Elementi di Matematica e Statistica

Introduzione alle funzioni (Parte 1)

Docente: Riccardo Ievoli

Corso di Laurea in Biotecnologie

21/10/2025

Dati due insiemi D ed Y, una funzione è una relazione che associa ogni elemento $x \in D$ ad **uno e solo un** elemento $y \in Y$.

Pertanto, si può scrivere che $f : D \rightarrow Y$ e quindi $y = f(x)$

- L'insieme D è noto come **dominio** della funzione. Può corrispondere al **dominio naturale**, ossia il più grande insieme per cui la funzione f è definita, oppure essere un sottoinsieme del dominio naturale
- L'insieme Y si chiama **codominio**
- L'insieme I che contiene i valori di $y \in Y$ che sono **immagine** dei valori $x \in D$, si definisce **immagine** della funzione. Generalmente $I \subseteq Y$.

Ricapitolando, la funzione $f : D \to Y$ si scrive $y = f(x)$, dove:

- x rappresenta la variabile **indipendente** (libera)
- y è la variabile **dipendente**
- x e y sono legate attraverso la legge (o relazione) f
- y è l'immagine di x
- x è la **controimmagine** di y
- Nel caso in cui $Y \subseteq \mathbb{R}$, la funzione si dice a **valori reali**

In sintesi:

$$x \to f \to f(x)$$

Considerando una funzione $f : D \to Y$:

- un elemento y del **codominio** (Y) può essere immagine di due (o più) elementi diversi del dominio (D)
- può succedere che alcuni elementi del **codominio** (Y) non siano immagine di alcun elemento del dominio (D)
- due (o più) elementi diversi del codominio (Y) non possono essere immagini dello stesso elemento del dominio (D)

Le Funzioni

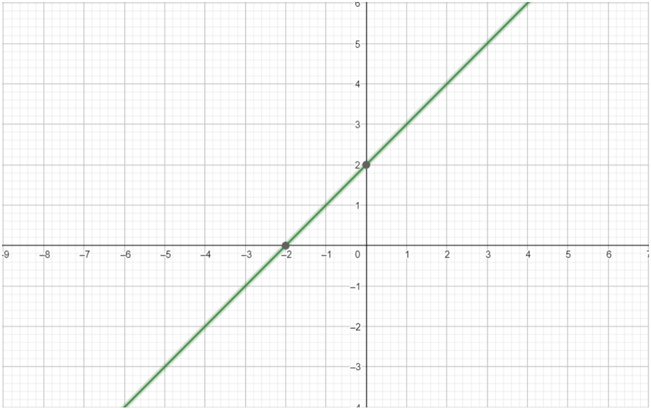
Esempi

- $f(x) = 7x + 10$ è una funzione lineare (retta)
- $f(r) = \pi r^2$ è la relazione tra il che esprime l'area del cerchio
- $f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ mette in relazione lo spazio percorso da un grave con il tempo (al quadrato).
- $f(x) = x^2 + 2$ rappresenta una parabola

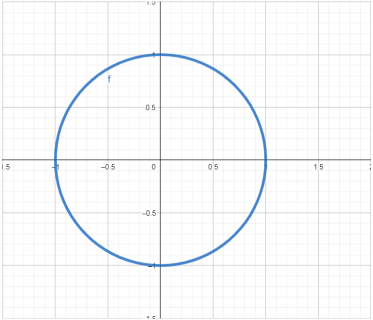
- Calcolare il valore della funzione $f(x) = 2x - 7$ nei punti $x_1 = 0$ e $x_2 = 5$
- Calcolare il valore della funzione $f(x) = 2x^2 + 5x$ nel punto $x = 1$
- Calcolare il valore della funzione $f(x) = 3x - \frac{5}{x+1}$ nel punto $x = 4$

Insieme dei punti (x, y) nel piano cartesiano tali che $y = f(x)\ \forall x \in D$

Esempio: $y = x + 2$



Attenzione: non tutte le curve del piano rappresentano delle funzioni
Esempio: $y^2 + x^2 = 1$



Problema: per ogni valore di x esistono **DUE immagini**.

Campo di Esistenza di una funzione

Si tratta del più grande dominio su cui la funzione f ha significato

Per valutare il campo di esistenza bisogna sempre considerare la natura della funzione, considerando caratteristiche quali:

- Presenza di incognite sotto radice (focus: radici pari)
- Presenza di incognite al denominatore (evitare denominatore pari a 0)
- Presenza di forme funzionali particolari (es. logaritmi)

Individuare il Campo di Esistenza delle seguenti funzioni

- $f(x) = 7x - 3$
- $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{-x}$
- $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x+3}}$
- $f(x) = \dfrac{x^2-3}{3x-5}$
- $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-4}$

Funzioni Pari e Dispari

Una funzione si dice **pari** se si verifica che

$$f(-x) = f(x)$$

Una funzione si dice **dispari** se si verifica che

$$f(-x) = -f(x)$$

- Il grafico di una funzione **pari** è *simmetrico* rispetto all'asse y
- Il grafico di una funzione **dispari** è *simmetrico* rispetto all'origine degli assi
- Esempio funzione pari: $f(x) = x^2$
- Esempio funzione dispari: $f(x) = x^3$

Valutare se le seguenti funzioni siano pari o dispari, utilizzando la $f(-x)$

- $f(x) = x^2 + 1$
- $f(x) = x$
- $f(x) = x + 1$
- $f(x) = x^4 + 3x^2$
- $f(x) = 2x^7 + 3x^5 + 4x$
- $f(x) = x^7 + x^6 + 2x^4 + 3x$

Se $f : D \to Y$ allora la funzione **inversa**, se esiste, è

$$f^{-1} : Y \to D$$

. Perché una funzione sia **invertibile** deve essere:

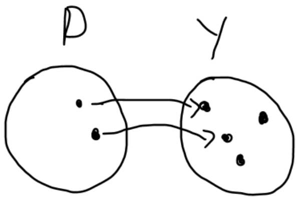
1. **iniettiva**
2. **suriettiva**

Una funzione $f : D \to Y$ è **iniettiva** se ad elementi distinti di D corrispondono elementi distinti di Y.

In simboli: $\forall x_1, x_2 \in D$, se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Non è detto che tutti gli elementi del codominio siano **immagine** di qualche elemento del dominio

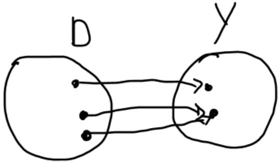
Intuizione Grafica



Una funzione $f : D \to Y$ è **suriettiva** (o surgettiva) se ogni elemento di Y è **immagine** di un elemento di D

In simboli: $\forall y \in Y, \exists x \in D | f(x) = y$

Chiaramente due (o più) elementi distinti di D possono essere mappati (**controimmagine**) sullo stesso elemento di Y



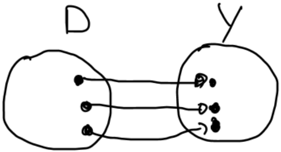
Alcune tipologie di funzioni

Funzione Biunivoca

Una funzione $f : D \to Y$ è **biunivoca** o **biettiva** se risulta essere sia **iniettiva** che **suriettiva**.

In sintesi, una funzione è biunivoca se ogni elemento di $y \in Y$ è **immagine** di uno ed un solo elemento $x \in D$

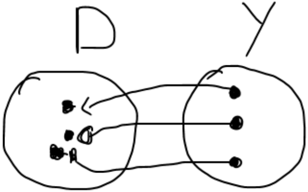
Una funzione **biunivoca** è anche **invertibile**



Come detto in precedenza, se una funzione $f : D \rightarrow Y$ è biunivoca è possibile ottenere la **funzione inversa**

$$f^{-1} : D \leftarrow Y$$

Intuizione grafica



Funzione Inversa (2)

Definizione di funzione inversa: considerando $f : D \to Y$ e $y = f(x)$, allora si può definire una $f^{-1} : Y \to D$:

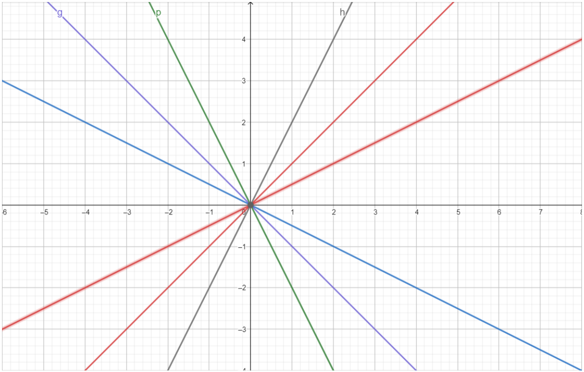
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in D$$

Indicando con $\mathbb{I}(x) = x$ la **funzione identità**, valgono le seguenti proprietà:

- $f^{-1}(f(x)) = \mathbb{I}(x)$
- $f(f^{-1}(y)) = \mathbb{I}(y)$

Funzioni Lineari

Una funzione del tipo $f(x) = mx + q$, con m e q costanti, si dice **lineare**



- Una funzione lineare è rappresentata da una retta
- Se $q = 0$ e $m = 1$ allora $y = x$, **funzione identica**
- Se $m = 0$ $y = q$ funzione **costante**

Funzioni Lineari

Funzione inversa di una funzione lineare

La funzione inversa di $f(x) = mx + q$, o $y = mx + q$ con m e q costanti, è

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{m} - \frac{q}{m}$$

Di fatto quindi si tratta di una retta con le seguenti caratteristiche:

- coefficiente angolare m' pari a $\frac{1}{m}$ con m coefficiente angolare di $f(x)$
- intercetta pari a $q' = -\frac{q}{m}$ dove q è l'intercetta di $f(x)$

Esercizio: dimostrare che l'inversa di f(x) è $\frac{y}{m} - \frac{q}{m}$

Trovare la funzione inversa delle seguenti funzioni lineari con $D = Y = \mathbb{R}$

- $f(x) = 2x + 1$
- $f(x) = 3x + 4$
- $f(x) = x + 8$
- $f(x) = -x + 6$

Cosa abbiamo imparato oggi?

1. Definizione di Funzione
2. Campo di Esistenza di una Funzione
3. Funzioni Pari e Dispari
4. Funzioni Iniettive, Suriettive, Biunivoche
5. Funzioni Inverse
6. Funzioni Lineari