Elementi di Matematica e di Statistica

Disequazioni e Geometria Analitica (alcuni cenni)

Docente: Riccardo Ievoli

Corso di Laurea in Biotecnologie

15/10/2025

Indice

Una disequazione è un'espressione che può essere scritta come:

$$A(x) > 0 \quad \text{oppure} \quad A(x) < 0;$$

dove i simboli $<; >$ indicano "strettamente minore" e "strettamente maggiore".

Anche le seguenti espressioni rappresentano delle disequazioni:

$$A(x) \leq 0 \quad \text{oppure} \quad A(x) \geq 0.$$

dove i simboli $\leq; \geq$ indicano "minore o uguale" e "maggiore o uguale".

- Per quanto riguarda la somma (e quindi la sottrazione) le regole sono di fatto le stesse delle equazioni
- Per quanto riguarda la moltiplicazione (e quindi la divisione), bisogna considerare il **segno** della quantità per cui si vuole moltiplicare entrambi i membri della disequazione:
  - In caso di segno positivo: la disequazione mantiene il verso originario
  - In caso di segno negativo: la disequazione cambia verso

Una disequazione di primo grado si può scrivere come:

$$ax + b \geq 0$$

Quali sono le soluzioni?

- Se $a > 0$, $\Rightarrow x \geq \dfrac{-b}{a}$
- Se $a < 0$, $\Rightarrow x \leq \dfrac{-b}{a}$

Risolvere le seguenti disequazioni di primo grado:

- $3x + 5 \geq 0$
- $-7x + 21 > 0$
- $12x - 6 < 0$
- $-2x + 17 \leq 0$

Un intervallo è un insieme di numeri reali.
Deve contenere almeno due numeri.

- Intervalli **limitati**
  - Aperto: (a, b), ossia $a < x < b$
  - Chiuso: $[a, b]$, ossia $a \leq x \leq b$
  - Semi-aperto a sinistra: $(a, b]$, ossia $a < x \leq b$
  - Semi-aperto a destra: $[a, b)$, ossia $a \leq x < b$
- Intervalli **illimitati**
  - Aperto: $(-\infty, b)$, ossia $x < b$ oppure $(a, +\infty)$, ossia $x > a$
  - Chiuso: $(-\infty, b]$, ossia $a \leq b$ oppure $[a, +\infty)$, ossia $x \geq a$
  - Inoltre: $\{\} = \emptyset$; $(-\infty, +\infty) = \{\forall x \in \mathbb{R}\}$

Un'equazione di secondo grado può assumere la seguente forma:

$$ax^2 + bx + c > 0; \quad \text{oppure} \quad ax^2 + bx + c < 0$$

Bisogna valutare la combinazione di Δ e di a per capire quali siano le soluzioni (si veda la slide seguente).

In generale però, nel caso in cui l'equazione sia $ax^2 + bx + c > 0$:

- Non ci sono soluzioni se $\Delta = 0$ e $a < 0$
- Non ci sono soluzioni se $\Delta < 0$ e $a < 0$

Disequazioni

Disequazioni di secondo grado: Schema generale

Δ	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
$\Delta>0$	$x<x_1 \vee x>x_2$	$x\leq x_1 \vee x\geq x_2$	$x_1<x<x_2$	$x_1\leq x\leq x_2$
$\Delta=0$	$\forall x\in\mathbb{R}-\{\frac{b}{2a}\}$	$\forall x\in\mathbb{R}$	$x\in\emptyset$	$x=-\frac{b}{2a}$
$\Delta<0$	$\forall x\in\mathbb{R}$	$\forall x\in\mathbb{R}$	$x\in\emptyset$	$x\in\emptyset$

Si trovano espresse nella seguente forma (anche nelle versioni con $\geq$ $\leq$):

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \text{oppure} \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0$$

In questo caso è importante lo **studio del segno** sia del numeratore che del denominatore. Inoltre, è necessario controllare la condizione di esistenza della disequazione (si veda il denominatore).

Esempio. Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{x^2 - 3x}{x + 2} > 0$$

Si trovano espresse nella seguente forma:

$$\sqrt{A(x)} > B(x) \quad \text{oppure} \quad \sqrt{A(x)} \geq B(x)$$

$$\sqrt{A(x)} < B(x) \quad \text{oppure} \quad \sqrt{A(x)} \leq B(x)$$

Le cose si complicano e si passa ai **Sistemi di disequazioni**

Provare a risolvere le seguenti disequazioni

- $\sqrt{3}x(x^2 - 2) > x + 2$
- $\sqrt{-x^2 + 9x + 11} \leq x - 3$

Provare a risolvere le seguenti disequazioni

- $|2x + 3| \leq 1$
- $|x^2 - 4x| \leq 2$

Suggerimento: bisogna impostare un doppio sistema di disequazioni

Sistema di riferimento formato da 2 rette ortogonali che si intersecano in un punto detto origine O(0,0). Ogni punto del piano è determinato da una coppia di valori detti ascissa (“le x”) e ordinata (“le y”).

La distanza tra due punti nel piano $\mathrm{P}(x_1, y_1)$ e $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ si calcola come segue:

$$d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Esempio: Calcolare la distanza tra $P(2, 5)$ e $Q(-2, 2)$

Equazione di una retta (forma implicita): $ax + by + c = 0$

Casi particolari:

- se $a = 0$ la retta $by + c = 0$ è orizzontale ovvero parallela all'asse delle ascisse (asse x)
- se $b = 0$ la retta $ax + c = 0$ è verticale ovvero parallela all'asse delle ordinate (asse y)

Equazione di una retta (forma esplicita): $y = mx + q$

Casi particolari:

- se $q = 0$ la retta $y = mx$ passa per l'origine degli assi
- se $m = 0$ la retta $y = q$ è parallela all'asse delle ascisse (asse x)

Equazione parabola:

$$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

- Fuoco: F$=\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-(b^2-4ac)}{4a}\right)$
- $y = \frac{-1-(b^2-4ac)}{4a}$
- Vertice: V $= \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

Una circonferenza di raggio r e centro $C(x_0, y_0)$ è il luogo geometrico dei punti del piano di distanza r da C.
Quindi è l'insieme dei punti che soddisfa:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

da qui si parte per ottenere l'equazione di una circonferenza:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Ma la circonferenza è una funzione?

Cosa abbiamo imparato oggi

1. Disequazioni di primo grado
2. Disequazioni di secondo grado
3. Disequazioni fratte
4. Cenni alla Geometria Analitica

- $-2x^2 + 5x - 3 \leq 0$
- $\dfrac{x+2}{x-1} > 0$
- $\dfrac{2x-3}{x^2+1} \leq 0$
- $\dfrac{(x^2-3x+2)}{(x^2-1)} < 1$
- $\dfrac{(2x^2-5x+3)}{(x^2-4)} \geq 0$

Per quali valori di k la disequazione

$$x^2 + 2kx + 1 > 0$$

è sempre verificata?

Risolvi la seguente disequazione al variare del parametro reale k:

$$x^2 - 2(k+1)x + k^2 > 0$$