Elementi di Matematica e di Statistica

Argomenti Introduttivi (2)
Insiemi, Polinomi ed Equazioni

Docente: Riccardo Ievoli

Corso di Laurea in Biotecnologie
a.a. 2025-2026

07/10/2025

Indice

Un **insieme** è una collezione o aggregazione (agglomerato) di *oggetti*

- Solitamente gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole: A,B,C,...,X,Y,Z
- Gli elementi di un insieme si indicano con le lettere minuscole: a,b,c...
- Un elemento appartiene all'insieme: $a \in A$, altrimenti $a \notin A$

Insiemi e sottoinsiemi

- $B \subseteq A$ oppure $A \supseteq B$: B è contenuto in A o A contiene B
- Sottoinsieme proprio: $B \subset A$ oppure $A \supset B$
- L'insieme *vuoto* viene indicato con $\emptyset$
- Insieme delle parti di A che contiene tutti i **sottoinsiemi**: $\mathcal{P}(A)$

- **Unione**: $A \cup B$ è l'insieme che contiene tutti gli elementi di A e B
  Esempio: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{c, d, e\}$.

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$$

- **Intersezione**: $A \cap B$ è l'insieme che contiene gli elementi <u>in comune</u> di A e B
  Esempio: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{c, d, e\}$.

$$A \cap B = \{c\}$$

- **Differenza**: $A - B$ è l'insieme che contiene gli elementi di A che <u>non sono contenuti in B</u>
  Esempio: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{c, d, e\}$.

$$A - B = \{a, b\}$$

Insiemi **complementari**: si indica con $\overline{A}$ oppure A^c

Contiene tutti gli elementi **non** presenti in A

- Calcolo delle probabilità: Ω è lo spazio degli eventi e quindi $\overline{A} = \Omega - A$
- Esempio: Lancio di un dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. $A = \{2\}; \overline{A} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$

Insiemi **disgiunti**: Quando $A \cap B = \emptyset$.

Nel calcolo delle probabilità si parla anche di eventi (insiemi) **incompatibili**

Esempio: $A = \{1, 2, 3\}; B = \{4, 5, 6\}$. $A \cap B = \emptyset$

- Proprietà **associativa** di unione e intersezione:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- Proprietà **commutativa** di unione e intersezione:

$$A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A$$

- Proprietà **distributiva**:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Insiemi **complementari** con unione e intersezione

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}; \quad \text{oppure} \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{oppure} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

- Operazioni con l'insieme vuoto (lo "zero" degli insiemi):

$$A \cup \emptyset = A; \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

- Unione e intersezione soddisfano la proprietà di **idempotenza** se:

$$A \cup A = A; \quad A \cap A = A$$

- $A = \{a, b, c, d\}; B = \{c, d, e, f\}$. Calcolare $A \cup B$
- Lancio di un dado: $A = \{1, 2\}; B = \{1, 3, 5\}$. Calcolare $A \cap B$
- Lancio di un dado: $P = \{2, 4, 6\}; B = \{1, 3, 5\}$. Calcolare $P \cap B$
- Mazzo di carte napoletane: Ω. $A = \{$seme uguale a coppe e bastoni$\}$. Quali elementi comprende $\overline{A}$?

Si dice **prodotto cartesiano** $A \times B$ l'insieme delle coppie **ordinate** di A e B, la cui generica coppia è (a,b)

- Esercizio 1: $A = \{1, 3, 5\}; B = \{2, 4, 6\}$. Calcolare $A \times B$
- Esercizio 2: D_1 e D_2 contengono i possibili risultati di un lancio di un dado a sei facce. Calcolare $D_1 \times D_2$

Numeri naturali $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

- $\mathbb{N}$ non è sufficiente per rappresentare tutte le grandezze (es. temperatura)

Numeri interi $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

- Per ogni $x \in \mathbb{Z}$ esiste anche $-x$, ossia il suo **opposto**
- 0 è l'elemento neutro rispetto alla somma, mentre 1 lo è per la moltiplicazione
- In questo insieme non sono presenti **numeri frazionari**

Numeri razionali $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}; \quad m, n \in \mathbb{Z}; \quad n \neq 0 \ldots \right\}$

- Nell'insieme dei numeri razionali, la parte decimale può essere sia limitata che illimitata (periodica semplice o mista)
- Esempi di numeri razionali: $1,5; 1,\overline{9} = 1,9999, \ldots; 1,23\overline{6}$

Numeri reali: si indica con $\mathbb{R}$ e contiene anche tutti i numeri irrazionali (es. $\sqrt{2}; \pi, e, \ldots$), i quali sono infiniti.

- $\mathbb{R}$ include tutti gli insiemi numerici visti in precedenza

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Un monomio è una espressione algebrica che combina numeri e lettere
Esempi: $\frac{2}{3}xy^2$; $\sqrt[3]{10}a^2bc^3$

Caratteristiche dei Monomi

- Grado di un monomio: $a^m b^n$ è di grado $m+n$
  Esempio: $3a^2b^3c^2$ ha grado 7
- Monomi simili: hanno la stessa parte letterale
  Esempio: $3ab^2$ e $-5ab^2$
- Monomi identici: stesso coefficiente e parte letterale
  Esempio: $\frac{10}{3}x^2y = \frac{20}{6}x^2y$

Un **polinomio** è la somma algebrica di più monomi. Esempi:

$$a + 2b + 3c; \quad mn + 2m + 10; \quad 7ab + 5a + 3b - 18$$

Grado di un polinomio: equivale al grado del monomio con grado più elevato

- Esempio 1: $5x + 7y^2 + 10$ è un polinomio di grado $\underline{2}$
- Esempio 2: $ab^3 + a^3 + 3a^2b^5$ è un polinomio di grado $\underline{7}$

- Si possono sommare soltanto i monomi **simili**
- La somma di monomi simili è anch'essa un monomio simile, avente come **coefficiente** la somma algebrica dei coefficienti
- Il prodotto di monomi ha come risultato il prodotto tra i coefficienti e tra la parte letterale
- La divisione tra monomi segue di fatto le stesse regole del prodotto (con denominatore diverso da zero)
- Potenza di un monomio: valgono le regole della potenza di potenza

Polinomi
Esempi/Esercizi

- $5ab^2 + 3a^2b - 2ab^2 + a^2b = ??$
- $6xy^2 \cdot (-2x^2y) = ??$
- $(5a^2bc^3)^2 = ??$
- $\dfrac{10a^4bc^3}{2a^2b^2c^3} = ??$

Si tratta di alcuni casi particolari di prodotti tra polinomi

- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- Quadrato di un binomio: $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- Quadrato di un trinomio:
  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
- Cubo di un binomio: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

Generalizzazione del quadrato/cubo di un binomio, con potenza pari a n

Lo schema di base è sempre lo stesso per ogni $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$(a + b)^n = a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n$$

Per $n = 1, 2, \ldots$, i coefficienti possono essere disposti secondo uno schema noto come il **triangolo di Tartaglia** (coefficienti dello sviluppo).

Generalizzazione del quadrato di un binomio/trinomio

- $(a + b + c)^2 =??$
- $(a + b + c + d)^2 =??$
- $(a + b + c + d + e)^2 =??$

Equazione: uguaglianza tra espressioni algebriche che coinvolge elementi del calcolo letterale (ossia monomi e polinomi). Può includere una o più variabili:

$$A(x, y, z, \ldots) = B(x, y, z, \ldots)$$

L'equazione può essere soddisfatta soltanto per uno o più valori delle variabili.

- Un'equazione **determinata** ammette un numero finito di soluzioni
  Esempio: $x - 3 = 0 \quad \Rightarrow x = 3$
- Un'equazione **indeterminata** ammette un numero infinito di soluzioni
- Un'equazione **impossibile** non ammette soluzioni
  Esempio: $x^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4}$ **non ammissibile**

Nel caso univariato, l'equazione presenta una sola variabile elevata alla potenza di 1 (primo grado)

Qualsiasi equazione di primo grado si può esprimere come segue (forma normale):

$$ax + b = 0$$

Pertanto, dopo il passaggio intermedio $ax = -b$, la soluzione dell'equazione è:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Le equazioni di primo grado sono strettamente collegate alle **rette**. Si ricordi l'equazione generica in forma **esplicita** $y = mx + q$

Equazioni di primo grado

Esercizi: Risolvere le seguenti equazioni

- $7x + 14 = 0$; $x =??$
- $\frac{1}{2}x + 12 = 0$
- $\sqrt{2}x + 20 = 0$
- $\frac{1}{2}x + 12 = 0$

La forma normale di una equazione di secondo grado è:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dove $a \neq 0$. Le soluzioni dell'equazione si trovano nel modo che segue:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Le equazioni di secondo grado sono strettamente collegate alle **parabole**.

Il Valore Δ è detto **discriminante** dell'equazione

Considerando il **discriminante** dell'equazione (Δ) di secondo grado, ci sono tre possibilità:

- $\Delta = 0$: l'equazione ammette una **sola** soluzione $\Rightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta > 0$: l'equazione ammette due soluzioni:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- $\Delta < 0$: l'equazione NON ammette **soluzioni** reali

Si tratta di casi particolari dove mancano il termine (monomio di grado 1) di primo grado o il termine noto (monomio di grado 0).

- Equazioni **Pure**:

$$ax^2 + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

- Equazioni **Spurie**:

$$ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}$$

Come si può notare l'equazione spuria si risolve utilizzando il raccoglimento a fattor comune e la regola di risoluzione delle equazioni di primo grado

Trovare le soluzioni delle seguenti equazioni

- $x^2 - 3x + 2 = 0$
- $(x-3)^2 = 9 - 5x$
- $9x^2 - 27 = 0$
- $\frac{1}{2}x^2 - 3x = 0$

Non esiste un metodo di risoluzione generale, tuttavia è possibile individuare alcuni casi particolari

- Equazioni **binomie**: $ax^n + b = 0$ con $a \neq 0; n \in \mathbb{N}$
- Equazioni **trinomie**: $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ con $a \neq 0; n \in \mathbb{N}$
- Si possono risolvere attraverso una sostituzione (o cambio di parametrizzazione). Esempio: $x^n = u$
- Le equazioni **binomie** sono una generalizzazione delle equazioni pure

Risolvere le seguenti equazioni utilizzando la riparametrizzazione

- $x^4 - 16 = 0$
- $9x^4 + 37x^2 + 4 = 0$
- $3x^{10} + 5x^5 + 2 = 0$

Le equazioni irrazionali si dicono tali se l'incognita (o le incognite) compare come argomento di uno o più radicali.
Esempio

$$\sqrt{x-2} = 5x + 2$$

Quello che si può fare è elevare al quadrato (oppure ad una data potenza) entrambi i termini, ottenendo:

$$(\sqrt{x-2})^2 = (5x+2)^2$$

Problema: bisogna sempre tener conto delle possibili **condizioni di esistenza** dell'equazione. Nell'esempio $x \geq 2$. Questo vuol dire che qualsiasi soluzione inferiore a 2 **non è ammissibile**.

Risolvere le seguenti equazioni irrazionali DOPO aver quali sono le condizioni di esistenza:

- $\sqrt{5x+1} = 4$
- $x + 3\sqrt{23-x} = 19$
- $\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{3x+2}$

Cosa abbiamo imparato oggi?

1. Operazioni con gli insiemi
2. Monomi e Polinomi
3. Equazioni di primo e secondo grado
4. Equazioni di grado superiore
5. Equazioni irrazionali

Materiale Supplementare: Esercizi

Insiemi

1. Considerando l'insieme A$= \{2, 4, 6, 8, 10\}$, indicare se
   a. $4 \in$ A
   b. $0 \in$ A
   c. $6 \in$ A
   d. $15 \in$ A.
2. Considerando gli insiemi: B$= \{1, 2, 3, 4\}$ e C$= \{3, 4, 5, 6\}$, calcolare:
   a. B$\cup$C
   b. B$\cap$C
   c. B$-$C; B$+$C
   d. C$-$B
3. Sia dato l'insieme D$= \{a, b, c, d\}$. Scrivere tutti i sottoinsiemi di D.
4. Considera l'insieme E$= \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10$ e x è dispari$\}$.
   a. Scrivi esplicitamente l'insieme E.
   b. Qual è la **cardinalità** di E?
   c. $7 \in$ E?

Semplificare le seguenti espressioni polinomiali:

- $3x^2 + 5x - 2x^2 + x$
- $(2x + 3)(x - 1)$
- $\dfrac{(x^2 - 4)}{(x - 2)}$

Risolvere le seguenti equazioni:

- $2x^2 - 5x + 3 = 0$
- $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
- $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$
- $\sqrt{(x+2)} + \sqrt{(3-x)} = 1$
- $\sqrt{(2x+1)} + \sqrt{(x-3)} = \sqrt{(5x+4)}$

- Durante una sintesi, un ricercatore pesa 0,248 g di acido salicilico, mentre il valore teorico previsto era 0,,250 g.
  a. Qual è l'errore assoluto?
  b. Qual è l'errore relativo in percentuale?

- Scrivi in notazione scientifica il seguente numero: 0,0000450

- Risolvere $3,5 \times 10^4) \cdot (2,3 \times 10^{-3})$