Elementi di Matematica e di Statistica

Le Derivate

Docente: Riccardo Ievoli

Corso di Laurea in Biotecnologie

11/11/2025

Outline

Funzioni Continue

Continuità di una funzione in un punto x_0. Una funzione $f(x)$ si dice continua in un punto x_0 con $x_0 \in I$ intervallo aperto, se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ossia se:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Continuità di una funzione in un intervallo $[a, b]$. Una funzione $f(x)$ si dice continua nell'intervallo $[a, b]$ se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in [a, b],$$

e contemporaneamente

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = a; \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = b.$$

Funzioni Continue

Osservazioni

La continuità delle funzioni in x_0 garantisce anche che la combinazione di funzioni sia continua, seguendo le proprietà delle operazioni sui limiti considerando combinazioni di funzioni derivabili

Esercizio: Scrivere le possibili operazioni con i limiti considerando funzioni continue

Se $f(x)$ è **continua** ed **invertibile**, allora anche la funzione inversa f^{-1} è **continua**.

Funzioni Continue
Osservazioni (2)

Sono presenti diverse funzioni **continue** nel proprio **campo di esistenza**:

- funzione valore assoluto $f(x) = |x|$
- funzione potenza x^b con $b \in \mathbb{R}$
- funzione esponenziale a^x
- funzioni logaritmiche $log_a(x)$
- chiaramente anche funzioni lineari (rette) e quadratiche (parabole)

Considerando la funzione $f(x)$ e due punti x_0 e x_1, è possibile calcolare le seguenti quantità:

1. Variazione assoluta:

$$\Delta f(x) = f(x_1) - f(x_0)$$

2. Variazione relativa:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Variazione di una funzione

Variazione assoluta e relativa (2)

La variazione relativa di una funzione

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

rappresenta il **coefficiente della retta** secante e passante per $P_0(x_0, f(x_0))$ e $P_1(x_1, f(x_1))$.

Concetto di **variazione istantanea** quando $x_1 \to x_0$:

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

Tale limite può essere scritto ponendo $h = x_1 - x_0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Approfondimento sulla **retta secante** passante per i punti P_0 o P_1:

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right) \cdot (x - x_0 \cdot f(x_0))$$

con coefficiente angolare pari a:

$$m = \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)$$

Derivata di una funzione

Definizione

Data una funzione $f(x)$, se **esiste** ed è **finito** il seguente **rapporto incrementale**:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

allora la funzione $f(x)$ è **derivabile** nel punto x_0 e $f'(x_0)$ è la derivata della funzione $f(x)$ nel punto x_0.

Attenzione: la $f'(x_0)$ può essere anche scritta nei seguenti modi:

$$\frac{d}{dx} f(x_0); \qquad \frac{\delta}{\delta x} f(x_0); \qquad Df(x_0).$$

- Si disegni il grafico di $f(x) = c$
- Il rapporto incrementale (per qualsiasi $h \in \mathbb{R}$) è il seguente:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

- Il limite del rapporto incrementale ($h \to 0$) è:

$$\lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

- In sintesi: **la derivata di una costante** è pari a 0

- Si consideri la funzione lineare $f(x) = mx + q$
- Il rapporto incrementale (per qualsiasi $h \in \mathbb{R}$) è il seguente:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{m(x+h) + q - (mx+q)}{h} \\ &= \frac{mx + mh + q - mx - q}{h} \end{aligned}$$

- Il limite del rapporto incrementale $(h \to 0)$ è:

$$\lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} = m$$

- In sintesi: **la derivata di una funzione lineare** è pari al suo coefficiente angolare

Derivata di una funzione

Esempio: Funzione Quadratica

- Si consideri la funzione $f(x) = x^2$
- Il rapporto incrementale (per qualsiasi $h \in \mathbb{R}$) è il seguente:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{m(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} \\
&= \frac{h(2x+h)}{h} = 2x + h
\end{aligned}
$$

- Il limite del rapporto incrementale ($h \to 0$) è:

$$\lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

Derivata di una funzione

Esercizio

- Si consideri la funzione $f(x) = x^3$
- Si calcoli il rapporto incrementale per $h \to 0$
- Suggerimento: si parta da:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

Operazioni con le derivate

Somma e differenza

Si considerino due funzioni derivabili $f(x)$ e $g(x)$, emergono le seguenti possibilità:

- Derivata della **somma** di $f(x)$ e $g(x)$:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

- Derivata della **differenza** di $f(x)$ e $g(x)$:

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Attenzione: <u>molto spesso</u> $(f-g)'(x) \neq (g-f)'(x)$

Si considerino le seguenti funzioni: $f(x) = x^2$ e $g(x) = (x+1)$. Si calcolino le seguenti derivate:

- $(f+g)'(x) =$???
- $(f-g)'(x) =$???
- $(g-f)'(x) =$???

Operazioni con le derivate
Prodotto di funzioni

Si considerino due funzioni derivabili $f(x)$ e $g(x)$, allora la derivata del prodotto delle due funzioni è data dalla seguente quantità:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x)f(x)$$

ossia la derivata della prima funzione per la seconda <u>non derivata</u> più la derivata della seconda funzione per la prima <u>non derivata</u>.

Attenzione: $(f \cdot g)'(x) = (g \cdot f)'(x)$

Nel caso in cui $g(x) = c$, allora $(f \cdot g)'(x) = c \cdot f'(x)$

Si consideri una funzione $f(x) = x^n$ derivabile, allora la sua derivata è:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Esercizi: Calcolare le derivate per le seguenti funzioni

- $f(x) = x^5$
- $f(x) = \dfrac{1}{x}$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$

Si dimostra che:

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f(x)^2}$$

Operazioni con le derivate
Quoziente di funzioni

Si considerino due funzioni derivabili $f(x)$ e $g(x)$, emergono le seguenti possibilità:

- Derivata del **quoziente** di $f(x)$ su $g(x)$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{con} \quad g(x) \neq 0$$

- Derivata del **quoziente** di $g(x)$ su $f(x)$:

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(x) = \frac{g'(x)\cdot f(x) - f'(x)\cdot g(x)}{[f(x)]^2} \quad \text{con} \quad f(x) \neq 0$$

Attenzione: <u>molto spesso</u> $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) \neq \left(\frac{g}{f}\right)'(x)$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

- $f(x) = (x-1) \cdot (x+1)$
- $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{x}$
- $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Derivate di Funzioni Composte

Si ricordi la definizione di funzione composta $(f \circ g)(x)$ oppure $(g \circ f)(x)$

Si devono considerare le seguenti condizioni:

a una funzione $f(x)$ derivabile nel punto x

b una funzione $g(y)$ derivabile nel punto $f(x)$

c la composizione $(f \circ g)(x)$ derivabile in x

Allora la derivata della funzione composta è:

$$(g \circ f)(x) = [g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Si tratta della cosiddetta **regola della catena**

Derivate di Funzioni Composte
Esempi/Esercizi

Risolvere le derivate delle seguenti funzioni composte $(g \circ f)(x)$:

- $f(x) = 8x^3 - 6x^2; g(y) = y^2$
- $f(x) = x^3 + 2x; g(y) = e^y$
- $f(x) = x^3 + 5x^2 + 1; g(y) = \dfrac{1}{y}$
- $(f \circ g)(x) = w(x) = e^{x^2}$
- $(f \circ g)(x) = w(x) = \sqrt{e^x}$

Può essere utile nel caso di forme indeterminate del tipo: $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

Sotto certe condizioni:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Per la dimostrazione si può partire dal fatto che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Cosa abbiamo imparato oggi?

1. Funzioni continue
2. Definizione di derivata
3. Operazioni con le derivate
4. Derivate e Funzioni Composte

Esercizi per casa

Tratti da Bellisardi, Bisi & Fioresi, 2024

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

- $f(x) = (x^2 + 3x)e^{2x}$
- $f(x) = \sqrt{3x^3 - 5x + 1}$
- $f(x) = \dfrac{2}{1 + 3x^2}$
- $f(x) = \dfrac{x + 2}{1 + x^2}$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

- $f(x) = (x^3 + 2x^2)e^{3x}$
- $f(x) = \sqrt{4x^4 - 6x^2 + 2}$
- $f(x) = \dfrac{3x}{1 + 4x^3}$
- $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{\sqrt{1 + x^2}}$
- $f(x) = \ln(x^2 + 1) \cdot e^x$
- $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2 + 1}$