

Elementi di Matematica e di Statistica

Introduzione agli Integrali

Docente: Riccardo Ievoli

Corso di Laurea in Biotecnologie

02/12/2025

Outline

- 1 Integrale Definito
- 2 Integrale Indefinito
- 3 Operazioni con gli Integrali
- 4 Cenni sulle regole di integrazione

Integrale Definito

L'integrale come area

L'espressione:

$$\int_a^b f(x)dx$$

rappresenta la cosiddetta **area orientata** del sottografico della funzione $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.

In altre parole, l'integrale rappresenta l'area sotto la curva definita da $f(x)$ tra i punti $x = a$ e $x = b$.

Integrale Definito

L'integrale come area (2)

In sintesi, se si considera una ampiezza fissa d e dati M_i e m_i , rispettivamente i valori delle altezze dei rettangoli **inscritti** e **circoscritti** in $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$, allora si dimostra che:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (M_i \cdot d) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (m_i \cdot d).$$

In pratica, l'integrale è una **somma infinitesima di rettangoli** inscritti o circoscritti ad una curva.

Integrale Indefinito

Il concetto di funzione Primitiva

Una funzione $G(x)$ è una primitiva della funzione $f(x)$ in $[a, b]$ se:

- ① G è derivabile in $[a, b]$
- ② $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$

Il problema del calcolo della primitiva di una funzione è quindi il problema inverso del calcolo della derivata.

Calcolare la primitiva di $f(x)$ significa trovare una funzione $G(x)$ tale per cui $f(x)$ è la sua derivata

Integrale Indefinito

Il concetto di funzione Primitiva (2)

Esistono infinite funzioni primitive di $f(x)$, a meno di una costante reale.
In sintesi, se $G(x)$ è la primitiva di $f(x)$, allora anche la funzione:

$$H(x) = G(x) + k \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

è una primitiva di $f(x)$

Esempi

- $f(x) = 2x \Rightarrow G(x) = x^2.$

Anche $H(x) = G(x) + 2 = x^2 + 2$ è una **primitiva** di $f(x)$

- $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0, \Rightarrow G(x) = \ln(x).$

Anche $\ln(x) + 10$ è una primitiva di $f(x)$

Alcuni Integrali Notevoli (Indefiniti)

- $\int x^a dx = \frac{x^{(a+1)}}{a+1} + c \quad a \neq -1$
- $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c$

Esercizi

Risolvere i seguenti integrali indefiniti:

- $\int dx = ??$

- $\int 2x dx = ??$

- $\int e^x dx = ??$

Esercizi (2)

Risolvere i seguenti integrali indefiniti:

- $\int \sqrt[3]{x} dx = ??$

- $\int e^{x+1} dx = ??$

Integrale Indefinito e Definito

Il calcolo dell'Integrale

Connessione tra integrale definito (area sotto la curva) e indefinito (primitiva)

Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_a^b f(x)dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

In pratica, per risolvere gli integrali in un intervallo $[a, b]$, è possibile valutare il valore della funzione primitiva G negli estremi dell'intervallo ed effettuare la sottrazione.

Operazioni con gli Integrali

Integrale indefinito

- Integrazione di una funzione per una costante:

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

- Integrazione di una somma per due funzioni:

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

- Integrazione di una differenza per due funzioni:

$$\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

Operazioni con gli Integrali

Integrale definito

- Integrazione di una funzione per una costante:

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

- Integrazione di una somma per due funzioni:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

- Integrazione di una differenza per due funzioni:

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

Operazioni con gli Integrali

Integrale definito (2)

- Uguali estremi dell'integrale:

$$\int_a^a f(x) = 0$$

- Cambio degli estremi:

$$\int_a^b f(x) = - \int_b^a f(x)$$

- Dato un punto $x = c$:

$$\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)$$

Esercizi

Risolvere i seguenti integrali definiti:

- $\int_4^8 dx = ??$

- $\int_{-3}^2 2x dx = ??$

- $\int_0^5 2x dx = ??$

- $\int_0^1 e^x dx = ??$

Esercizi (2)

Risolvere i seguenti integrali definiti:

- $\int_{-1}^1 x^2 dx = ??$
- $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx = ??$
- $\int_0^1 (2x^5 - 7x^3 + 2x) dx = ??$

Esercizi (3)

Trovare la primitiva $G(x)$ della seguente funzione

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

passante per il punto $P = (0, 5)$

Relazione tra Integrali e Probabilità

Data la seguente funzione

$$f(x) = \frac{x}{8} \quad 0 \leq x \leq 4$$

si dimostri che si tratta di una funzione di probabilità e si calcolino:

- $P(X < 2)$
- $P(1 < X < 3)$

Approfondimenti utili

- Integrazione per sostituzione
- Integrazione per parti

Cenni sulle regole di integrazione

Regole di sostituzione

- ① Prima formula di sostituzione:

$$\int f(h(x))h'(x)dx = F(h(x)) + c$$

- ② Seconda formula di sostituzione:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

Cenni sulle regole di integrazione

Regole di sostituzione: esercizi

Es.1:

$$\int 2x \cdot \cos(x^2) dx$$

Es.2:

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx$$

Cenni sulle regole di integrazione

Integrazione per parti

Consideriamo le seguenti funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nonché le loro primitive $F(x)$ e $G(x)$:

$$\int f(x)G(x)dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)dx$$

Esempio:

$$\int \ln(x)dx = \int 1 \cdot \ln(x)dx$$

Cosa abbiamo imparato oggi?

- Cosa sono gli integrali definiti
- Cosa sono gli integrali indefiniti
- Operazioni con gli integrali