# Elementi di Matematica e di Statistica

## Introduzione alla Probabilità

Docente: Riccardo Ievoli
riccardo.ievoli@unife.it

Corso di Laurea in Biotecnologie

28/10/2025

# Indice

- La teoria della probabilità è una vera e propria area della matematica che si occupa del **quantificare** le possibilità che un **evento casuale** si verifichi.
- Ci si trova quindi nel contesto di *eventi* di cui non è noto con certezza il risultato: non si può parlare di certezza *a priori*.

1. **Prova aleatoria**. Esperimento soggetto ad incertezza
   - Esempio 1: Lancio di una moneta (o di un dado)
   - Esempio 2: Estrazioni del lotto
2. **Evento**. Uno dei possibili risultati di una prova
   - Esempio 1: Dopo aver lanciato un dado, esce il numero 6
   - Esempio 2: Dopo aver estratto una carta, esce il due di picche
3. **Probabilità**. Numero associato ad un evento
   - La probabilità che esca il numero 6 è $1/6$
   - La probabilità che esca il due di picche è $1/52$

# Introduzione alla probabilità

## Alcune Nozioni

- $\Omega$ è lo spazio campionario che contiene i possibili eventi
- $\mathrm{P}(E)$: probabilità che si verifichi l'evento $E \subseteq \Omega$
- Con $\overline{\mathrm{E}}$ si definisce la negazione dell'evento E, ed è anche detto **complementare**. E e $\overline{\mathrm{E}}$ sono detti eventi disgiunti
- Dati due eventi A ed B, si indica con $A \cap B$ l'**intersezione** tra gli eventi
- Dati due eventi A ed B, si indica con $A \cup B$ l'**unione** tra gli eventi

La probabilità è una **funzione** che assegna ad ogni evento E, appartenente allo spazio degli eventi, un valore numerico P(E).

**Postulati** (Assiomi) **del Calcolo delle Probabilità**

- $P(\mathrm{E}) \geq 0$, la probabilità è sempre un numero positivo;
- $P(\Omega) = 1$, la probabilità che si verifichi uno qualsiasi dei risultati ottenibili dall'esperimento aleatorio è 1 (evento certo);
- Se $A \cap B = 0$, allora $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

# Definizione di Probabilità

## Alcuni teoremi del calcolo delle probabilità

1. Se si considera la probabilità dell'evento complementare ad E si ha che: $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$
2. $P(\emptyset) = 0$ dove $\emptyset$ rappresenta l'evento *impossibile*
3. Probabilità di un evento compresa tra 0 e 1: $0 \leq P(E) \leq 1$
4. Se $A \subseteq B$, allora $P(A) \leq P(B)$
5. In generale, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Infine, la somma delle probabilità dei possibili eventi è pari a 1:

$$\sum_i P(E_i) = P(\Omega) = 1, \quad i = 1, 2, \ldots$$

# Definizione di Probabilità

## Relazioni tra Eventi

Due grandi "famiglie" di eventi: incompatibili e/o indipendenti

- Eventi **incompatibili**: $A \cap B = \emptyset$
- In questo caso, poiché $P(\emptyset) = 0$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Eventi **indipendenti**: A non *altera* il verificarsi di B
- In questo caso P$(B|A) = P(B)$ ma anche

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

**Come si valuta** P(E)?

Esistono diverse prospettive che danno luogo a diverse definizioni di probabilità: tra esse consideriamo la definizione **frequentista**.

**Definizione**. La probabilità di un evento E viene identificata come il limite a cui tende il rapporto tra *il numero di esperimenti aleatori che danno come esito l'evento* $E(n_E)$ e *il numero totale di esperimenti aleatori condotti* (n):

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_E}{n}$$

# Definizione di Probabilità

## Definizione frequentista di probabilità: esempio

**Esempio.** Si lancia un singolo dado. Lo spazio campionario è quindi dato dall'insieme contenente tutti i possibili esiti: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si è interessati all'evento $E = \{\text{esce il numero } 1\}$, che ha probabilità pari a $P(E) = 1/6$.

Per valutarla, secondo la definizione frequentista, dovrei lanciare il dado tante (tantissime!) volte.

**Limiti** nella definizione: si possono considerare solo situazioni in cui le prove aleatorie siano ripetibili.

# Focus su intersezione di eventi indipendenti

- Si considerano due eventi $E_1$ ed $E_2$ tra loro indipendenti
- Questo significa che l'accadere dell'uno non modifica in alcun modo la probabilità che l'altro si verifichi.
- Si è interessati alla probabilità che gli eventi si verifichino insieme:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

**Esempio**. Si considerino due lanci di dadi consecutivi. Si è interessati a scoprire la probabilità che esca due volte 6. Sapendo che $P(E_1) = 1/6$ e $P(E_2) = 1/6$, e considerando gli esperimenti tra loro indipendenti, allora la probabilità che esca due volte 6 è

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

# Esempi pratici del calcolo delle probabilità

1. Lancio di una moneta
   - Probabilità che esca testa (moneta regolare)
   - Probabilità che esca **due volte** croce in due lanci
2. Lancio di un dado
   - Probabilità che esca il numero 1
   - Probabilità che esca il numero 2 **oppure** il 3
3. Gioco del lotto
   - Probabilità che esca il numero 1
   - Probabilità che esca l'ambo $\{1, 2\}$

# Esempi pratici del calcolo delle probabilità (II)

1. Lancio di una moneta
   - Probabilità che esca testa (moneta regolare): $P(T) = 0,5$
   - Probabilità che esca **due volte** croce in due lanci
     $P(C \cap C) = P(C) \cdot P(C) = 0,25$
2. Lancio di un dado
   - Probabilità che esca il numero 1: $P(\text{Esce } 1) = 1/6$
   - Probabilità che esca il numero 2 **oppure** il 3
     $P(\text{Esce } 2 \cup \text{Esce } 3) = 1/3$
3. Gioco del lotto
   - Probabilità che esca il numero 1 è pari a $1/90$
   - Probabilità che esca l'ambo $\{1, 2\}$. **Attenzione**!
   - In questo caso gli eventi NON sono **indipendenti**

# La probabilità condizionata

In ambito probabilistico, un concetto cruciale da definire è quello del **condizionamento**.

Se si considerano due eventi A e B, si definisce la probabilità che si verifichi A dato che si è verificato B come probabilità condizionata, indicandola con $P(A|B)$.

Di conseguenza, se A e B sono indipendenti:

$$P(A|B) = P(A)$$

# La probabilità condizionata

## Esempio

Si consideri il lancio di un dado e si è interessati alla probabilità dell'evento $A = \{\text{Esce 2}\}$. La sua probabilità (marginale) è $\mathrm{P(A)} = 1/6$.

Ma consideriamo ora due diversi eventi, B e C:

- Se consideriamo $B = \{\text{il numero uscito è pari}\}$ avremo che $P(A|B) = 1/3$, dato che assumiamo noto che il numero uscito è pari.
- Se consideriamo $C = \{\text{il numero uscito è dispari}\}$ avremo che $P(A|C) = 0$, dato che assumiamo noto che il numero uscito è dispari, (quindi non può essere 2).

# La probabilità condizionata

## Formalizzazione

Dati due eventi A e B, la probabilità che si verifichi A **dopo** che è avvenuto B, è:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Allo stesso modo, la probabilità che si verifichi B **dopo** che è avvenuto A:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Cosa accade se i due eventi sono **indipendenti**?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A),$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

Si deriva a partire dalla definizione di probabilità condizionata

Formula di Bayes con solo due eventi A e B:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

Formula di Bayes con k eventi $E_1, E_2, \ldots, E_k$ in (o $\subseteq$) $\Omega$.

Per qualsiasi evento A con $P(A) > 0 \subseteq \Omega$:

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(E_j)P(A|E_j)}$$

In una data popolazione la percentuale dei fumatori è pari al 25%. Inoltre, una malattia respiratoria è presente nel 22% dei fumatori e nel 3% dei non fumatori.

Qual è la probabilità che, estraendo un individuo a caso, quest'ultimo sia **un fumatore**?

# La probabilità condizionata

## I test diagnostici

I test diagnostici usati per il rilevamento di una determinata malattia sono costruiti considerando due parametri basati sul concetto di probabilità condizionata:

- **Sensibilità**: P(Test positivo|Individuo malato)
- **Specificità**: P(Test negativo|Individuo sano)

Ovviamente esistono anche le seguenti probabilità (errori del test)

- P(Test positivo|Individuo sano)
- P(Test negativo|Individuo malato)

Concetto di **gold standard**: strumento (test) che massimizza sensibilità e/o specificità rispetto agli altri
Concetto di **accuratezza** $\Rightarrow$ capacità del test di prendere la decisione giusta

# Cosa abbiamo imparato oggi?

1. Concetti fondamentali di probabilità
2. Postulati e teoremi del calcolo delle probabilità
3. Unione e intersezione di eventi
4. Eventi incompatibili e indipendenti
5. Probabilità condizionate e Teorema di Bayes

# Esercizio per casa

## Teorema di Bayes e test diagnostici

Un test diagnostico per una particolare malattia genetica ha una sensibilità del 95% (il test produce un risultato positivo in 95 casi su 100 se la persona è effettivamente malata) e una specificità del 90% (il test produce un risultato negativo in 9 casi su 10 se la persona non è effettivamente malata). Supponiamo che l'incidenza della malattia nella popolazione sia dello 0,5% ($P(M) = 0,05$).

Se un individuo risulta positivo al test, qual è la probabilità che sia **effettivamente malato**?