	0,0050250	0,0049903	0,0049556	0,0049495	0,0048410	0,0046677
63	0,0056005	0,0053361	0,0052978	0,0052597	0,0052530	0,0051336	0,0049432
64	0,0060899	0,0057976	0,0057553	0,0057131	0,0057058	0,0055739	0,0053637
65	0,0066782	0,0063554	0,0063087	0,0062621	0,0062540	0,0061084	0,0058764
66	0,0073314	0,0069744	0,0069228	0,0068713	0,0068623	0,0067014	0,0064450
67	0,0080181	0,0076246	0,0075678	0,0075110	0,0075011	0,0073238	0,0070414
68	0,0088329	0,0083925	0,0083289	0,0082655	0,0082544	0,0080561	0,0077405
69	0,0097712	0,0092791	0,0092080	0,0091371	0,0091247	0,0089033	0,0085508
70	0,0108387	0,0102855	0,0102056	0,0101260	0,0101121	0,0098633	0,0094676
71	0,0120511	0,0114320	0,0113426	0,0112535	0,0112379	0,0109597	0,0105171
72	0,0135647	0,0128675	0,0127669	0,0126666	0,0126490	0,0123356	0,0118373
73	0,0153032	0,0145225	0,0144098	0,0142973	0,0142777	0,0139266	0,0133682
74	0,0173515	0,0164690	0,0163416	0,0162145	0,0161923	0,0157954	0,0151639
75	0,0196042	0,0186101	0,0184666	0,0183234	0,0182984	0,0178513	0,0171398
76	0,0222620	0,0211403	0,0209783	0,0208168	0,0207885	0,0202838	0,0194805
77	0,0255769	0,0243185	0,0241367	0,0239552	0,0239235	0,0233565	0,0224535
78	0,0293889	0,0279807	0,0277771	0,0275738	0,0275383	0,0269029	0,0258900
79	0,0338454	0,0322626	0,0320336	0,0318049	0,0317650	0,0310499	0,0299091
80	0,0390577	0,0372960	0,0370408	0,0367860	0,0367414	0,0359440	0,0346706
81	0,0447760	0,0428160	0,0425318	0,0422481	0,0421984	0,0413099	0,0398898
82	0,0519809	0,0498048	0,0494889	0,0491734	0,0491182	0,0481296	0,0465475
83	0,0599340	0,0575190	0,0571682	0,0568176	0,0567563	0,0556573	0,0538967
84	0,0691894	0,0665446	0,0661599	0,0657754	0,0657081	0,0645018	0,0625667

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
85	0,0798184	0,0769559	0,0765389	0,0761220	0,0760490	0,0747400	0,0726368
86	0,0907769	0,0876307	0,0871720	0,0867134	0,0866331	0,0851924	0,0828758
87	0,1034591	0,1000356	0,0995361	0,0990364	0,0989489	0,0973785	0,0948509
88	0,1181457	0,1145128	0,1139820	0,1134509	0,1133579	0,1116871	0,1089939
89	0,1337944	0,1298922	0,1293215	0,1287503	0,1286503	0,1268525	0,1239517
90	0,1505815	0,1464076	0,1457967	0,1451850	0,1450780	0,1431520	0,1400414
91	0,1705471	0,1662708	0,1656439	0,1650159	0,1649060	0,1629271	0,1597254
92	0,1904069	0,1858203	0,1851475	0,1844735	0,1843555	0,1822307	0,1787908
93	0,2123981	0,2077115	0,2070233	0,2063336	0,2062128	0,2040369	0,2005098
94	0,2355140	0,2306002	0,2298780	0,2291542	0,2290274	0,2267430	0,2230371
95	0,2633427	0,2581544	0,2573914	0,2566266	0,2564926	0,2540776	0,2501569
96	0,2919485	0,2866726	0,2858960	0,2851173	0,2849808	0,2825207	0,2785225
97	0,3222856	0,3169741	0,3161915	0,3154066	0,3152691	0,3127881	0,3087519
98	0,3541799	0,3488889	0,3481086	0,3473258	0,3471886	0,3447131	0,3406818
99	0,3874024	0,3821897	0,3814203	0,3806483	0,3805129	0,3780701	0,3740884
100	0,4216874	0,4166110	0,4158611	0,4151085	0,4149765	0,4125939	0,4087069

1. Les hommes

a. ARIMA

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
0	0,0193919	0,0182014	0,0170840	0,0160352	0,0150508	0,0141268	0,0132596
1	0,0015731	0,0014757	0,0013843	0,0012987	0,0012183	0,0011429	0,0010721
2	0,0008442	0,0008024	0,0007628	0,0007251	0,0006892	0,0006552	0,0006228
3	0,0006338	0,0006069	0,0005812	0,0005565	0,0005329	0,0005103	0,0004886
4	0,0005269	0,0005033	0,0004808	0,0004593	0,0004388	0,0004192	0,0004004
5	0,0004656	0,0004470	0,0004292	0,0004120	0,0003956	0,0003798	0,0003646
6	0,0004115	0,0003956	0,0003804	0,0003657	0,0003515	0,0003380	0,0003249
7	0,0003767	0,0003629	0,0003495	0,0003367	0,0003243	0,0003123	0,0003008
8	0,0003627	0,0003493	0,0003364	0,0003240	0,0003120	0,0003005	0,0002894
9	0,0003419	0,0003298	0,0003181	0,0003068	0,0002959	0,0002854	0,0002753
10	0,0003292	0,0003179	0,0003070	0,0002965	0,0002864	0,0002766	0,0002671
11	0,0003360	0,0003252	0,0003148	0,0003047	0,0002949	0,0002854	0,0002763
12	0,0003541	0,0003439	0,0003339	0,0003243	0,0003149	0,0003059	0,0002970
13	0,0003920	0,0003810	0,0003703	0,0003600	0,0003499	0,0003400	0,0003305
14	0,0005209	0,0005074	0,0004943	0,0004815	0,0004690	0,0004568	0,0004450
15	0,0006574	0,0006427	0,0006284	0,0006143	0,0006006	0,0005872	0,0005741
16	0,0008341	0,0008184	0,0008030	0,0007879	0,0007731	0,0007585	0,0007442
17	0,0010657	0,0010486	0,0010317	0,0010152	0,0009989	0,0009828	0,0009671
18	0,0013583	0,0013442	0,0013303	0,0013165	0,0013029	0,0012894	0,0012760
19	0,0014772	0,0014643	0,0014515	0,0014388	0,0014263	0,0014139	0,0014015
20	0,0014782	0,0014701	0,0014621	0,0014541	0,0014462	0,0014383	0,0014305

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
21	0,0015075	0,0015039	0,0015002	0,0014966	0,0014930	0,0014894	0,0014858
22	0,0015765	0,0015678	0,0015592	0,0015506	0,0015420	0,0015335	0,0015250
23	0,0015993	0,0015858	0,0015724	0,0015591	0,0015460	0,0015329	0,0015199
24	0,0016138	0,0015983	0,0015829	0,0015677	0,0015526	0,0015377	0,0015229
25	0,0016141	0,0015982	0,0015825	0,0015669	0,0015515	0,0015362	0,0015211
26	0,0016102	0,0015951	0,0015801	0,0015653	0,0015506	0,0015360	0,0015216
27	0,0016371	0,0016208	0,0016046	0,0015886	0,0015728	0,0015571	0,0015416
28	0,0016687	0,0016528	0,0016369	0,0016212	0,0016057	0,0015903	0,0015751
29	0,0017451	0,0017282	0,0017113	0,0016947	0,0016782	0,0016618	0,0016456
30	0,0018057	0,0017864	0,0017673	0,0017485	0,0017298	0,0017114	0,0016931
31	0,0018570	0,0018387	0,0018206	0,0018027	0,0017850	0,0017674	0,0017500
32	0,0019457	0,0019223	0,0018991	0,0018763	0,0018537	0,0018314	0,0018094
33	0,0020560	0,0020318	0,0020080	0,0019844	0,0019610	0,0019380	0,0019152
34	0,0021987	0,0021730	0,0021475	0,0021223	0,0020974	0,0020728	0,0020485
35	0,0023547	0,0023264	0,0022985	0,0022709	0,0022436	0,0022166	0,0021900
36	0,0025003	0,0024718	0,0024437	0,0024160	0,0023885	0,0023614	0,0023345
37	0,0027144	0,0026804	0,0026468	0,0026136	0,0025808	0,0025484	0,0025165
38	0,0029247	0,0028875	0,0028508	0,0028145	0,0027787	0,0027433	0,0027084
39	0,0031645	0,0031234	0,0030828	0,0030428	0,0030033	0,0029643	0,0029258
40	0,0034799	0,0034348	0,0033903	0,0033464	0,0033030	0,0032602	0,0032180
41	0,0037636	0,0037156	0,0036682	0,0036215	0,0035753	0,0035297	0,0034847
42	0,0041727	0,0041187	0,0040654	0,0040128	0,0039609	0,0039097	0,0038591
43	0,0045504	0,0044936	0,0044375	0,0043822	0,0043275	0,0042735	0,0042202
44	0,0050044	0,0049388	0,0048740	0,0048100	0,0047469	0,0046846	0,0046231
45	0,0054756	0,0053985	0,0053225	0,0052475	0,0051736	0,0051007	0,0050289
46	0,0059865	0,0058990	0,0058128	0,0057278	0,0056441	0,0055616	0,0054803
47	0,0065316	0,0064346	0,0063391	0,0062449	0,0061522	0,0060609	0,0059709
48	0,0072226	0,0071143	0,0070076	0,0069026	0,0067991	0,0066972	0,0065968
49	0,0078316	0,0077106	0,0075915	0,0074742	0,0073588	0,0072451	0,0071332
50	0,0086477	0,0085061	0,0083668	0,0082298	0,0080950	0,0079624	0,0078320
51	0,0093790	0,0092217	0,0090670	0,0089150	0,0087655	0,0086185	0,0084739
52	0,0101804	0,0100094	0,0098413	0,0096760	0,0095135	0,0093538	0,0091967
53	0,0110247	0,0108358	0,0106501	0,0104676	0,0102882	0,0101119	0,0099386
54	0,0120780	0,0118654	0,0116566	0,0114514	0,0112499	0,0110519	0,0108574
55	0,0130940	0,0128688	0,0126475	0,0124300	0,0122162	0,0120061	0,0117997
56	0,0142240	0,0139629	0,0137066	0,0134550	0,0132080	0,0129656	0,0127275
57	0,0153874	0,0151064	0,0148305	0,0145597	0,0142938	0,0140328	0,0137765
58	0,0166793	0,0163712	0,0160688	0,0157720	0,0154807	0,0151948	0,0149141
59	0,0180638	0,0177338	0,0174098	0,0170918	0,0167796	0,0164731	0,0161721
60	0,0196393	0,0192912	0,0189494	0,0186136	0,0182837	0,0179597	0,0176414
61	0,0212465	0,0208662	0,0204927	0,0201259	0,0197656	0,0194118	0,0190644
62	0,0230030	0,0225893	0,0221830	0,0217840	0,0213922	0,0210075	0,0206296
63	0,0249709	0,0245249	0,0240868	0,0236565	0,0232340	0,0228189	0,0224113

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
64	0,0269959	0,0265073	0,0260276	0,0255565	0,0250939	0,0246397	0,0241938
65	0,0292422	0,0287081	0,0281837	0,0276689	0,0271636	0,0266674	0,0261803
66	0,0316706	0,0310830	0,0305063	0,0299404	0,0293849	0,0288397	0,0283046
67	0,0343696	0,0337316	0,0331056	0,0324911	0,0318881	0,0312962	0,0307154
68	0,0375220	0,0368205	0,0361321	0,0354567	0,0347938	0,0341433	0,0335050
69	0,0406817	0,0399085	0,0391500	0,0384060	0,0376760	0,0369600	0,0362575
70	0,0445776	0,0437281	0,0428948	0,0420774	0,0412755	0,0404890	0,0397174
71	0,0485222	0,0475878	0,0466714	0,0457727	0,0448912	0,0440268	0,0431790
72	0,0530494	0,0520297	0,0510297	0,0500489	0,0490869	0,0481434	0,0472181
73	0,0580522	0,0569188	0,0558076	0,0547180	0,0536497	0,0526023	0,0515753
74	0,0636363	0,0623801	0,0611488	0,0599417	0,0587585	0,0575986	0,0564617
75	0,0699160	0,0685357	0,0671826	0,0658562	0,0645560	0,0632814	0,0620321
76	0,0767680	0,0752528	0,0737675	0,0723114	0,0708842	0,0694851	0,0681136
77	0,0843941	0,0827466	0,0811312	0,0795474	0,0779944	0,0764718	0,0749789
78	0,0927498	0,0909881	0,0892598	0,0875643	0,0859010	0,0842693	0,0826686
79	0,1022028	0,1002401	0,0983150	0,0964269	0,0945751	0,0927588	0,0909774
80	0,1125581	0,1104962	0,1084721	0,1064850	0,1045343	0,1026194	0,1007396
81	0,1236902	0,1215039	0,1193564	0,1172467	0,1151744	0,1131387	0,1111389
82	0,1367365	0,1343954	0,1320943	0,1298325	0,1276096	0,1254247	0,1232771
83	0,1499445	0,1475166	0,1451282	0,1427783	0,1404665	0,1381922	0,1359547
84	0,1646175	0,1619966	0,1594174	0,1568793	0,1543816	0,1519237	0,1495049
85	0,1806076	0,1778755	0,1751848	0,1725348	0,1699249	0,1673544	0,1648229
86	0,1992554	0,1962407	0,1932716	0,1903474	0,1874675	0,1846311	0,1818377
87	0,2163133	0,2132020	0,2101354	0,2071129	0,2041339	0,2011977	0,1983038
88	0,2368822	0,2336273	0,2304171	0,2272510	0,2241284	0,2210488	0,2180114
89	0,2580120	0,2545956	0,2512245	0,2478979	0,2446154	0,2413764	0,2381803
90	0,2790862	0,2757367	0,2724274	0,2691579	0,2659276	0,2627361	0,2595828
91	0,3056105	0,3020656	0,2985618	0,2950987	0,2916758	0,2882925	0,2849485
92	0,3280969	0,3244646	0,3208726	0,3173203	0,3138073	0,3103332	0,3068976
93	0,3521762	0,3488078	0,3454716	0,3421672	0,3388945	0,3356531	0,3324427
94	0,3784652	0,3751455	0,3718550	0,3685933	0,3653602	0,3621555	0,3589789
95	0,4044397	0,4008410	0,3972744	0,3937395	0,3902361	0,3867638	0,3833224
96	0,4316735	0,4281058	0,4245677	0,4210588	0,4175788	0,4141277	0,4107050
97	0,4593246	0,4558130	0,4523284	0,4488703	0,4454388	0,4420334	0,4386541
98	0,4872236	0,4837923	0,4803853	0,4770022	0,4736430	0,4703074	0,4669953
99	0,5152012	0,5118732	0,5085667	0,5052816	0,5020177	0,4987748	0,4955530
100	0,5430796	0,5398756	0,5366905	0,5335242	0,5303766	0,5272475	0,5241370

b.Merton

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
0	0,0037836	0,0035360	0,0033309	0,0031490	0,0034505	0,0035172	0,0033277
1	0,0003026	0,0002827	0,0002661	0,0002515	0,0002758	0,0002812	0,0002659
2	0,0002284	0,0002163	0,0002063	0,0001972	0,0002122	0,0002154	0,0002061
3	0,0002072	0,0001978	0,0001899	0,0001828	0,0001945	0,0001971	0,0001898
4	0,0001619	0,0001542	0,0001477	0,0001418	0,0001515	0,0001536	0,0001476
5	0,0001627	0,0001557	0,0001499	0,0001445	0,0001533	0,0001552	0,0001498
6	0,0001490	0,0001428	0,0001376	0,0001329	0,0001407	0,0001423	0,0001375
7	0,0001432	0,0001376	0,0001328	0,0001285	0,0001356	0,0001372	0,0001327
8	0,0001374	0,0001320	0,0001274	0,0001232	0,0001301	0,0001316	0,0001273
9	0,0001347	0,0001296	0,0001253	0,0001213	0,0001278	0,0001292	0,0001252
10	0,0001340	0,0001291	0,0001249	0,0001211	0,0001274	0,0001287	0,0001249
11	0,0001450	0,0001400	0,0001358	0,0001319	0,0001382	0,0001396	0,0001357
12	0,0001663	0,0001612	0,0001568	0,0001528	0,0001594	0,0001608	0,0001567
13	0,0001881	0,0001825	0,0001777	0,0001732	0,0001805	0,0001821	0,0001776
14	0,0002648	0,0002574	0,0002512	0,0002454	0,0002549	0,0002569	0,0002511
15	0,0003673	0,0003586	0,0003510	0,0003441	0,0003555	0,0003579	0,0003509
16	0,0005109	0,0005007	0,0004918	0,0004835	0,0004970	0,0004999	0,0004916
17	0,0007020	0,0006900	0,0006795	0,0006699	0,0006857	0,0006891	0,0006794
18	0,0010382	0,0010268	0,0010167	0,0010074	0,0010226	0,0010259	0,0010166
19	0,0011784	0,0011674	0,0011578	0,0011488	0,0011634	0,0011665	0,0011576
20	0,0012839	0,0012764	0,0012699	0,0012638	0,0012738	0,0012759	0,0012698
21	0,0014163	0,0014126	0,0014094	0,0014064	0,0014113	0,0014123	0,0014093
22	0,0013667	0,0013586	0,0013515	0,0013449	0,0013557	0,0013580	0,0013514
23	0,0012849	0,0012733	0,0012631	0,0012537	0,0012691	0,0012724	0,0012630
24	0,0012580	0,0012451	0,0012338	0,0012233	0,0012405	0,0012441	0,0012337
25	0,0012505	0,0012374	0,0012259	0,0012152	0,0012327	0,0012363	0,0012257
26	0,0012622	0,0012495	0,0012384	0,0012281	0,0012450	0,0012485	0,0012383
27	0,0012642	0,0012507	0,0012389	0,0012280	0,0012459	0,0012496	0,0012387
28	0,0013019	0,0012886	0,0012770	0,0012661	0,0012838	0,0012876	0,0012768
29	0,0013559	0,0013418	0,0013294	0,0013179	0,0013367	0,0013407	0,0013292
30	0,0013693	0,0013537	0,0013401	0,0013274	0,0013481	0,0013525	0,0013399
31	0,0014387	0,0014236	0,0014103	0,0013980	0,0014181	0,0014224	0,0014101
32	0,0014238	0,0014055	0,0013895	0,0013747	0,0013989	0,0014041	0,0013893
33	0,0015158	0,0014967	0,0014801	0,0014647	0,0014899	0,0014952	0,0014799
34	0,0016220	0,0016017	0,0015840	0,0015675	0,0015944	0,0016001	0,0015837
35	0,0017240	0,0017019	0,0016826	0,0016647	0,0016940	0,0017002	0,0016823
36	0,0018618	0,0018392	0,0018195	0,0018011	0,0018311	0,0018374	0,0018191
37	0,0019604	0,0019341	0,0019112	0,0018900	0,0019247	0,0019321	0,0019109
38	0,0021022	0,0020736	0,0020487	0,0020256	0,0020634	0,0020714	0,0020483
39	0,0022590	0,0022276	0,0022004	0,0021750	0,0022164	0,0022252	0,0021999
40	0,0024859	0,0024515	0,0024215	0,0023937	0,0024392	0,0024488	0,0024211
41	0,0027031	0,0026663	0,0026342	0,0026044	0,0026531	0,0026634	0,0026337
42	0,0029822	0,0029410	0,0029051	0,0028718	0,0029263	0,0029378	0,0029045

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
43	0,0032916	0,0032478	0,0032095	0,0031740	0,0032320	0,0032443	0,0032089
44	0,0035595	0,0035096	0,0034662	0,0034258	0,0034917	0,0035057	0,0034655
45	0,0037979	0,0037408	0,0036911	0,0036449	0,0037203	0,0037363	0,0036903
46	0,0040948	0,0040309	0,0039754	0,0039238	0,0040081	0,0040259	0,0039745
47	0,0044405	0,0043701	0,0043089	0,0042521	0,0043449	0,0043646	0,0043079
48	0,0048921	0,0048138	0,0047457	0,0046826	0,0047858	0,0048077	0,0047446
49	0,0052417	0,0051553	0,0050802	0,0050105	0,0051244	0,0051485	0,0050790
50	0,0056485	0,0055497	0,0054640	0,0053846	0,0055145	0,0055420	0,0054626
51	0,0060631	0,0059545	0,0058604	0,0057731	0,0059158	0,0059461	0,0058588
52	0,0065773	0,0064593	0,0063570	0,0062622	0,0064172	0,0064501	0,0063554
53	0,0070588	0,0069296	0,0068176	0,0067138	0,0068835	0,0069195	0,0068158
54	0,0076400	0,0074964	0,0073720	0,0072568	0,0074452	0,0074853	0,0073700
55	0,0083703	0,0082166	0,0080833	0,0079599	0,0081617	0,0082046	0,0080812
56	0,0088202	0,0086474	0,0084976	0,0083591	0,0085857	0,0086339	0,0084952
57	0,0095654	0,0093788	0,0092173	0,0090678	0,0093123	0,0093643	0,0092147
58	0,0103119	0,0101086	0,0099324	0,0097696	0,0100360	0,0100927	0,0099296
59	0,0112274	0,0110084	0,0108187	0,0106433	0,0109303	0,0109914	0,0108157
60	0,0123830	0,0121487	0,0119456	0,0117577	0,0120651	0,0121305	0,0119424
61	0,0133339	0,0130791	0,0128582	0,0126539	0,0129881	0,0130592	0,0128547
62	0,0144036	0,0141270	0,0138873	0,0136656	0,0140283	0,0141055	0,0138835
63	0,0156864	0,0153872	0,0151279	0,0148880	0,0152804	0,0153639	0,0151237
64	0,0168535	0,0165278	0,0162456	0,0159846	0,0164116	0,0165024	0,0162411
65	0,0181765	0,0178220	0,0175150	0,0172310	0,0176956	0,0177944	0,0175100
66	0,0195376	0,0191505	0,0188154	0,0185055	0,0190125	0,0191204	0,0188100
67	0,0211986	0,0207785	0,0204147	0,0200783	0,0206286	0,0207458	0,0204089
68	0,0230612	0,0226008	0,0222022	0,0218338	0,0224367	0,0225650	0,0221959
69	0,0247997	0,0242965	0,0238609	0,0234583	0,0241171	0,0242573	0,0238539
70	0,0271384	0,0265863	0,0261083	0,0256666	0,0263894	0,0265433	0,0261007
71	0,0293845	0,0287804	0,0282575	0,0277744	0,0285650	0,0287334	0,0282492
72	0,0321569	0,0314970	0,0309259	0,0303982	0,0312617	0,0314456	0,0309168
73	0,0349102	0,0341825	0,0335529	0,0329713	0,0339231	0,0341259	0,0335428
74	0,0380513	0,0372493	0,0365557	0,0359150	0,0369635	0,0371869	0,0365446
75	0,0418023	0,0409211	0,0401590	0,0394551	0,0406072	0,0408526	0,0401468
76	0,0459054	0,0449380	0,0441013	0,0433284	0,0445933	0,0448628	0,0440879
77	0,0507530	0,0496952	0,0487800	0,0479345	0,0493181	0,0496129	0,0487654
78	0,0565567	0,0554097	0,0544168	0,0534992	0,0550007	0,0553205	0,0544010
79	0,0619783	0,0607074	0,0596076	0,0585913	0,0602544	0,0606086	0,0595901
80	0,0698662	0,0684996	0,0673159	0,0662212	0,0680121	0,0683932	0,0672970
81	0,0780849	0,0766112	0,0753339	0,0741519	0,0760853	0,0764965	0,0753135
82	0,0875836	0,0859824	0,0845937	0,0833079	0,0854107	0,0858576	0,0845715
83	0,0984167	0,0967152	0,0952381	0,0938693	0,0961072	0,0965825	0,0952144
84	0,1088156	0,1069656	0,1053592	0,1038702	0,1063045	0,1068214	0,1053335

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
85	0,1218956	0,1199266	0,1182154	0,1166282	0,1192225	0,1197730	0,1181880
86	0,1344710	0,1322984	0,1304104	0,1286591	0,1315216	0,1321290	0,1303802
87	0,1488634	0,1465769	0,1445883	0,1427425	0,1457588	0,1463985	0,1445565
88	0,1657835	0,1633508	0,1612338	0,1592675	0,1624801	0,1631610	0,1611999
89	0,1829445	0,1803575	0,1781051	0,1760120	0,1794312	0,1801555	0,1780690
90	0,2044011	0,2017812	0,1994972	0,1973725	0,2008423	0,2015765	0,1994606
91	0,2261893	0,2233873	0,2209435	0,2186692	0,2223828	0,2231683	0,2209043
92	0,2462042	0,2432931	0,2407529	0,2383877	0,2422491	0,2430656	0,2407122
93	0,2748527	0,2720449	0,2695910	0,2673030	0,2710368	0,2718252	0,2695516
94	0,3015330	0,2987080	0,2962372	0,2939317	0,2976932	0,2984869	0,2961975
95	0,3211685	0,3181162	0,3154468	0,3129563	0,3170198	0,3178772	0,3154039
96	0,3484889	0,3454126	0,3427205	0,3402074	0,3443071	0,3451717	0,3426773
97	0,3768350	0,3737578	0,3710633	0,3685465	0,3726515	0,3735168	0,3710200
98	0,4060315	0,4029772	0,4003010	0,3978000	0,4018786	0,4027379	0,4002580
99	0,4358945	0,4328869	0,4302500	0,4277844	0,4318046	0,4326511	0,4302076
100	0,4662073	0,4632692	0,4606919	0,4582807	0,4622115	0,4630388	0,4606505

c.Variance Gamma

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
0	0,0038927	0,0038043	0,0037304	0,0035354	0,0033240	0,0029924	0,0029122
1	0,0003115	0,0003043	0,0002984	0,0002826	0,0002656	0,0002389	0,0002324
2	0,0002336	0,0002294	0,0002258	0,0002163	0,0002059	0,0001893	0,0001852
3	0,0002113	0,0002080	0,0002052	0,0001978	0,0001896	0,0001765	0,0001732
4	0,0001653	0,0001626	0,0001603	0,0001542	0,0001475	0,0001367	0,0001340
5	0,0001657	0,0001632	0,0001612	0,0001557	0,0001497	0,0001399	0,0001374
6	0,0001516	0,0001495	0,0001477	0,0001428	0,0001374	0,0001287	0,0001266
7	0,0001457	0,0001437	0,0001420	0,0001376	0,0001327	0,0001247	0,0001227
8	0,0001398	0,0001379	0,0001363	0,0001320	0,0001273	0,0001196	0,0001177
9	0,0001369	0,0001351	0,0001336	0,0001296	0,0001251	0,0001178	0,0001160
10	0,0001361	0,0001344	0,0001330	0,0001291	0,0001248	0,0001178	0,0001160
11	0,0001471	0,0001454	0,0001439	0,0001400	0,0001356	0,0001285	0,0001267
12	0,0001685	0,0001668	0,0001652	0,0001612	0,0001567	0,0001492	0,0001474
13	0,0001905	0,0001886	0,0001869	0,0001825	0,0001775	0,0001693	0,0001673
14	0,0002679	0,0002654	0,0002632	0,0002574	0,0002509	0,0002403	0,0002376
15	0,0003711	0,0003680	0,0003655	0,0003585	0,0003508	0,0003379	0,0003346
16	0,0005153	0,0005118	0,0005088	0,0005006	0,0004915	0,0004762	0,0004723
17	0,0007071	0,0007030	0,0006995	0,0006900	0,0006792	0,0006612	0,0006566
18	0,0010431	0,0010392	0,0010358	0,0010267	0,0010164	0,0009990	0,0009945
19	0,0011830	0,0011792	0,0011760	0,0011673	0,0011574	0,0011407	0,0011365
20	0,0012871	0,0012845	0,0012823	0,0012764	0,0012697	0,0012582	0,0012553

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
21	0,0014178	0,0014166	0,0014155	0,0014126	0,0014093	0,0014036	0,0014022
22	0,0013701	0,0013673	0,0013650	0,0013586	0,0013513	0,0013389	0,0013358
23	0,0012898	0,0012858	0,0012824	0,0012733	0,0012628	0,0012451	0,0012406
24	0,0012635	0,0012591	0,0012553	0,0012451	0,0012334	0,0012138	0,0012088
25	0,0012561	0,0012516	0,0012478	0,0012373	0,0012255	0,0012055	0,0012004
26	0,0012675	0,0012632	0,0012595	0,0012495	0,0012381	0,0012188	0,0012139
27	0,0012699	0,0012653	0,0012613	0,0012507	0,0012385	0,0012181	0,0012129
28	0,0013076	0,0013030	0,0012991	0,0012886	0,0012766	0,0012563	0,0012512
29	0,0013618	0,0013570	0,0013529	0,0013417	0,0013290	0,0013076	0,0013021
30	0,0013759	0,0013706	0,0013660	0,0013537	0,0013396	0,0013160	0,0013100
31	0,0014451	0,0014399	0,0014355	0,0014235	0,0014099	0,0013869	0,0013810
32	0,0014315	0,0014253	0,0014199	0,0014054	0,0013890	0,0013614	0,0013543
33	0,0015238	0,0015173	0,0015118	0,0014967	0,0014796	0,0014508	0,0014435
34	0,0016306	0,0016237	0,0016178	0,0016017	0,0015834	0,0015527	0,0015449
35	0,0017334	0,0017258	0,0017194	0,0017019	0,0016820	0,0016486	0,0016401
36	0,0018714	0,0018636	0,0018570	0,0018391	0,0018188	0,0017846	0,0017759
37	0,0019715	0,0019625	0,0019548	0,0019340	0,0019105	0,0018709	0,0018608
38	0,0021143	0,0021045	0,0020962	0,0020735	0,0020479	0,0020048	0,0019938
39	0,0022723	0,0022615	0,0022524	0,0022276	0,0021994	0,0021523	0,0021402
40	0,0025005	0,0024887	0,0024787	0,0024514	0,0024205	0,0023687	0,0023555
41	0,0027187	0,0027061	0,0026954	0,0026662	0,0026331	0,0025777	0,0025635
42	0,0029997	0,0029856	0,0029736	0,0029409	0,0029039	0,0028418	0,0028260
43	0,0033102	0,0032952	0,0032824	0,0032476	0,0032082	0,0031421	0,0031252
44	0,0035806	0,0035635	0,0035490	0,0035095	0,0034647	0,0033896	0,0033704
45	0,0038221	0,0038025	0,0037859	0,0037406	0,0036894	0,0036036	0,0035817
46	0,0041220	0,0041000	0,0040814	0,0040308	0,0039734	0,0038776	0,0038531
47	0,0044704	0,0044462	0,0044257	0,0043699	0,0043068	0,0042012	0,0041743
48	0,0049254	0,0048985	0,0048756	0,0048136	0,0047434	0,0046260	0,0045961
49	0,0052785	0,0052488	0,0052235	0,0051550	0,0050776	0,0049481	0,0049152
50	0,0056905	0,0056566	0,0056277	0,0055495	0,0054611	0,0053135	0,0052760
51	0,0061093	0,0060720	0,0060403	0,0059543	0,0058571	0,0056951	0,0056539
52	0,0066274	0,0065869	0,0065524	0,0064590	0,0063535	0,0061774	0,0061327
53	0,0071137	0,0070693	0,0070315	0,0069292	0,0068137	0,0066211	0,0065722
54	0,0077011	0,0076517	0,0076098	0,0074961	0,0073677	0,0071539	0,0070996
55	0,0084358	0,0083829	0,0083380	0,0082162	0,0080787	0,0078495	0,0077914
56	0,0088939	0,0088343	0,0087838	0,0086469	0,0084925	0,0082354	0,0081702
57	0,0096448	0,0095806	0,0095261	0,0093784	0,0092117	0,0089343	0,0088640
58	0,0103986	0,0103285	0,0102691	0,0101080	0,0099264	0,0096241	0,0095474
59	0,0113207	0,0112453	0,0111813	0,0110079	0,0108122	0,0104865	0,0104039
60	0,0124828	0,0124021	0,0123336	0,0121481	0,0119386	0,0115897	0,0115011
61	0,0134424	0,0133547	0,0132802	0,0130784	0,0128506	0,0124713	0,0123750
62	0,0145214	0,0144262	0,0143453	0,0141263	0,0138791	0,0134674	0,0133630

Age	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
63	0,0158138	0,0157108	0,0156233	0,0153864	0,0151190	0,0146736	0,0145606
64	0,0169922	0,0168801	0,0167848	0,0165269	0,0162359	0,0157513	0,0156284
65	0,0183275	0,0182054	0,0181018	0,0178211	0,0175044	0,0169772	0,0168435
66	0,0197025	0,0195691	0,0194560	0,0191495	0,0188038	0,0182286	0,0180828
67	0,0213776	0,0212329	0,0211100	0,0207774	0,0204021	0,0197778	0,0196195
68	0,0232573	0,0230987	0,0229641	0,0225996	0,0221885	0,0215046	0,0213313
69	0,0250142	0,0248408	0,0246936	0,0242952	0,0238459	0,0230988	0,0229094
70	0,0273738	0,0271835	0,0270220	0,0265848	0,0260919	0,0252722	0,0250645
71	0,0296421	0,0294338	0,0292571	0,0287788	0,0282395	0,0273431	0,0271160
72	0,0324382	0,0322108	0,0320178	0,0314953	0,0309062	0,0299270	0,0296789
73	0,0352204	0,0349696	0,0347567	0,0341806	0,0335312	0,0324522	0,0321789
74	0,0383933	0,0381168	0,0378821	0,0372473	0,0365318	0,0353433	0,0350424
75	0,0421781	0,0418743	0,0416165	0,0409189	0,0401327	0,0388269	0,0384962
76	0,0463180	0,0459844	0,0457014	0,0449355	0,0440724	0,0426388	0,0422757
77	0,0512041	0,0508394	0,0505300	0,0496925	0,0487484	0,0471799	0,0467826
78	0,0570456	0,0566504	0,0563149	0,0554068	0,0543826	0,0526797	0,0522482
79	0,0625200	0,0620820	0,0617103	0,0607042	0,0595697	0,0576840	0,0572062
80	0,0704483	0,0699777	0,0695781	0,0684961	0,0672751	0,0652431	0,0647277
81	0,0787124	0,0782051	0,0777744	0,0766075	0,0752899	0,0730952	0,0725382
82	0,0882651	0,0877142	0,0872463	0,0859783	0,0845458	0,0821580	0,0815516
83	0,0991404	0,0985554	0,0980584	0,0967108	0,0951871	0,0926440	0,0919976
84	0,1096022	0,1089663	0,1084260	0,1069608	0,1053038	0,1025371	0,1018337
85	0,1227323	0,1220560	0,1214812	0,1199215	0,1181563	0,1152061	0,1144554
86	0,1353942	0,1346480	0,1340137	0,1322928	0,1303452	0,1270900	0,1262617
87	0,1498345	0,1490495	0,1483823	0,1465710	0,1445196	0,1410876	0,1402136
88	0,1668162	0,1659815	0,1652718	0,1633446	0,1611607	0,1575038	0,1565718
89	0,1840422	0,1831549	0,1824004	0,1803509	0,1780272	0,1741338	0,1731410
90	0,2055117	0,2046141	0,2038504	0,2017745	0,1994182	0,1954637	0,1944540
91	0,2273768	0,2264170	0,2256005	0,2233801	0,2208590	0,2166254	0,2155441
92	0,2474373	0,2464407	0,2455925	0,2432856	0,2406650	0,2362613	0,2351358
93	0,2760408	0,2750806	0,2742631	0,2720376	0,2695060	0,2652433	0,2641521
94	0,3027276	0,3017622	0,3009400	0,2987007	0,2961516	0,2918548	0,2907540
95	0,3224593	0,3214161	0,3205277	0,3181083	0,3153543	0,3107131	0,3095243
96	0,3497893	0,3487385	0,3478433	0,3454047	0,3426272	0,3379425	0,3367417
97	0,3781352	0,3770845	0,3761894	0,3737499	0,3709699	0,3662770	0,3650734
98	0,4073214	0,4062791	0,4053909	0,4029693	0,4002082	0,3955436	0,3943464
99	0,4371641	0,4361382	0,4352638	0,4328791	0,4301586	0,4255589	0,4243776
100	0,4674470	0,4664452	0,4655913	0,4632616	0,4606025	0,4561034	0,4549472