Elementi di Matematica e di Statistica

Le Funzioni (Parte Seconda)

Docente: Riccardo Ievoli

Corso di Laurea in Biotecnologie

24/10/2025

Outline

1. Funzioni Monotone
2. Massimi e Minimi di una Funzione
3. Combinazione di Funzioni
4. Funzioni Composte

Analizzando il comportamento di una funzione f all'interno di un certo intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$, potrebbero emergere le seguenti possibilità:

1. La funzione f è **monotona** in un certo intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$
2. La funzione f è **strettamente monotona** in un certo intervallo $A \subseteq \mathbb{R}$

Funzioni Monotone

Funzioni Crescenti e Decrescenti

Analizzando il comportamento di una funzione f all'interno di un certo intervallo $A \in \mathbb{R}$, potrebbero emergere le seguenti possibilità:

- Funzione Monotona **Crescente** (strettamente crescente):

$$\forall x_1, x_2 \subseteq A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- Funzione Monotona **Non Decrescente** (crescente o uguale):

$$\forall x_1, x_2 \subseteq A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

- Funzione Monotona **Decrescente** (strettamente decrescente):

$$\forall x_1, x_2 \subseteq A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- Funzione Monotona **Non Crescente** (decrescente o uguale):

$$\forall x_1, x_2 \subseteq A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

In sintesi:

- Quando la funzione è crescente il valore di $f(x)$ cresce al crescere di x
- Quando la funzione è decrescente il valore di $f(x)$ decresce al crescere di x

Inoltre, se una funzione f non è nè crescente nè decrescente in un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$, allora si dice **costante**.

Alcuni esempi di funzioni lineari:

- La funzione $f(x) = 2x + 1$ è **strettamente crescente** $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- La funzione $f(x) = -2x + 1$ è **strettamente decrescente** $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow -2x_1 + 1 > -2x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Quindi, utilizzando l'equazione della retta in forma esplicita:

- $f(x) = mx + q$ con $m > 0$ è strettamente crescente $\forall x \in \mathbb{R}$, poiché

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow mx_1 + q < mx_2 + q \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- $f(x) = mx + q$ con $m < 0$ è strettamente decrescente $\forall x \in \mathbb{R}$, poiché

$$\forall x_1 < x_2 \Rightarrow mx_1 + q > mx_2 + q \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Si può dimostrare che la funzione $f(x) = x^2$:

- è strettamente **crescente** $\forall x \geq 0$
- è strettamente **decrescente** $\forall x \leq 0$

Si parte sempre da una coppia di punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ dove quindi

$$0 \leq x_1 < x_2$$

- $\forall x_1 > 0 \Rightarrow x_1 x_1 < x_1 x_2$; $\forall x_2 > 0 \Rightarrow x_1 x_2 < x_2 x_2$
- quindi $x_1^2 < x_1 x_2 < x_2^2$
- ossia $f(x_1) < x_1 x_2 < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Partendo dagli stessi presupposti si può dimostrare che $f(x)$ è strettamente decrescente $\forall x \leq 0$

Massimi e Minimi di una Funzione

Introduzione

Massimi e **Minimi** sono legati (almeno in parte) ai cosiddetti **punti critici** di una funzione

Si possono distinguere tra le seguenti tipologie di punti:

- Punto di **massimo assoluto** (o di massimo globale)
- Punto di **massimo locale** (o di massimo relativo)
- Punto di **minimo assoluto** (o di minimo globale)
- Punto di **minimo locale** (o di minimo relativo)

Si consideri una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ e il punto $x_0 \in D$, con $D \subseteq \mathbb{R}$

- x_0 è un punto di **minimo assoluto** o **minimo globale** se

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in D.$$

- x_0 è un punto di **minimo relativo** o **minimo locale** se

$$f(x_0) \leq f(x)$$

per tutti i punti x *sufficientemente vicini* ad x_0. In simboli:

$$\exists \delta > 0 | f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Si consideri una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ e il punto $x_0 \in D$, con $D \subseteq \mathbb{R}$

- x_0 è un punto di **massimo assoluto** o **massimo globale** se

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in D.$$

- x_0 è un punto di **massimo relativo** o **massimo locale** se

$$f(x_0) \geq f(x)$$

per tutti i punti x *sufficientemente vicini* ad x_0. In simboli:

$$\exists \delta > 0 | f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

Trovare i punti di minimo e massimo assoluti (in un dato intervallo $\in \mathbb{R}$) considerando le seguenti funzioni:

- $f(x) = 3x - 1$ nell'intervallo $[1, 2]$
- $f(x) = -3x - 1$ nell'intervallo $[-2, 0]$

Trovare i punti di minimo e massimo assoluti (in un dato intervallo $\in \mathbb{R}$) considerando le seguenti funzioni:

- $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[0, 5]$
- $f(x) = -x^2$ nell'intervallo $[0, 5]$

Combinazione di Funzioni

Utilizzando le operazioni algebriche, è possibile ottenere le cosiddette **combinazioni di funzioni**. Considerando due funzioni $f(x)$ e $g(x)$:

- $$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
- $$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
- $$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$
- $$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{con} \quad g(x) \neq 0$$

Importante proprietà: il Dominio della funzione combinata è l'intersezione dei domini delle due funzioni $D(f) \cap D(g)$

Inoltre, $(c \cdot f)(x) = c \cdot f(x)$ se $c \in \mathbb{R}$ è costante

Considerando le seguenti funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{x-1}$

Trovare il Campo di Esistenza di $f(x)$ e $g(x)$ che in questo caso equivale a $D(f)$ e $D(g)$.

Successivamente, individuare i domini delle seguenti funzioni combinate:

- $(f+g)(x)$
- $(f-g)(x)$
- $(f \cdot g)(x)$
- $\dfrac{f}{g}(x)$
- $\dfrac{g}{f}(x)$

Combinazione di Funzioni

Relazione con le funzioni pari e dispari

- Somma, differenza, moltiplicazione e quoziente di funzioni **pari** $\Rightarrow$ funzione **pari**
- Somma e differenza di funzioni **dispari** $\Rightarrow$ funzione **dispari**
- Prodotto e quoziente di funzioni **dispari** $\Rightarrow$ funzione **pari**
- Somma e differenza di una funzione **pari** e una **dispari** $\Rightarrow$ **non pari e non dispari**
- Prodotto e quoziente di una funzione **pari** e di una **dispari** $\Rightarrow$ **funzione dispari**
- Prodotto di una costante per una funzione **pari** $\Rightarrow$ **funzione pari**
- Prodotto di una costante per una funzione **dispari** $\Rightarrow$ **funzione dispari**

Stabilire se le seguenti combinazioni di funzioni sono pari o dispari.
Suggerimento: partire sempre dallo studio di $h(-x)$ dove h è la combinazione di funzioni.

- $f(x) = x^2$; $g(x) = x^2 + 1$; $(f + g)(x)$
- $f(x) = x$; $g(x) = x + 1$; $(f + g)(x)$
- $f(x) = x$; $g(x) = x + 1$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
- $f(x) = x$; $g(x) = x + 1$; $(f \cdot g)(x)$
- $f(x) = x^2$; $g(x) = x$; $(f \cdot g)(x)$

Funzioni Composte

Introduzione

Date due funzioni f e g, si definisce **funzione composta**, esprimibile anche con $f \circ g$, la seguente espressione:

$$f(g(x))$$

Il dominio di $f(g(x))$ è il seguente insieme: $x \in D(g) | g(x) \in D(f)$

La sequenza logica è la seguente:

$$x \to g \to g(x) \to f \to f(g(x))$$

Inoltre, bisogna premettere che nella gran parte dei casi $f \circ g$ può essere molto diversa da $g \circ f$, ossia:

$$g(f(x)) \neq f(g(x))$$

Attenzione alla differenza che sussiste tra **combinazione di funzioni** e **funzioni composte**.

Le funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x - 1$, con $D(f) = [0, +\infty)$ e $D(g) = \mathbb{R}$, generano le seguenti **combinazioni di funzioni**:

1. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x - 1}$, $D = [1, +\infty)$
2. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x} - 1$, $D = [0, +\infty)$
3. $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$, $D = [0, +\infty)$
4. $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = (x - 1) - 1 = x - 2$, $D = \mathbb{R}$

In sintesi, per trovare la funzione composta $f(g(x))$ basta sostituire $g(x)$ **al posto di** x nella funzione f

Considerando le seguenti funzioni f e g, individuare $f \circ g$, $g \circ f$ e i rispettivi domini.

- $f(x) = x^2$; $g(x) = \sqrt{x}$; $D(f) = \mathbb{R}$; $D(g) = [0, +\infty)$
- $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = x^2 - 9$; $D(f) = [0, +\infty)$; $D(g) = \mathbb{R}$
- $f(x) = x^{-1}$; $g(x) = x - 3$; $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; $D(g) = \mathbb{R}$
- $f(x) = x^{-1}$; $g(x) = x^2 + 1$; $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$; $D(g) = \mathbb{R}$

Considerando le seguenti funzioni f e g, individuare $f \circ g$, $g \circ f$ e i rispettivi domini.

In via preliminare individuare i domini di esistenza (campi di esistenza) di f e g

- $f(x) = \sqrt{x}$; $g(x) = 2x + 1$
- $f(x) = x^2$; $g(x) = x + 1$

Cosa abbiamo imparato oggi?

1. Funzioni Crescenti e Decrescenti
2. Massimi e Minimi Assoluti e Relativi
3. Combinazione di Funzioni
4. Combinazioni di Funzioni e Funzioni Pari e Dispari
5. Funzioni Composte e domini di esistenza