Elementi di Matematica e di Statistica

Argomenti introduttivi

Potenze, Ordini di Grandezza, Percentuali, Concentrazione

Docente: Riccardo Ievoli
riccardo.ievoli@unife.it

Corso di Laurea in Biotecnologie
a.a. 2025-2026

07/10/2025

Indice

Potenze

- Cosa è una Potenza? Di fatto è un modo più “sintetico” di esprimere una moltiplicazione
- Componenti di una potenza: numero a detto **base** e n detto **esponente**

Dati a ed n, si definisce potenza di un numero l'espressione

$$a^n = \underbrace{a \cdot a, \ldots, \cdot a}_{\text{n volte}}$$

Esempi

- $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$
- $7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$
- $5^3 = 125$

Potenze

Alcune definizioni e proprietà

- Potenza zero: $a^0 = 1$. Esempi: $3^0 = 100^0 = 1$
- Potenza uno: $a^1 = a$. Esempi: $3^1 = 3$; $100^1 = 100$
- **Potenza negativa**: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
  Esempi: $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{125}$; $3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

Alcune Proprietà

1. Proprietà associativa del prodotto, ossia potenze con la stessa base e diverso esponente:
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
2. Potenze con la stessa base e diverso esponente:
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
3. Potenze di potenze:
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Esempi

1. Proprietà associativa del prodotto, ossia potenze con la stessa base e diverso esponente:

$$2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^1 = 2^{(2+3+1)} = 2^6 = 64$$

2. Potenze con diversa base e stesso esponente:

$$2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3 = 216 = 8 \cdot 27$$

3. Potenze di potenze:

$$(2^4)^2 = 2^{4 \cdot 2} = 2^8 = 512$$

- Rapporto di potenze con stessa base e diverso esponente:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n-m}$$

Esempio: $\frac{3^4}{3^2} = 3^4 \cdot \frac{1}{3^2} = 3^{(4-2)} = 3^2 = 9$

- Rapporto di potenze con base diversa e stesso esponente:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Esempio: $\frac{15^4}{5^4} = (\frac{15}{5})^4 = 3^4 = 81$

Potenze

La relazione con le radici

Un numero sotto radice può essere espresso sotto forma di potenza, e viceversa:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Esempio:

$$\sqrt{2^4} = 2^{4/2} = 2^2 = 4 = \sqrt{16}$$

Ricordando sempre che:

- la radice **pari** di un numero negativo **NON** esiste nell'insieme dei numeri reali
- la radice **dispari** esiste sempre (sia positivo che negativo)
- la radice **pari** di un numero positivo ammette **due** soluzioni: una positiva e una negativa

- $\sqrt[2]{(-16)}$ **NON ESISTE** nell'insieme dei numeri reali
- Esempi: $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[3]{-125} = -5$
- Esempi: $\sqrt[4]{81} = \pm 3$; $\sqrt{49} = \pm 7$; $\sqrt{64} = \pm 8$;...
- Esempio:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}; \qquad \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$$

- $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = ??$
- $(-5)(5)^2 = ??$
- $(2)^3(-3)^3 = ??$
- $\frac{(-5)^5}{(-\frac{1}{5})^{-3}} = ??$
- $10^{\frac{2}{3}}$

Ordini di grandezza e Notazione Scientifica

Qualsiasi numero reale positivo x può essere espresso attraverso la **notazione scientifica** utilizzando un numero a e una potenza di 10:

$$x = a \cdot 10^b, \quad \text{dove}$$

- $1 \leq a \leq 10$ ed è detto **mantissa**
- b è detto **esponente** di x
- 10^b è l'**ordine di grandezza** del numero a

Esempi

- La città di Roma conta circa 2.759.000 abitanti: $2,759 \cdot 10^6$
- Il comune di Budrio conta circa 18.500 abitanti: $1,85 \cdot 10^4$

- Numero di Avogadro (particelle contenute in una mole):

$$N_A \simeq 6,02214076 \cdot 10^{23} \text{mol}^{-1}$$

- Costante di Planck (meccanica quantistica):

$$h = 6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$$

Esempi

- $3,512 \cdot 10^{-6} = 3,512 \cdot 0,000001 = 0,000003512$
- $3,512 \cdot 10^{4} = 3,512 \cdot 10000 = 35120$

Eseguire la conversione da *notazione ordinaria* a **notazione scientifica**

- $0,053 = ??$
- $543000 = ??$
- $0,00583 = ??$
- $125000000 = ??$

Eseguire la conversione da *notazione scientifica* a **notazione ordinaria**

- $5,9 \cdot 10^7 = ??$
- $5,9 \cdot 10^{-3} = ??$
- $3,145 \cdot 10^{-5} = ??$

Notazione scientifica e proprietà delle potenze permettono di semplificare calcoli che potrebbero sembrare difficili in un primo momento (ottenendo risultati esatti o approssimati)

Esempi

- $0,002 \cdot 0,003 = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^{-6}$
- $\sqrt[4]{0,0081} = \sqrt[4]{81 \cdot 10^{-4}} = 3 \cdot 10^{-1} = 0,3$

Risultati approssimati: $58790 \cdot 7335 \simeq 5,9 \cdot 10^4 \cdot 7,3 \cdot 10^3 = 4,31 \cdot 10^8$

Risultato esatto $58790 \cdot 7335 = 431224650 = 4,31224650 \cdot 10^8$

Troncamento e Arrotondamento

Dato un numero reale il **Troncamento** (sconsigliato) "*consiste nel dimenticarsi*" un certo numero di cifre successive ad una soglia stabilita

- Esempio: troncare $\pi = 3,141592653\ldots$ alla terza cifra decimale: $\pi \simeq 3,141$
- Esempio: troncare il numero di Nepero $e = 2,7182818284\ldots$ alla seconda cifra decimale: $e \simeq 2,71$

Dato un numero reale l'**Arrotondamento** (consigliato) consiste nella valutazione della prima cifra decimale scartata.
Se $\in \{0,1,2,3,4\}$, allora si approssima per *difetto*; altrimenti, se $\in \{5,,6,7,8,9\}$, si approssima per *eccesso*

- Esempio: arrotondare π alla terza cifra decimale: $\pi \simeq 3,142$
- Esempio: arrotondare e alla seconda cifra decimale: $e \simeq 2,72$

Proporzioni

Prima di introdurre le percentuali, riprendiamo il concetto di proporzione:

$$x : y = z : w$$

- x e w sono detti **estremi**, y e z sono detti **medi**
- x e z sono detti **antecedenti**; y e w sono detti **conseguenti**
- $x : y = z : w$ ovviamente equivale a scrivere $\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$

Una proporzione deve soddisfare la seguente proprietà:

$$x \cdot w = y \cdot z$$

ossia il prodotto gli estremi deve essere uguale a quello dei medi

Percentuali

Una **percentuale** (% in simboli), è una operazione che consente di confrontare due quantità *omogenee* (stesso "tipo" o stessa unità di misura).

Di fatto la percentuale esprime una frazione con denominatore pari a 100:

$$c \times 100 = c\%$$

dove c è una costante che appartiene all'insieme dei numeri reali

Relazione con le proporzioni: dati due numeri x e y, allora vale la seguente relazione.

$$x : y = c : 100$$

$$\Downarrow$$

$$c = \frac{x \cdot 100}{y}$$

Può essere inoltre utile introdurre il concetto di **variazione percentuale**

Considerando una grandezza x che assume due valori x_i (valore iniziale) e x_f (valore finale), la differenza percentuale si può esprimere come segue:

$$\Delta x\% = \frac{x_f - x_i}{x_i} \cdot 100$$

Tale quantità può essere sia negativa che positiva.

Esempi

- Quantità di rifiuti raccolti di una data tipologia: 200 t. nel 2019 e 215 nel 2020. Qual è la variazione percentuale (rispetto al 2019)?
- Successivamente si hanno 196 t. nel 2021. Qual è la variazione percentuale rispetto al 2020?

In una determinata Regione si trovano 2150 agricoltori under 40. Di questi, 142 hanno ricevuto un bonus grazie ai fondi europei. Qual è la percentuale di agricoltori che hanno ricevuto il bonus?

Delle 350 matricole di Biotecnologie, il 60% risiede in Emilia-Romagna. Qual è il numero di matricole che risiede in Emilia-Romagna?

Una camera in un hotel di lusso costava 235 euro a notte nel 2019. Ad oggi si osserva un aumento di prezzo del 32%. Quanto costa attualmente la camera?

Esercizi

- Quantità di rifiuti raccolti di una data tipologia: 200 t. nel 2019 e 215 nel 2020. Qual è la variazione percentuale (rispetto al 2019)?

$$\Delta x\% = \frac{x_{2020} - x_{2019}}{x_{2019}} \cdot 100 = \frac{215 - 200}{200} \cdot 100 = \dots$$

- Successivamente si hanno 196 t. nel 2021. Qual è la variazione percentuale rispetto al 2020?

$$\Delta x\% = \frac{196 - 215}{215} \cdot 100 = \dots$$

A causa dei possibili **errori di misurazione**, una misura sperimentale a si può esprimere nel modo che segue:

$$a \pm \Delta a$$

dove Δa esprime l'**errore** (assoluto) o l'**incertezza** associata alla misura a.
Esempio: altezza di una persona in metri:

$$(1,73 \pm 0,005)m$$

dove $a = 1,73$ e $\Delta a = 0,005$ (di fatto sono 5 millimetri, mm)

Errore assoluto: $a \pm \Delta a$

Esempio: $(1,73 \pm 0,005)m$

Errore relativo: $\dfrac{\Delta a}{a}$

Esempio: $(1,73m \pm 0,00289)$

Errore relativo percentuale: $\dfrac{\Delta a}{a} \cdot 100$

Esempio: $(1,73m \pm 0,289\%)$

In ogni caso si può sempre scrivere che $a \approx 1,73$, dove il simbolo $\approx$ si legge "circa uguale" o "approssimato a"

La Concentrazione

- L'obiettivo è quello di esprimere, attraverso un numero puro, la quantità di **soluto** all'interno di una **soluzione**
- La formula è quindi la seguente:

$$C\% = \frac{\text{quantità di soluto}}{\text{quantità di soluzione}} \cdot 100$$

- Esempio: si sciolgono 25g in 100g di acqua. Qual è la concentrazione?

$$\frac{25}{25 + 100} \cdot 100 = 20\%$$

- Considerando una soluzione di 75g con 9g di soluto, qual è la concentrazione?

- Considerando una soluzione di 200g al 4%, quanti grammi di soluto sono presenti?

Riassunto: cosa abbiamo imparato oggi?

1. Operazioni con le Potenze
2. Ordini di Grandezza e Notazione Scientifica
3. Proporzioni e Percentuali
4. Cifre Significative
5. La Concentrazione

Calcolare il valore delle seguenti espressioni utilizzando le proprietà delle potenze:

- $5^{-2} =$
- $0,5^3 =$
- $(2^3 \cdot 5^2)^2 =$
- $\left(\frac{4^2}{2^3}\right)^3 =$

Materiale Supplementare: Esercizi per casa

- Supponiamo che una colonia batterica triplichi ogni ora. Se inizialmente ci sono 100 batteri, quanti ce ne saranno dopo 3 ore?
- In un laboratorio di biologia, si effettua una diluizione seriale 1:10 di una soluzione. Partendo da 100 ml di soluzione iniziale, quanti ml di soluto ci saranno nella quinta provetta?
- Per coltivare delle cellule batteriche, si prepara un mezzo di coltura aggiungendo 15 g di un estratto di lievito a 500 mL di acqua distillata. Qual è la concentrazione percentuale massa/volume (% m/v) dell'estratto di lievito nel mezzo di coltura?

Diluizione di una soluzione

- Hai una soluzione madre di glucosio al 20% (massa/volume). Devi preparare 100 mL di una soluzione al 5%.
  1. Quanti mL della soluzione madre devi prelevare?
  2. Quanti mL di acqua devi aggiungere?

- Hai una soluzione madre di acido acetico al 15% (massa/volume). Devi preparare 250 mL di una soluzione al 3%.
  1. Quanti mL della soluzione madre devi prelevare?
  2. Quanti mL di acqua devi aggiungere?

Materiale Supplementare: Esercizi per casa

Percentuali

- Il numero di esemplari in una popolazione di fenicotteri è aumentato del 19% in un anno. Se P era il numero di esemplari all'inizio dell'anno (anno t):
  1. qual è il numero di esemplari all'inizio dell'anno successivo (anno t+1)?
  2. qual è il numero di esemplari all'inizio di un ulteriore anno (anno t+2)?

- Durante un esperimento, una soluzione di proteine ha una concentrazione iniziale di 120 µg/mL. Dopo un processo di purificazione, la concentrazione misurata è di 84 µg/mL. Qual è la variazione percentuale della concentrazione?

- Dato un rettangolo, si aumenta la sua base del 20% e si diminuisce la sua altezza del 30%. Di quanto diminuisce in percentuale l'area del rettangolo iniziale?