Elementi di Matematica e di Statistica

Studio di Funzioni
Derivate parziali
Approfondimenti su alcune Funzioni

Docente: Riccardo Ievoli

Corso di Laurea in Biotecnologie

18/11/2025

Outline

1. Le Derivate e la Ricerca di Minimi e Massimi
2. Uno studio di funzione
3. Funzioni di due variabili
4. Focus su alcune funzioni

Se si considera una funzione derivabile $f(x)$ e la sua derivata prima $f'(x) \neq 0$ allora si possono verificare le seguenti situazioni:

- $f'(x) > 0 \Rightarrow$ la funzione è **crescente**
- $f'(x) < 0 \Rightarrow$ la funzione è **decrescente**

Primo passo riguardante lo **studio qualitativo** di una funzione.

Se si considera una funzione derivabile $f(x)$, nei punti in cui la sua derivata prima si annulla, $f'(x) = 0$ allora si è in corrispondenza di **punti critici** che potrebbero essere:

- Punti di **minimo**
- Punti di **massimo**
- Punti di **flesso**

Derivate e punti critici della funzione (2)

Lo **studio del segno** della derivata prima aiuta ad indicare se un **punto critico** è un punto di minimo, di massimo o di flesso.

In particolare, se x_0 è tale che $f'(x_0) = 0$ allora possono verificarsi le seguenti situazioni:

- se $f'(x_0) < 0$ a sinistra di x_0 e $f'(x_0) > 0$ a destra di x_0 allora x_0 è un **minimo** di $f(x)$
- se $f'(x_0) > 0$ a sinistra di x_0 e $f'(x_0) < 0$ a destra di x_0 allora x_0 è un **massimo** di $f(x)$
- se $f'(x_0)$ ha lo stesso segno sia a destra che a sinistra di x_0 allora x_0 è un punto di **flesso orizzontale**

La derivata seconda di $f(x)$ è semplicemente la derivata della derivata.
Dato un punto critico x_0, la derivata seconda di $f(x)$ (se esiste) si indica con:

$$f''(x_0)$$

Studio del segno della derivata seconda

- $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ è un minimo (locale)
- $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ è un massimo (locale)
- $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$ non si può dire se x_0 sia massimo o minimo di f(x)

Se in un certo intervallo:

- $f''(x) \geq 0 \Rightarrow$ La funzione è **convessa** ($\cup$)
- $f''(x) \leq 0 \Rightarrow$ La funzione è **concava** ($\cap$)

Lo studio del segno delle derivate permette di identificare punti di massimo e minimo, senza riuscire a distinguere tra punti **locali** e **globali**

Per poter distinguere tra punti di massimo (o minimo) relativi o globali è necessario analizzare la funzione negli estremi del dominio, utilizzando il limite.

Si ricorda che un punto di minimo (o massimo) locale x_0 vuol dire che quel punto è un punto di minimo soltanto in un intorno di x_0. Nel caso di minimo (o massimo) globale (o assoluto), tale condizione vale <u>per tutti i punti del dominio</u>

- Considerando la funzione $f(x) = x^2$, definita in $D = (-\infty, +\infty)$, si cerchino gli eventuali punti di minimo e/o di massimo di $f(x)$ studiando il segno della derivata seconda.

- Considerando la funzione $f(x) = e^x$, definita in $D = (-\infty, +\infty)$, si cerchino gli eventuali punti di minimo e/o di massimo di $f(x)$ studiando la derivata seconda.

Le Derivate e la Ricerca di Minimi e Massimi

Esempi/Esercizi (2)

Considerando la funzione $f(x) = x^3 - 3x + 1$ definita in $D = (-\infty, +\infty)$:

- studiare l'andamento qualitativo della funzione
- individuare eventuali punti di minimo e di massimo, specificando se si tratta di punti locali o globali

Studio di funzione

Esempio tratto da Bisi e Fioresi (2022)

Data la seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

risolvere i seguenti punti.

1. Dominio della funzione
2. Segno della funzione
3. Asintoti verticali e orizzontali
4. Derivata della funzione
5. Ricerca di minimi e massimi
6. Concavità, grafico

Studio di funzione

Esempio tratto da Barbero, Mosconi e Portaluri, 2022

Data la seguente funzione (v.a. normale standard):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-x^2/2}$$

risolvere i seguenti punti.

1. Dominio della funzione (Codominio?)
2. Segno della funzione
3. Simmetrie (funzione pari o dispari)
4. Intersezioni con gli assi
5. Limiti agli estremi del dominio e asintoti
6. Studio della monotonia (derivata prima)
7. Studio della concavità e convessità (derivata seconda)

Funzioni di due variabili

Introduzione

Fino ad ora sono state trattate soltanto funzioni di una variabile, ossia $f(x)$, dove quindi è presente una sola variabile indipendente

Esistono funzioni di più variabili e il caso più semplice è la funzione di due variabili, ossia $f(x, y)$, dove sono quindi presenti due variabili indipendenti

Il grafico di una funzione in due variabili sarà quindi non più in due (piano) ma in **tre** dimensioni (spazio), poiché sarà necessario rappresentare le **terne** $(x, y, f(x, y))$ di numeri reali con x, y che appartengono al dominio della funzione.

Premessa: per comodità può essere utile usare la notazione $F(x, y)$.

La variazione di una funzione può essere calcolata fissando il valore di una delle due variabili (es. $y = y_0$):

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Per cui, la **derivata parziale** *rispetto ad x* è data dal seguente rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Le derivate parziali in x_0 e y_0 si possono scrivere con la seguente notazione:

$$\frac{\delta F}{\delta x}(x_0, y_0); \quad \frac{\delta F}{\delta y}(x_0, y_0);$$

Per calcolare la derivata parziale bisogna trattare la variabile rispetto a cui **non** si sta derivando come **costante**

Per calcolare la derivata in x_0 e y_0 basta sostituire i punti nell'espressione della derivata parziale

Esempio/Esercizio: data la funzione $F(x, y) = x + y^2$ calcolare:

- la derivata (parziale) rispetto ad x
- la derivata (parziale) rispetto ad y
- il valore della derivata parziale in $(x_0 = 1, y_0 = 2)$

Considerando le seguenti funzioni di due variabili $F(x, y)$, calcolare le derivate parziali rispetto ad x e y e il valore della derivata considerando $x_0 = 2$ e $y_0 = 1$.

- $F(x, y) = x + y$
- $F(x, y) = x - y$
- $F(x, y) = x^2 + y$
- $F(x, y) = x \cdot y$
- $F(x, y) = x \cdot y^2$
- $F(x, y) = \dfrac{x}{y}$

La funzione valore assoluto

Si tratta di una funzione: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ che rende positivo qualsiasi numero reale:

$$f(x) = |x|$$

La funzione può essere riscritta nel modo che segue:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x > 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

Esercizio: disegnare il grafico della funzione $f(x) = |x|$ usando il foglio elettronico (o Geogebra o altra risorsa)

La funzione valore assoluto

Alcune proprietà

- $|x| = 0$ se e solo se $x = 0$
- $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2| \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\left|\dfrac{x_1}{x_2}\right| = \dfrac{|x_1|}{|x_2|} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_2 \neq 0$
- $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$

La derivata di $f(x) = |x|$ è la funzione segno di x $sgn(x)$, oppure:

$$f'(x) = \frac{|x|}{x}$$

Dimostrazione: si parta dal fatto che:

$$|x| = x \cdot sgn(x)$$

dove $sgn(x)$ è la funzione che valuta il segno di x

Funzioni Esponenziali

Considerando un $a > 0, a \neq 1$ funzioni esponenziali sono del tipo a^x.

Caratteristiche

- $a > 1 \Rightarrow$ la funzione è strettamente crescente;
- $0 < a < 1 \Rightarrow$ la funzione è strettamente decrescente
- il dominio delle funzioni esponenziali è l'intervallo $(-\infty; +\infty)$
- l'immagine è l'intervallo $(0; +\infty)$

Tracciare (utilizzando il foglio elettronico o Geogebra o altra risorsa), il grafico delle seguenti funzioni:

- $f(x) = 2^x; \quad f(x) = 5^x; \quad f(x) = (\frac{1}{2})^x; \quad f(x) = (\frac{1}{5})^x$
- $f(x) = 2^{-x}; \quad f(x) = 5^{-x}; \quad f(x) = (\frac{1}{2})^{-x}; \quad f(x) = (\frac{1}{5})^{-x}$

La funzione e^x è la funzione **esponenziale naturale**: la base della funzione è il numero irrazionale $e = 2,718281828....$

Utilizzando il foglio elettronico tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

- $f(x) = e^x$
- $f(x) = e^{2x}$
- $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$

Funzioni Esponenziali

Funzione esponenziale naturale (2)

Le Rette tangenti alle curva a^x nel punto $(0, 1)$:

- Hanno coefficiente angolare $m = 1$ se $a = e$
- Hanno coefficiente angolare $m < 1$ se $a < e$
- Hanno coefficiente angolare $m > 1$ se $a > e$

Funzioni Esponenziali

Le derivate

Si dimostra che la generica derivata di $f(x) = a^x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$ è:

$$f'(x) = a^x \cdot log_e(a) = a^x \cdot ln(a)$$

Pertanto, se $a = e$ e quindi $f(x) = e^x$, si ottiene la seguente derivata:

$$f'(x) = e^x \cdot log_e(e) = e^x ln(e) = e^x$$

Le funzioni logaritmiche

Il logaritmo $log_a(x)$ è l'esponente a cui bisogna elevare la base a per ottenere x.

Alcune proprietà

- $a^{log_a(x)} = 0$, $\forall x > 0$; $log_a 1 = 0$ e $log_a a = 1$
- $log_a(x_1 \cdot x_2) = log_a(x_1) + log_a(x_2), \quad \forall x_1, x_2 > 0$
- $log(\frac{x_1}{x_2}) = log_a(x_1) - log_a(x_2), \quad \forall x_1, x_2 > 0$
- $log_a(x^b) = b \cdot log_a(x), \quad \forall x > 0, b \in \mathbb{R}$

Utilizzando il foglio elettronico, tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

- $y = log_2(x)$
- $y = log_3(x)$
- $y = log_5(x)$
- $y = log_{10}(x)$

La funzione esponenziale $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ è strettamente monotona e anche suriettiva, quindi invertibile. In simboli:

$$f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow R, \quad f^{-1}(x) = log_a(x)$$

Ciò vale anche nel caso particolare di $a = e$:

- $log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$
- $ln(x) = y \Leftrightarrow e^y = x$

Le funzioni logaritmiche
Derivate

La derivata di $f(x) = log_a(x)$ è:

$$f'(x) = \frac{1}{x \cdot log_e(a)} = \frac{1}{x \cdot ln(a)}$$

La derivata di $f(x) = ln(x)$ è:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

- $f(x) = log_3(x)$
- $f(x) = ln(x^2)$
- $f(x) = ln(x^2 + x)$
- $f(x) = x^3 + ln(x^3)$
- $f(x) = ln(1/x)$

Data la circonferenza **goniometrica** (raggio unitario) e un punto P individuato sulla circonferenza mediante un angolo θ (a volte si usa anche α):

- $\cos(\theta)$ è l'ascissa del punto P
- $\sin(\theta)$ è l'ordinata del punto P

Teorema di Pitagora: $[\cos(\theta)]^2 + [\sin(\theta)]^2 = 1$

- Dominio: $(-\infty, +\infty)$
- Codominio: $[-1, 1]$
- Periodo: 2π
- $\cos(0°) = 1$; $\cos(90°) = 0$; $\cos(180°) = -1$; $\cos(270°) = 0$; $\cos(360°) = \cos(0°) = 1$
- $\sin(0°) = 0$; $\sin(90°) = 1$; $\sin(180°) = 0$; $\sin(270°) = -1$; $\sin(360°) = \sin(0°) = 0$
- Derivata del seno: $[\sin(x)]' = \cos(x)$
- Derivata del coseno: $[\cos(x)]' = -\sin(x)$

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

- $f(x) = \sin(x + 1)$
- $f(x) = \cos(x + 1)$
- $f(x) = \cos(3x) + 5x$
- $f(x) = \cos(x^2)$
- $f(x) = \sin(x^2)$

"Esercitazione" con Wooclap

Link al breve test (Codice Wooclap: **UNAHXF**):

`https://app.wooclap.com/UNAHXF?from=instruction-slide`

Cosa abbiamo imparato oggi?

1. Derivate e Ricerca di Minimi e Massimi
2. La Derivata Seconda
3. Funzioni di due variabili e derivate parziali
4. Caratteristiche di alcune funzioni

Esercizi per casa

Minimi e massimi (locali e globali)

Utilizzando la derivata prima e seconda, $f'(x)$ e $f''(x)$, cercare minimi e massimi (locali e globali) per le seguenti funzioni.

- $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$
- $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$
- $f(x) = x^3 - 3x + 1$
- $f(x) = xe^{-x^2}$
- $f(x) = x^4 - 2x^2$

Esercizi per casa

Tratto da Barbero, Mosconi e Portaluri, 2022

Considerando le seguenti funzioni:

- $f(x) = xe^{-x^2}$
- $g(x) = \dfrac{x+4}{x^2 - 5x}$
- $h(x) = \dfrac{x}{ln(x)}$

Si risolvano i seguenti punti per f(.), g(.), e h(.)

1. Dominio della funzione
2. Segno della funzione
3. Simmetrie (funzione pari o dispari)
4. Intersezioni con gli assi
5. Limiti agli estremi del dominio e asintoti (orizzontali e verticali)
6. Studio della monotonia (derivata prima)
7. Studio della concavità e convessità (derivata seconda)