Elementi di Matematica e di Statistica

I Limiti

Riccardo Ievoli

Corso di Laurea in Biotecnologie

04/11/2025

Outline

1. Introduzione ai Limiti
2. Limite Finito
3. Limite Infinito
4. Operazioni con i limiti
5. Le Forme Indeterminate

Introduzione ai Limiti

Il limite di una funzione si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}$ ma è ammissibile anche $x_0 = \pm\infty$.

Il limite è un operatore utile per studiare il comportamento di una funzione nei suoi **punti critici**, oppure *ai bordi* o estremi del suo dominio.

I limiti sono molto importanti per definire gli (eventuali) *asintoti* di una funzione, nonché la sua **continuità**

1. Limite finito al finito
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$
2. Limite finito all'infinito
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$
3. Limite infinito al finito
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$
4. Limite infinito all'infinito
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Si consideri una funzione $f(x)$ definita in un intervallo aperto di x_0, si dice limite finito, per $x \to x_0$ di $f(x)$, la quantità $L \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Definizione: $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - L| < \varepsilon, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

In sintesi, $f(x)$ si avvicina ad L considerando x *sufficientemente vicino* al punto x_0.

Si consideri che: $f(x_0 + \delta) = L + \varepsilon$; $f(x_0 - \delta) = L - \varepsilon$.

La definizione **non richiede** che la funzione sia definita in $x = x_0$.

Si consideri la seguente funzione: $f(x) = 2x + 1$.

Si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = ??$$

Si applichi la definizione di limite sostituendo la soluzione L

Si applichi la definizione di limite utilizzando $\varepsilon = 0,01$ e $\delta = 0,004$

Suggerimento: si parta considerando la $f(3)$

- Limite che tende a x_0 **da destra**:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$$

- **Definizione** $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - L| < \varepsilon, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$.
- Limite che tende a x_0 **da sinistra**:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

- **Definizione** $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - L| < \varepsilon, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$.

Attenzione $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ esiste soltanto se esistono e coincidono:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Risolvere i seguenti limiti per $x \to x_0$

- $\lim_{x \to 1} (3x + 1) = ??$
- $\lim_{x \to 2} = \frac{x^2 - 1}{x + 1} = ??$
- $\lim_{x \to 6} = \frac{x + 5}{x - 5} = ??$

Suggerimento: bisogna partire dalla $f(x_0)$

Non sempre esistono i limiti delle funzioni in alcuni punti critici, proprio in virtù della **non coincidenza** tra limite destro e sinistro.

Esempi

- $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ e $\lim_{x \to 0} f(x)$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e $\lim_{x \to 0} f(x)$

In questo caso, all'aumentare (o al diminuire) della x, la $f(x)$ si avvicina ad un limite finito $L \in \mathbb{R}$.

- Definizione nel caso di $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} : se \quad x > x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

- Definizione nel caso di $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} : se \quad x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Risolvere i seguenti limiti:

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = ??$
- $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = ??$
- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = ??$

Limite Infinito

Limite Infinito al Finito

Si consideri una funzione $f(x)$ definita in un intervallo aperto di x_0. Se i valori della funzione $f(x)$ crescono (o decrescono) indefinitamente quando $x \to x_0$, allora si è nel caso di **limite Infinito al Finito**:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

- Definizione nel caso di $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : f(x) > M \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

- Definizione nel caso di $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : f(x) < -M \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

La definizione **non richiede** che la funzione sia definita in $x = x_0$.

Limite Infinito

Limite Infinito al Finito da destra e da sinistra

Anche in questo caso si possono considerare i limiti per x che tende a x_0 da destra e da sinistra.

Esempi con risultato $+\infty$

- $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$. **Definizione**:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : f(x) > M \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

- $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$. **Definizione**:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 : f(x) > M \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

Esercizio: Scrivere le definizioni di

$$\text{a)} \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty; \qquad \text{b)} \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

In questo caso, i valori della funzione $f(x)$ crescono (o decrescono) indefinitamente quando $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

Definizione nel di caso $x \to +\infty$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$:

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \text{se} \quad x > x_0 \Rightarrow f(x) > M$$

.

Di seguito si passano in rassegna gli altri tre possibili casi

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$. **Definizione**:

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \text{se} \quad x > x_0 \Rightarrow f(x) < -M$$

.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. **Definizione**:

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \text{se} \quad x < x_0 \Rightarrow f(x) < -M$$

.

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. **Definizione**:

$$\forall M > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R} : \text{se} \quad x < x_0 \Rightarrow f(x) > M$$

.

Alcuni limiti fondamentali

$\lim_{x \to \pm\infty} x^n$ considerando $n \in \mathbb{N}$ con $n \neq 0$:

- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ con n pari e dispari
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ con n pari, $\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ con n dispari

$\lim_{x \to \pm\infty} a^x$ con $a > 0$:

- $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ con $0 < a < 1$
- $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ con $a > 1$
- $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$ con $a > 1$
- $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$ con $0 < a < 1$

Una funzione si dice **continua** in $x_0 \in D$ se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definizione:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è detta **continua** se tale proprietà è verificata in ogni punto dei suo dominio.

Una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ non continua si dice anche **discontinua**

Operazioni con i limiti

Considerando $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L_2$ valgono le seguenti proprietà:

- **Somma e differenza**:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) = L_1 \pm L_2$$

- **Prodotto**:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

- **Quoziente**, con $L_2 \neq 0$ (teoricamente anche $g(x)$)

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

Operazioni con i limiti

Parte 2

- **Prodotto per una costante**, $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} [cf(x)] = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = c \cdot L_1$$

- Le suddette proprietà valgono anche nel caso in cui:

$$x \to x_0^- \quad \text{oppure} \quad x \to x_0^+$$

$$x \to -\infty \quad \text{oppure} \quad x \to +\infty$$

Risolvere i seguenti limiti

- $\lim_{x \to +\infty} 3\left(3 + \frac{1}{x}\right) =??$
- $\lim_{x \to +\infty} \left(2 - e^{-x}\right) =??$

Le Forme Indeterminate

Le seguenti **Forme Indeterminate** possono emergere dalla combinazione di funzioni:

1. $-\infty \cdot +\infty$
2. $0 \cdot \infty$, ovvero $0 \cdot +\infty$ e $0 \cdot -\infty$
3. $\dfrac{\infty}{\infty}$, ovvero $\dfrac{-\infty}{-\infty}$; $\dfrac{+\infty}{+\infty}$; $\dfrac{+\infty}{-\infty}$; $\dfrac{-\infty}{+\infty}$.
4. $\dfrac{0}{0}$

In questi casi, la risoluzione del limite può non essere immediata

In alcuni casi è possibile risolvere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ andando a semplificare la funzione (o la combinazione di funzioni)

Esempio: $f(x) = x^2, g(x) = 2x$.

- $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2} = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} = \infty$ ma attenzione!

Nel caso di forma indeterminata per $x \to \infty$, si può utilizzare il confronto tra **ordini di grandezza** dei polinomi (numeratore e denominatore).
In particolare, considerando due funzioni polinomiali:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x_1 + b_0$$

si ha che:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{b_m x^m}{a_n x^n}$$

Risolvere i seguenti limiti:

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 + 5x + 10}{3x^3 - 2^2 + 10} =??$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + 5x + 10}{5x^5 - 3x^4 + x} =??$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^7 + 10x^3 + 5}{x^2 - 3x + 8} =??$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{3x} + 5e^x}{2e^{3x} - 2e^{2x} + 5} =??$

Cosa abbiamo imparato oggi?

1. Definizioni di Limiti Finiti ed Infiniti
2. Operazioni con i Limiti
3. Forme indeterminate e possibili soluzioni

Risolvere i seguenti limiti:

- $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + x}{x^5 + 6x + 4} = ??$
- $\lim_{x \to 2^+} \dfrac{x - 1}{x^2 - x - 6} = ??$
- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{4x^3 + x^2 + 5}{5x^3 + 6x + 1} = ??$

Calcolare i seguenti limiti:

- $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = ??$

- $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = ??$

- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 + 5} = ??$