# Elementi di Matematica e di Statistica

## La verifica di ipotesi

Docente: Riccardo Ievoli
riccardo.ievoli@unife.it

Corso di Laurea in Biotecnologie

26/11/2025

La statistica inferenziale fornisce strumenti utili per testare in maniera rigorosa ipotesi di ricerca

Esempi di ipotesi:

- La media della variabile di interesse per certo campione è maggiore (o minore) di 10?
- La distribuzione di una variabile di interesse in tre gruppi è uguale?
- La variabile numerica X presenta correlazione lineare con la variabile Y ?
- Due variabili mostrano indipendenza distributiva?

# La Verifica di Ipotesi

## Introduzione (2)

Fino ad ora queste domande sono state trattate dal punto di vista della statistica descrittiva.

Attraverso alcune assunzioni effettuate sul campione (piuttosto simili a quelle viste per la stima) si possono utilizzare strumenti statistici chiamati **test di ipotesi**.

Questi permettono di rigettare o non rigettare le ipotesi di lavoro con un certo livello di confidenza (lo stesso dell'intervallo di confidenza)

In generale, nella teoria dei test si definiscono **due** tipi di ipotesi:

1. **L'ipotesi nulla** (indicata con $\mathrm{H}_0$): si tratta dell'ipotesi che si intende valutare mediante il test.
2. **L'ipotesi alternativa** ($\mathrm{H}_1$): ciò che succederebbe nel caso in cui l'ipotesi nulla non sia verificata.

# La Verifica di Ipotesi

## Test sulla media: le ipotesi

Uno dei test più noti è quello sulla media. Sotto l'assunzione di **normalità** e di indipendenza tra le osservazioni, dato un valore $\mu_0$, si possono formulare sistemi di ipotesi del tipo:

- $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (test bidirezionale);
- $H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$ (test unidirezionale);
- $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$ (test unidirezionale).

# La Verifica di Ipotesi

## Test sulla media: la statistica test

È necessario ora fissare una *funzione dei dati che sia finalizzata a misurare la discrepanza presente tra l'evidenza portata dai dati e l'ipotesi nulla*: una **statistica test**.

Come per la fase di stima, una statistica test S è una variabile aleatoria che è funzione delle variabili aleatorie campionarie $(X_1, ..., X_n)$.

Nel caso del test sulla media si hanno i seguenti risultati:

- Quando $\sigma^2$ è noto:

$$S = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

- Quando $\sigma^2$ non è noto:

$$S = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \sim t(n - 1)$$

# La Verifica di Ipotesi

## Test sulla media: la statistica test osservata

Quando si osservano i dati $x_1, \dots x_n$ si ottiene il valore della statistica test, che è quindi un numero scalare, a partire dalla stima della media $\bar{x}$ (o $\hat{\mu}$) e il numero di osservazioni $n$:

- Quando $\sigma^2$ è noto:
$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- Quando $\sigma^2$ non è noto:
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$$

con $\hat{\sigma}^2$ che viene stimato tramite lo stimatore **non distorto**.

# La Verifica di Ipotesi

## Test sulla media: la regola di decisione

Fissato un livello di significatività $\alpha$ (errore di primo tipo), a seconda di qual è l'ipotesi nulla si decide se rifiutare o meno $H_0$ utilizzando la funzione di densità della normale standard se $\sigma^2$ è noto.

- $H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0 \Rightarrow$ rifiuto se $z < z_\alpha$
- $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0 \Rightarrow$ rifiuto se $z > z_{1-\alpha}$
- $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0 \Rightarrow$ rifiuto se $z_{\alpha/2} < z < z_{1-\alpha/2}$

**Regola empirica**. Fissato $\alpha = 0,05$ nel test bidirezionale, rifiuto se $|z| > 2$. Con lo stesso $\alpha$ nei test unidirezionali bisogna controllare che $z < -1,65$ e $z > 1,65$

**Attenzione**: in una v.c. simmetrica succede che $z_\alpha = -z_{1-\alpha}$.

# La Verifica di Ipotesi

## Test sulla media: la regola di decisione (2)

Fissato un livello di significatività $\alpha$, a seconda di qual è l'ipotesi nulla si decide se rifiutare o meno $H_0$ utilizzando la funzione di densità della t di Student se $\sigma^2$ è **non noto**.

- $H_0 : \mu \geq \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0 \Rightarrow$ rifiuto se $t < t_\alpha$
- $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0 \Rightarrow$ rifiuto se $t > t_{1-\alpha}$
- $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu \neq \mu_0 \Rightarrow$ rifiuto se $t_{\alpha/2} < t < t_{1-\alpha/2}$

**Attenzione**: molto spesso per evitare confusione si usano le sigle $z_{obs}$ e $t_{obs}$

Il t-test per la **differenza tra medie** si pone l'obiettivo di confrontare le medie aritmetiche di due sottogruppi della popolazione.

Si suppone quindi di avere:

- Due sottogruppi: A e B.
- Due medie: $\mu_A$ e $\mu_B$.

Il sistema di ipotesi al vaglio è:

$$H_0 : \mu_A = \mu_B = \mu \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu_A \neq \mu_B.$$

# La Verifica di Ipotesi

## Il t-test per la differenza tra medie: assunzioni

Alla base di tale test sono necessarie le seguenti assunzioni:

- **Normalità distributiva**: come visto già nel caso di stima. Quanto un test prevede l'assunzione di un modello distributivo viene detto *test parametrico*.
- **Indipendenza**: I valori delle unità statistiche presenti nei gruppi sono tra loro **indipendenti** (attenzione quindi a rilevazioni ripetute nel tempo!)
- **Omoschedasticità**: Le varianze $\sigma_A^2$ e $\sigma_B^2$ sono tra loro uguali (in popolazione )

La statistica test in questo caso si distribuisce nel modo che segue:

$$T = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\hat{\sigma}^* \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}} \sim t(n_A + n_B - 2)$$

La sua realizzazione è:

$$t = \frac{\hat{\mu}_A - \hat{\mu}_B}{\hat{\sigma}^* \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$$

dove: $\hat{\sigma}^{2*} = \dfrac{\hat{\sigma}^2_A (n_A - 1) + \hat{\sigma}^2_B (n_B - 1)}{n_A + n_B - 2}$

Per grandi campioni...T $\sim N(0, 1)$

Si tratta di una quantità importante in statistica applicata.

Come può essere definito?

È la probabilità (quindi un numero tra 0 e 1) di ottenere valori della statistica test uguali o più estremi di quello ottenuto nel campione (s), sempre assumendo che l'ipotesi nulla sia verificata.

A livello intuitivo:

- se il p-value ha valori vicini a 0: si osserva un valore molto improbabile rispetto all'ipotesi nulla $\Rightarrow$ **si rifiuta** $H_0$ .
- se il p-value ha valori "elevati" $(> 0,1)$, allora si tende ad accettare (**non rifiutare**) l'ipotesi nulla

Fortunatamente è facilmente ottenibile attraverso i moderni software.

Si può però distinguere tra:

- Test a **due code**:
  1. si valutano le probabilità a destra e a sinistra del valore di s rispetto alla distribuzione di S sotto $H_0$.
  2. si prende il valore inferiore e si moltiplica per 2.

- Test a **una coda**:
  1. si seleziona la coda di interesse (solitamente quella di destra)
  2. si calcola la probabilità alla destra (o sinistra, a seconda della coda di interesse) di s rispetto alla distribuzione di S sotto $H_0$.

# La Verifica di Ipotesi

## Il p-value: regola pratica

Il p-value deve essere confrontato con l'errore di primo tipo scelto $\alpha$. Esempio con $\alpha = 0,05$:

- Se $p < 0,05$: non vi è abbastanza evidenza empirica per valutare come verosimile l'ipotesi $\mathrm{H}_0$, che viene quindi <u>rigettata</u>.
- Se $p > 0,05$: non c'è abbastanza evidenza empirica per scartare $\mathrm{H}_0$, che quindi <u>non viene rigettata</u>.

# La potenza di un test

- L'errore di I tipo $\alpha$ viene fissato a priori dal ricercatore.
- Esiste un secondo possibile errore $\beta$ (errore di II tipo): non rifiutare l'ipotesi nulla quando questa è falsa. Questo errore non è noto a priori ma dipende dal test.
- Si valuta solitamente la potenza del test, ovvero $1 - \beta = \gamma$
- Tra due test si preferisce sempre il test a potenza maggiore.

# La Verifica di Ipotesi

## Riepilogo Pratico

1. Si formulano l'ipotesi nulla $H_0$ e l'ipotesi alternativa H1.
2. Si fissa il livello di significatività $\alpha$ del test, ovvero la probabilità di commettere l'errore di I tipo.
3. Si individuano i test statistici finalizzati alla verifica dell'ipotesi in oggetto.
4. Si considerano le assunzioni alla base dei test e si controlla che siano rispettate nel campione a disposizione (es. normalità). Tra i test che soddisfano le assunzioni si sceglie quello avente **potenza** maggiore.
5. Si calcola il valore della statistica e si valuta il p-value, confrontandolo con il livello scelto di $\alpha$.

I risultati visti in precedenza sono risultati **esatti**, che valgono per qualsiasi $n$ scelto. Grazie al **Teorema del Limite Centrale** è possibile anche applicare dei test **asintotici**, specialmente nel caso in cui $n$ sia molto grande (per ipotesi: $n \to \infty$).

Ad esempio se n è grande, anche nel caso di $\sigma^2$ non noto si ha il seguente risultato (campione casuale sempre indipendente e identicamente distribuito):

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = Z \to_d N(0, 1)$$

A quel punto è possibile utilizzare i quantili della normale standard e la sua funzione di densità.

**ES.1.** Un'azienda produttrice di sigarette sostiene che il contenuto di nicotina della marca M non supera 1,5 mg per sigaretta. Si verifichi l'ipotesi $\mathrm{H}_0 : \mu \leq 1,5$, sapendo che il contenuto medio di nicotina osservato in un campione casuale di 36 sigarette è pari a 1,56. Si assuma che la popolazione sia normale con deviazione standard $\sigma = 0,15$ considerando un livello di significatività pari a $\alpha = 0,05$.

**ES.2.** Il laboratorio di analisi di un'azienda produttrice di farmaci esamina un campione di 32 compresse di un nuovo farmaco per verificare l'ipotesi che la concentrazione media del principio attivo sia 1,25%. contro l'alternativa che sia minore. La deviazione standard della popolazione è nota ed è pari a $\sigma = 0,0076$. Nel campione la concentrazione media è $\bar{x} = 1,247$. Si fissa $\alpha = 0,05$.

**ES.3.** Riprendendo l'esempio precedente (ES.2.), si verifichi l'ipotesi $H_0 : \mu = 1,25$ contro l'alternativa $H_1 : \mu \neq 1,25$ considerando sempre $\alpha = 0,05$.

**ESERCIZIO 3 con Excel**. Considerando il dataset “Pazienti” (n=50), si effettuino i test statistici specificati dalle seguenti ipotesi

- **Età** $H_0 : \mu = 70$ vs $H_1 : \mu > 70$
- **FEV1** $H_0 : \mu = 75$ vs $H_1 : \mu \neq 75$
- **DLCO** $H_0 : \mu = 85$ vs $H_1 : \mu < 85$
- **BMI** $H_0 : \mu = 23$ vs $H_1 : \mu > 23$
- **Hospital Stay** (giorni) $H_0 : \mu \leq 10$ vs $H_1 : \mu > 10$
- **Operation Time** (minuti) $H_0 : \mu \leq 175$ vs $H_1 : \mu > 175$

**ESERCIZIO 3.1 con Excel**. Applicare il test (bidirezionale) per la differenza tra medie considerando i due gruppi di pazienti (maschi e femmine) per le seguenti variabili (dataset "Pazienti"):

- Età
- BMI
- Hospital Stay (giorni)

Sistema di ipotesi:

$$H_0 : \mu_M - \mu_F = 0 \quad \text{versus} \quad H_1 : \mu_M - \mu_F \neq 0$$

Si ipotizza normalità distributiva