Die Primzahlenerkennungsmaschine

Eine theoretische Bauanleitung

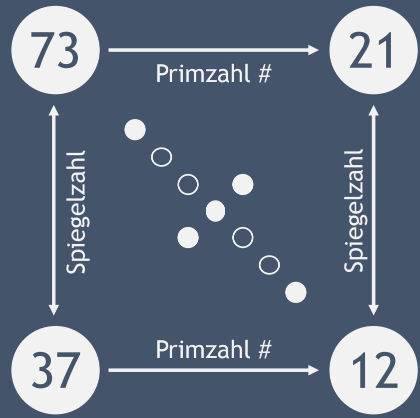
Tom Gries (TOMO) | GPN21 | Juni 2023 | Medientheater | 30 Minuten

@tomo@social.tchncs.de

@_TomGries_

2023-06-11

Was ist eine Primzahl?

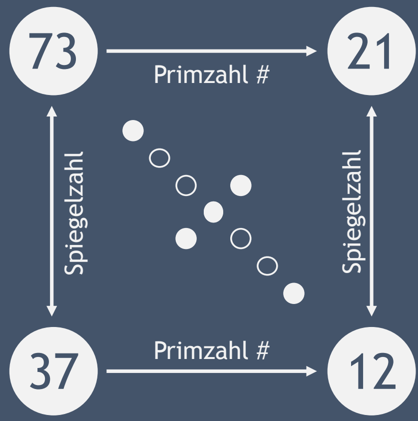


<u>**Wir erinnern uns:**</u>

Eine Primzahl ist

- eine natürliche Zahl
- größer als 1
- und **nur** durch 1 **UND** sich selbst teilbar

Primzahlsuchmethoden



Eine natürliche Zahl ist entweder:

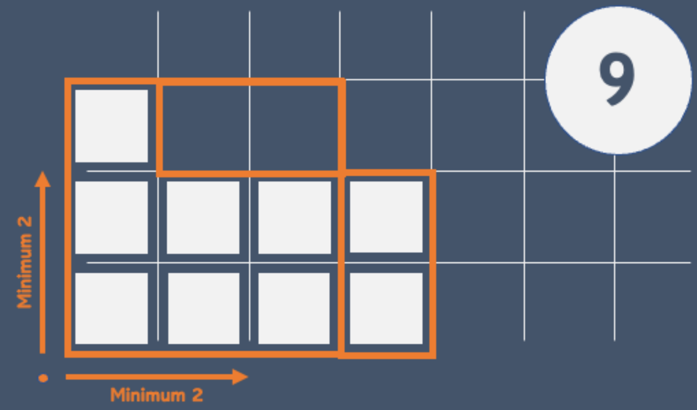
- eine Primzahl oder
- Keine Primzahl

[2] Das Sieb des Eratosthenes. Man könnte es auch als Sherlock Homes Prinzip bezeichnen.

Und wir haben zwei Möglichkeiten, Primzahlen zu ermitteln:

1. Man prüft für jede Zahl (unabhängig), ob sie prim ist
2. Man fängt von vorne (bei 2) an, sucht alle Nicht-Primzahlen und streicht sie. Was übrig bleibt sind die Primzahlen.

Die Idee zu der Maschine …



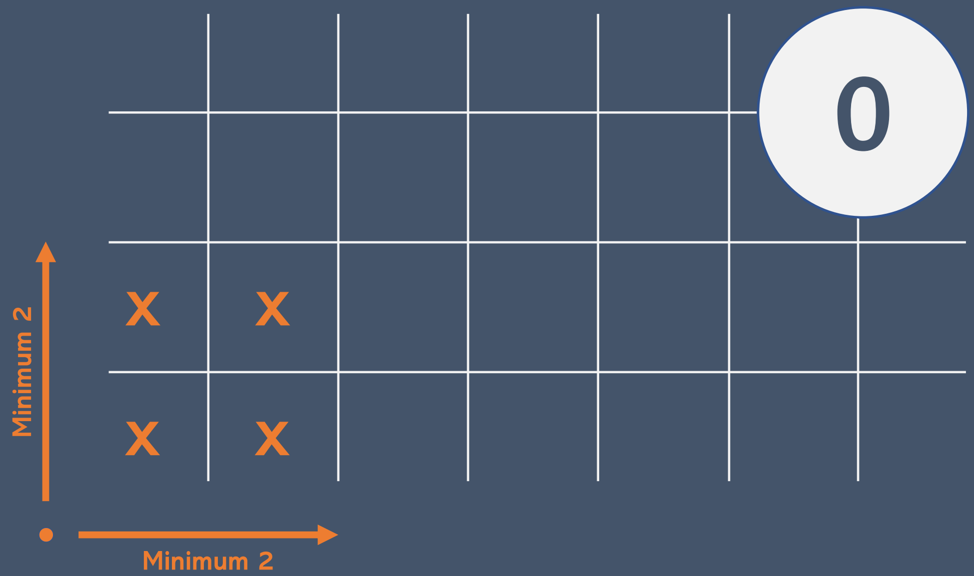
… basiert auf einer Idee zur Erklärung von

Primzahlen von 1978!

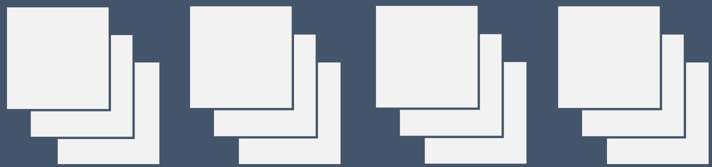
Primzahlen visualisiert …

Aufgabe:

Versuche, aus den Quadraten ein Rechteck zu legen, bei dem beide Seiten mindestens 2 Einheiten lang ist.

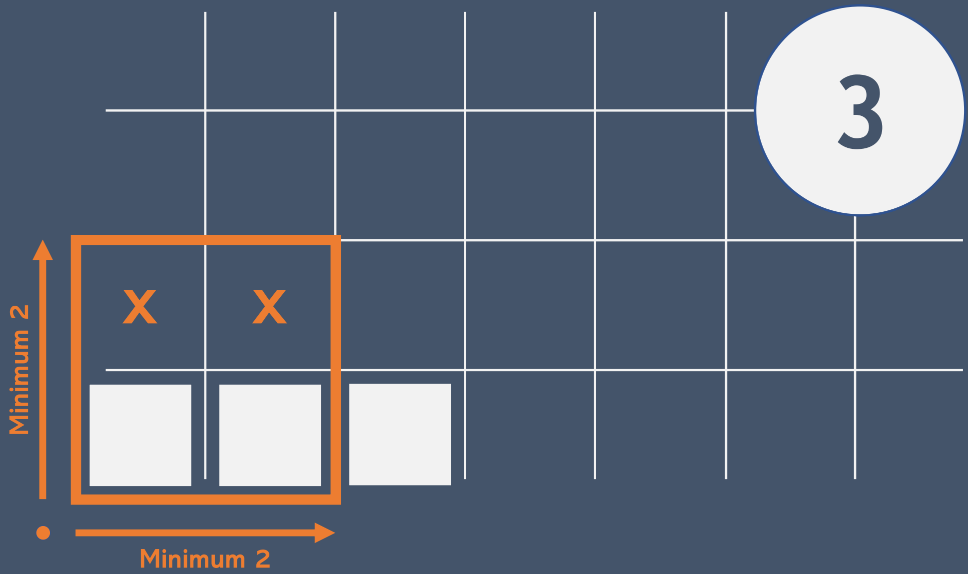


Primzahlen visualisiert …



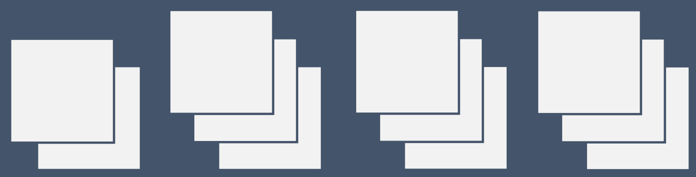
Aufgabe:

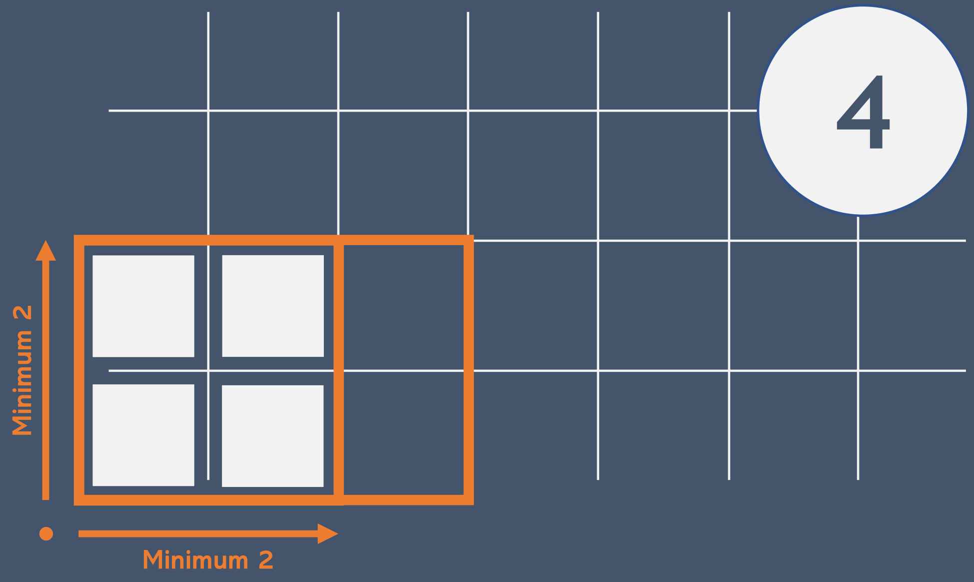
Versuche, aus den Quadraten ein Rechteck zu legen, bei dem beide Seiten mindestens 2 Einheiten lang ist.



Nicht nur zur Seite anlegen …

Primzahlen visualisiert …





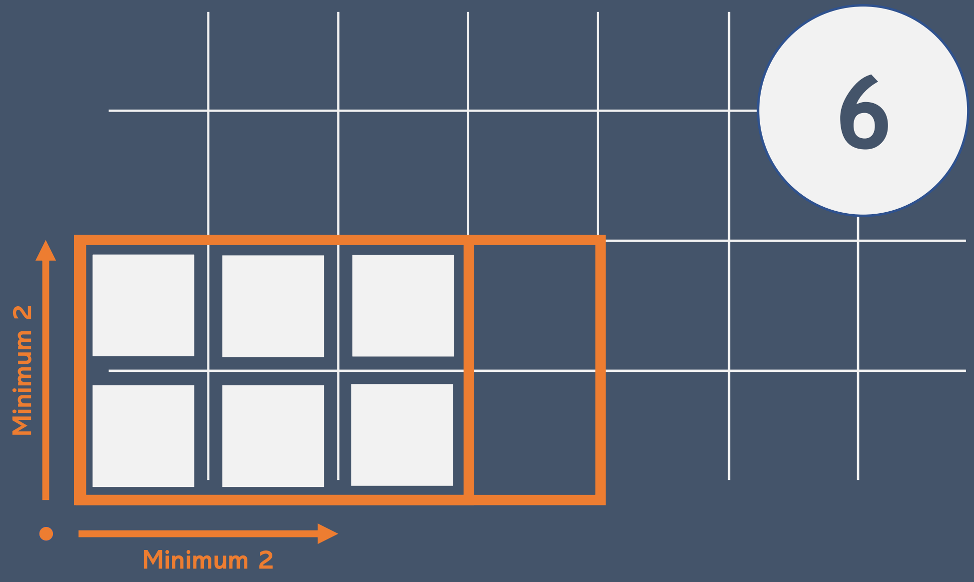
Aufgabe:

Versuche, aus den Quadraten ein Rechteck zu legen, bei dem beide Seiten mindestens 2 Einheiten lang ist.

Primzahlen visualisiert …

Aufgabe:

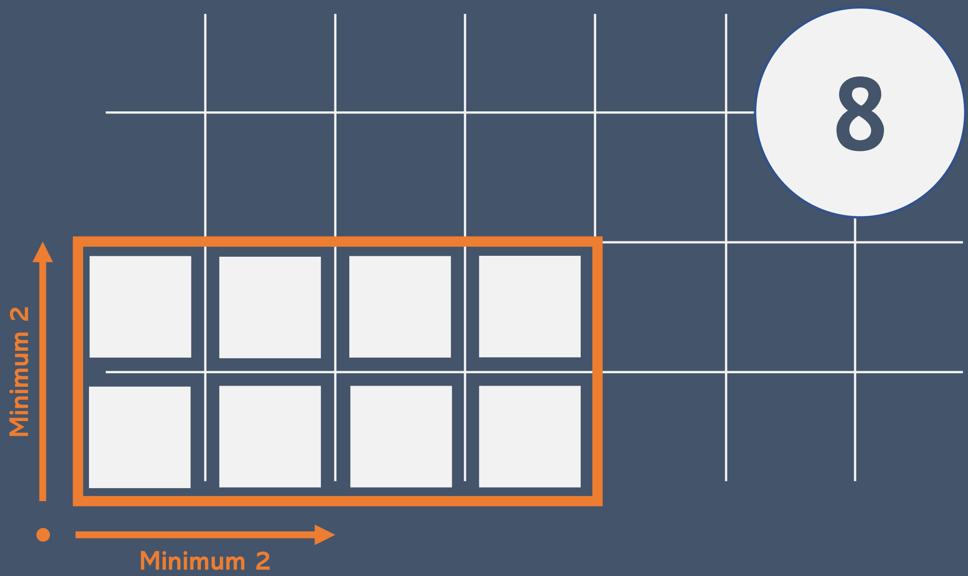
Versuche, aus den Quadraten ein Rechteck zu legen, bei dem beide Seiten mindestens 2 Einheiten lang ist.



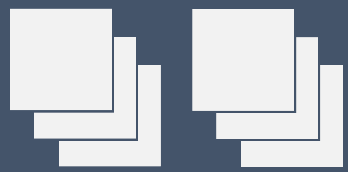
Primzahlen visualisiert …

Aufgabe:

Versuche, aus den Quadraten ein Rechteck zu legen, bei dem beide Seiten mindestens 2 Einheiten lang ist.

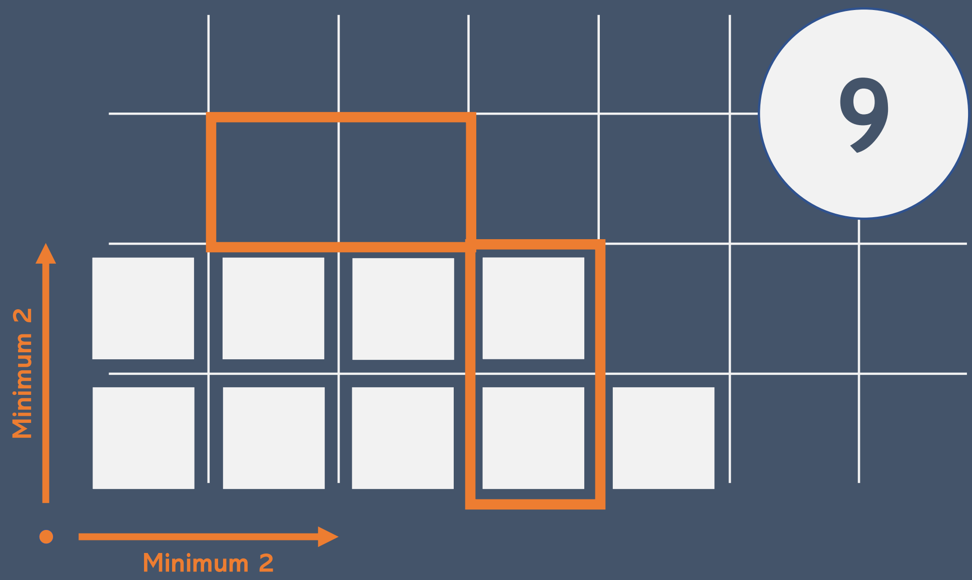


Primzahlen visualisiert …

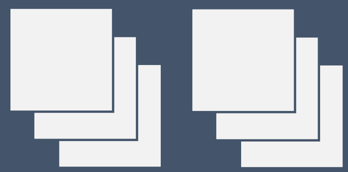


Aufgabe:

Versuche, aus den Quadraten ein Rechteck zu legen, bei dem beide Seiten mindestens 2 Einheiten lang ist.

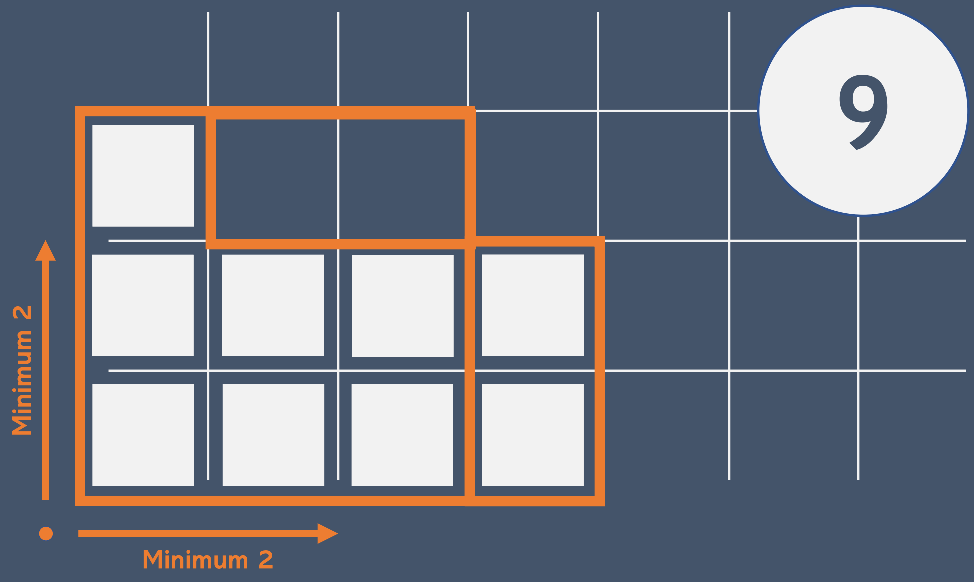


Primzahlen visualisiert …

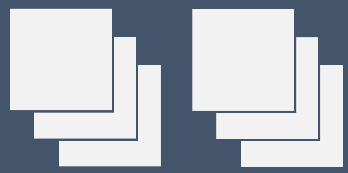


Aufgabe:

Versuche, aus den Quadraten ein Rechteck zu legen, bei dem beide Seiten mindestens 2 Einheiten lang ist.

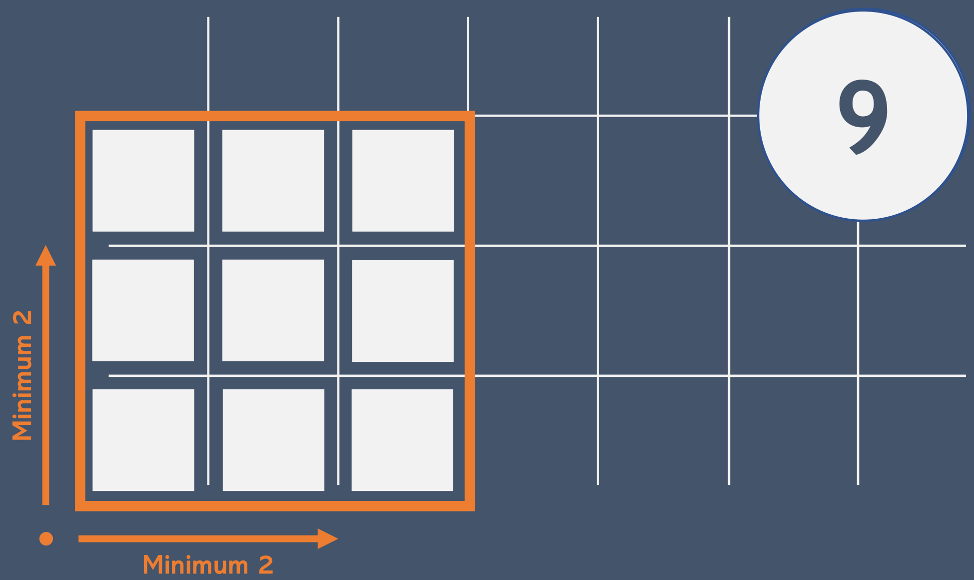


Primzahlen visualisiert …



Aufgabe:

Versuche, aus den Quadraten ein Rechteck zu legen, bei dem beide Seiten mindestens 2 Einheiten lang ist.

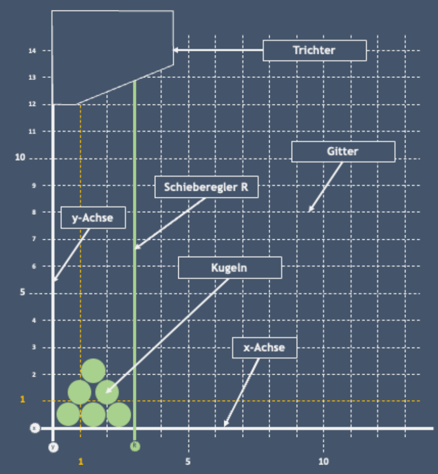


Und was bedeutet es?

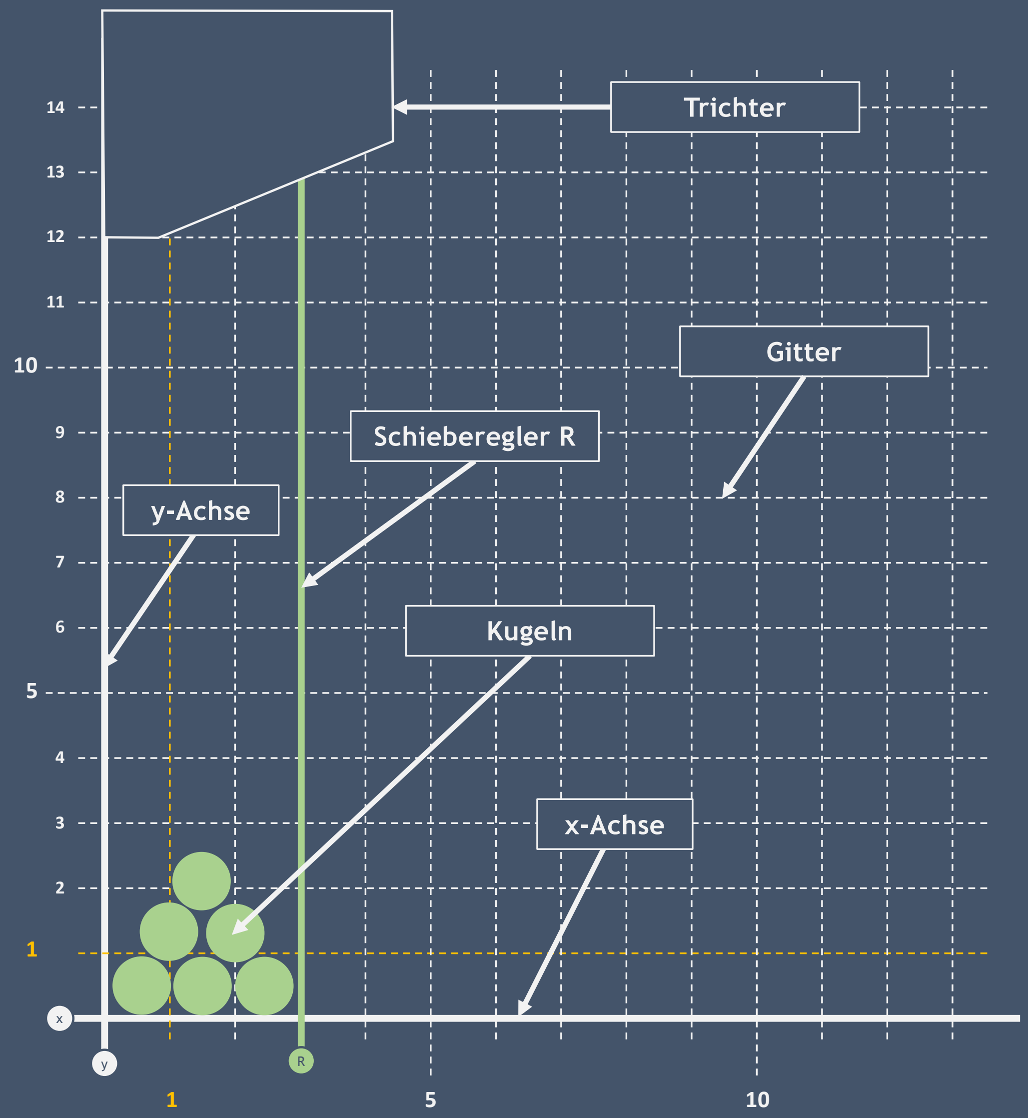
Immer, wenn ein Rechteck gelegt werden kann, ist es keine Primzahl.

Und wenn kein Rechteck gelegt werden kann, haben wir eine Primzahl gefunden.

Die "Prime Machine"



Wie müsste eine "Maschine" aussehen, mit der man Primzahlen ermitteln kann?



Aufbau der Prime Machine:

- Ein Brett als Grundlage
- ein Hintergrundgitter als visuelle Hilfe
- den Achsen X und Y als Begrenzung
- einen Schieberegler, der sich parallel zur Y-Achse über das Gitter bewegen lässt und über den senkrechten Linien arretieren lässt
- und den Kugeln ("gefangen" zwischen Y und R)

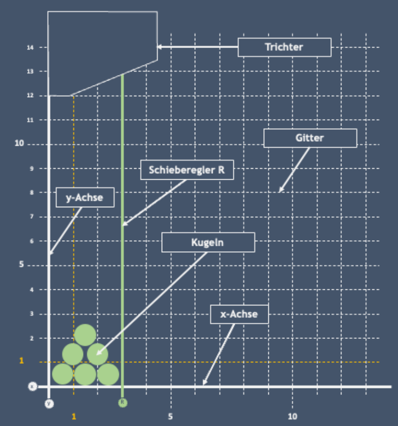
Und zur Erweiterung einen Trichter (oben links), um mehr Kugeln aufzunehmen (max. das Doppelte einer Spalte).

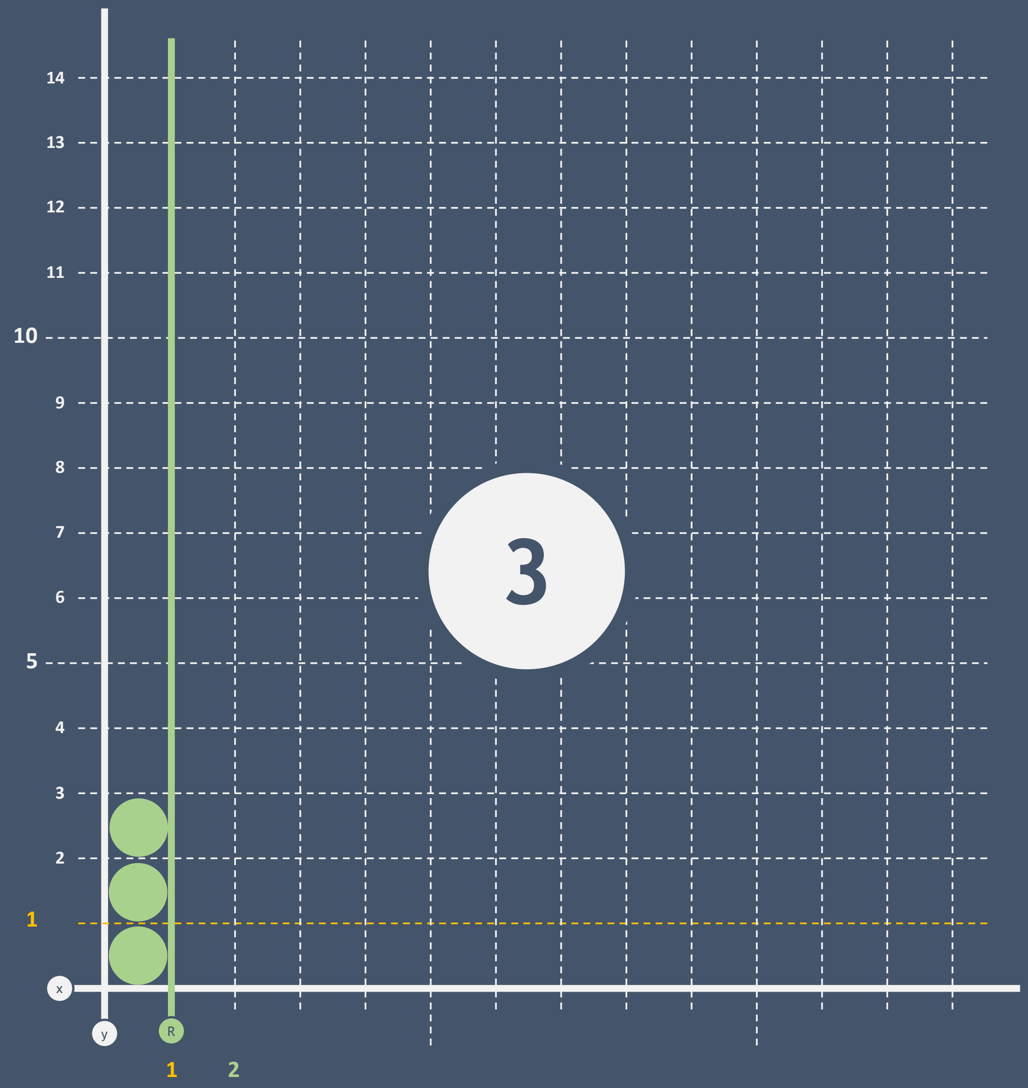
Die Prime Machine kann:

1. Feststellen, ob eine Zahl eine Primzahl ist
2. Feststellen, ob eine Zahl gerade oder ungerade ist
3. Das Kommutativgesetz erkennen
4. Eine Zahl in Primfaktoren zerlegen
5. Restwerte bestimmen
6. In andere Zahlensysteme umrechnen, zum Beispiel in Binär
7. Quadratwurzeln berechnen bzw. abschätzen
8. Multiplizieren (durch Kugeln zählen)

Übrigens: Für [1] und [2] muss man keine Zahlen kennen oder zählen können.

Und wie kann man mit einer Maschine Primzahlen ermitteln?

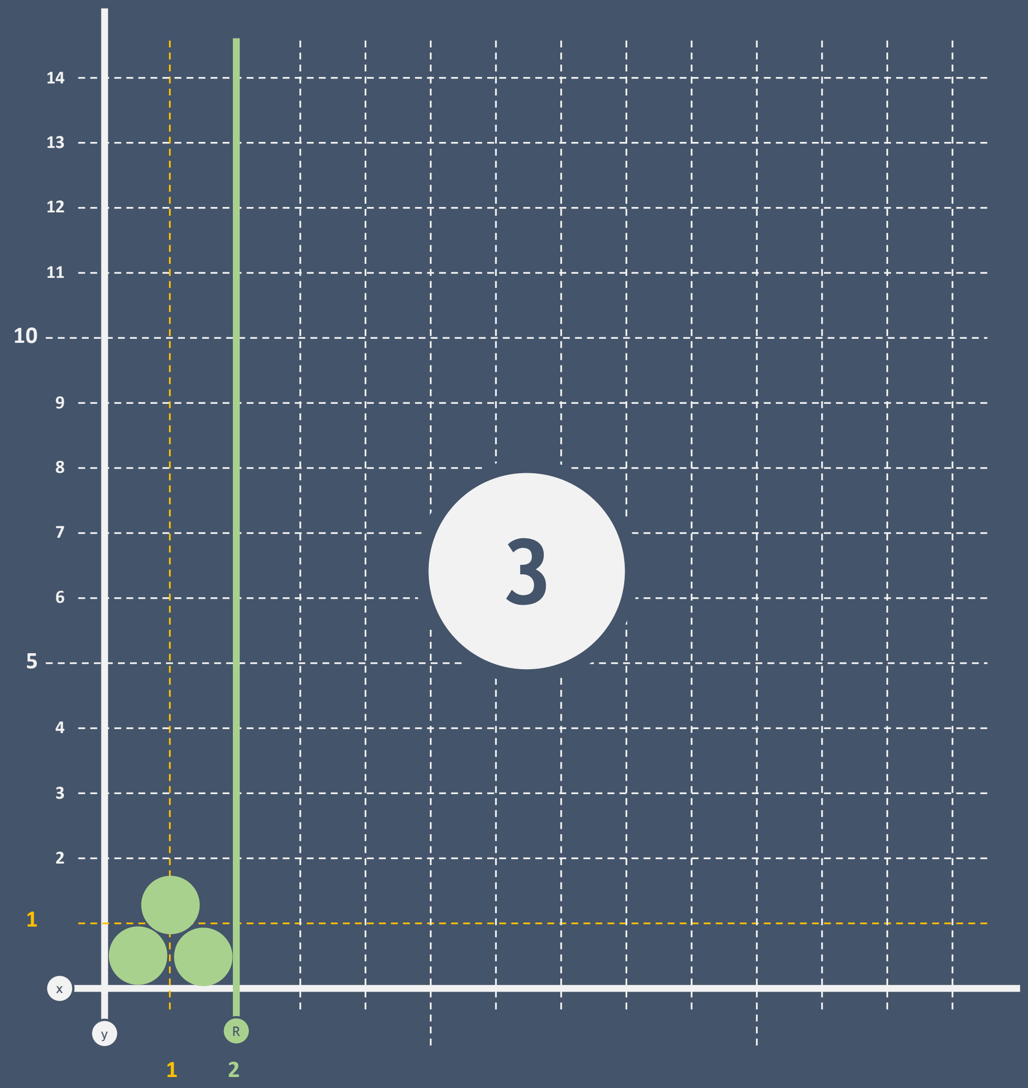




Ausgangsposition:

- Der Regler R steht auf Position 1.
- Der Platz zwischen Y und R ist mit den Kugeln befüllt, für die bestimmt werden soll, ob es sich um eine Primzahl handelt oder nicht.
- Die X-Achse ist nur mit 1 und 2 beschriftet. Auf der X-Achse sollen später nur die Primzahlen stehen.

Tipp:
Man kann die ermittelten Primzahlen auch auf die Y-Achse übertragen bzw. dort kenntlich machen (z. B. auch in grün darstellen).

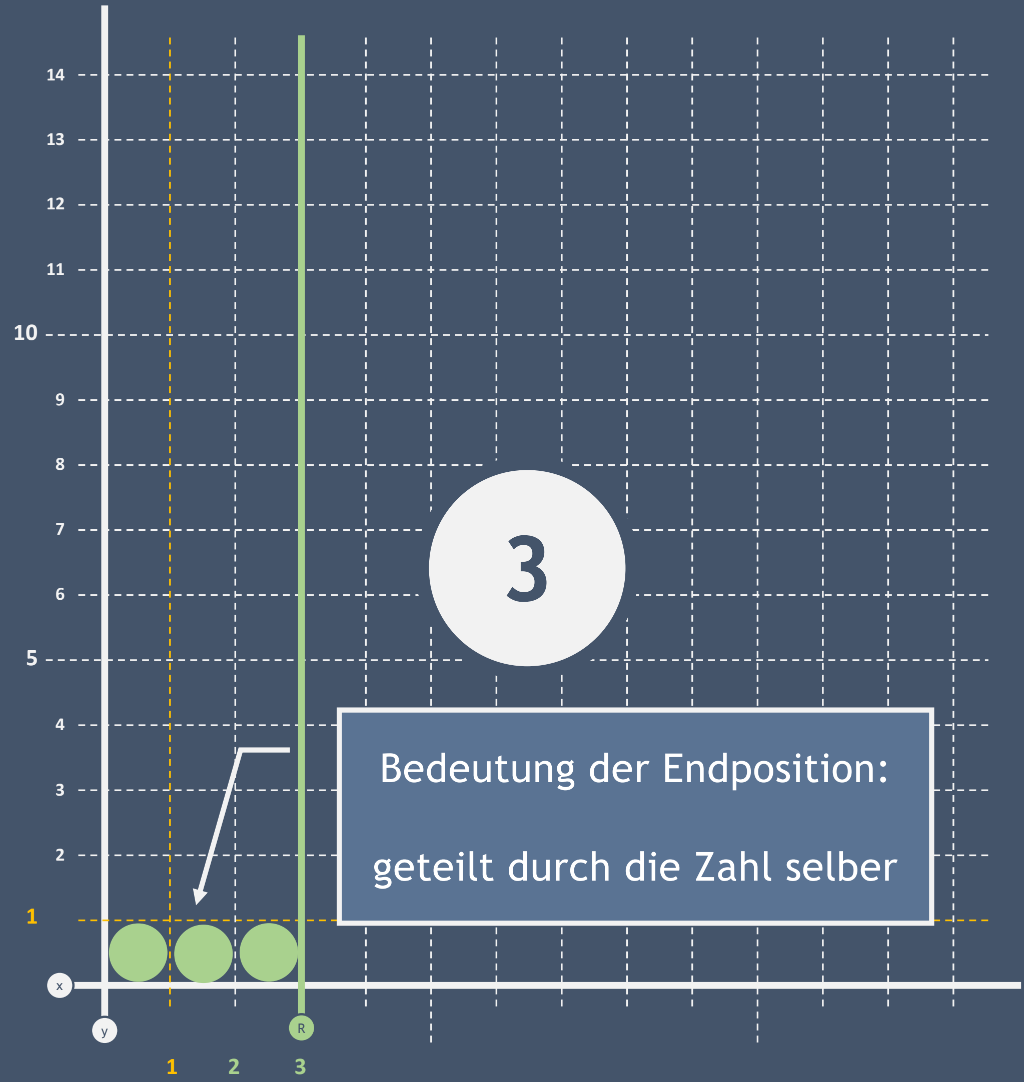


Aktion(en):

- Der Regler R wird um eine Position nach rechts verschoben.

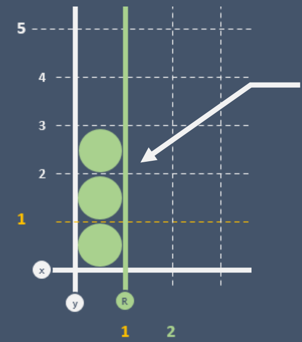
An dieser Reglerposition (2) wird bestimmt, ob eine Zahl gerade oder ungerade ist, denn: Eine Zahl ist gerade, wen sie ohne Rest durch 2 teilbar ist.

Liegt wie hier eine Kugel oben drauf dann haben wir einen Rest und die Anzahl der Kugeln ist nicht durch 2 teilbar und **ungerade**.



Ergebnis:

- Es hat im gesamten Verlauf keine rechteckige Form gegeben, also haben wir eine Primzahl gefunden.

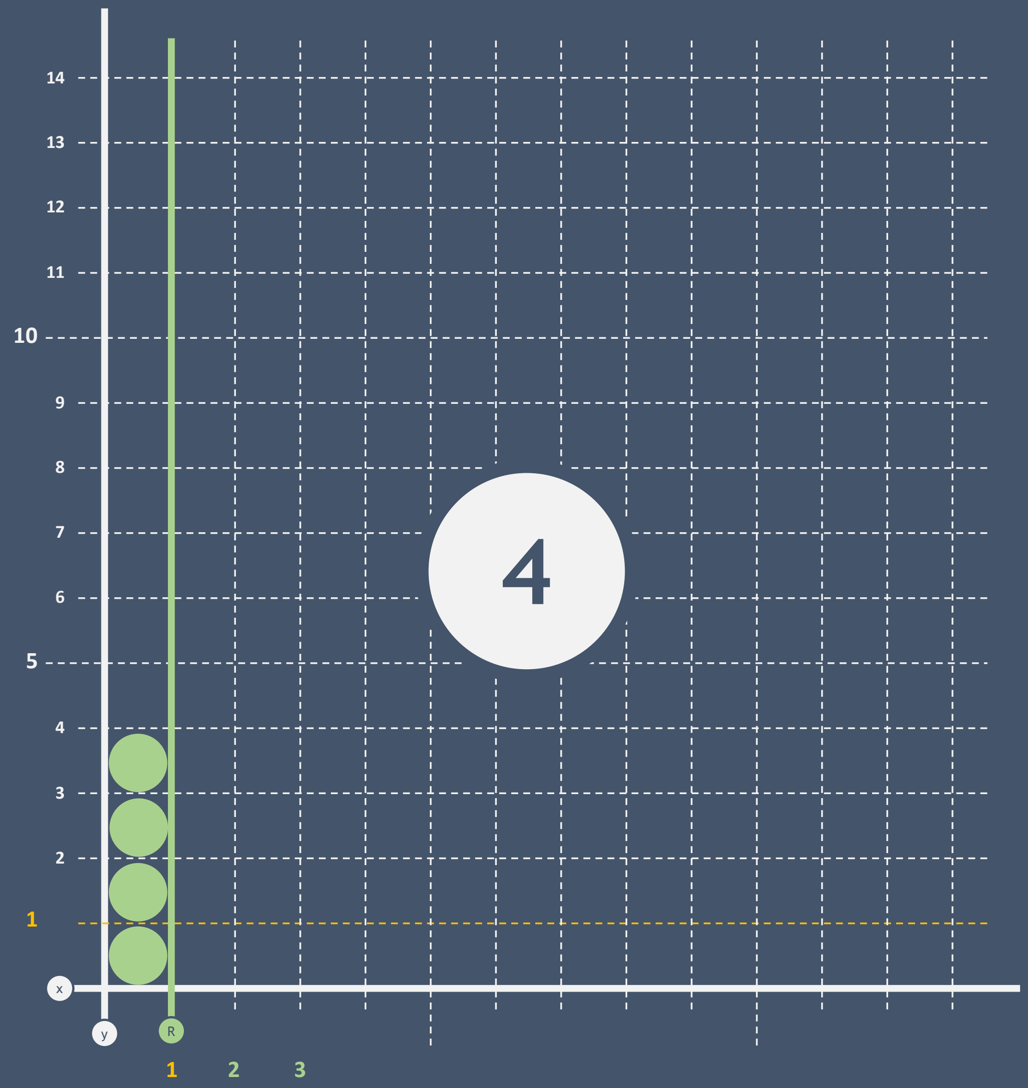


Bedeutung der Ausgangsposition:

geteilt durch 1

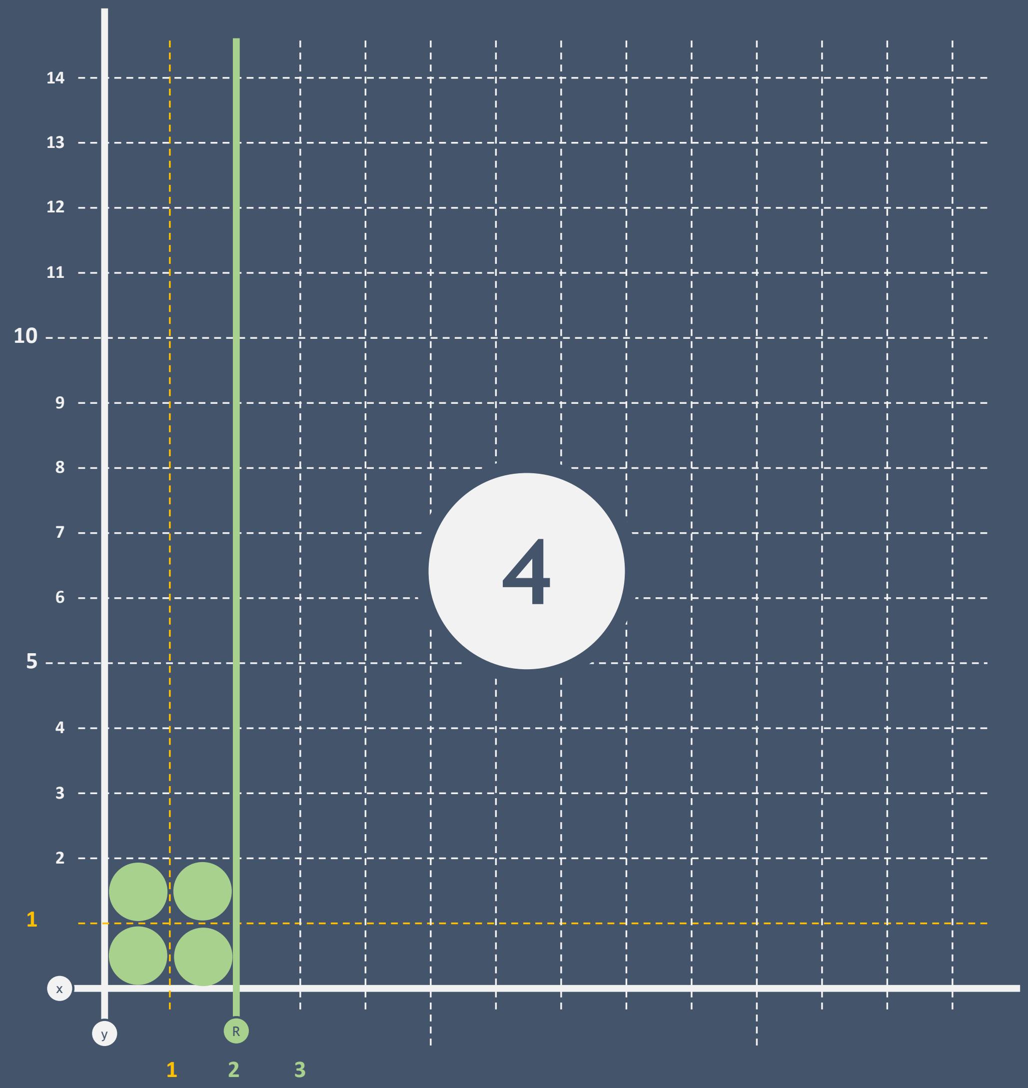
Wir notieren die Primzahl 3 an der X-Achse.

Frage: Warum ist das sinnvoll?



Ausgangsposition:

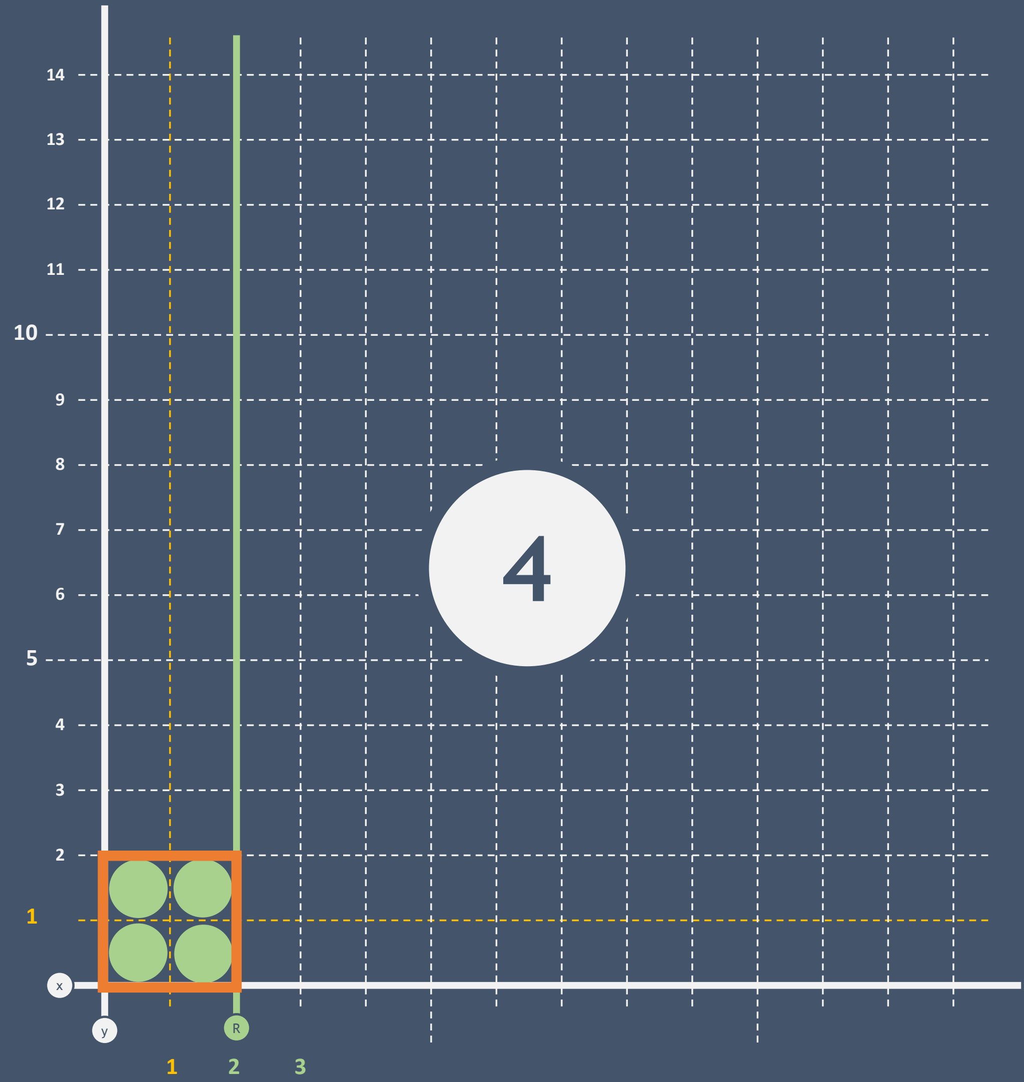
- Diesmal mit 4 Kugeln.
- Der Schieberegler R steht wieder auf der Ausgangsposition 1.



Aktion(en):

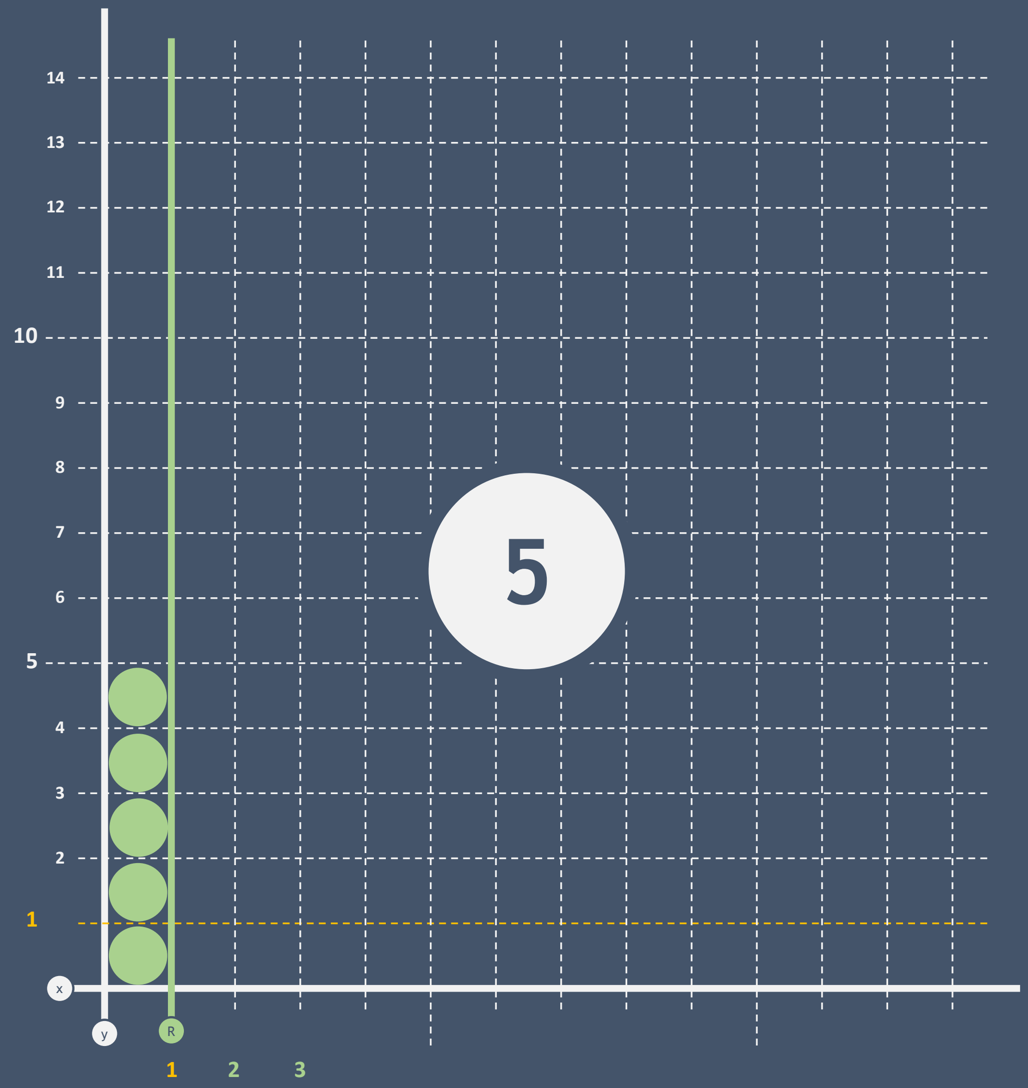
- Der Regler R wird wieder um eine Position nach rechts verschoben.

Diesmal liegt keine Kugel oben (zwischen zwei Kugeln). Es gibt keinen Rest. Somit ist die Anzahl der Kugeln **gerade**.



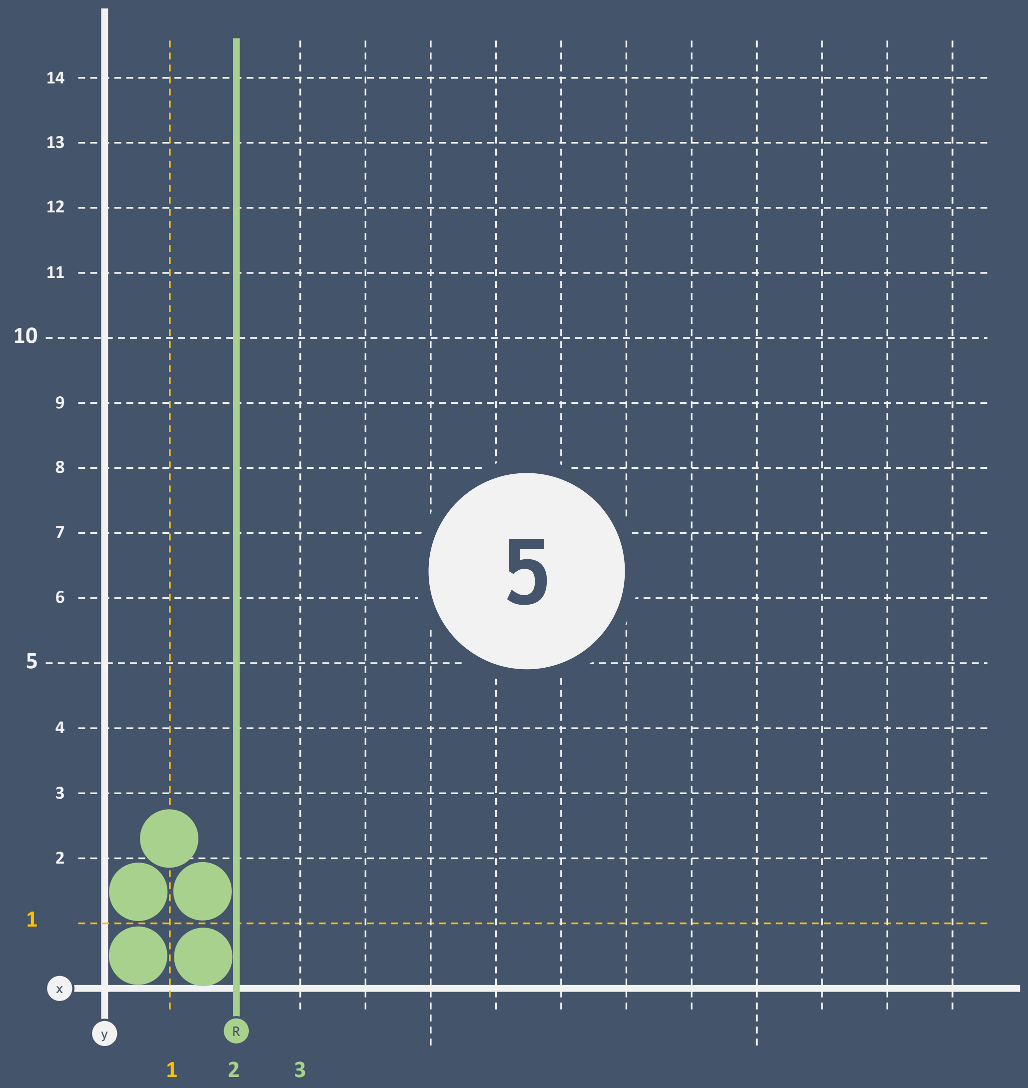
Ergebnis:

- Die Kugeln haben die Form eines Rechtecks. Also ist 4 keine Primzahl



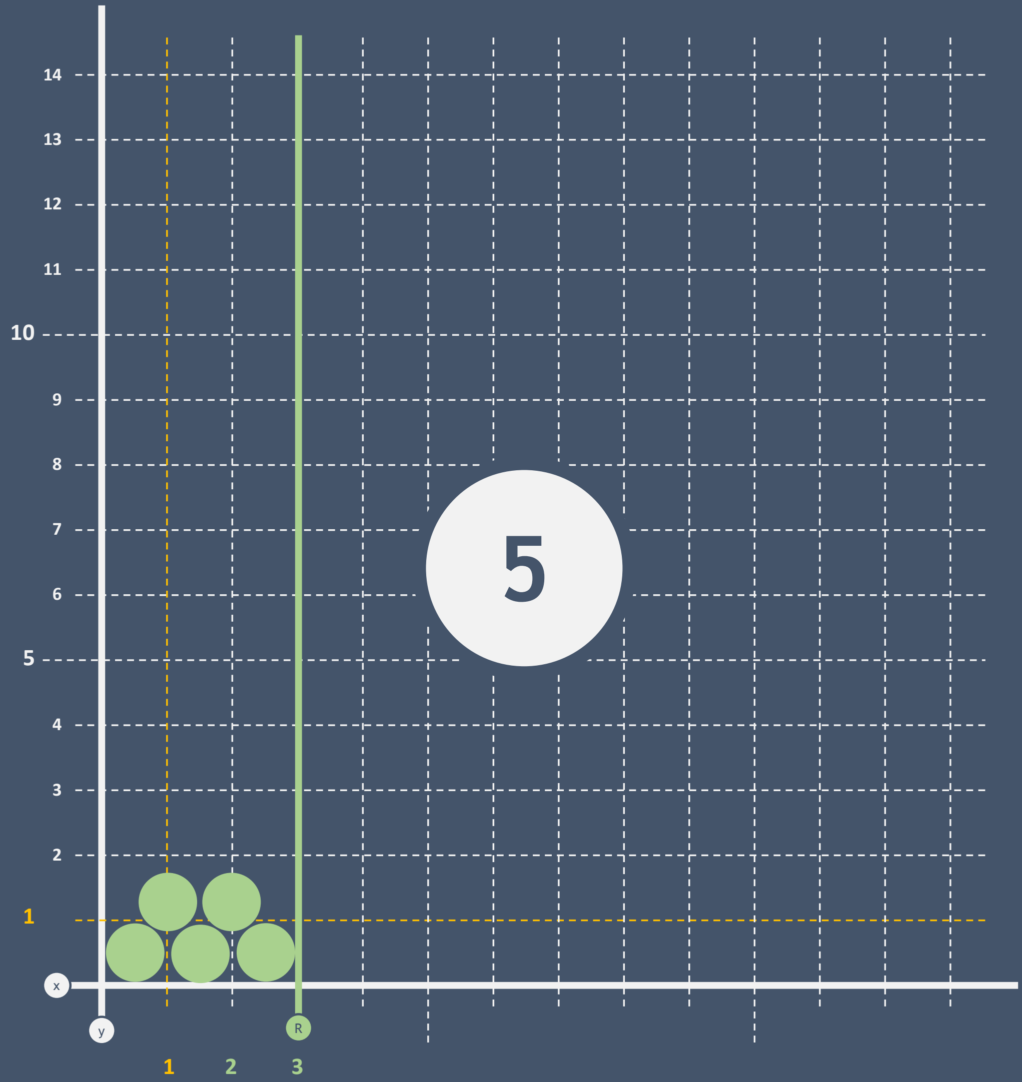
Ausgangsposition:

- Jetzt mit 5 Kugeln.
- Schieberegler R steht wieder auf 1.



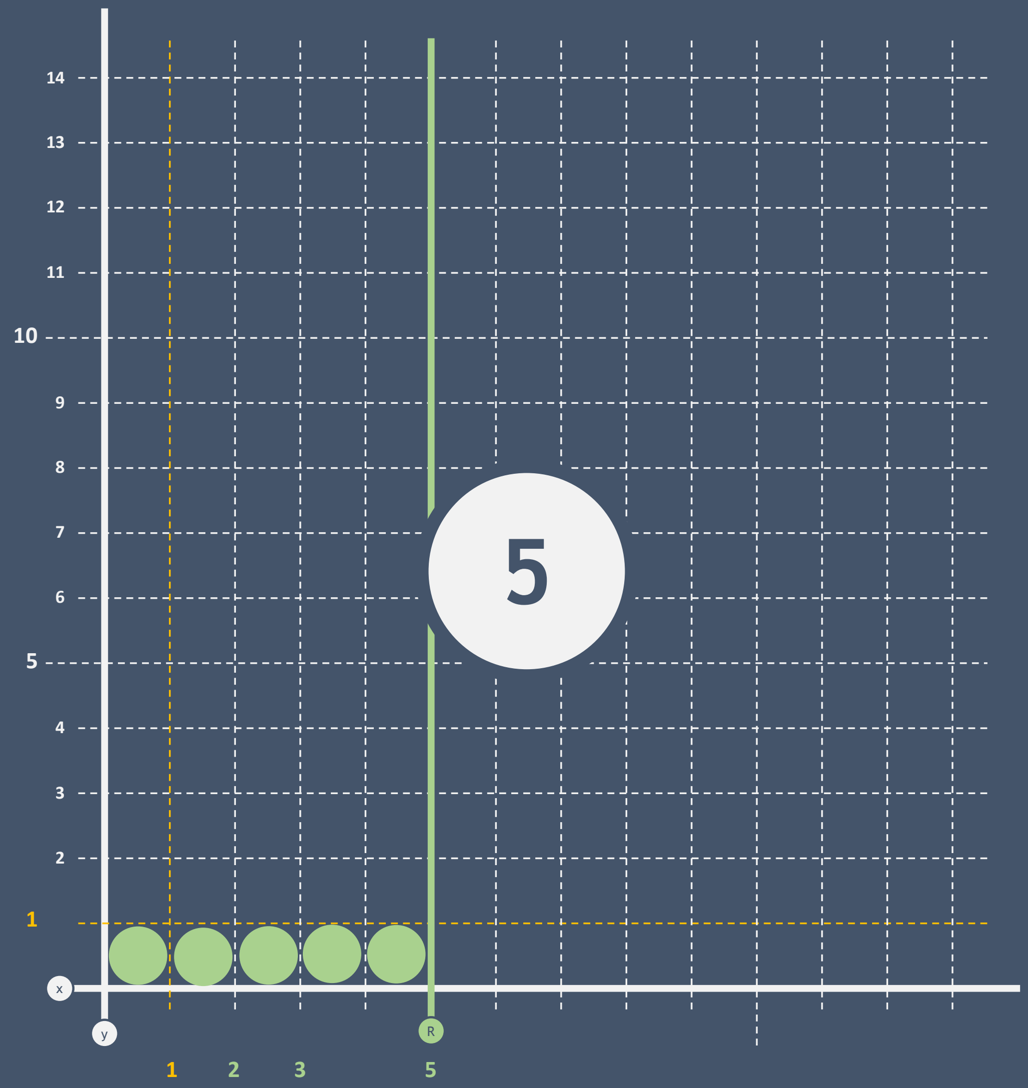
Aktion(en):

- Der Regler R wird auch hier wieder um eine Position nach rechts verschoben.



Aktion(en):

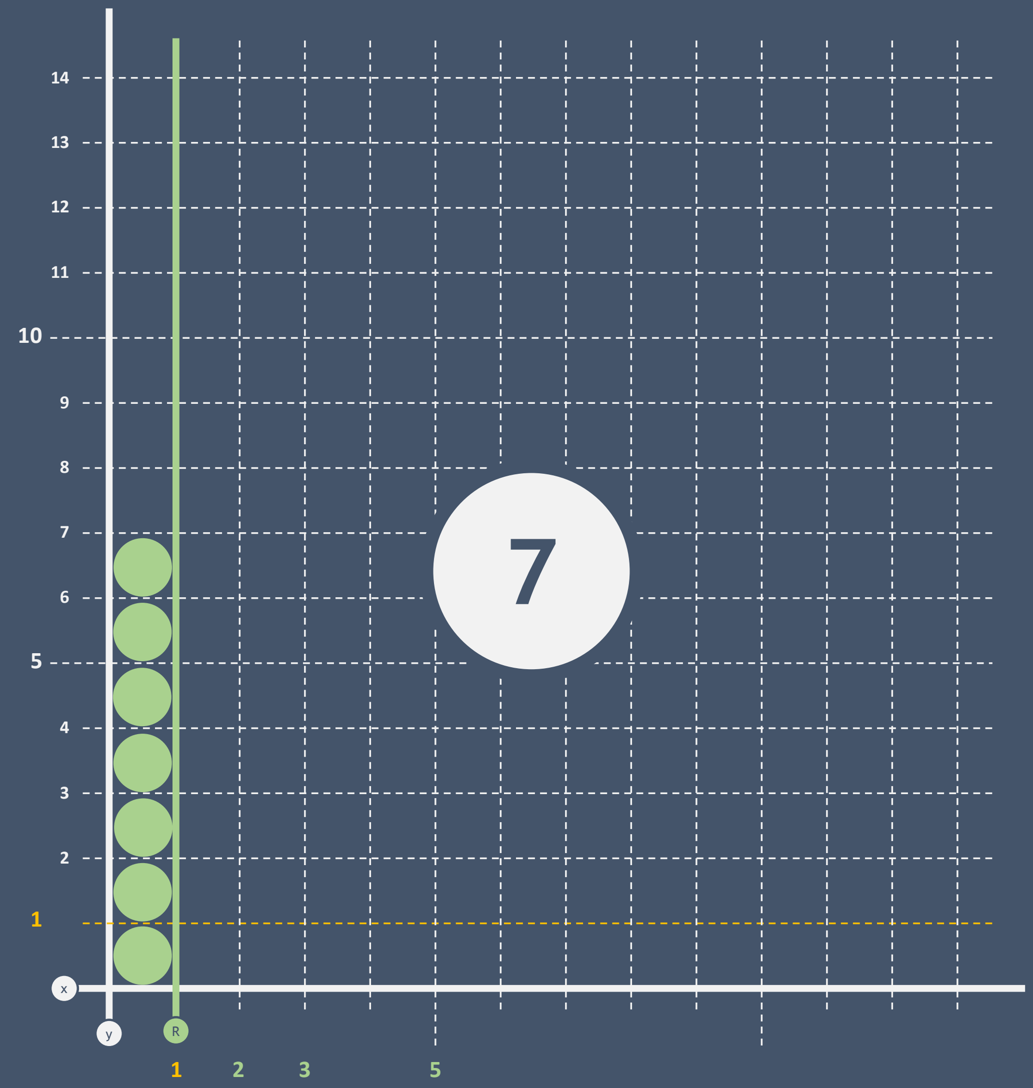
- Und noch eine Position ...



Ergebnis:

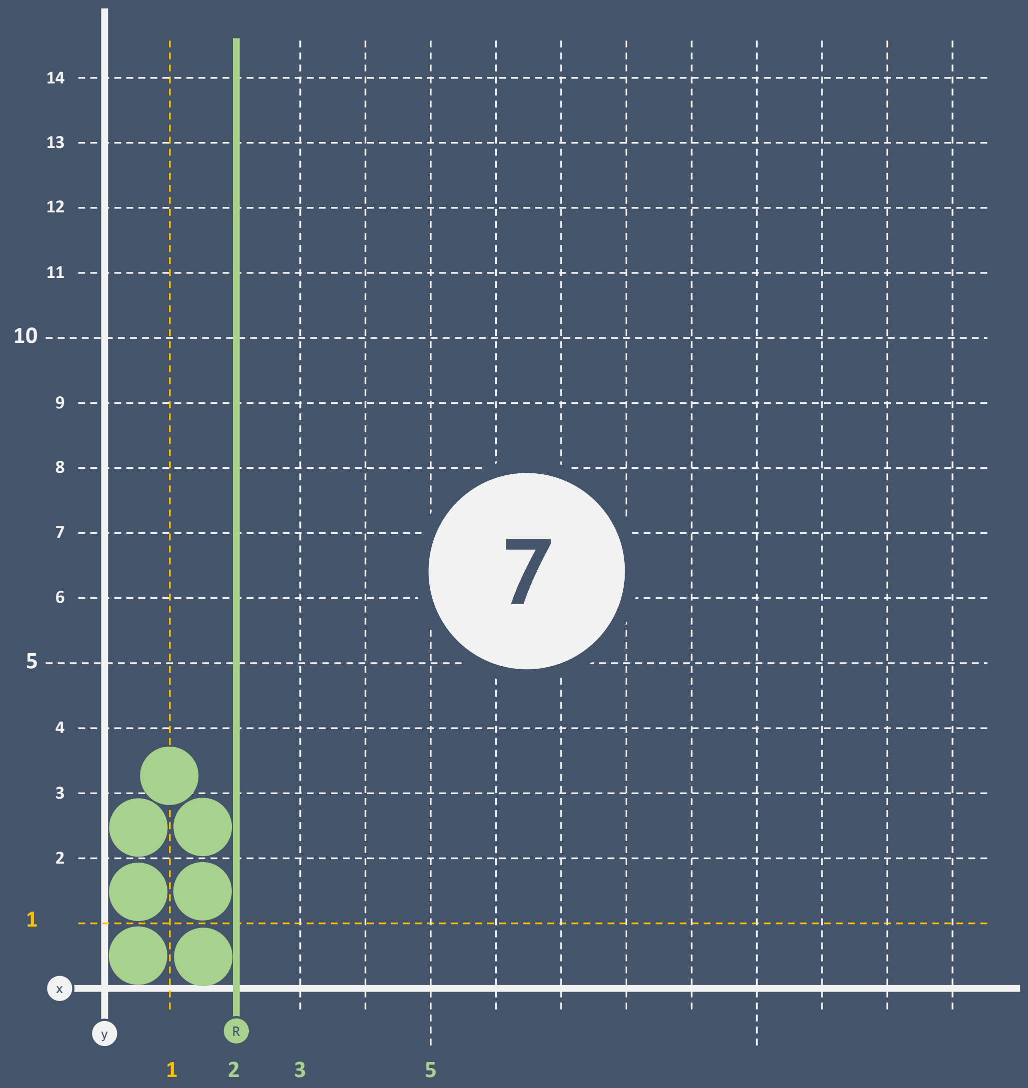
- Die Kugeln hatten dieses Mal nicht die Form eines Rechtecks. Also ist die 5 eine Primzahl

Wir notieren die Primzahl 5 an der X-Achse.



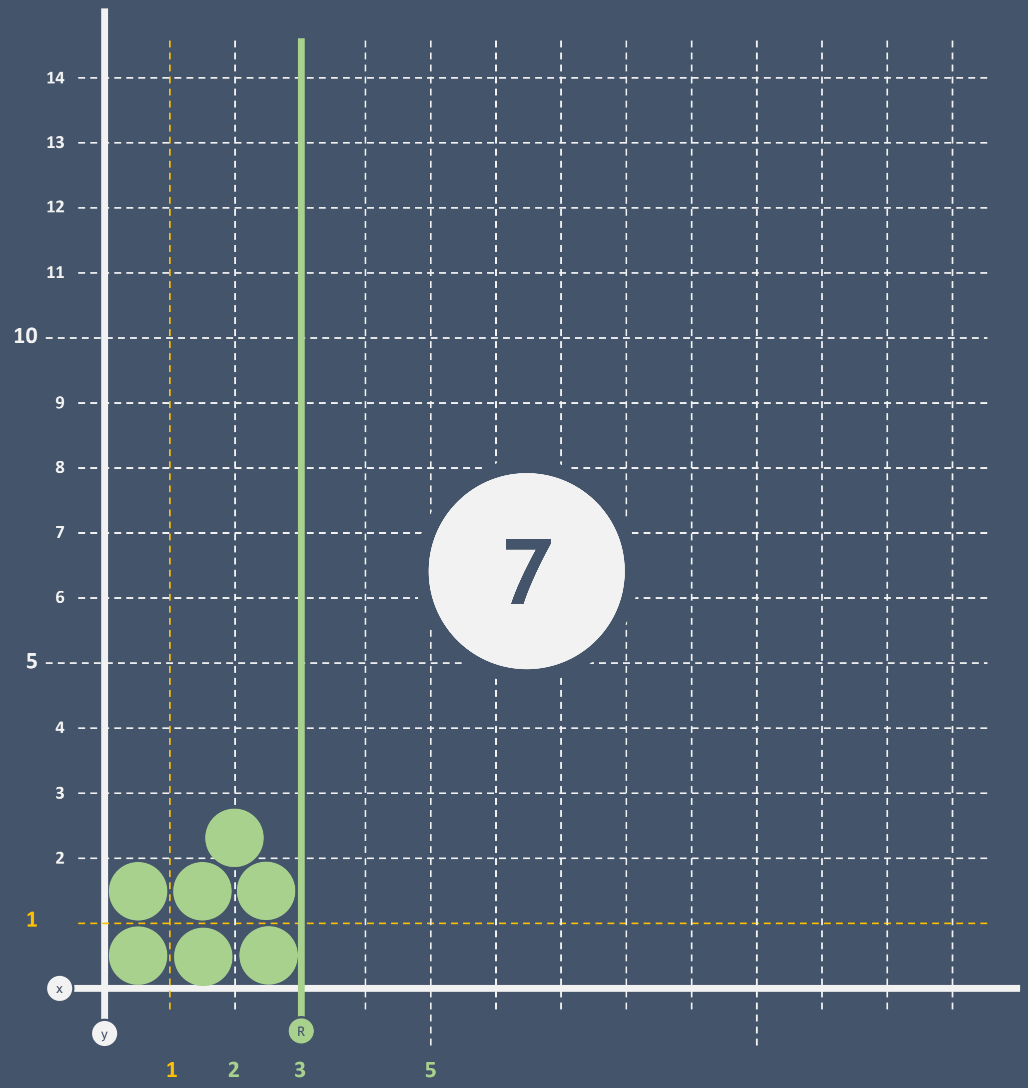
Ausgangsposition:

- 7 Kugeln.
- Schieberegler R auf 1.



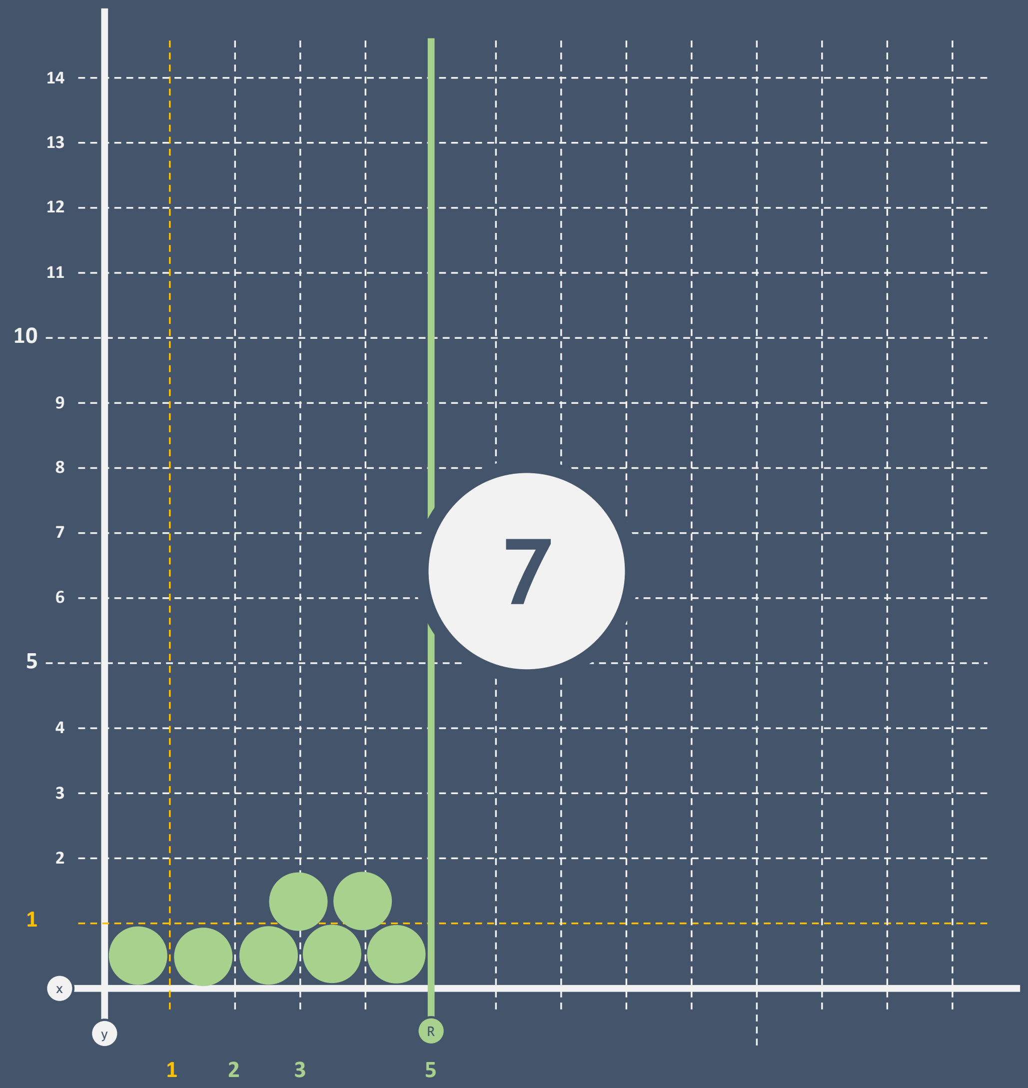
Aktion(en):

- Der Regler R wird wieder um eine Position nach rechts verschoben.



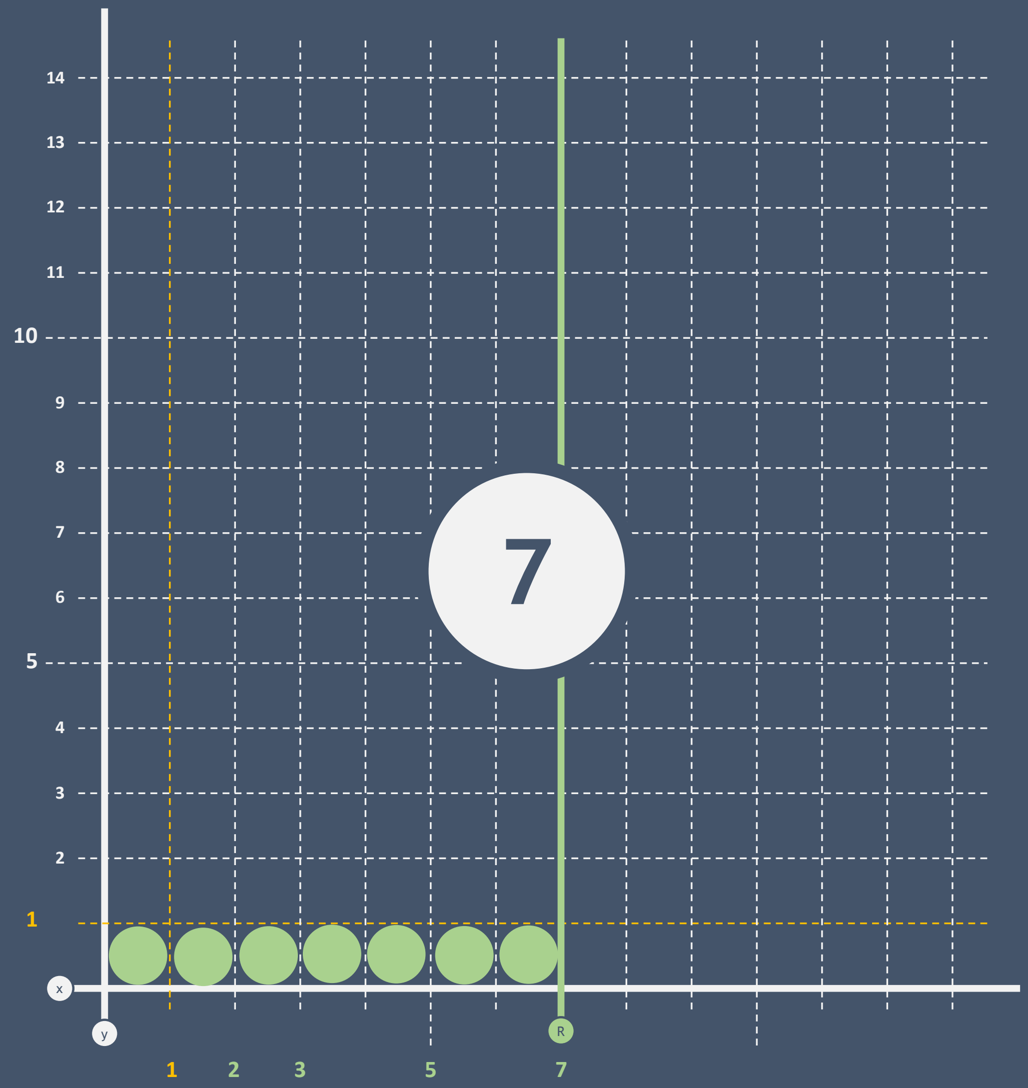
Aktion(en):

- Der Regler R wird um eine weitere Position nach rechts verschoben.



Aktion(en):

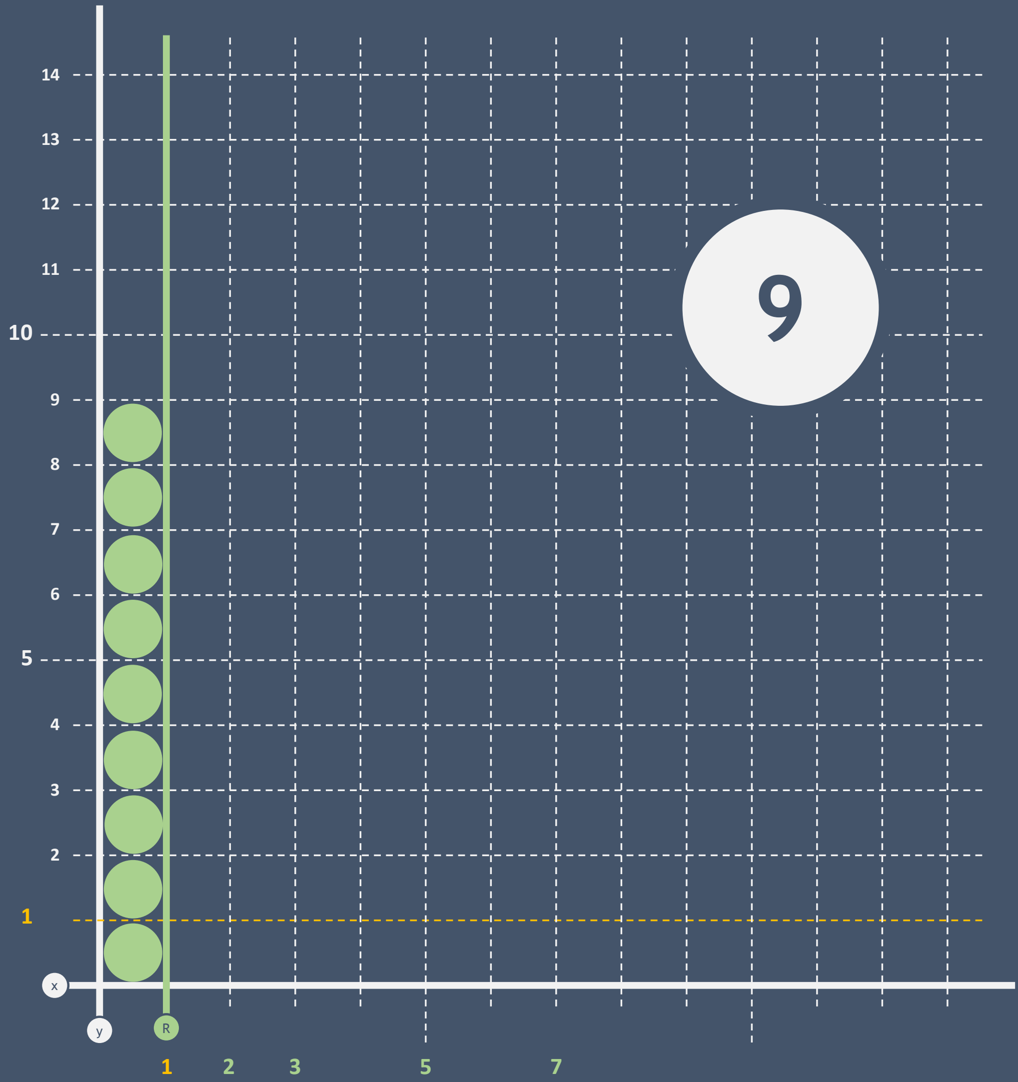
- Diesmal um 2 Positionen - wir können die geraden Zahlen/Positionen überspringen.



Ergebnis:

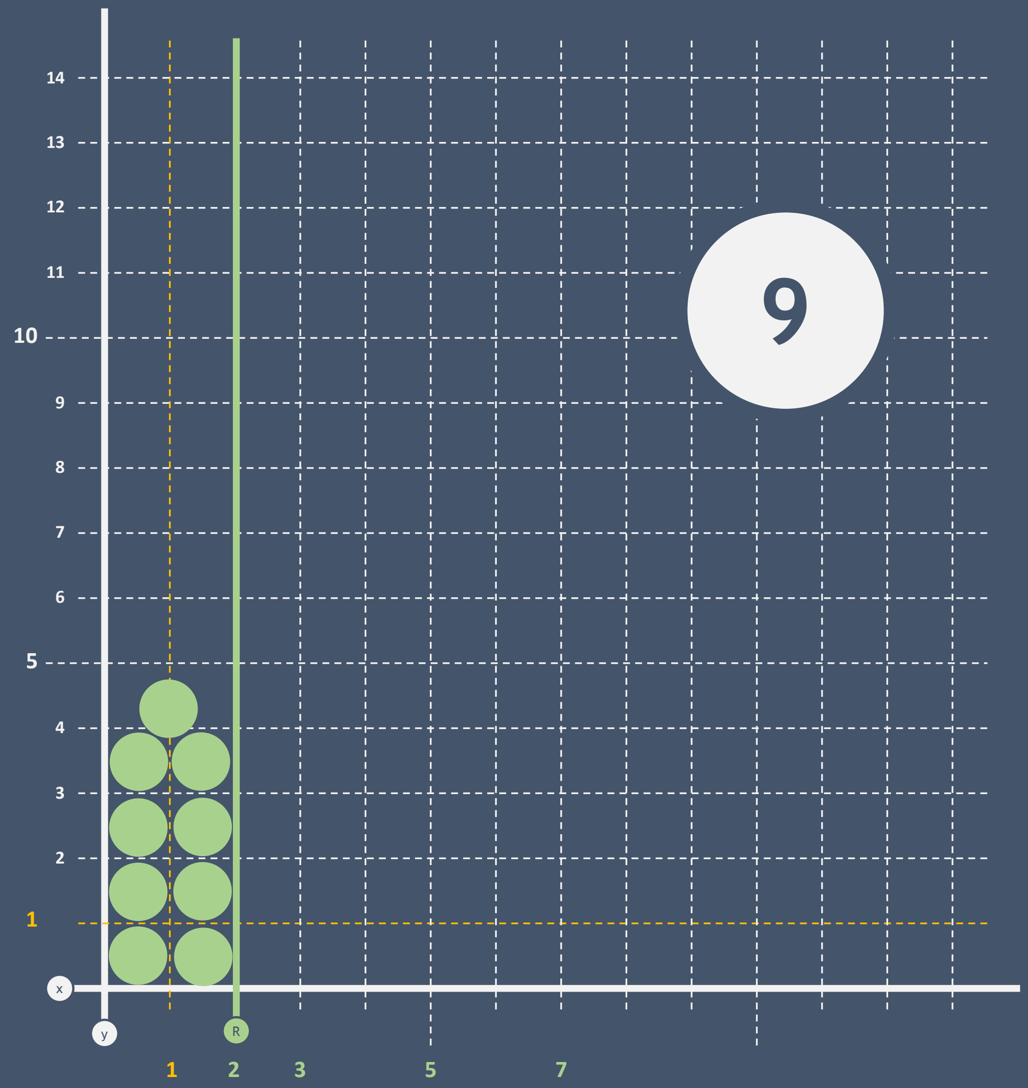
- Die Kugeln haben auch dieses Mal nicht die Form eines Rechtecks gezeigt. Somit ist auch die 7 eine Primzahl

Wir notieren die Primzahl 7 an der X-Achse.



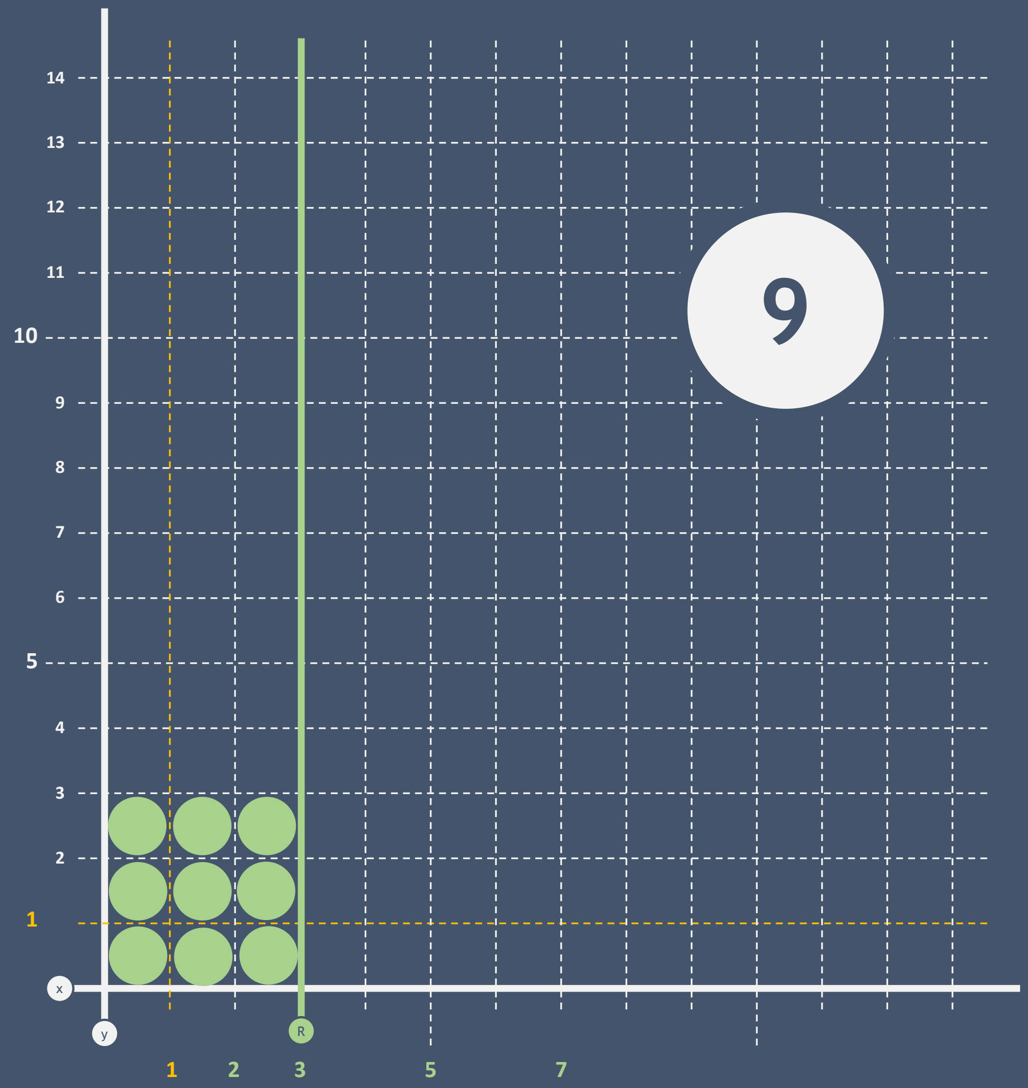
Ausgangsposition:

- 9 Kugeln.
- Schieberegler auf 1.



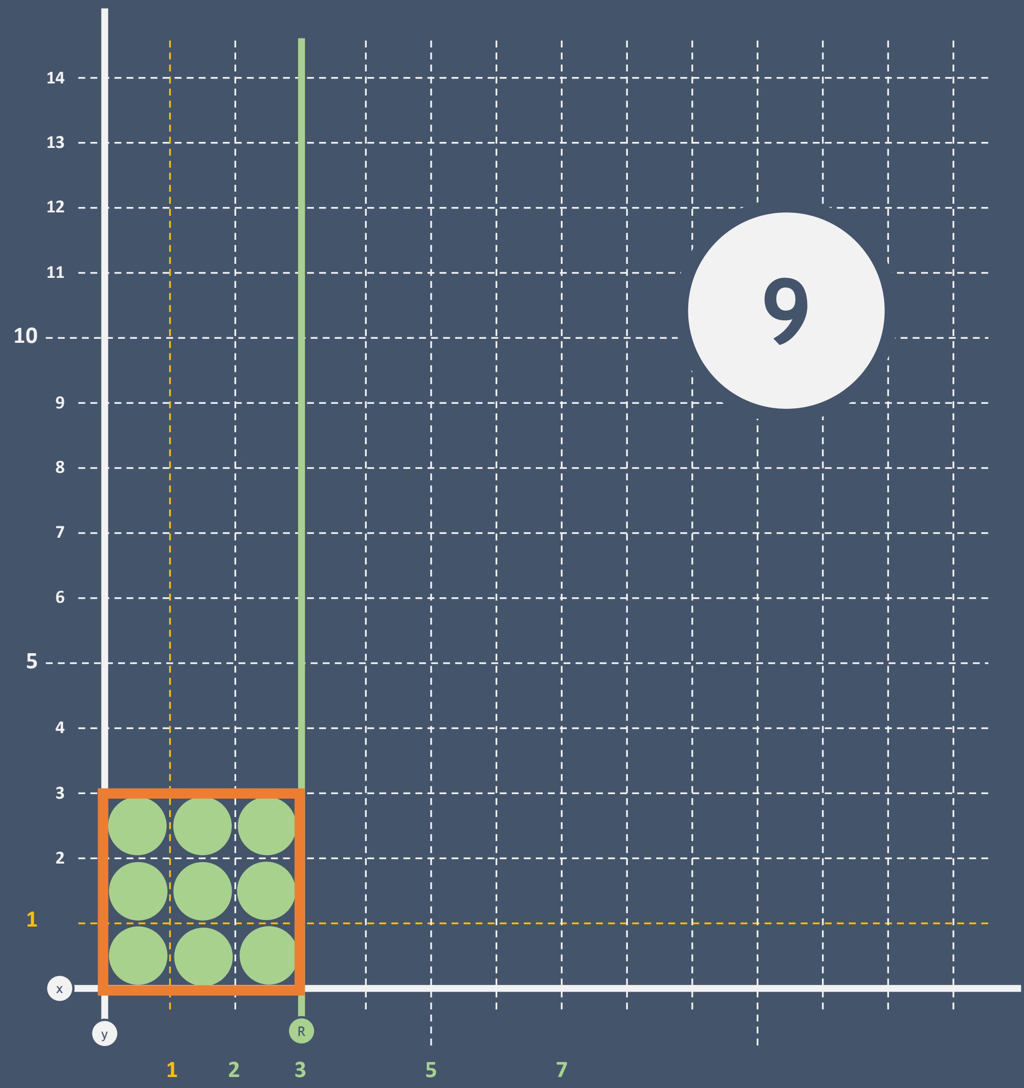
Aktion(en):

- Schieberegler eine Position nach rechts.



Aktion(en):

- Schieberegler eine weitere Position nach rechts.



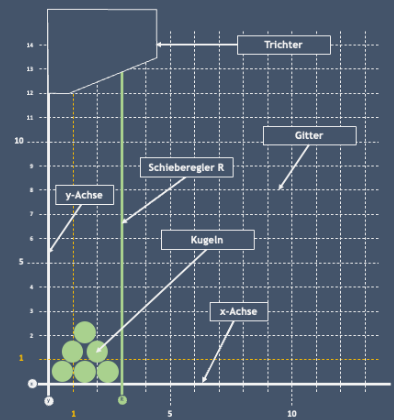
Ergebnis:

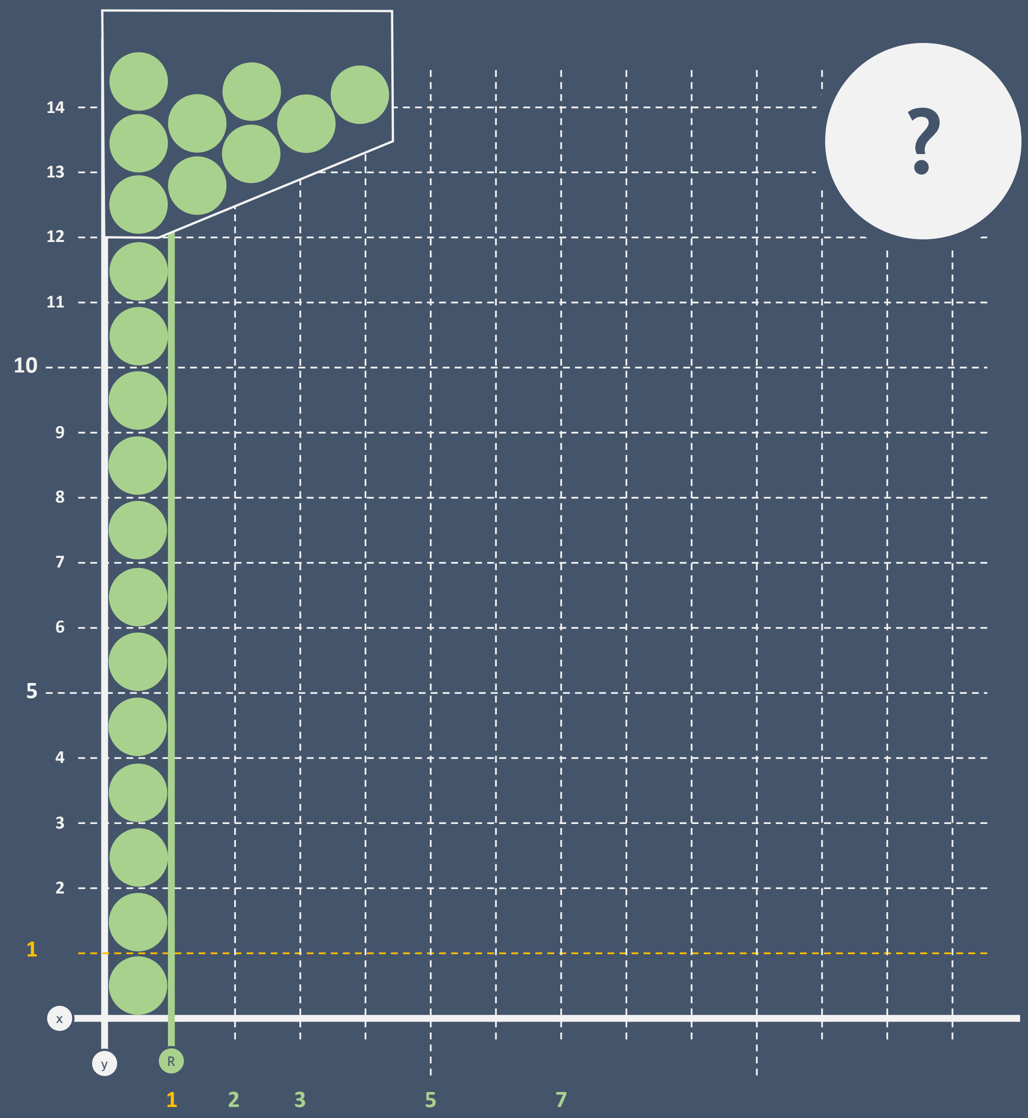
- Wieder ein Rechteck, also auch diesmal keine Primzahl

Prinzip erkannt?

Wir würden jetzt mit der 11 weitermachen!

Und wie funktioniert das, wenn man keine Zahlen kennt oder nicht zählen kann?



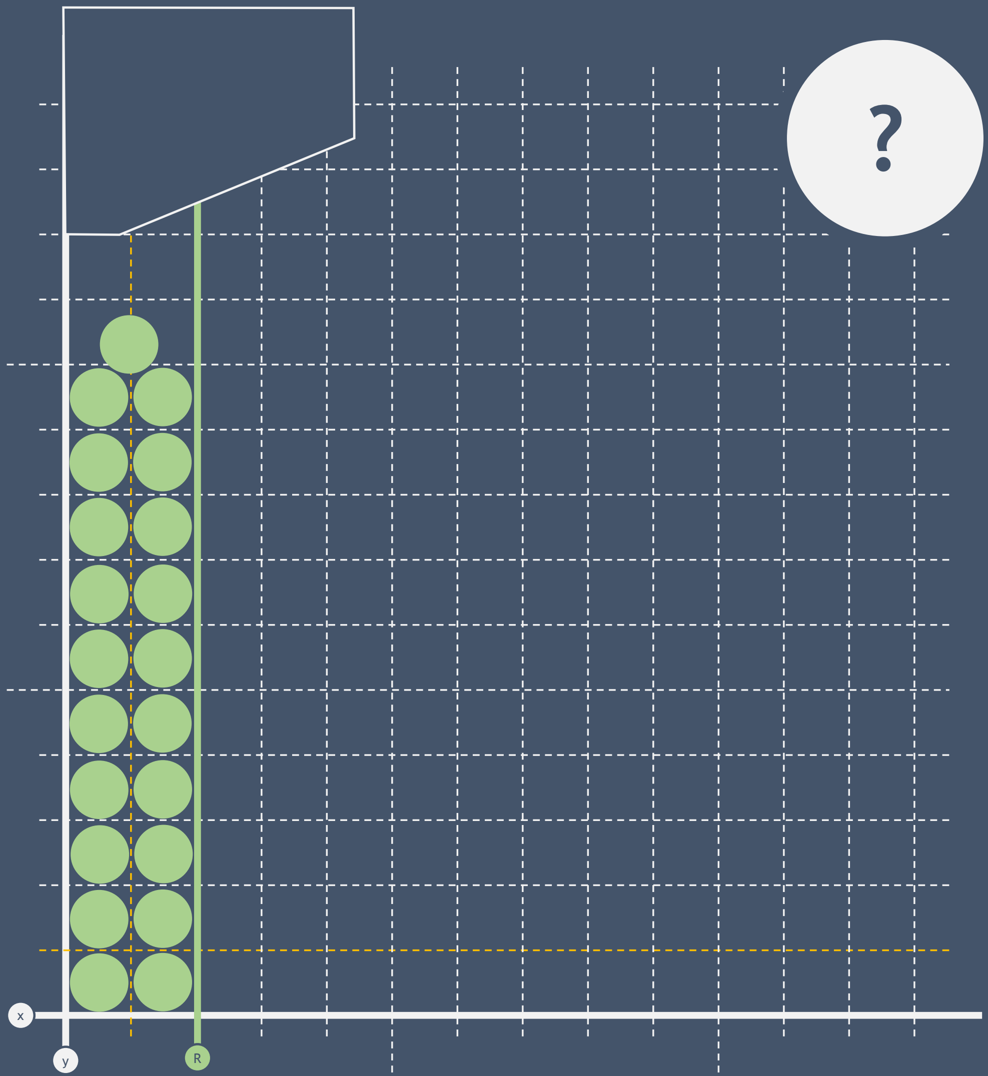


Unbekannte Anzahl an Kugeln (1):

Hier ein Beispiel, wenn wir nicht zählen können (wir kennen nur 1, 2, viele).

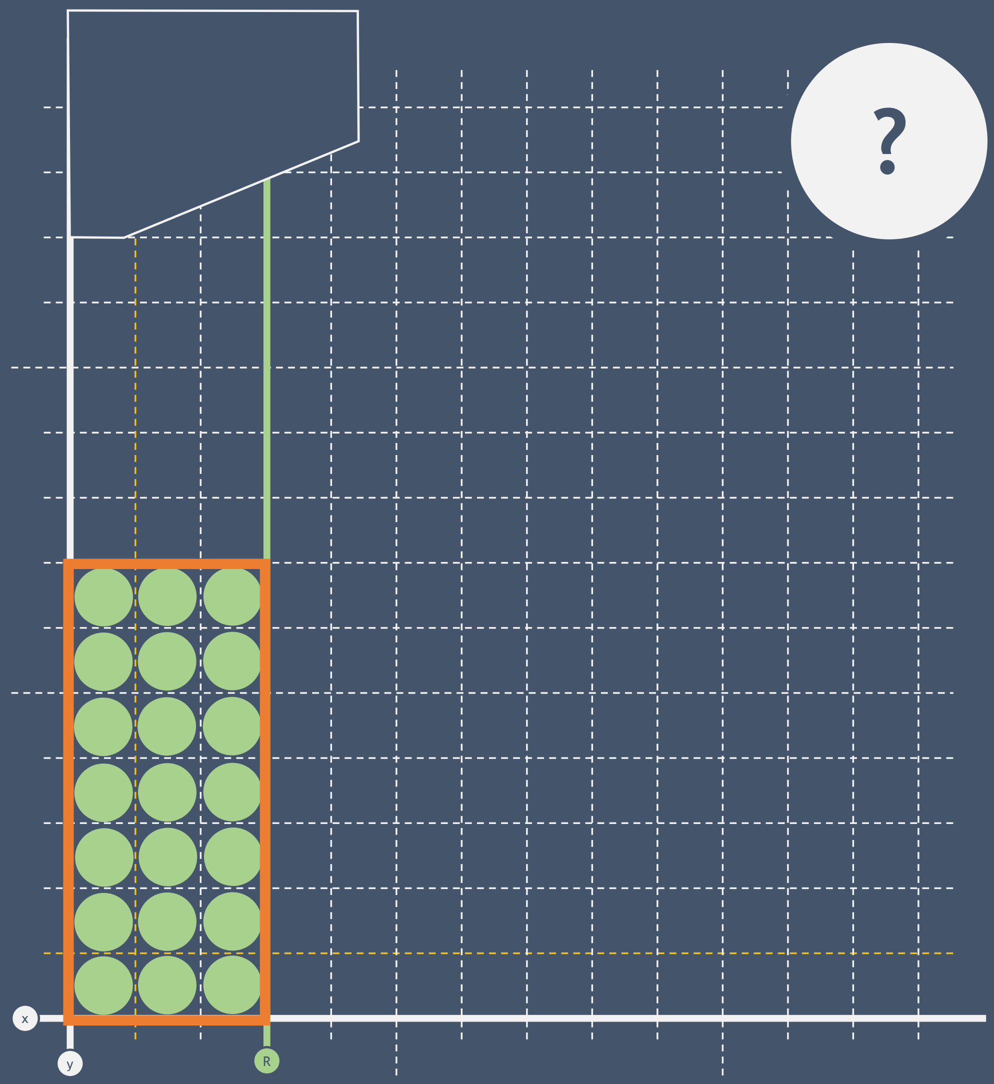
Mit dem Trichter oben links können mehr Kugeln aufgenommen werden, als in eine Spalte passen, aber maximal nur das Doppelte einer Spalte (bis zum Trichterauslass).

Wir entfernen dazu zuerst die Beschriftungen an den Achsen.



Unbekannte Anzahl an Kugeln (1):

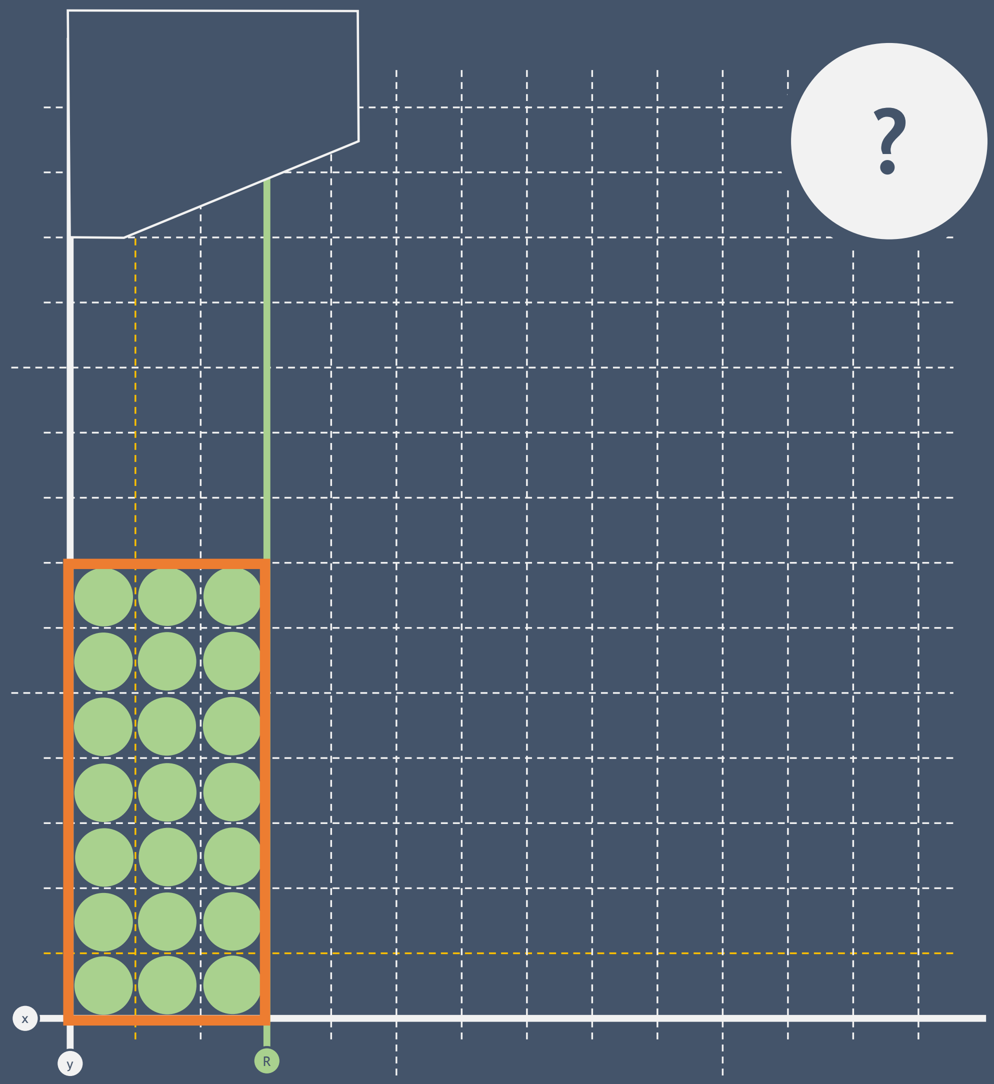
Es lässt sich KEIN Rechteck über die Kugeln legen beziehungsweise wir erkennen oben "den Rest". Die Anzahl ist daher ungerade und es könnte sich um eine Primzahl handeln.



Unbekannte Anzahl an Kugeln (1):

Wenn wir zählen könnten (beziehungsweise noch die Beschriftungen hätten) wüssten wir jetzt, dass die durch die Kugeln dargestellte Zahl ohne Rest durch 3 teilbar ist und 7 ergibt.

Wir können zwar nicht zählen, aber wir sehen, dass die Kugeln die Form eines Rechteckes einnehmen. Also haben wir hier keine Primzahl.

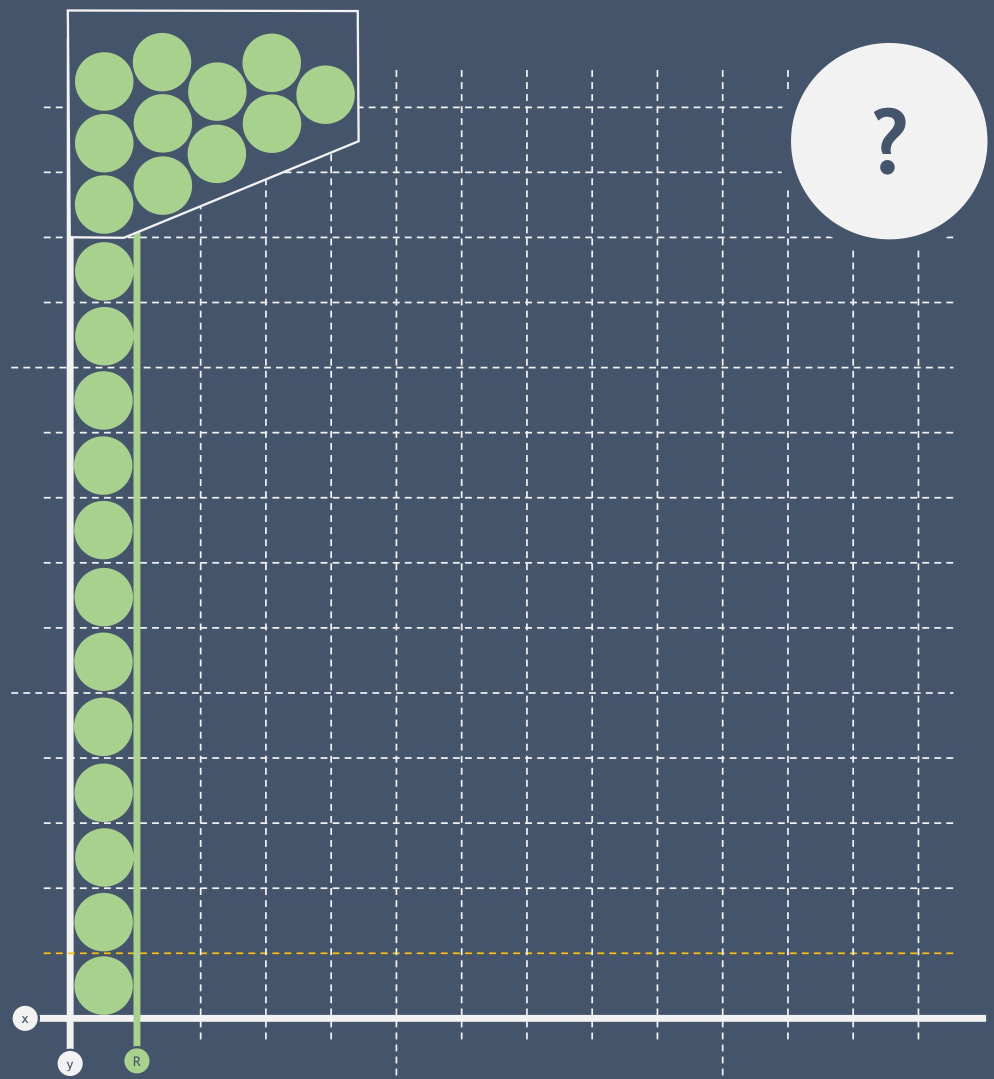


Unbekannte Anzahl an Kugeln (1):

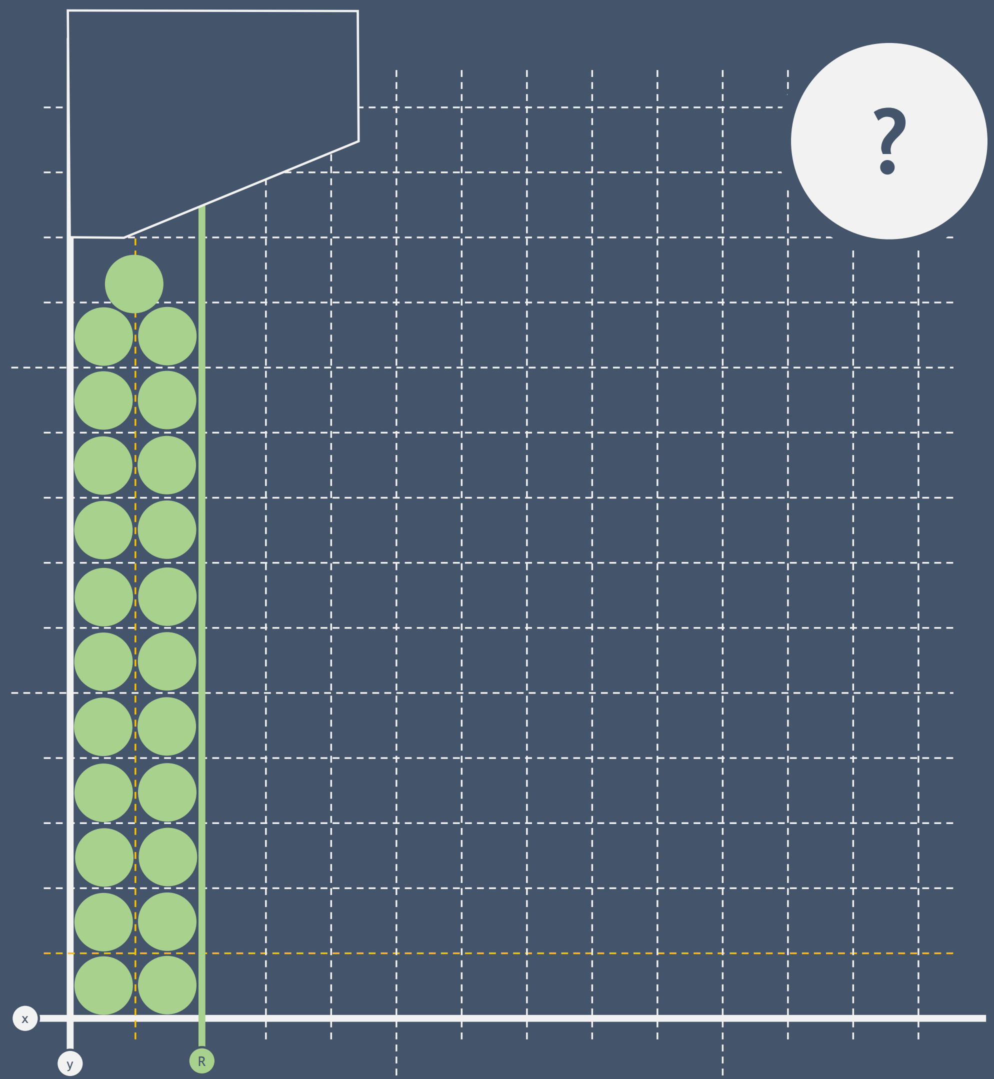
Wenn wir zählen könnten (beziehungsweise noch die Beschriftungen hätten) wüssten wir jetzt, dass die durch die Kugeln dargestellte Zahl ohne Rest durch 3 teilbar ist und 7 ergibt.

Wir können zwar nicht zählen, aber wir sehen, dass die Kugeln die Form eines Rechteckes einnehmen. Also haben wir hier keine Primzahl.

Noch ein Beispiel …

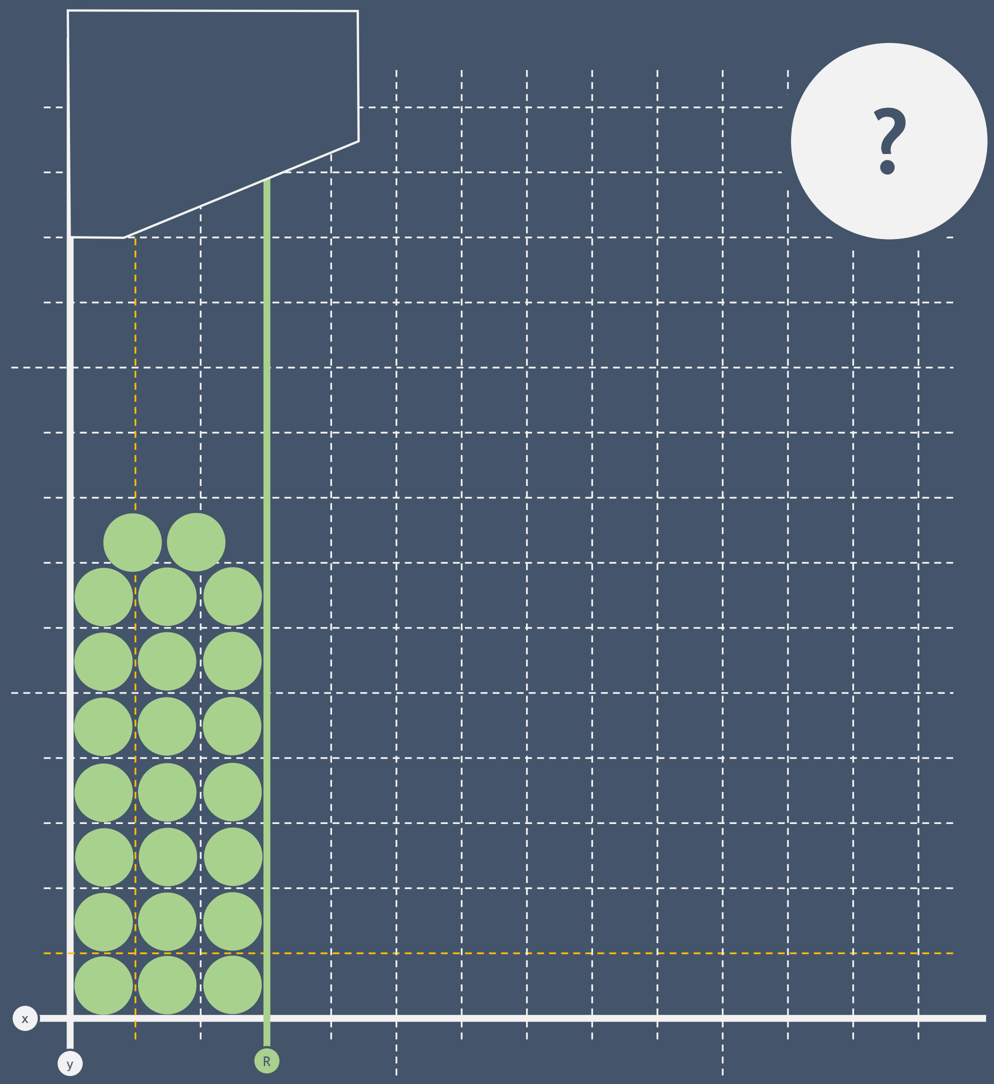


Unbekannte Anzahl an Kugeln (2):



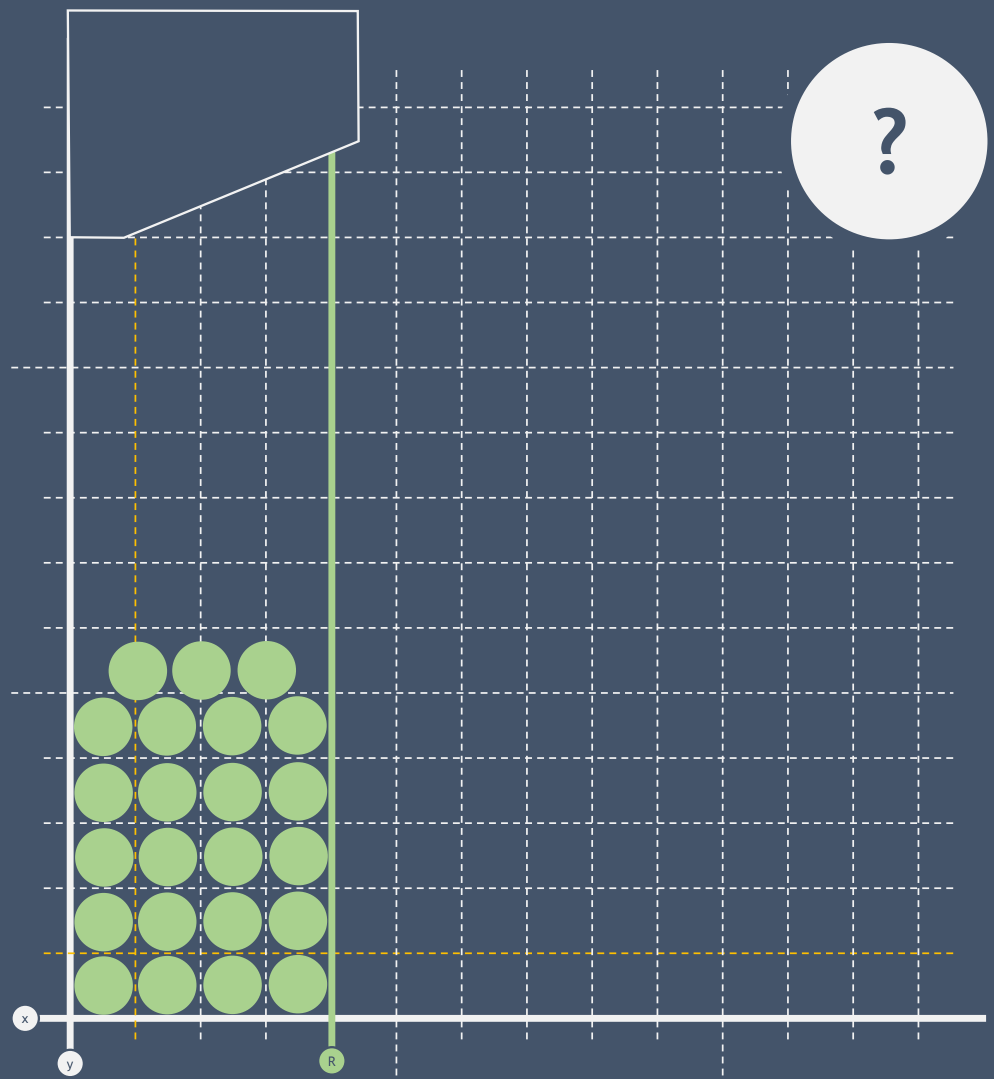
Unbekannte Anzahl an Kugeln (2):

Es lässt sich KEIN Rechteck über die Kugeln legen. Die Anzahl ist daher ungerade und es könnte sich um eine Primzahl handeln.



Unbekannte Anzahl an Kugeln (2):

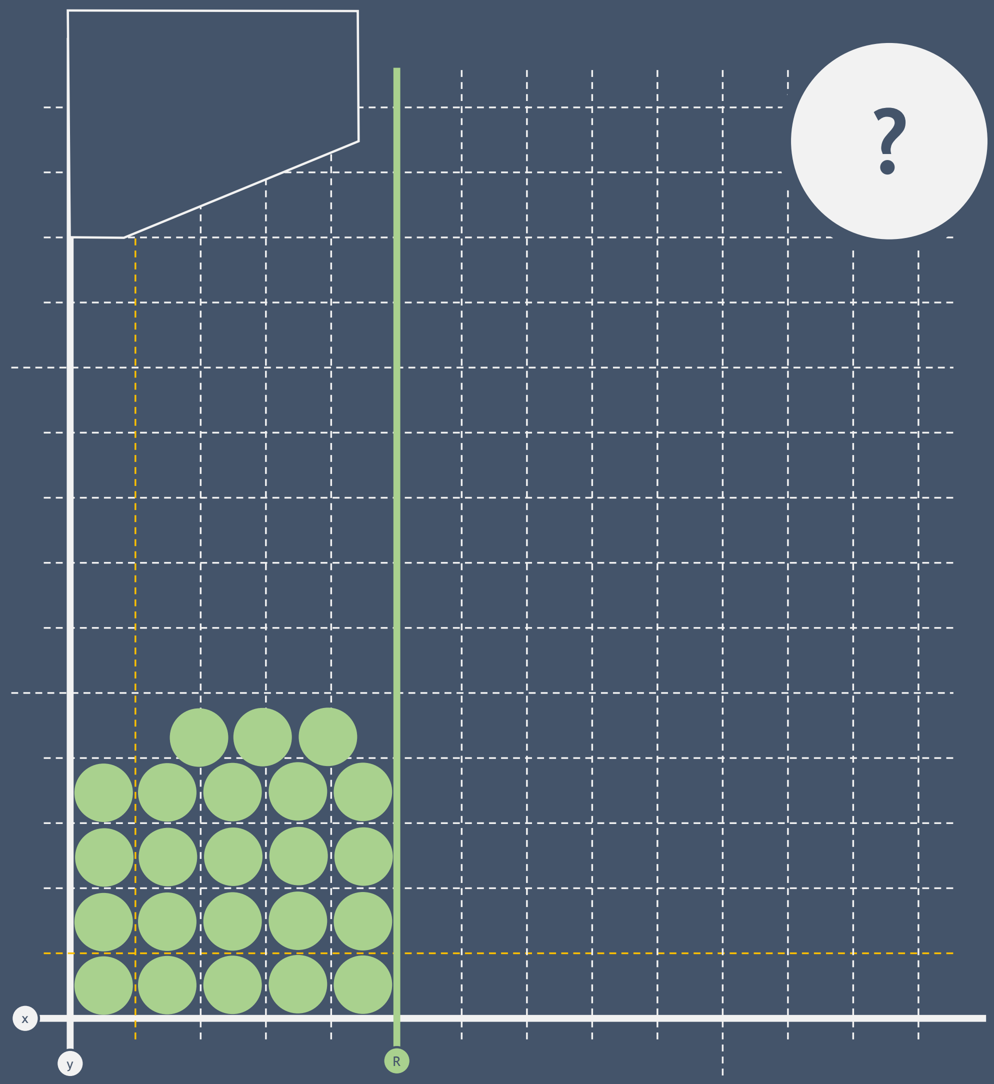
Immer noch kein Rechteck zu erkennen ...



?

Unbekannte Anzahl an Kugeln (2):

Auch hier nicht ...

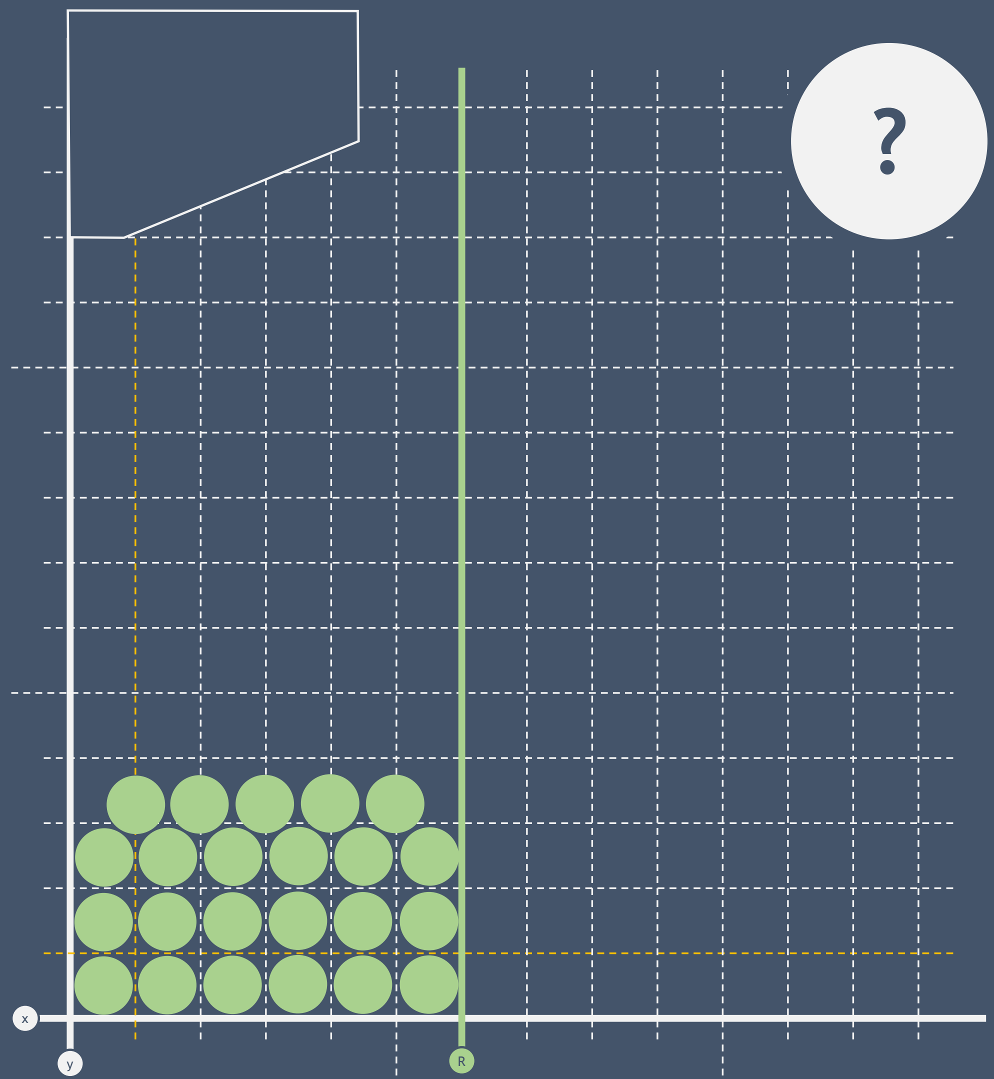


Unbekannte Anzahl an Kugeln (2):

Im Schritt vorher hätte man schon aufhören können. Wenn wir bis dahin noch kein Rechteck hatten, kommt auch keins mehr.

=> Es handelt sich also um eine Primzahl.

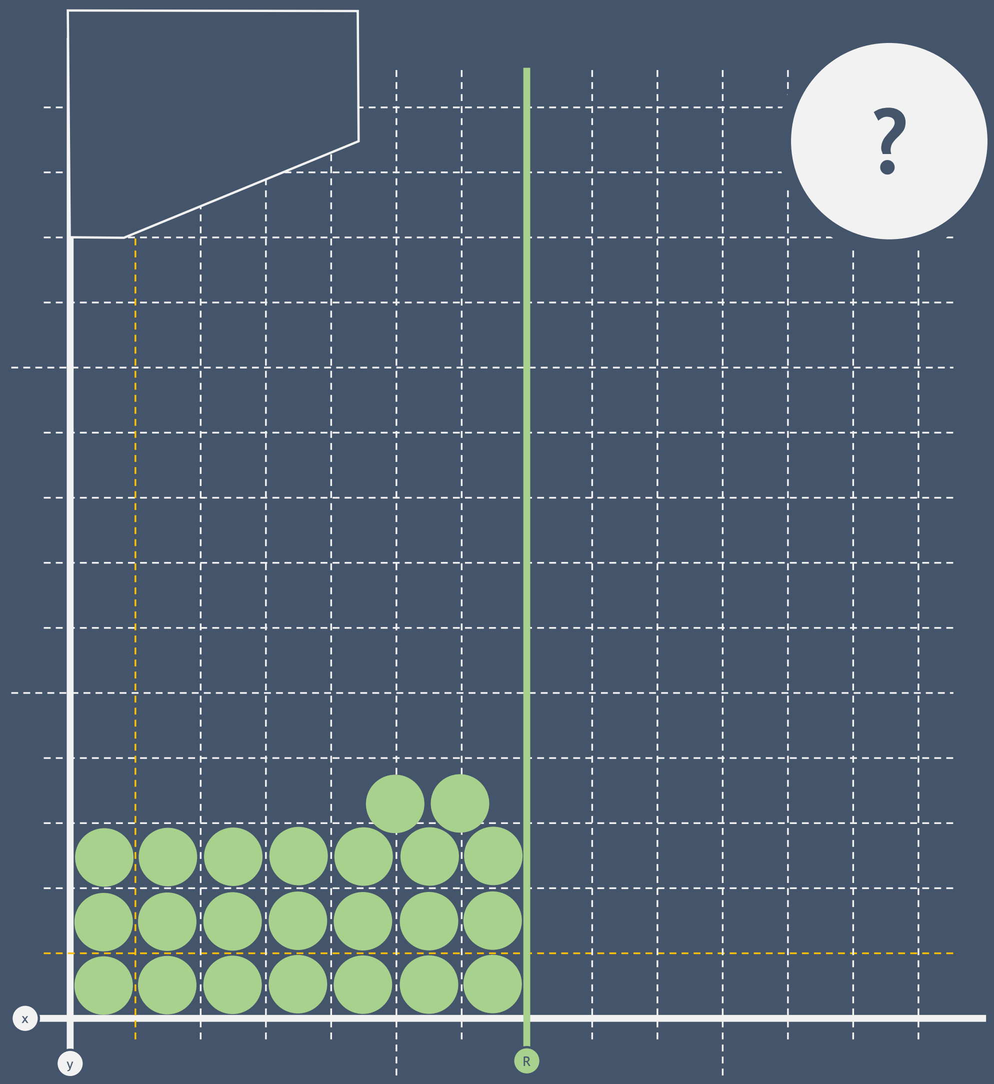
Aber - wir hören noch nicht auf ...



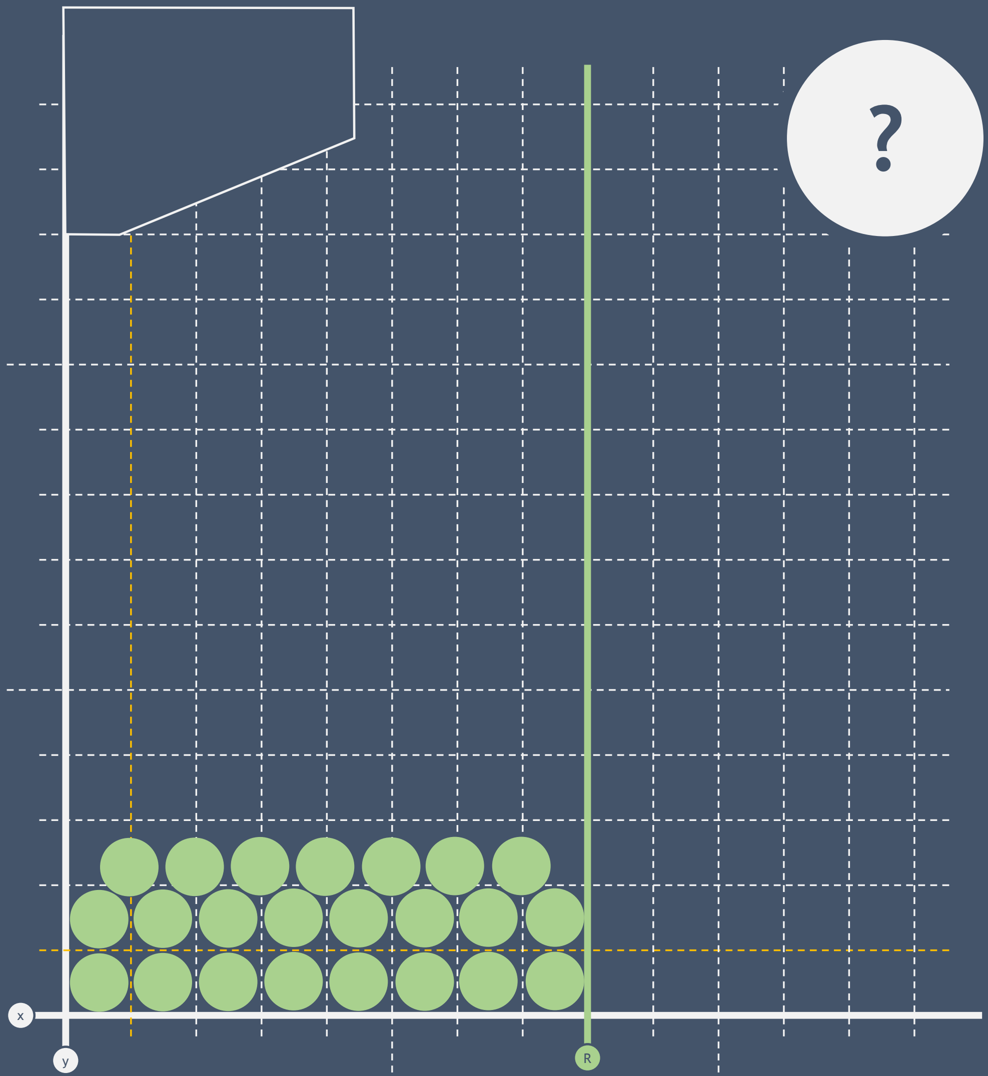
Unbekannte Anzahl an Kugeln (2):

Gleich haben wir es geschafft ...

Unbekannte Anzahl an Kugeln (2):



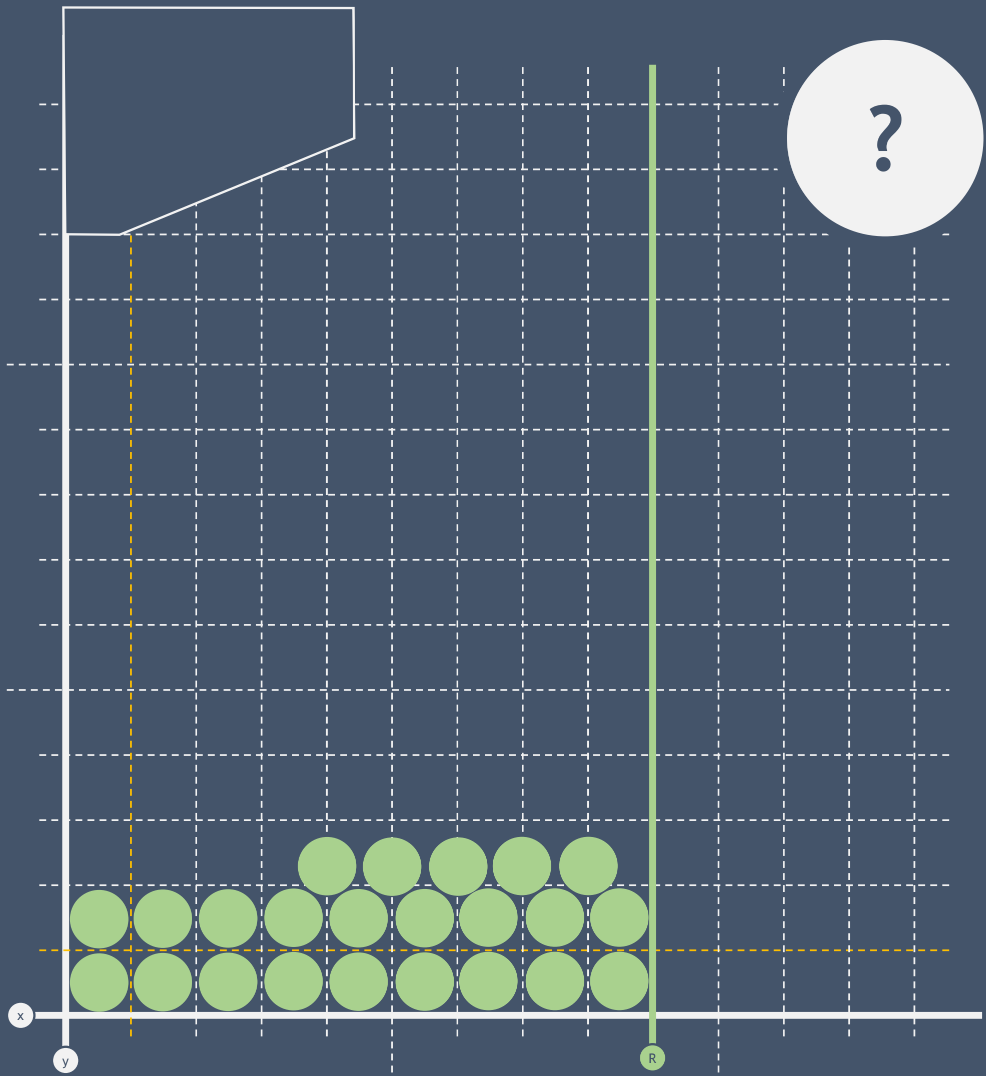
Hier könnte Ihre
Werbung stehen!



Unbekannte Anzahl an Kugeln (2):

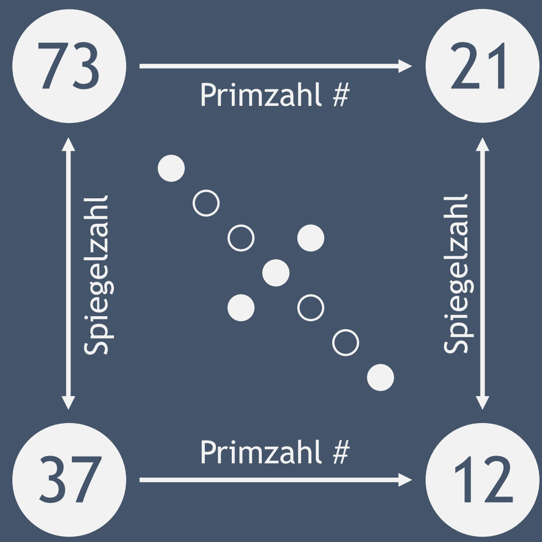
Eine ASCII Tabelle zur Ablenkung …

BIN		x0000	x0001	x0010	x0011	x0100	x0101	x0110	x0111	x1000	x1001	x1010	x1011	x1100	x1101	x1110	x1111
	HEX	x0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	xA	xB	xC	xD	xE	xF
000x	0x	NUL	SOH	STX	ETX	EOT	ENQ	ACK	BEL	BS	HT	LF	VT	FF	CR	SO	SI
001x	1x	DLE	DC1	DC2	DC3	DC4	NAK	SYN	ETB	CAN	EM	SUB	ESC	FS	GS	RS	US
010x	2x	SP	!	"	#	$	%	&	'	(	)	*	+	,	-	.	/
011x	3x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	:	;	<	=	>	?
100x	4x	@	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
101x	5x	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	[	\	]	^	_
110x	6x	`	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
111x	7x	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	{	|	}	~	DEL

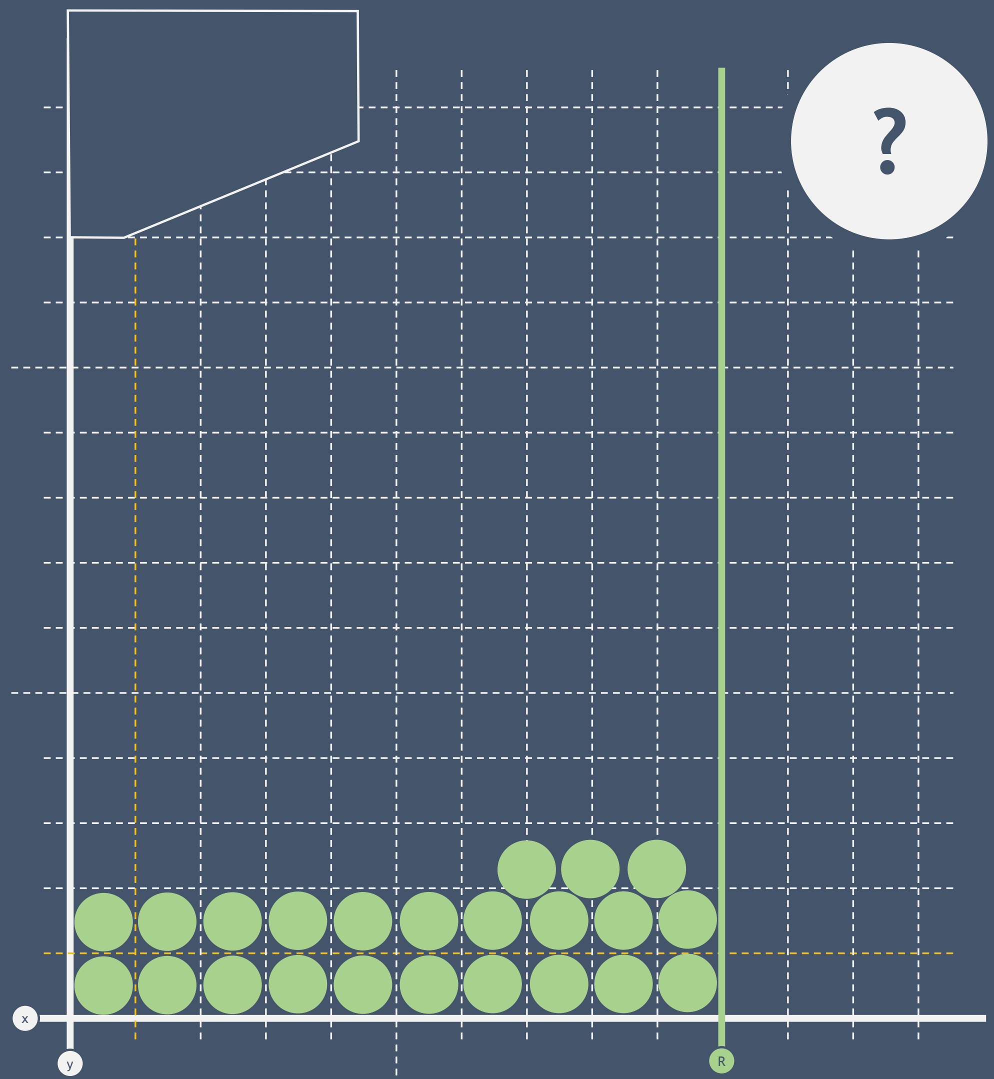


Unbekannte Anzahl an Kugeln (2):

Kennt ihr eigentlich die Sheldon Zahl 73?

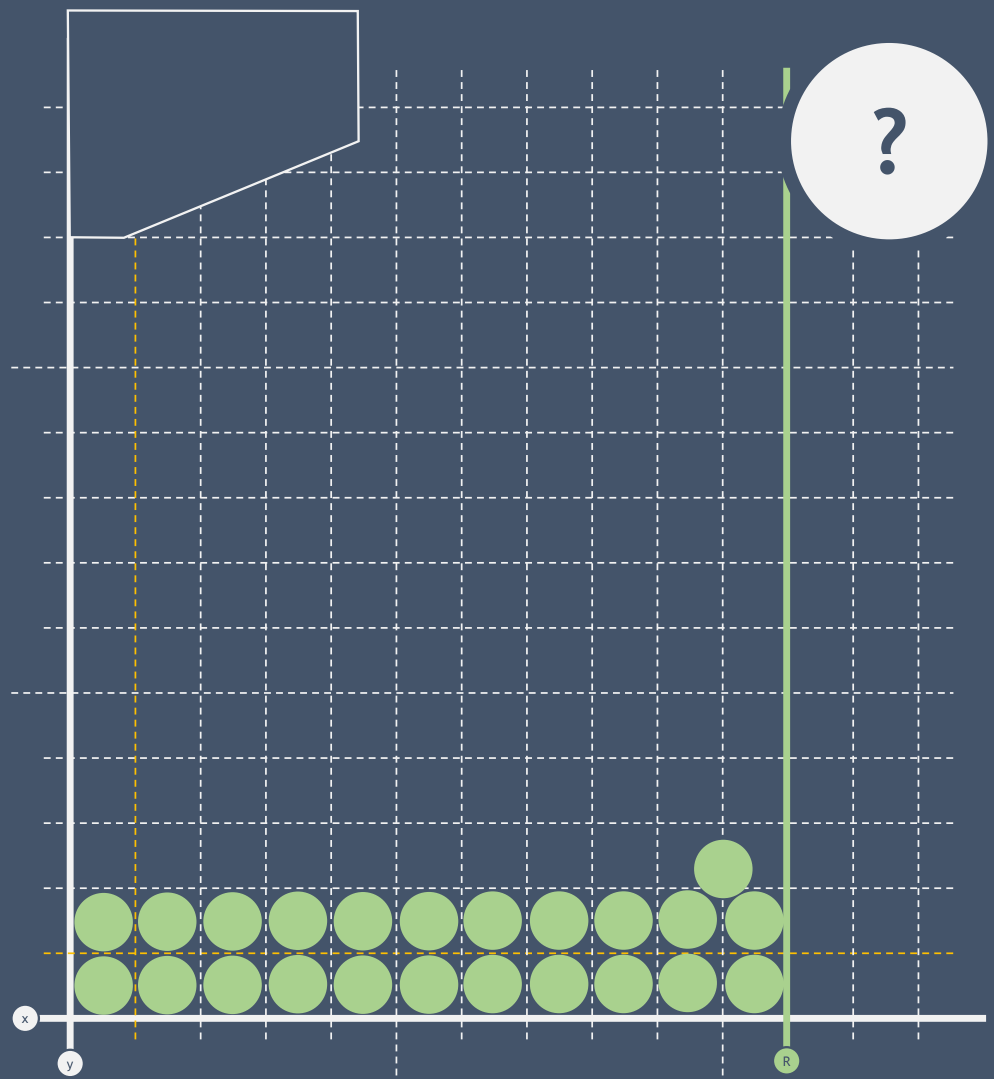


https://de.wikipedia.org/wiki/Dreiundsiebzig



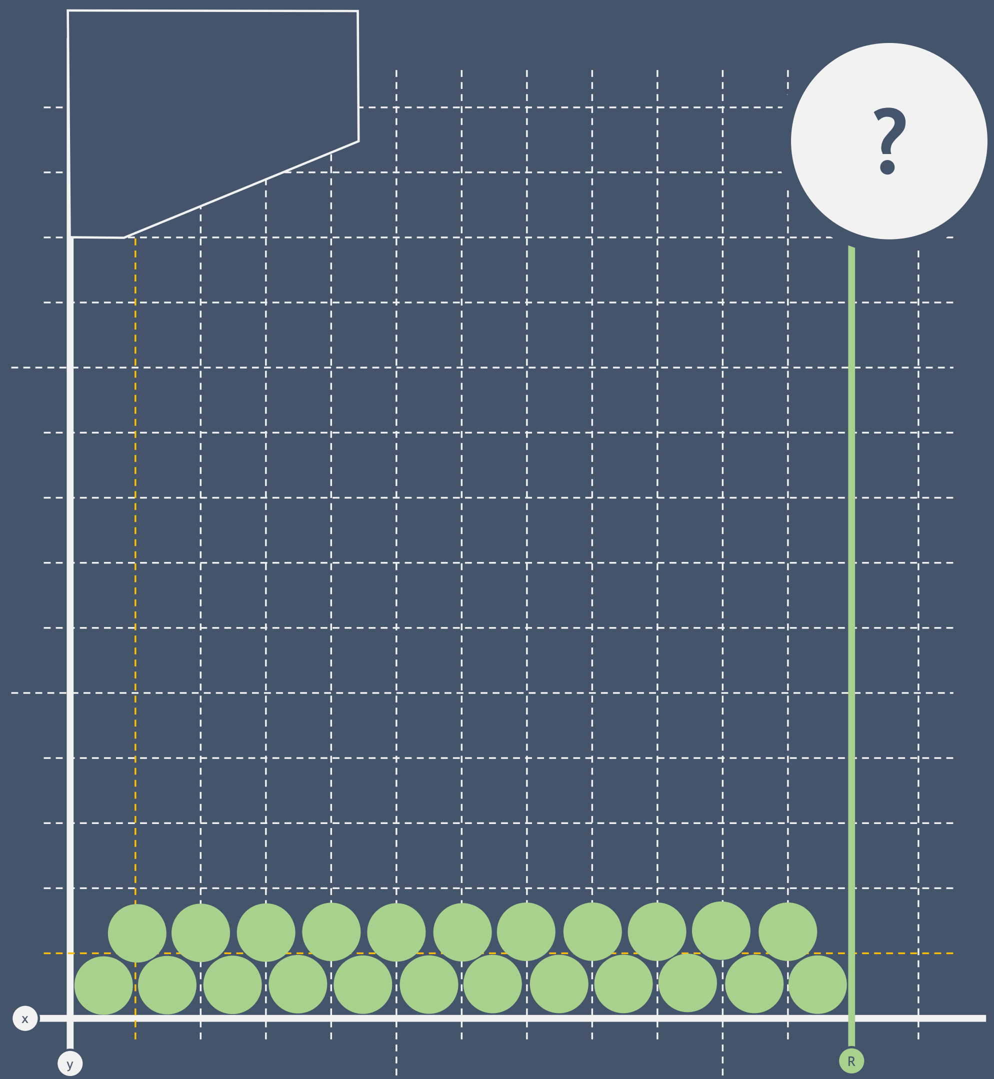
Unbekannte Anzahl an Kugeln (2):

2 Züge noch, dann sind wir fertig ...



Unbekannte Anzahl an Kugeln (2):

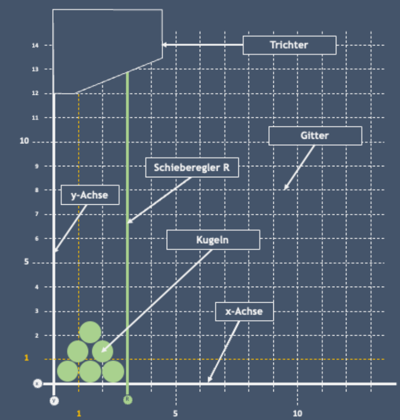
Jetzt kommt der letzte Zug – versprochen ...

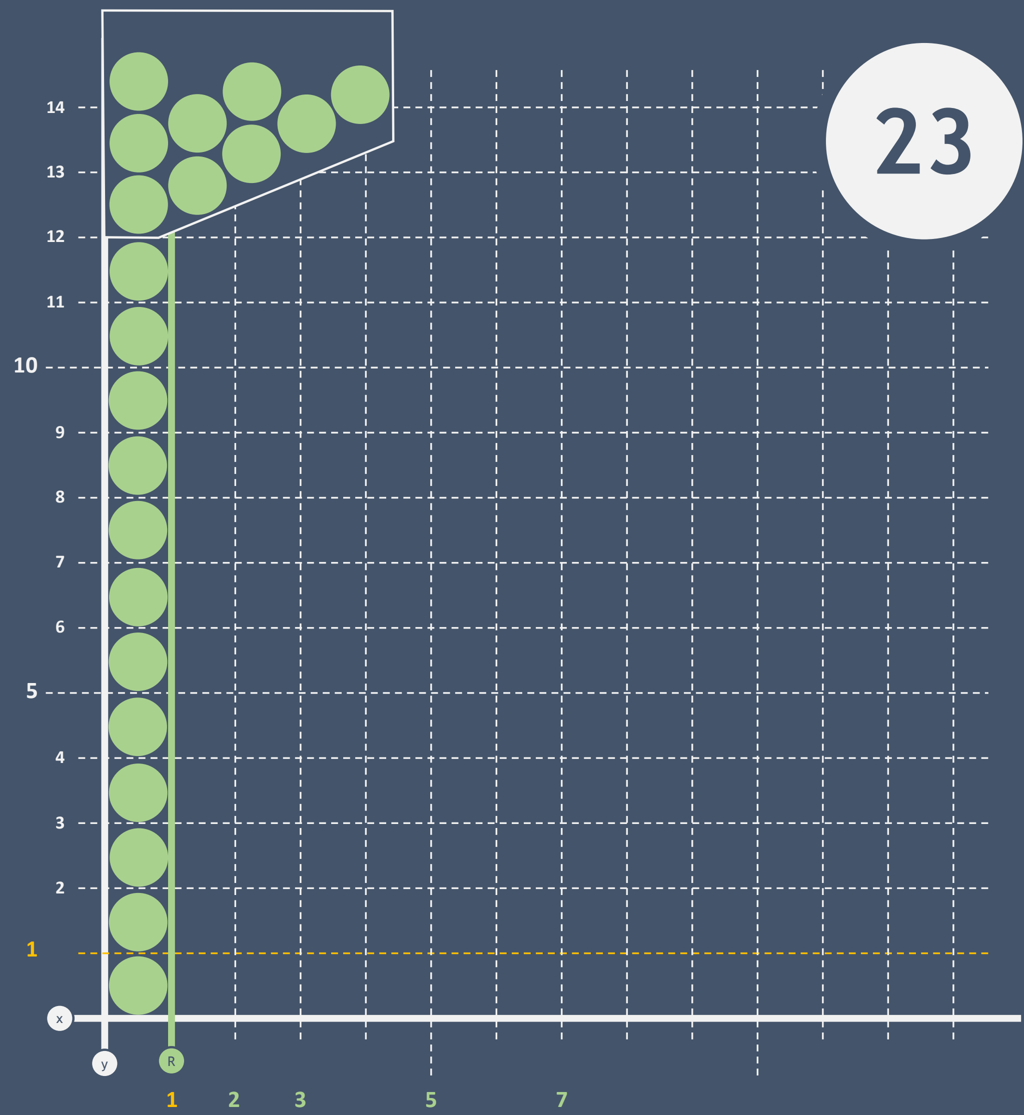


Unbekannte Anzahl an Kugeln (2):

Hätten wir die ersten Primzahlen bereits ermittelt und auf der X-Achse markiert (einfach mit einem Pfeil oder Punkt, denn wir kennen ja keine Zahlen), hätten wir uns alle bekannten nicht-prim Positionen des Reglers sparen können.

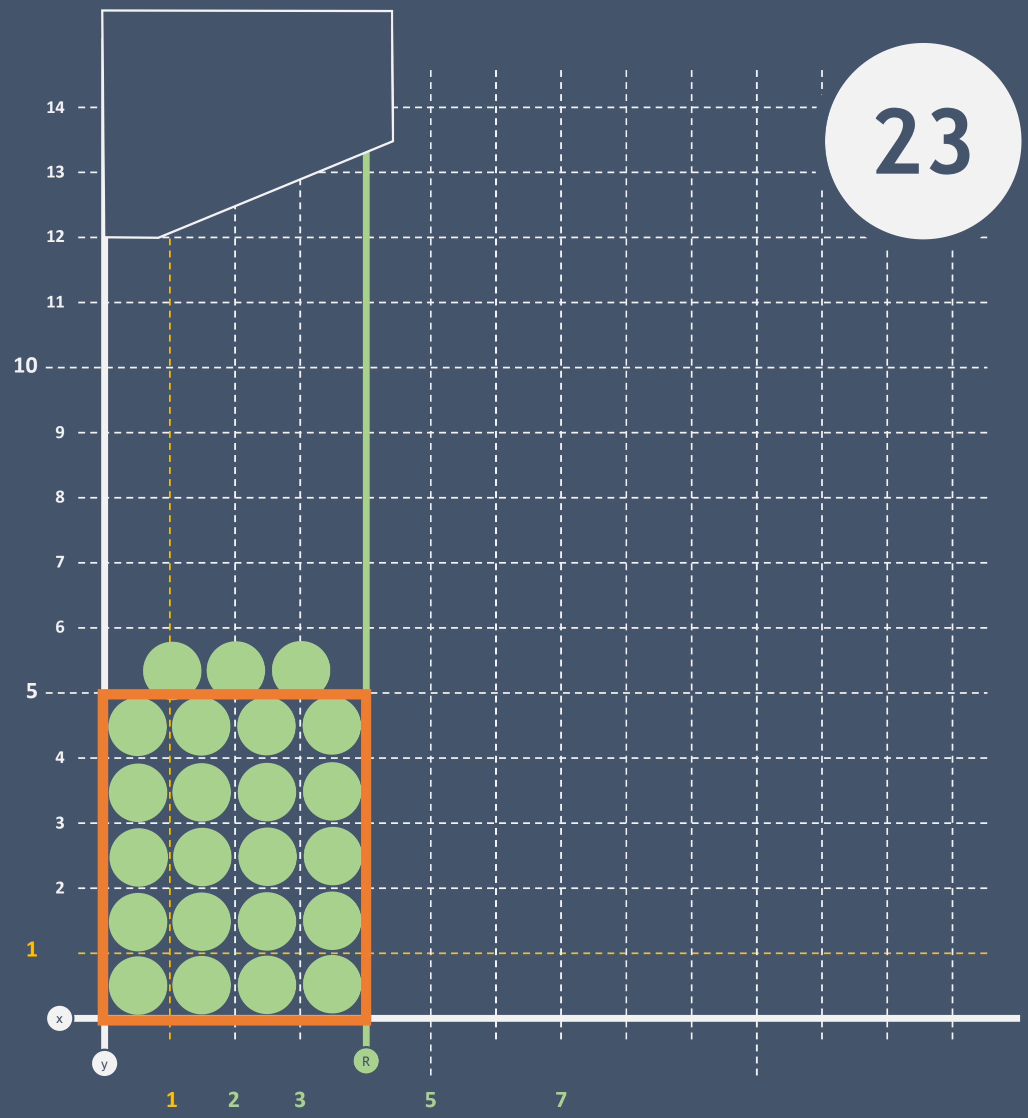
Das Kommutativgesetz der Multiplikation erkennen!





Das Kommutativgesetz visualisiert:

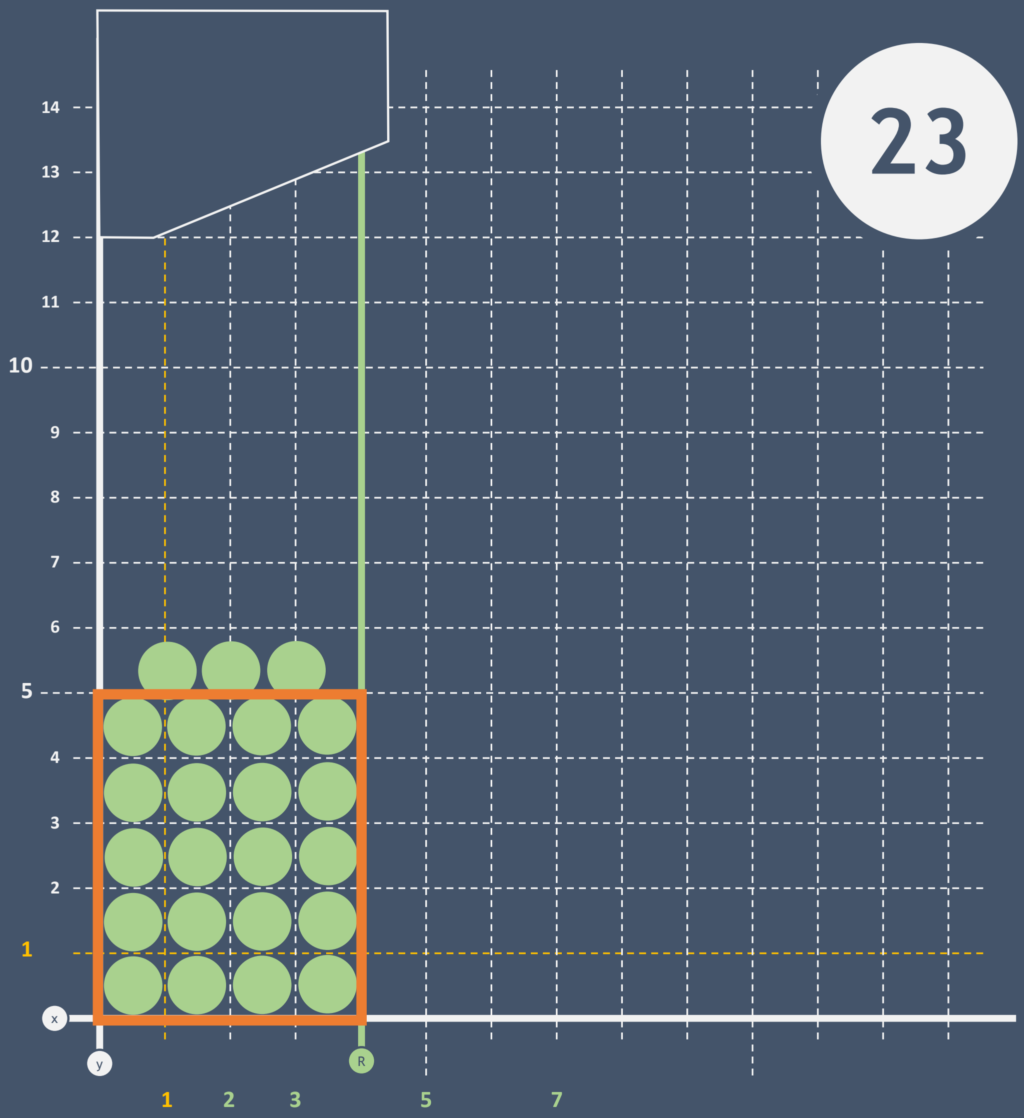
Wir nehmen wieder die 23 Kugeln aus dem vorherigen Beispiel …



23

Das Kommutativgesetz visualisiert:

… und schieben den Regler zum Beispiel um 3 Positionen nach rechts (auf die 4).



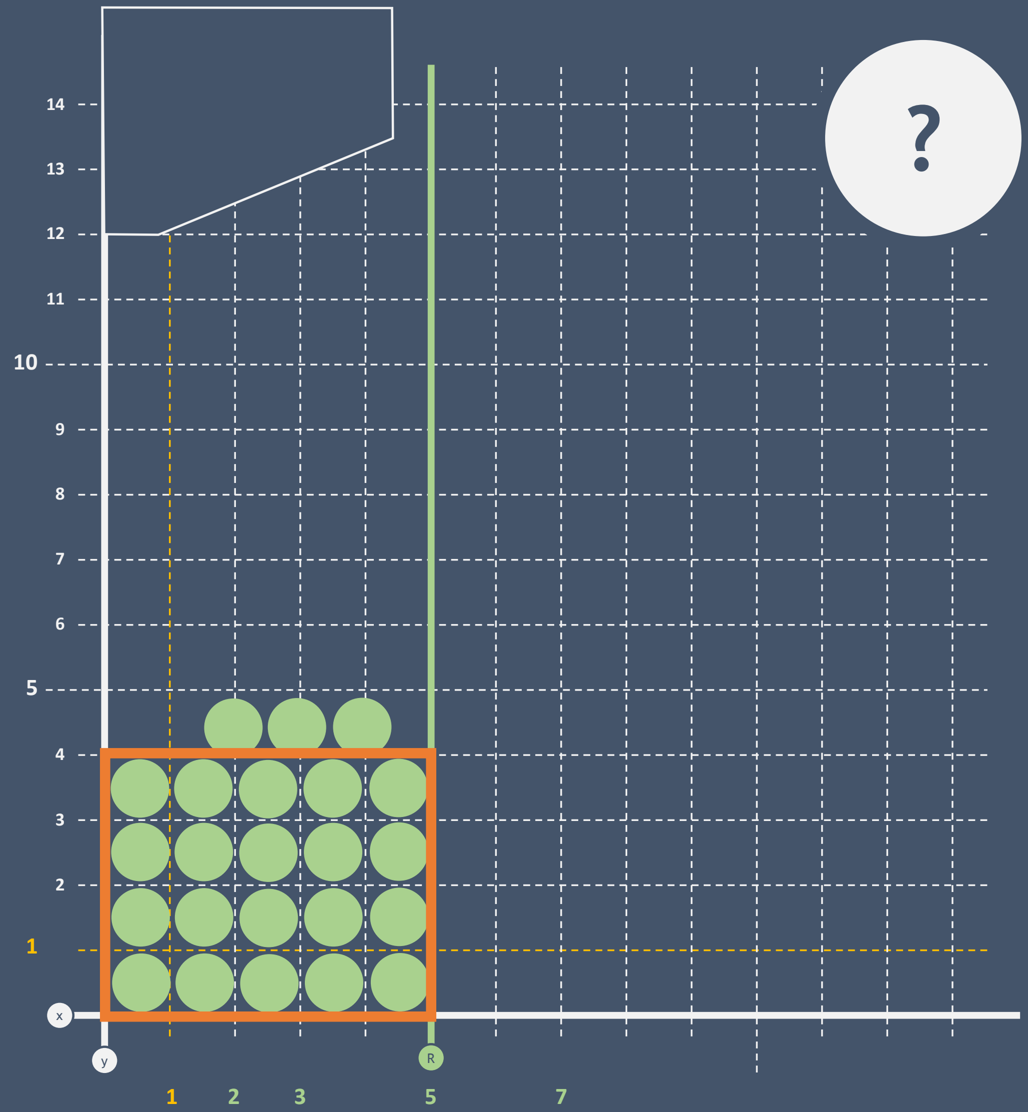
Das Kommutativgesetz visualisiert:

… und schieben den Regler zum Beispiel um 3 Positionen nach rechts (auf die 4).

Wir haben jetzt:

an der Position y = 5
an der Position x = 4
und einen Rest von 3, also

$$5 \times 4 + 3 = 23$$



Das Kommutativgesetz visualisiert:

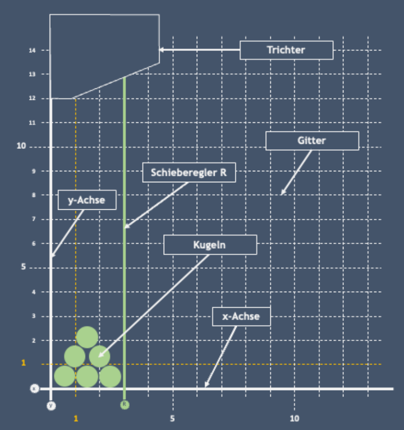
Wir drehen jetzt das 5 x 4 Rechteck um 90°

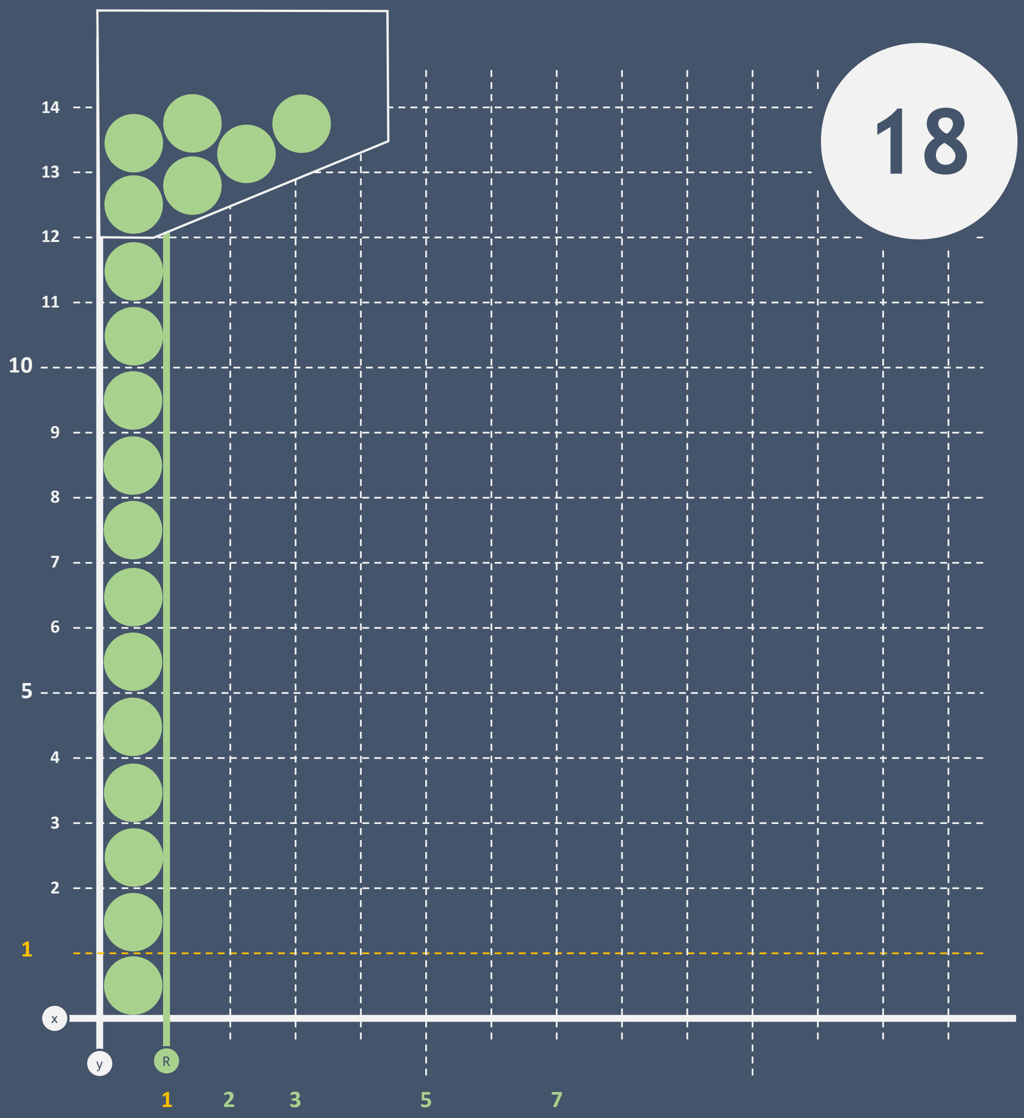
Und jetzt haben wir:

an der Position y = 4 } vertauscht
an der Position x = 5
und einen Rest von 3, also

$$4 \times 5 + 3 = 23$$

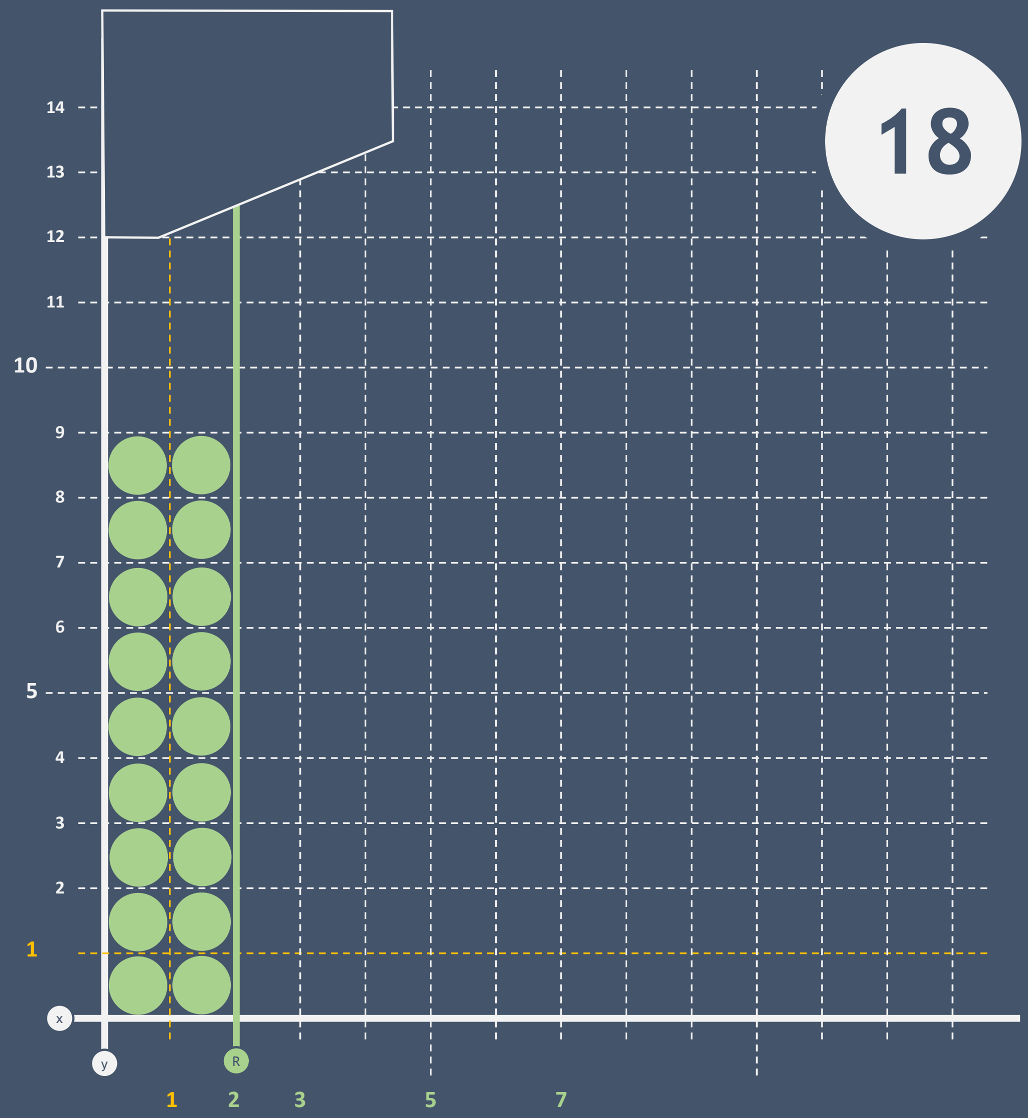
Eine Zahl in ihre Primfaktoren zerlegen





Primfaktorzerlegung:

Wir beginnen mit der 2 …



18

Primfaktorzerlegung:

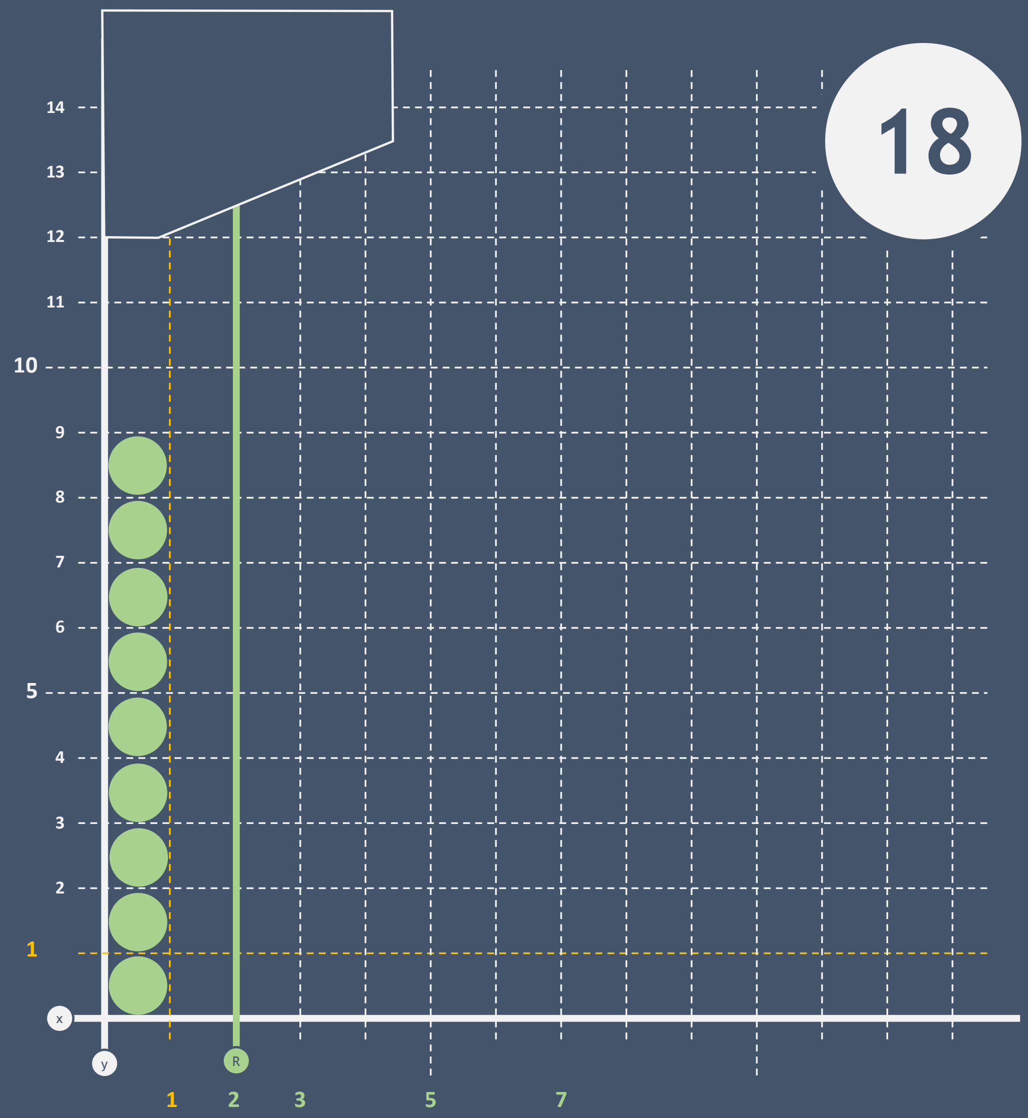
Wir schauen NUR auf den Rest – und diese Ergebnis hat keinen Rest.

Daher ist 2 der erste Primfaktor. Wir entfernen alle Spalten bis auf die Linke und machen mit den restlichen Kugeln weiter.

Der Schieberegler bleibt noch auf Position 2.

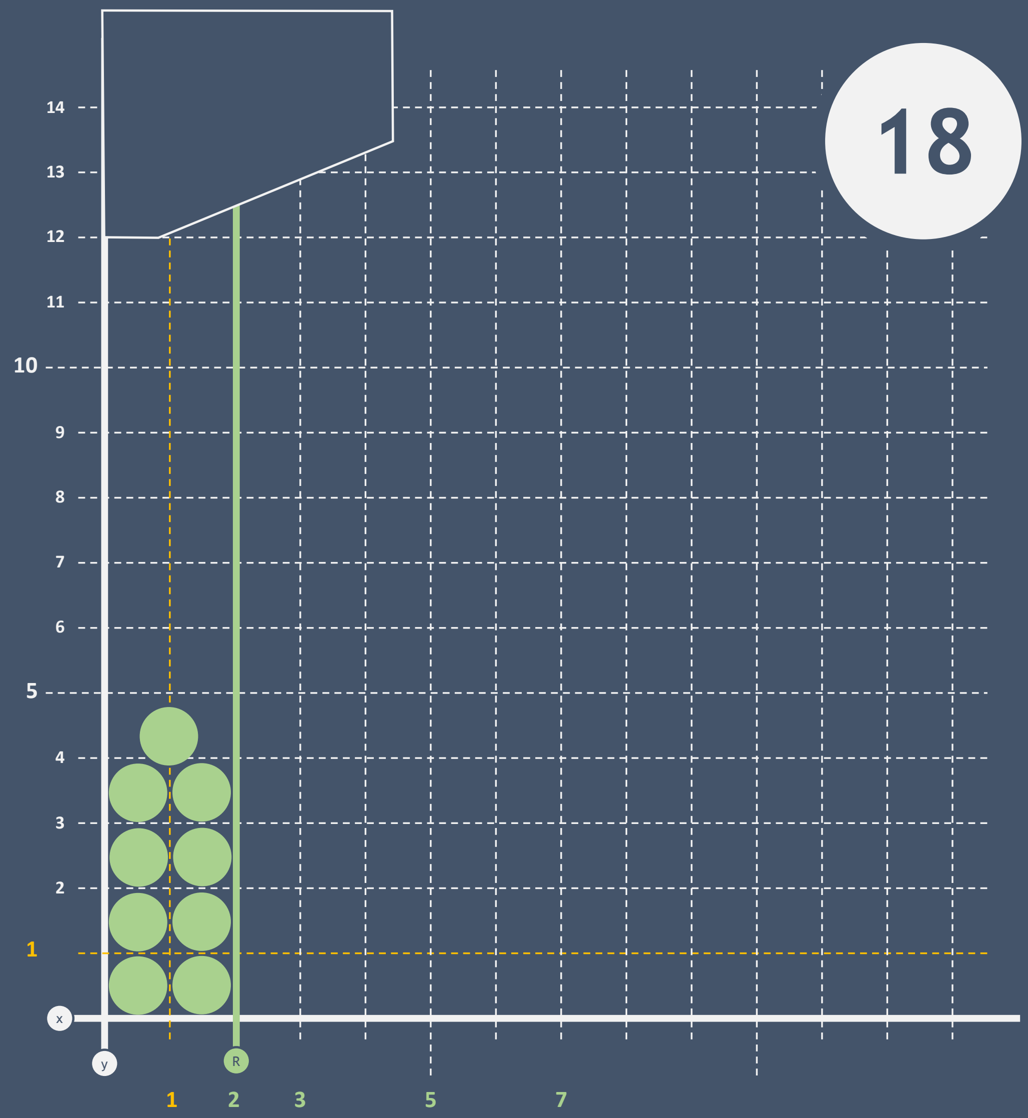
Wir notieren und den gefundenen Primfaktor.

18 = 2 x …



Primfaktorzerlegung:

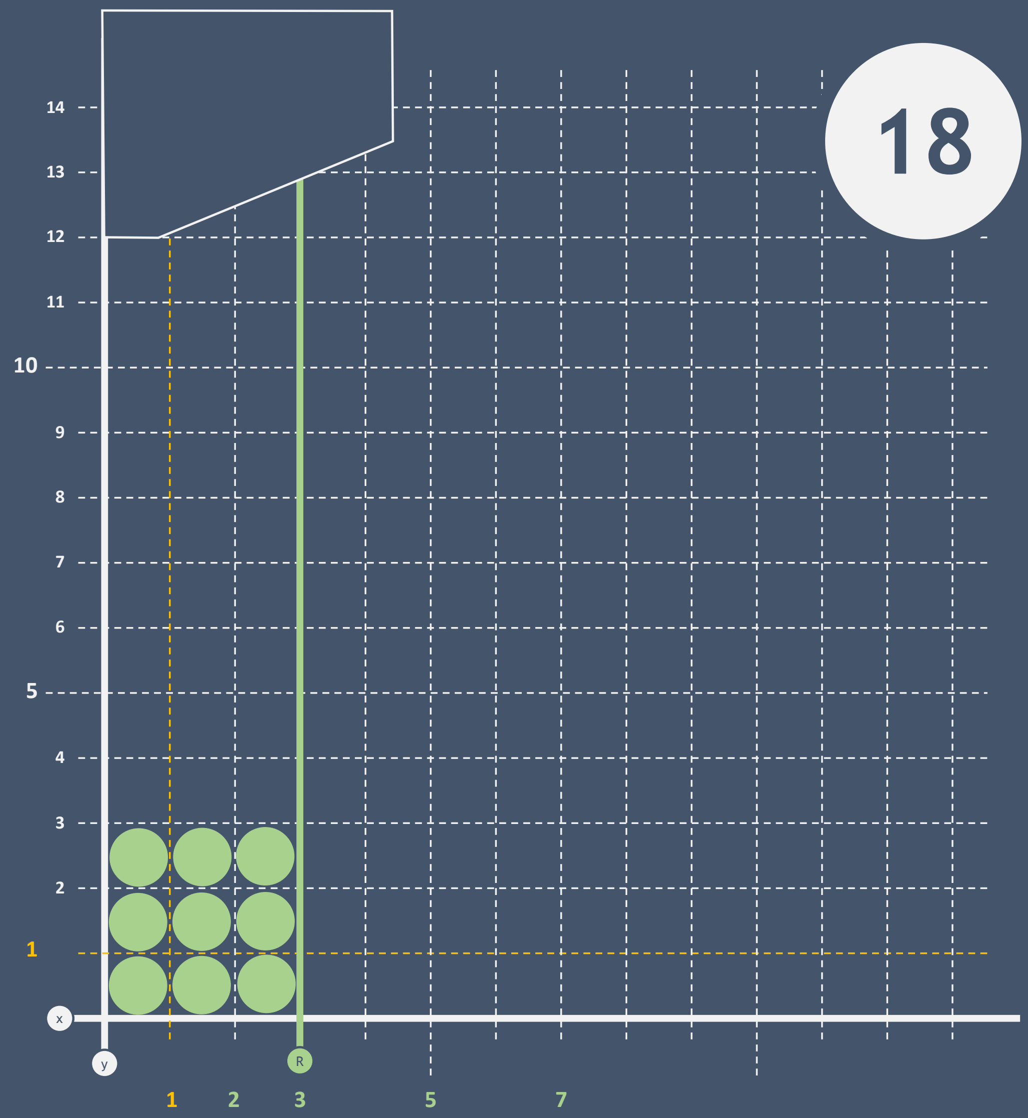
18 = 2 x ...



Primfaktorzerlegung:

Wir haben einen Rest. Das bedeutet, wir können mit der 2 aufhören und mit der nächsten Primzahl (der 3) weitermachen.

$$18 = 2 \times \ldots$$



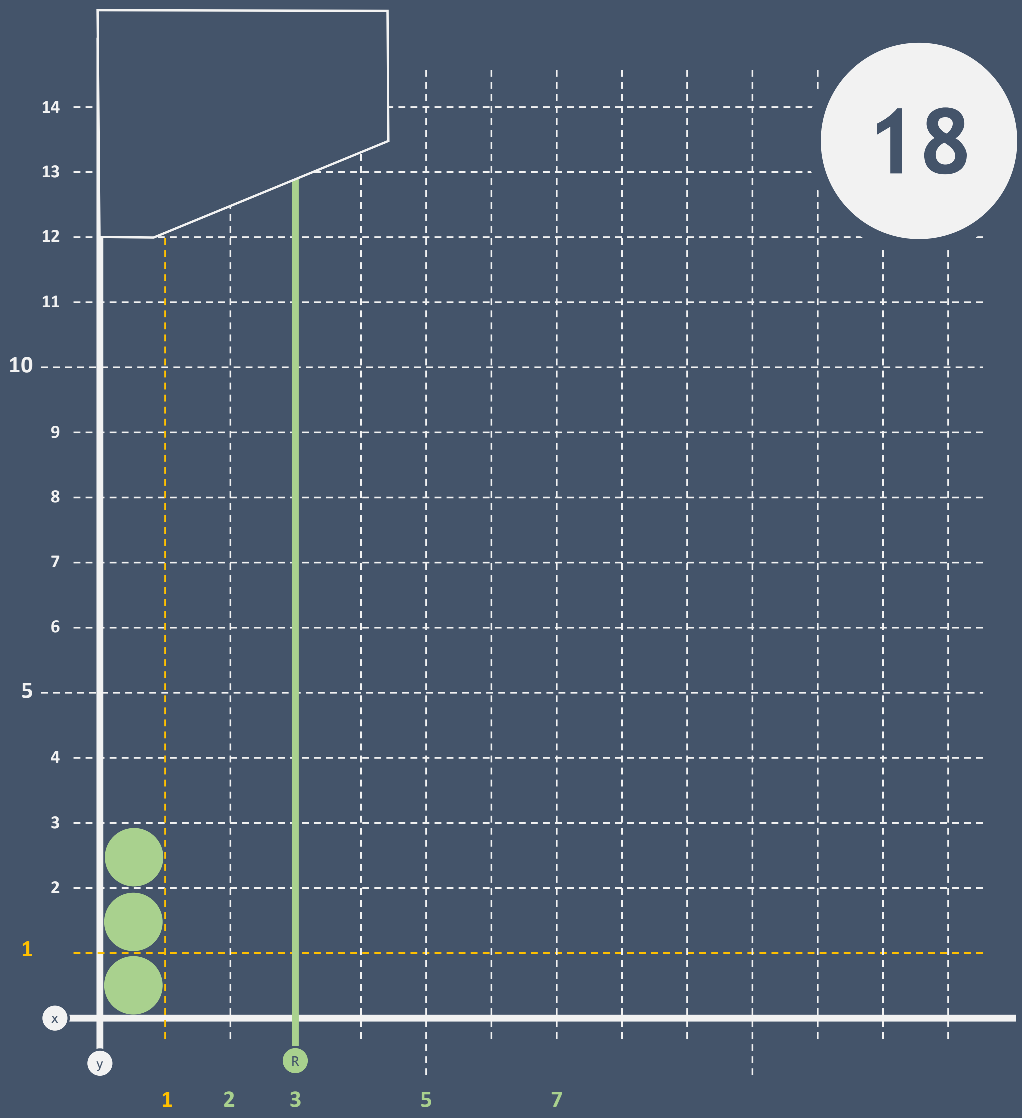
Primfaktorzerlegung:

Wir haben keinen Rest und notieren uns die 3 als nächsten Primfaktor.

Wir entfernen wieder alle Spalten bis auf eine und machen mit den restlichen Kugeln weiter.

Schieberegler bleibt auf Position 3.

18 = 2 x 3 x …



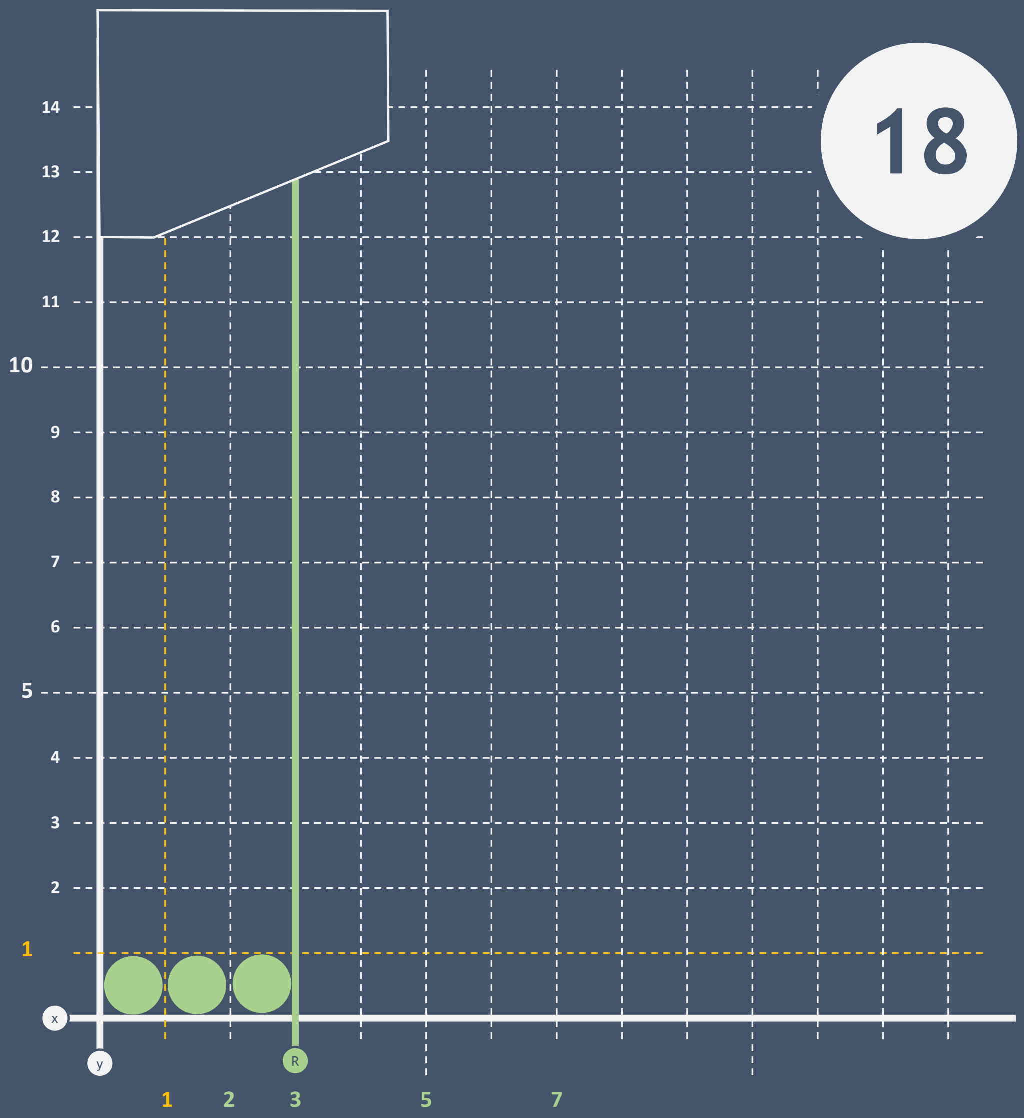
Primfaktorzerlegung:

Wir haben keinen Rest und notieren uns die 3 als nächsten Primfaktor.

Wir entfernen wieder alle Spalten bis auf eine und machen mit den restlichen Kugeln weiter.

Schieberegler bleibt auf Position 3.

$$18 = 2 \times 3 \times \ldots$$



18

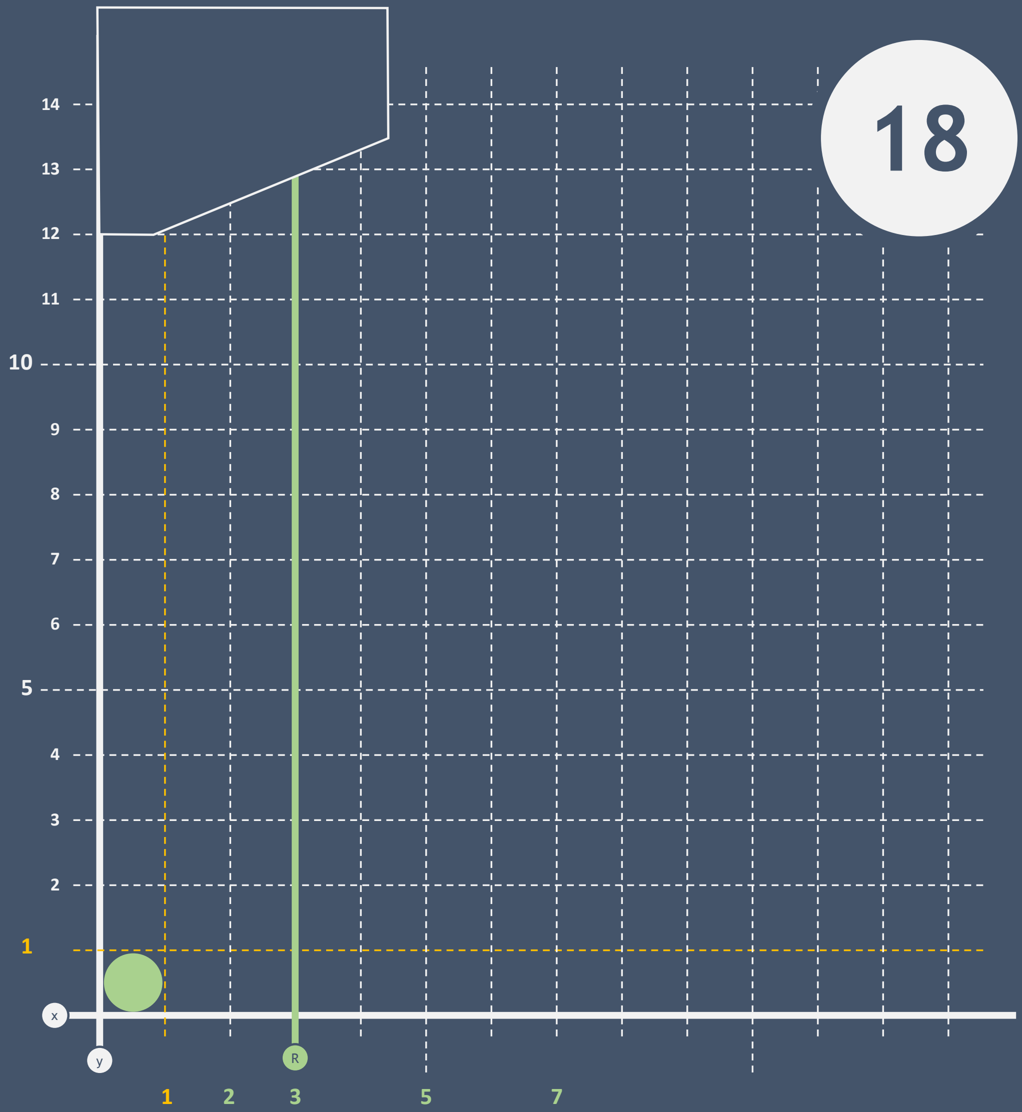
Primfaktorzerlegung:

Wir haben keinen Rest und notieren uns die 3 als nächsten Primfaktor.

Wir entfernen wieder alle Spalten bis auf eine und machen mit den restlichen Kugeln weiter.

Schieberegler bleibt auf Position 3.

18 = 2 x 3 x ...



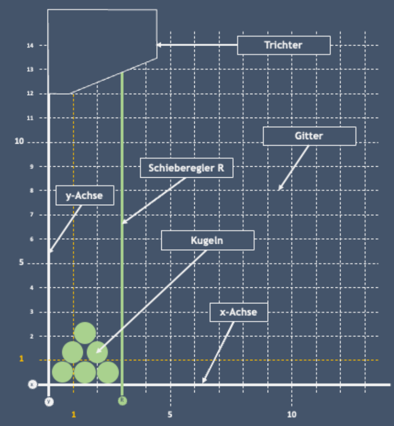
Primfaktorzerlegung:

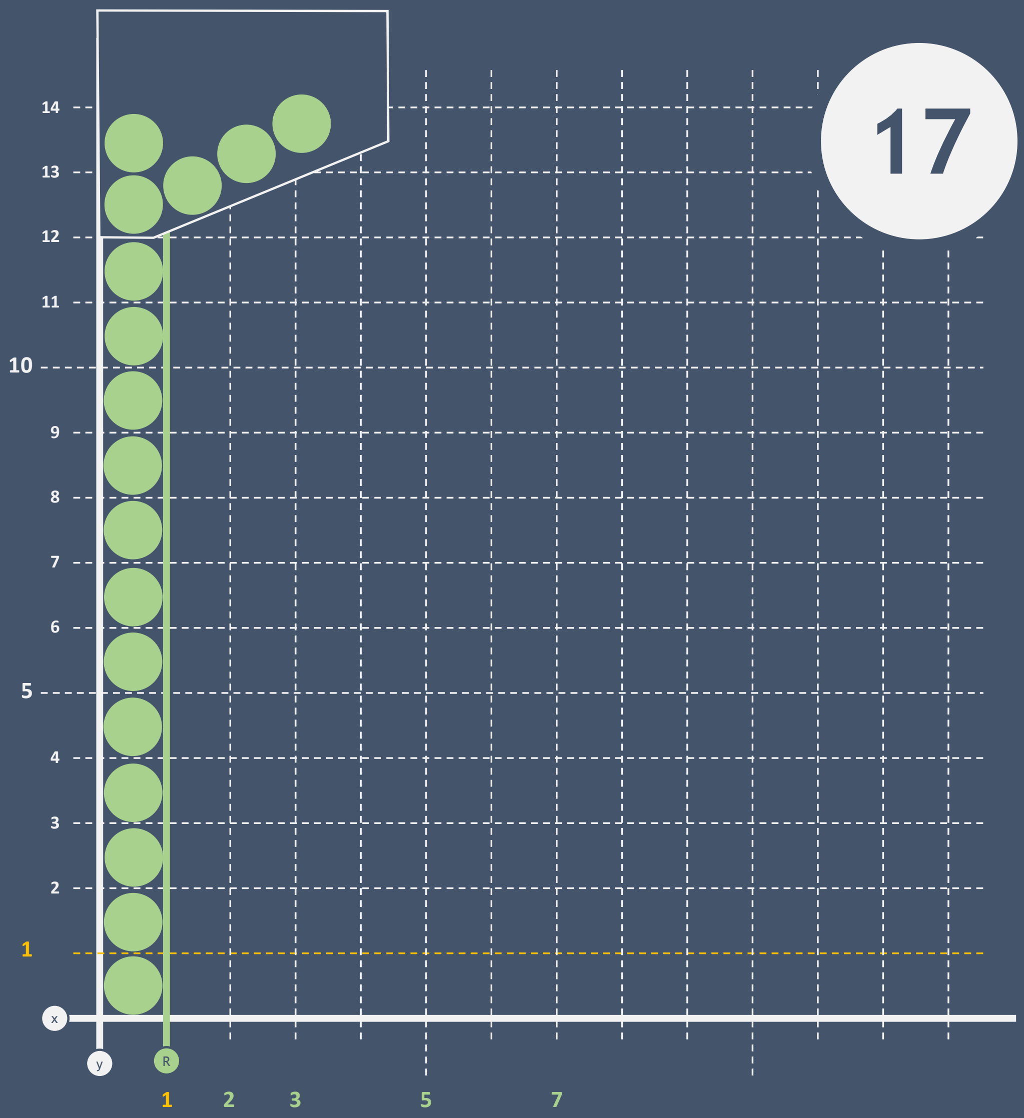
Wir sind am Ende und haben den letzten Primfaktor gefunden und notieren auch diesen.

Alle Primfaktoren sind gefunden und das Ergebnis lautet:

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

Restwert bestimmen





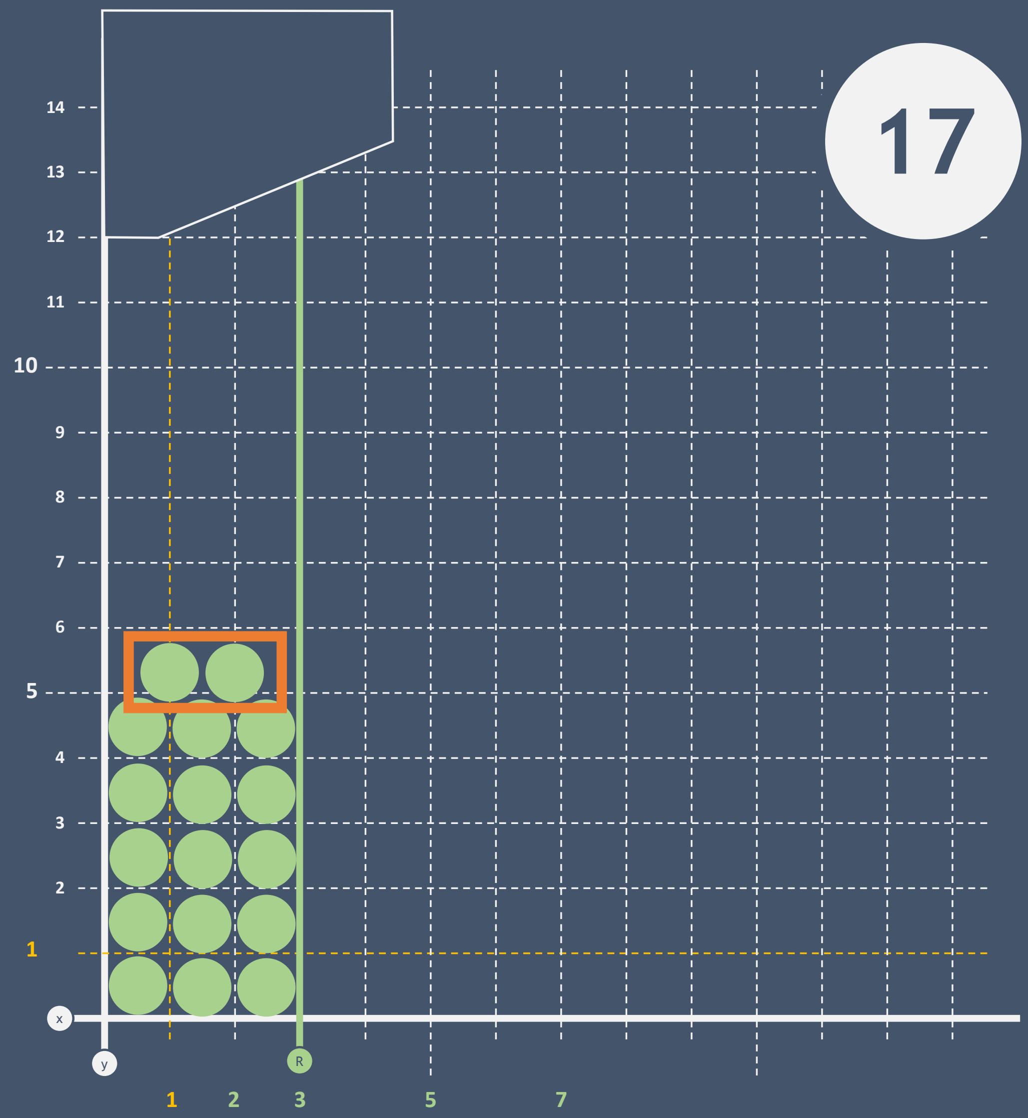
Restwertberechnung:

Bei der Restwertberechnung schauen wir nur nach dem, was bei einer Division übrig bleibt. Der Restwert ist immer kleiner als der Divisor!

17 ÷ 3 = 5 Rest 2 (17 % 3 = 2)

Hinweis:

Division durch 3 bedeutet, den Regler auf die X-Position 3 zu schieben.



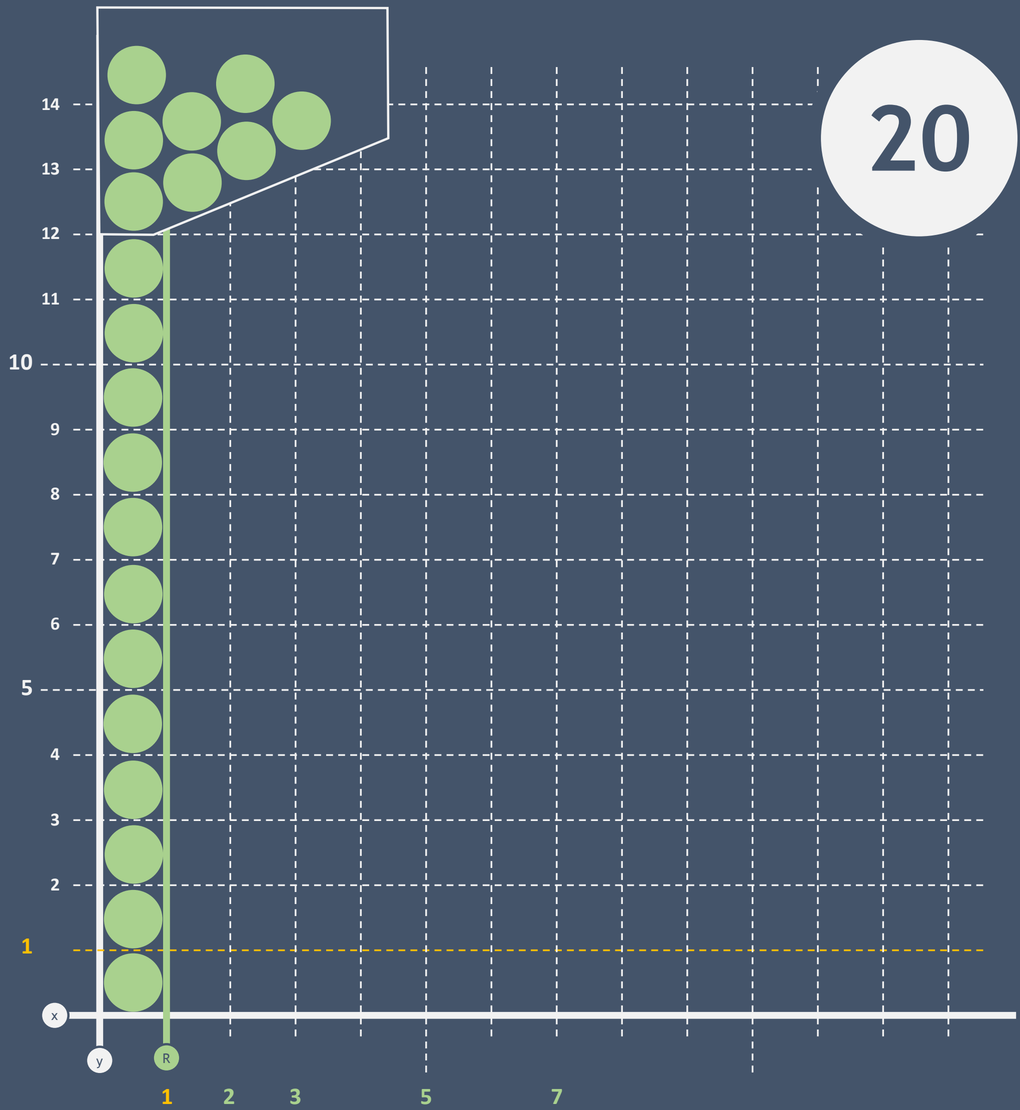
Restwertberechnung:

Bei der Restwertberechnung schauen wir nur nach dem, was bei einer Division übrig bleibt. Der Restwert ist immer kleiner als der Divisor!

17 ÷ 3 = 5 Rest 2 (17 % 3 = 2)

Der Rest ist, was in der obersten Reihe übrig bleibt. In diesem Fall 2.

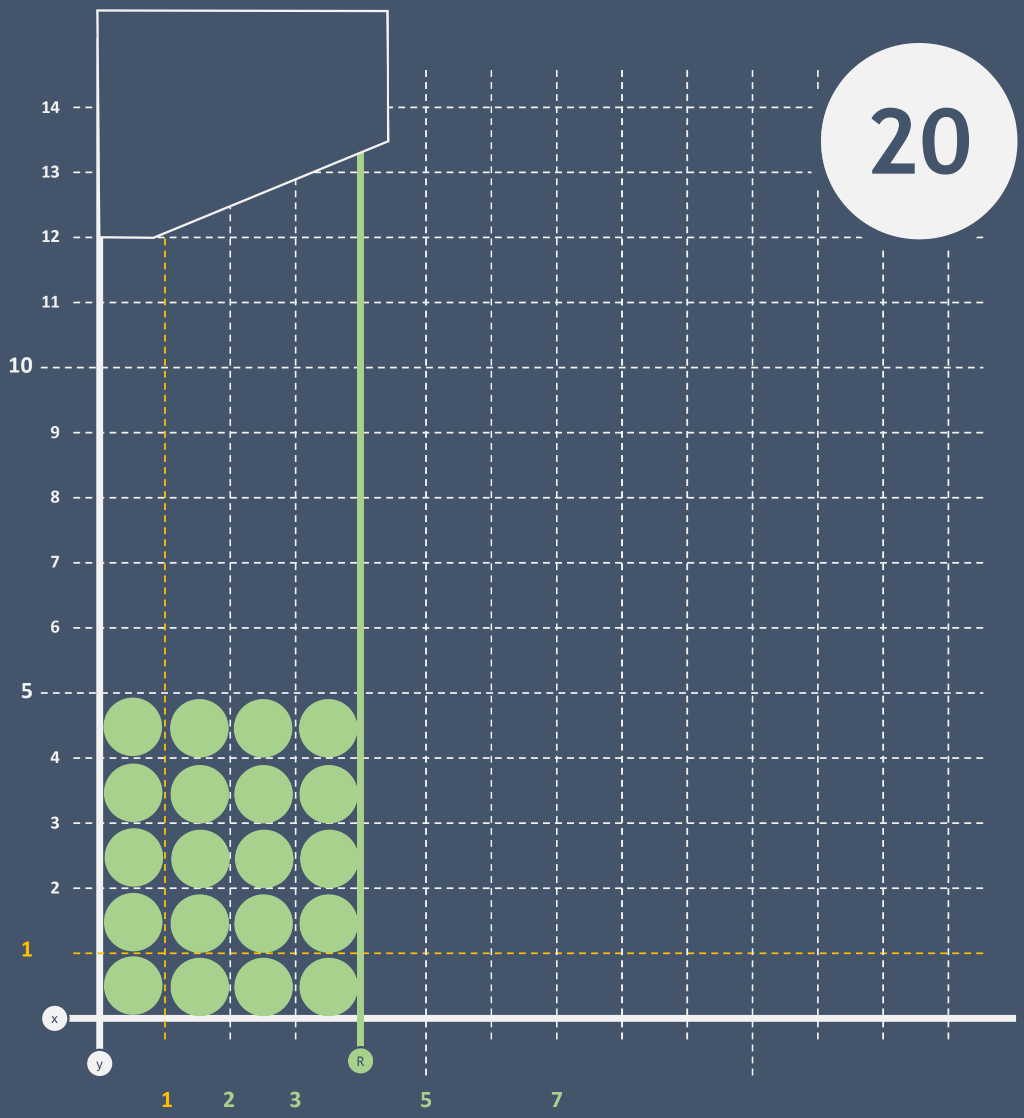
Nächstes Beispiel …



Restwertberechnung:

Bei der Restwertberechnung schauen wir nur nach dem, was bei einer Division übrig bleibt. Der Restwert ist immer kleiner als der Divisor!

20 ÷ 4 = 5 Rest 0 (20 % 4 = 0)



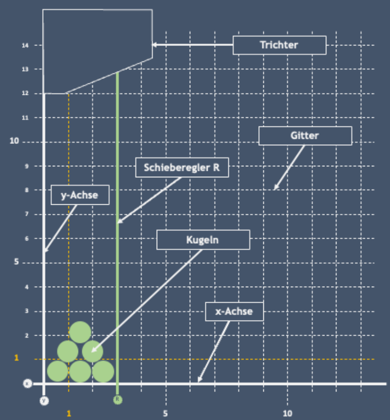
Restwertberechnung:

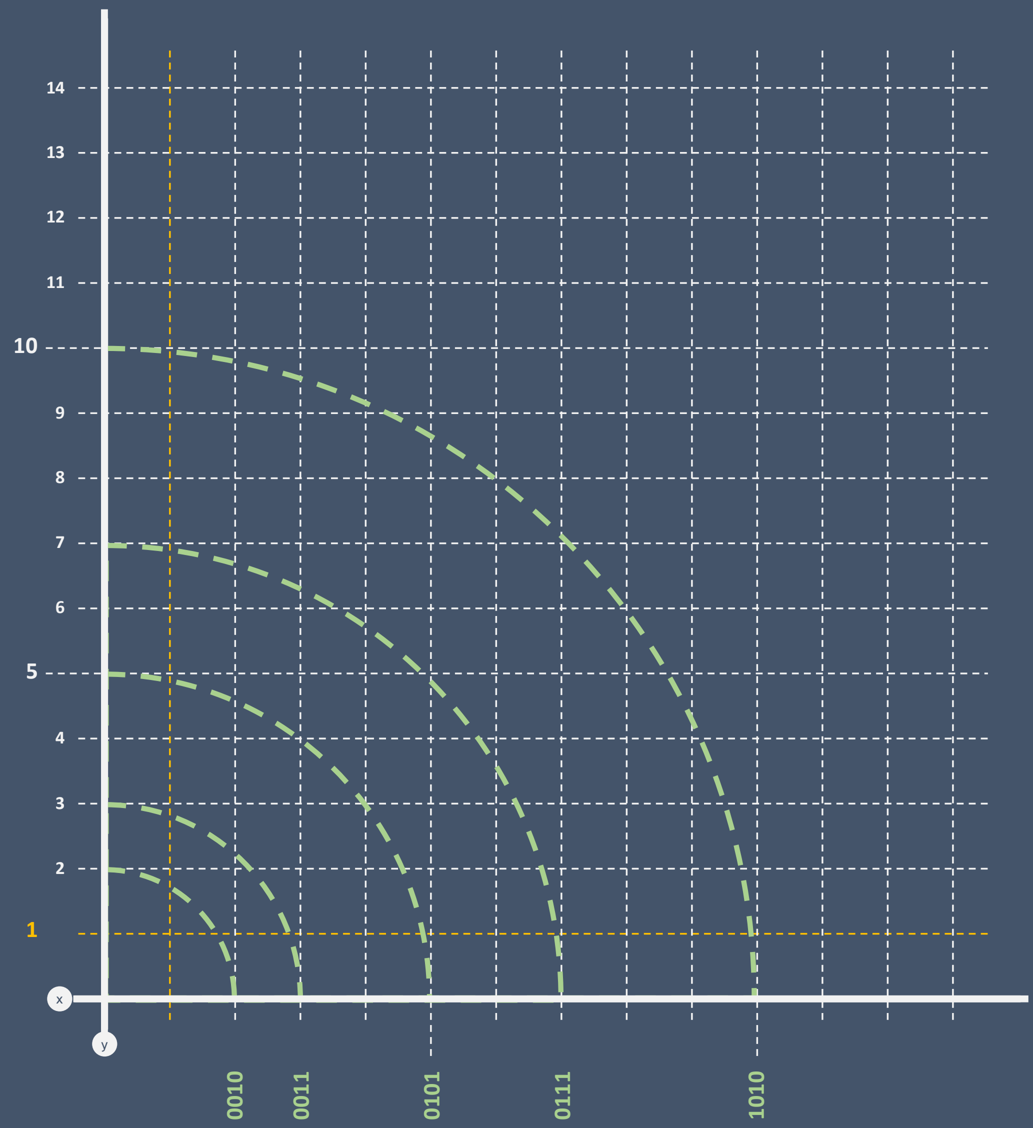
Bei der Restwertberechnung schauen wir nur nach dem, was bei einer Division übrig bleibt. Der Restwert ist immer kleiner als der Divisor!

20 ÷ 4 = 5 Rest 0 (20 % 4 = 0)

In diesem Fall bleibt nichts in der obersten Reihe übrig. Der Restwert beträgt also 0.

Man kann auch von Dezimal in andere Zahlensysteme umrechnen, zum Beispiel Binär, Oktal, Hexadezimal etc.





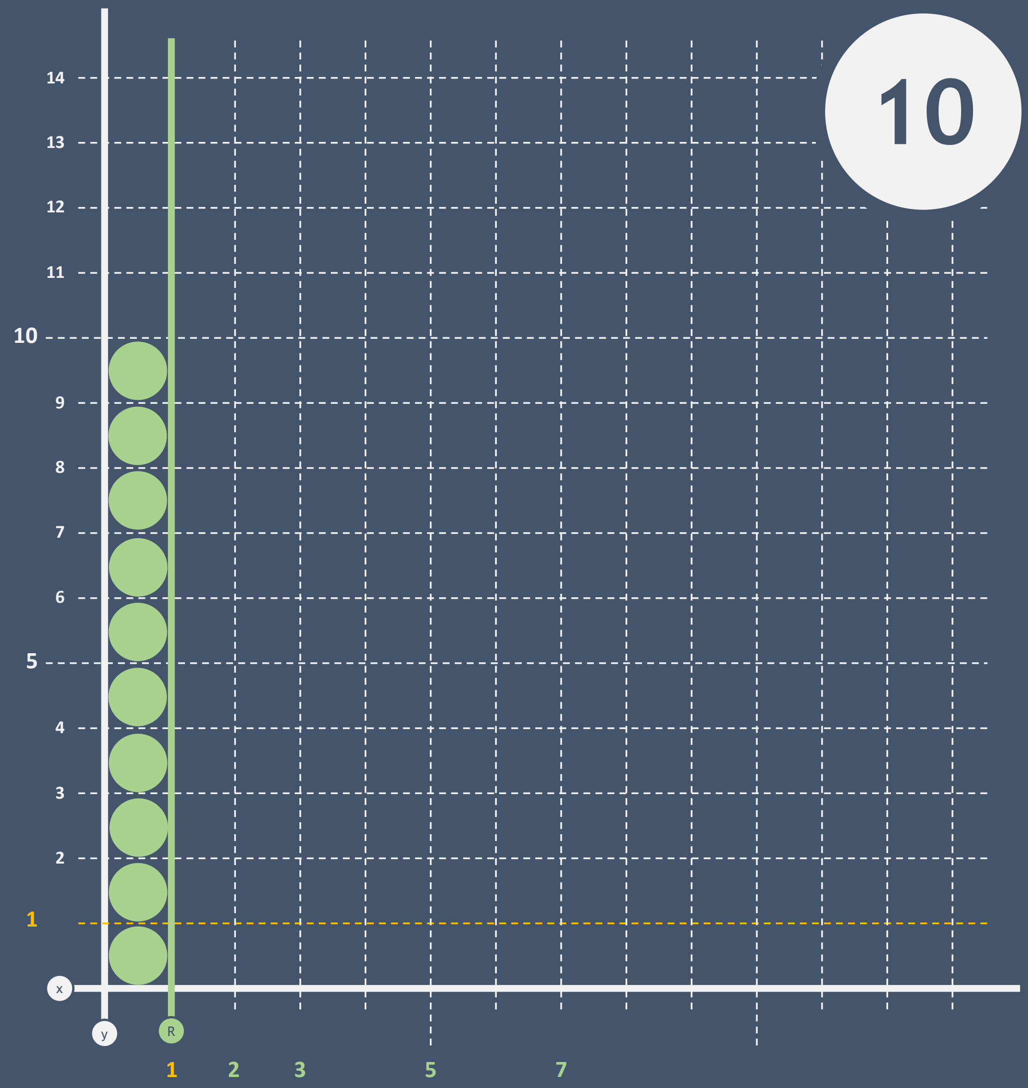
Umrechnen in binär:

Man kann zum Beispiel die Zielwerte auf der X-Achse eintragen und Hilfslinien in Form von Kreisvierteln einzeichnen. Dann brauch man das Ergebnis nur ablesen.

Beispiel:

$$10_{DEZ} = 1010_{BIN}$$

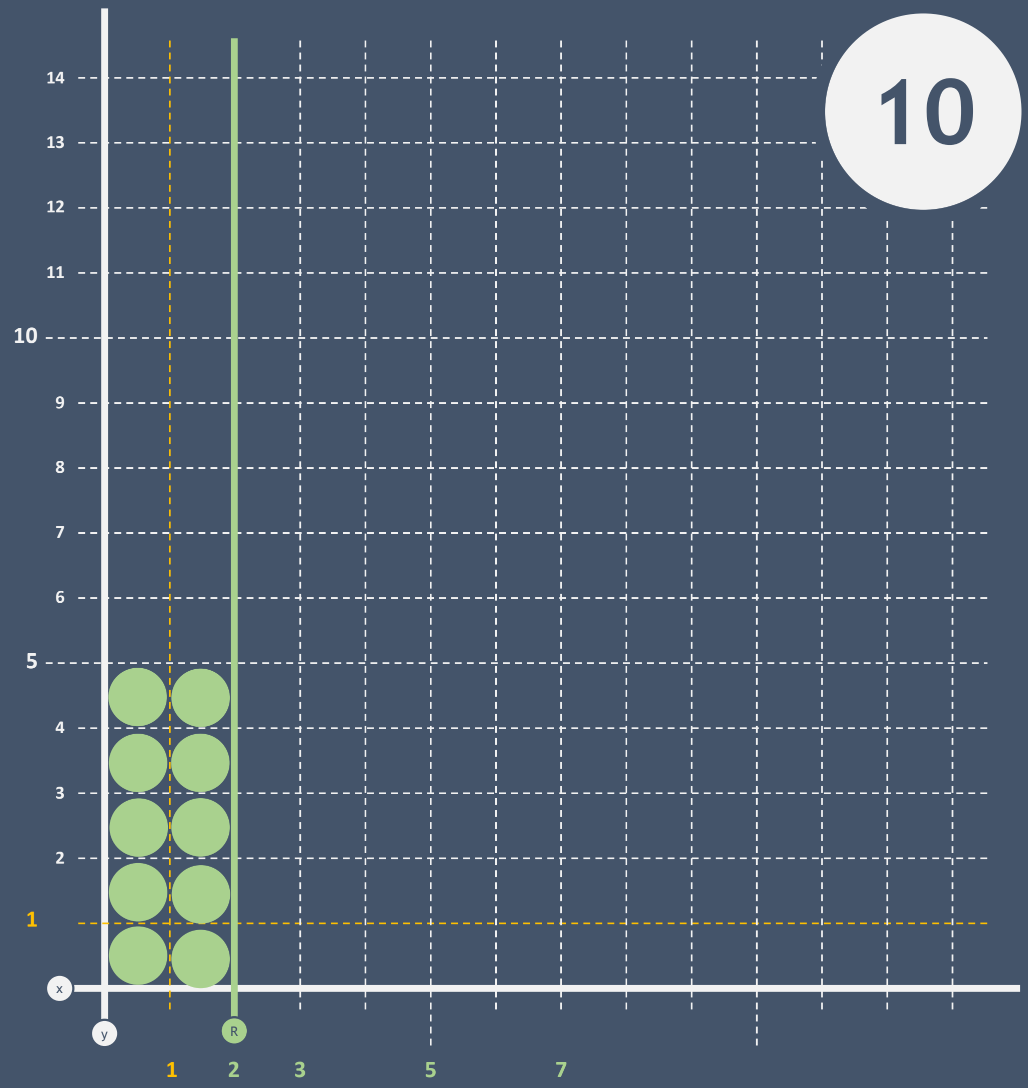
Es wird aber nichts ermittelt, sondern nur abgelesen.



Umrechnen in binär:

Wir schieben den Regler auf die Position, die der Basis des Ziel-Zahlensystems entspricht. Bei Binär also auf 2.

Der Regler wird dann nicht mehr bewegt.



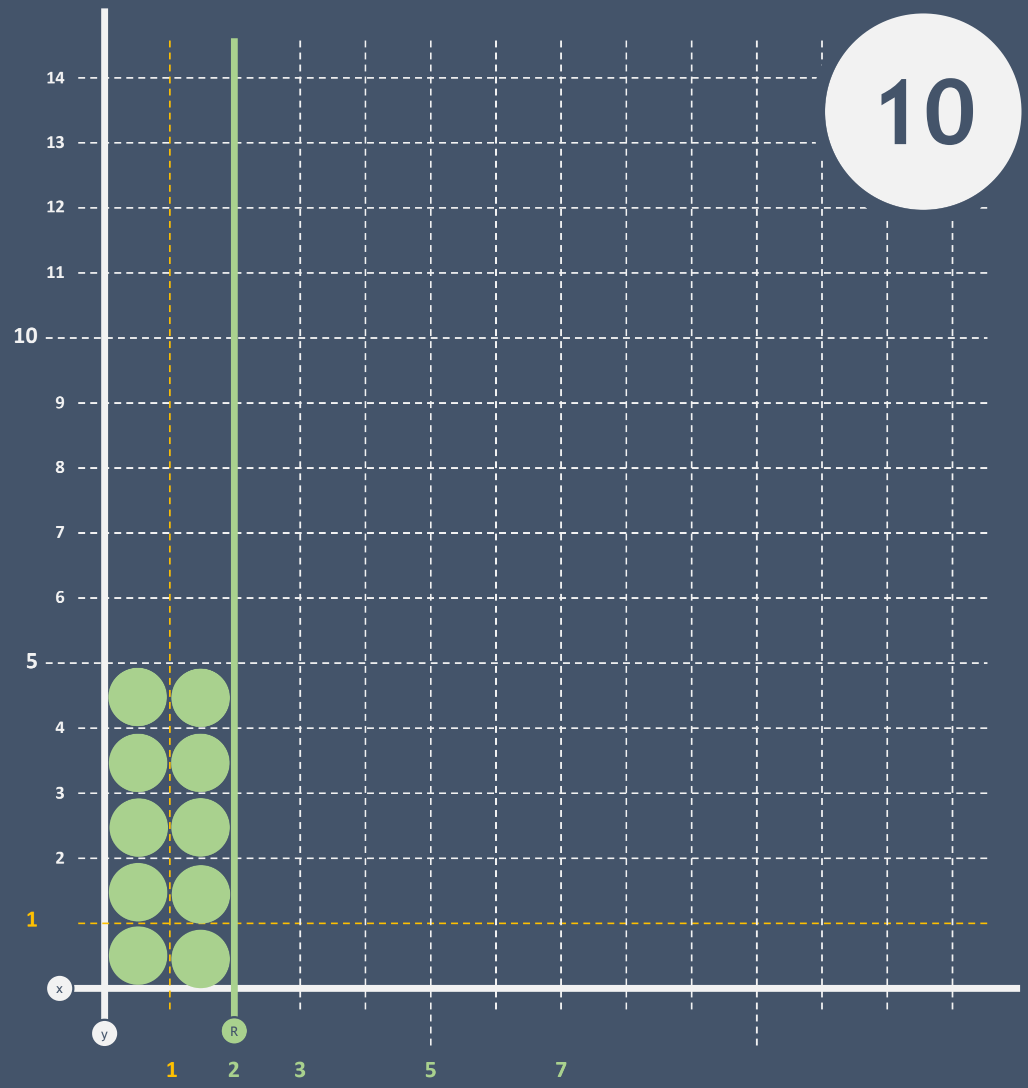
Umrechnen in binär:

In dieser Position schauen wir ausschließlich auf die Reste - also das, was oben liegt. Hier haben wir keinen Rest und notieren:

0

Hornerschema zur Probe:

$10 \div 2 = 5$ Rest 0



10

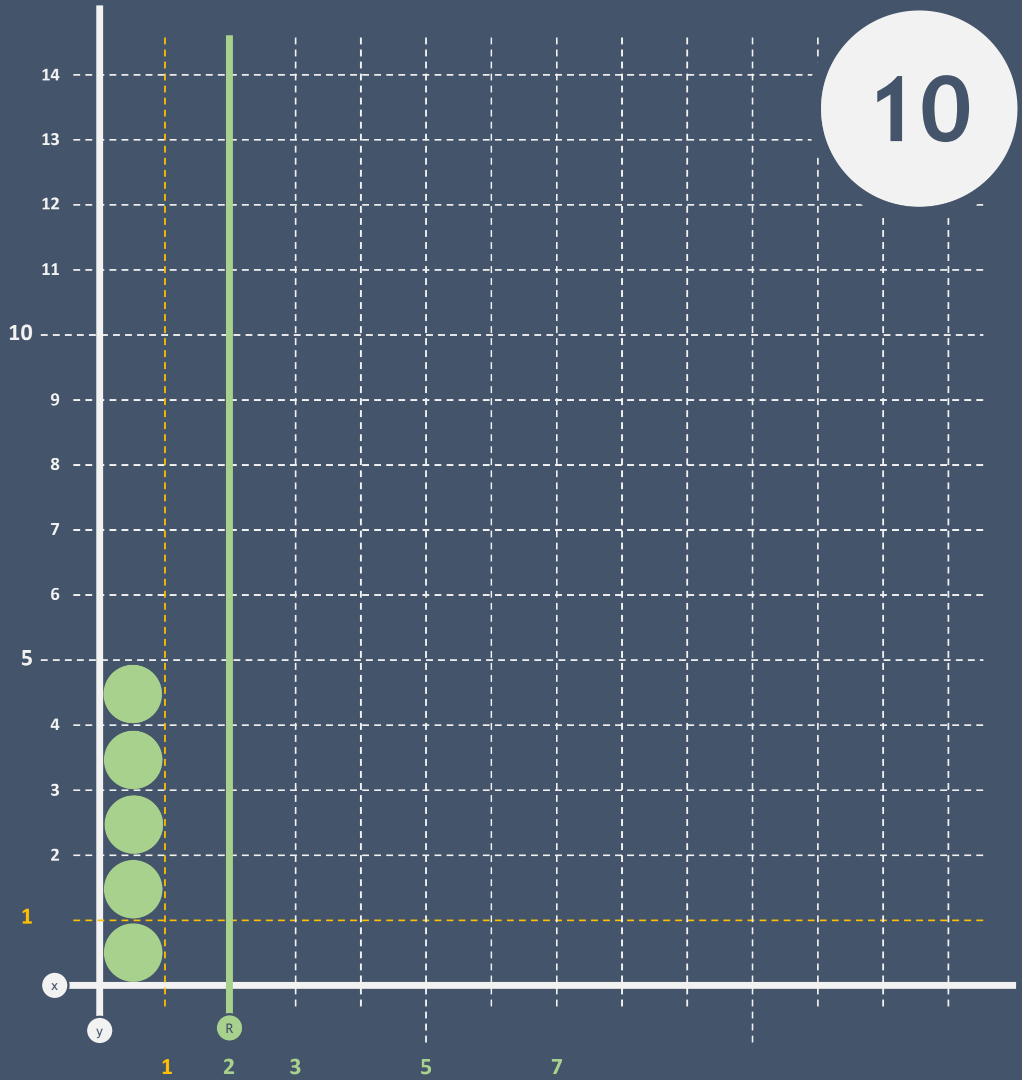
Umrechnen in binär:

Wir entfernen den Rest beziehungsweise die Reste (sofern vorhanden) und alle Spalten bis auf die Erste.

0

Hornerschema zur Probe:

10 ÷ 2 = 5 Rest 0



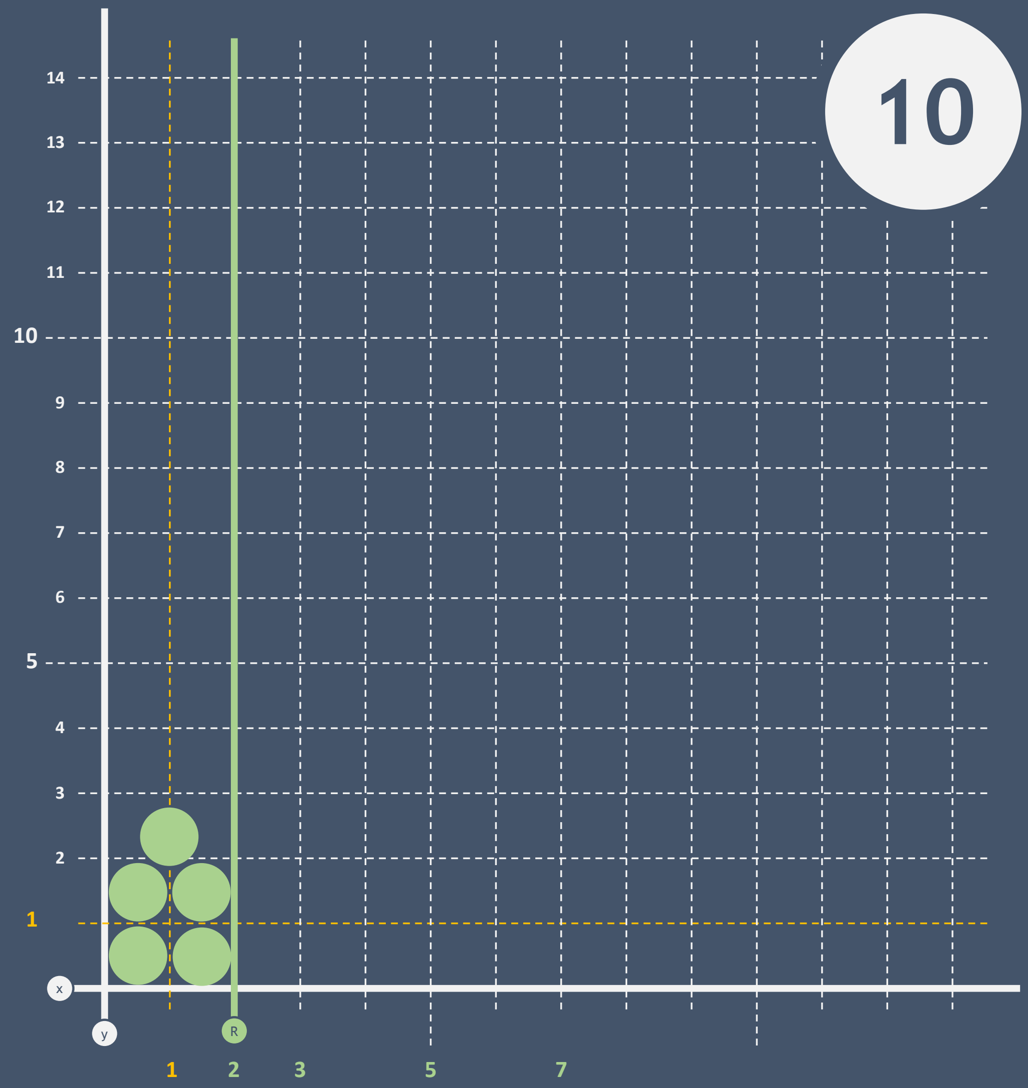
Umrechnen in binär:

Wir entfernen den Rest beziehungsweise die Reste (sofern vorhanden) und alle Spalten bis auf die Erste.

0

Hornerschema zur Probe:

10 ÷ 2 = 5 Rest 0



Umrechnen in binär:

Wir notieren wieder den Rest (von rechts nach links).

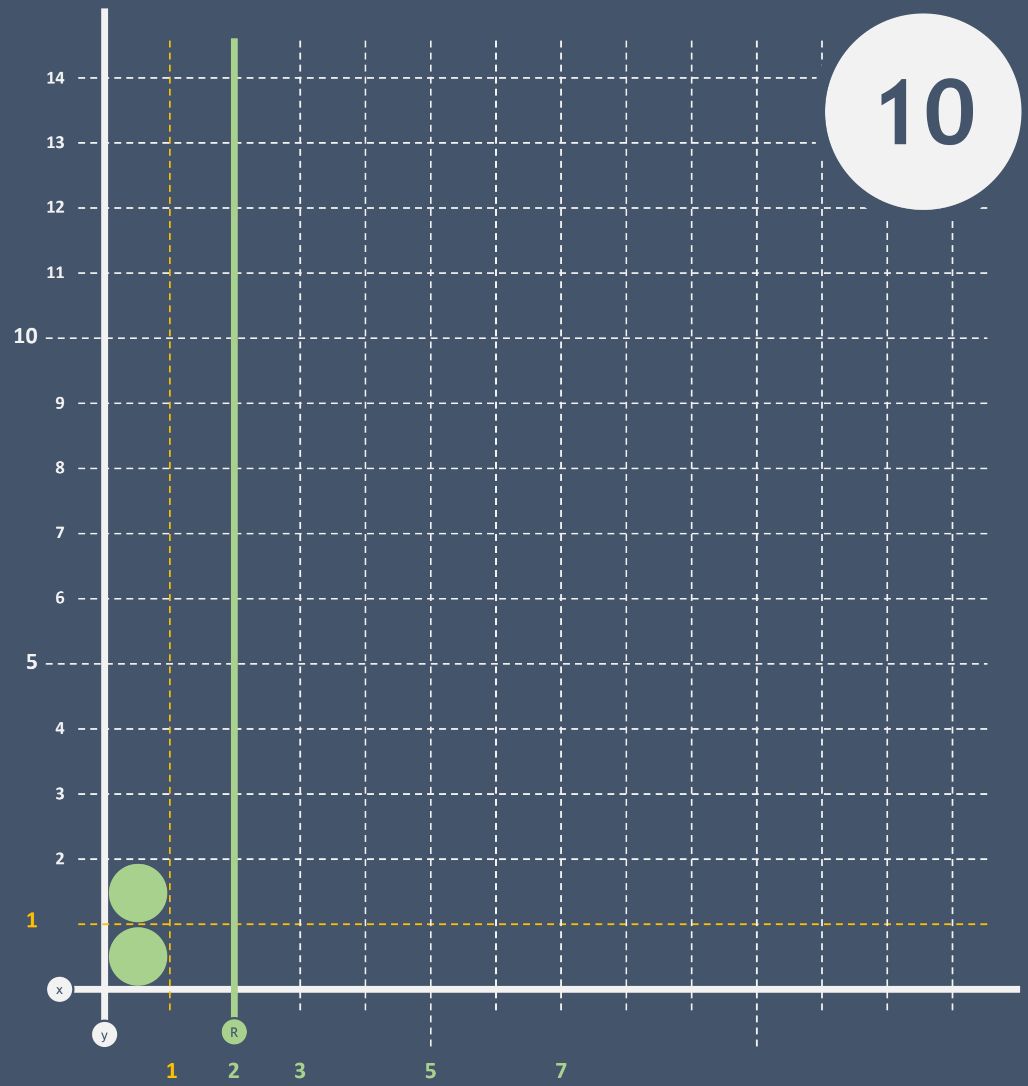
1 0

Hornerschema zur Probe:

10 ÷ 2 = 5 Rest 0

5 ÷ 2 = 2 Rest 1

Und wieder alle Reste und Spalten entfernen.



10

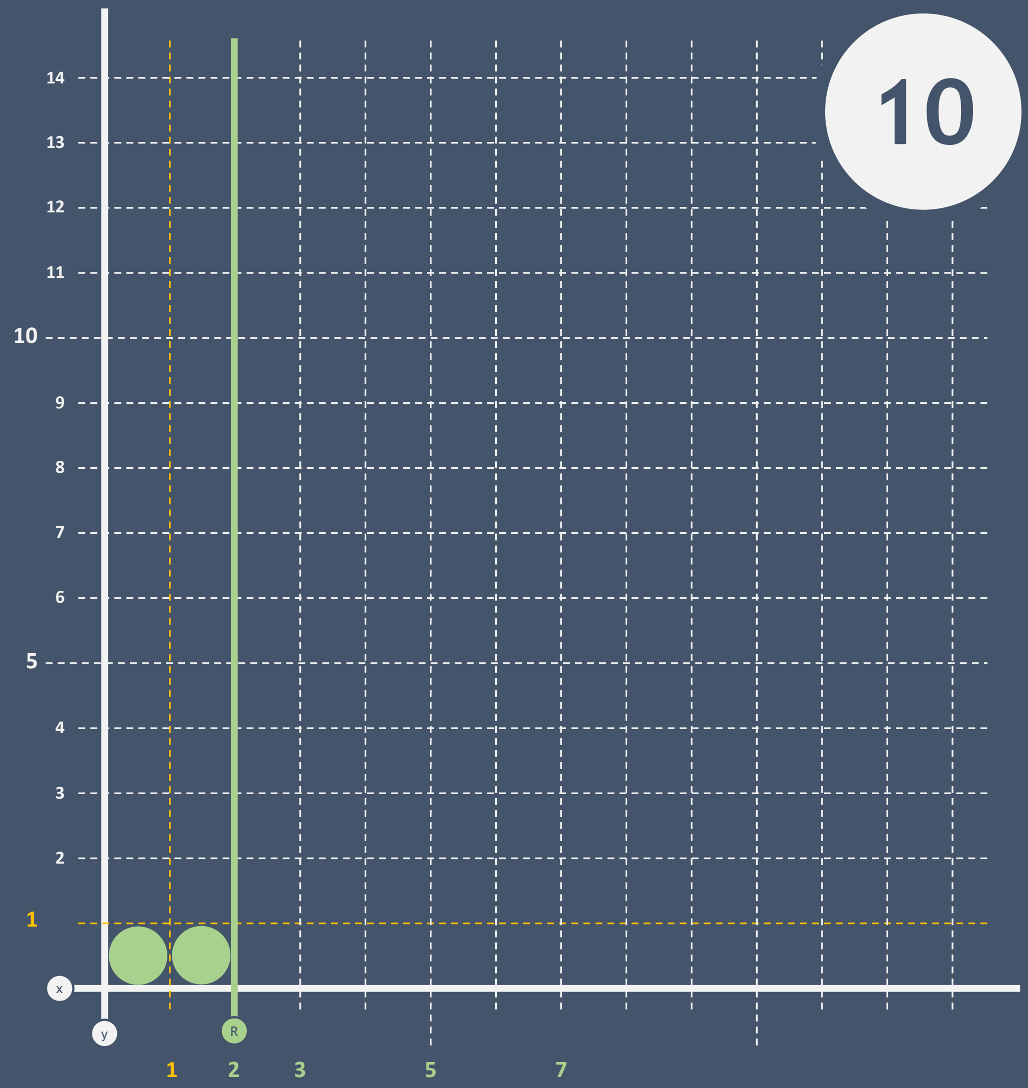
Umrechnen in binär:

1 0

Hornerschema zur Probe:

10 ÷ 2 = 5 Rest 0

5 ÷ 2 = 2 Rest 1



Umrechnen in binär:

Wieder den Rest notieren:

0 1 0

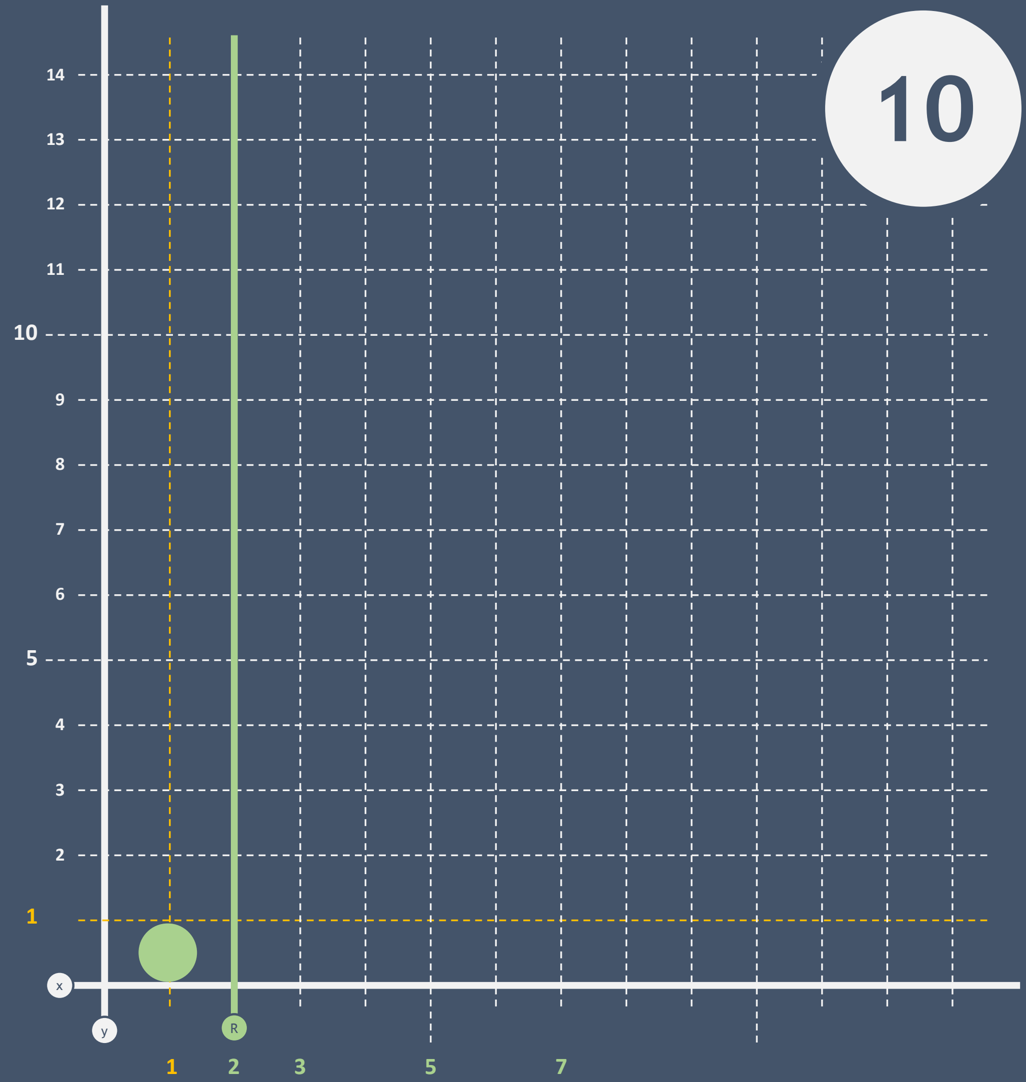
Hornerschema zur Probe:

10 ÷ 2 = 5 Rest 0

5 ÷ 2 = 2 Rest 1

2 ÷ 2 = 1 Rest 0

Wieder alle Reste und Spalten entfernen.



10

Umrechnen in binär:

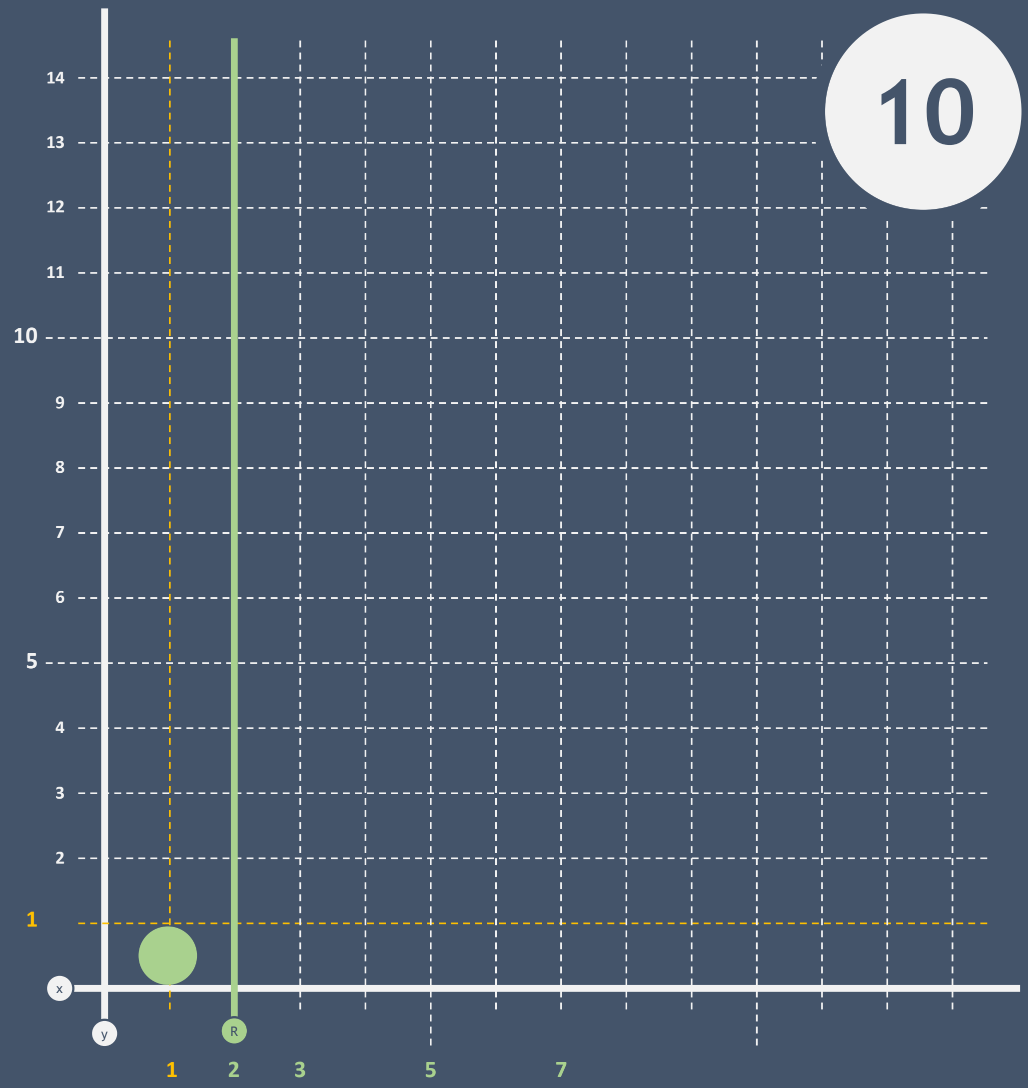
0 1 0

Hornerschema zur Probe:

10 ÷ 2 = 5 Rest 0

5 ÷ 2 = 2 Rest 1

2 ÷ 2 = 1 Rest 0



Umrechnen in binär:

Und das letzte Mal den Rest notieren:

1 0 1 0

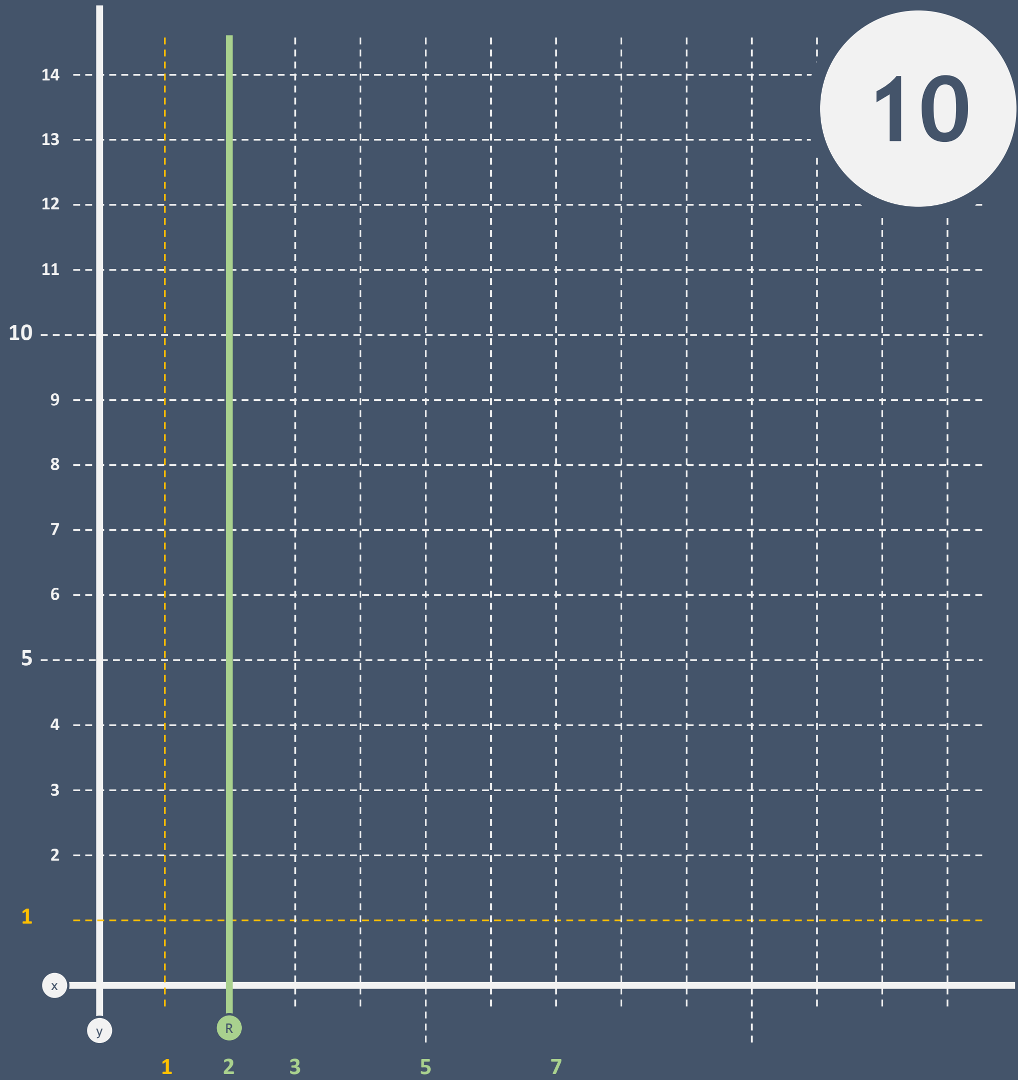
Hornerschema zur Probe:

10 ÷ 2 = 5 Rest 0

5 ÷ 2 = 2 Rest 1

2 ÷ 2 = 1 Rest 0

1 ÷ 2 = 0 Rest 1



10

Umrechnen in binär:

Das letzte Mal den Rest entfernen und wir sehen, dass alle Kugeln weg sind. Wir sind fertig mit der Umrechnung.

1 0 1 0

Hornerschema zur Probe:

10	÷	2	=	5 Rest 0
5	÷	2	=	2 Rest 1
2	÷	2	=	1 Rest 0
1	÷	2	=	0 Rest 1

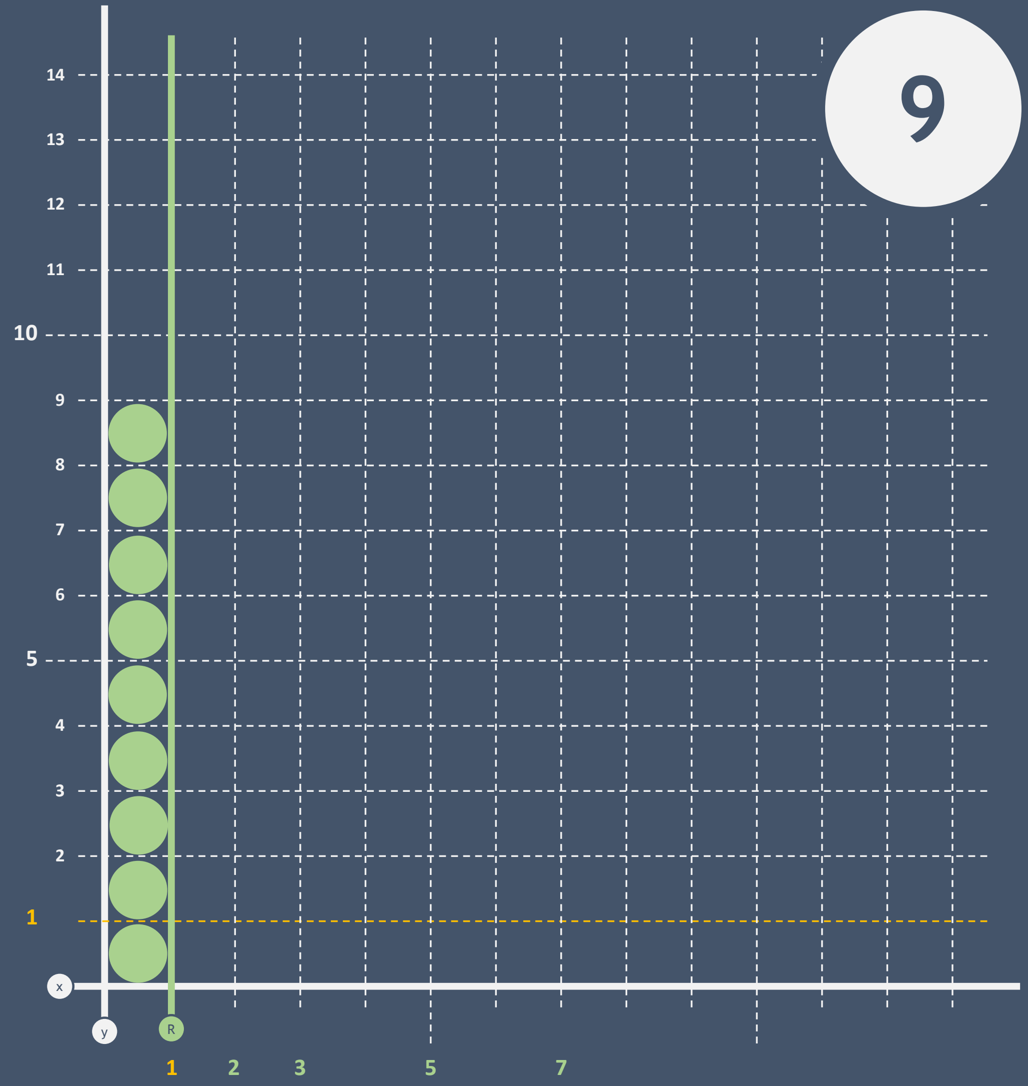
Achtung: Wird von unten nach oben gelesen!

=> 1010

Und was geht noch?

Zum Beispiel:

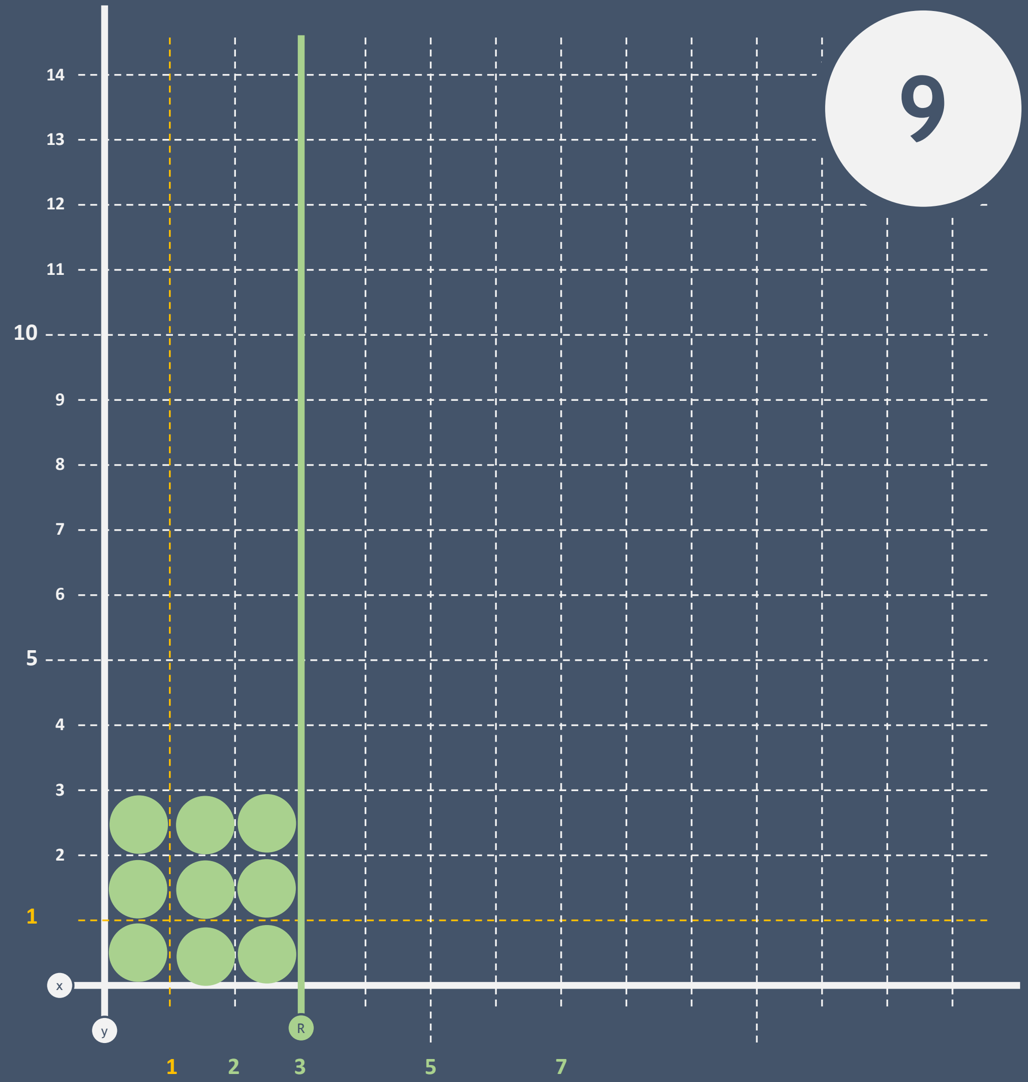
- Quadratwurzel berechnen / abschätzen
- Multiplizieren (durch Kugeln zählen)



Quadratwurzel abschätzen:

Das Prinzip ist ganz einfach: Wenn wir aus den Kugeln ein Rechteck formen können und es sogar ein Quadrat ist, kann man die Quadratwurzel einfach an den Achsen ablesen (x oder y).

Schauen wir uns das mal bei der 9 an …

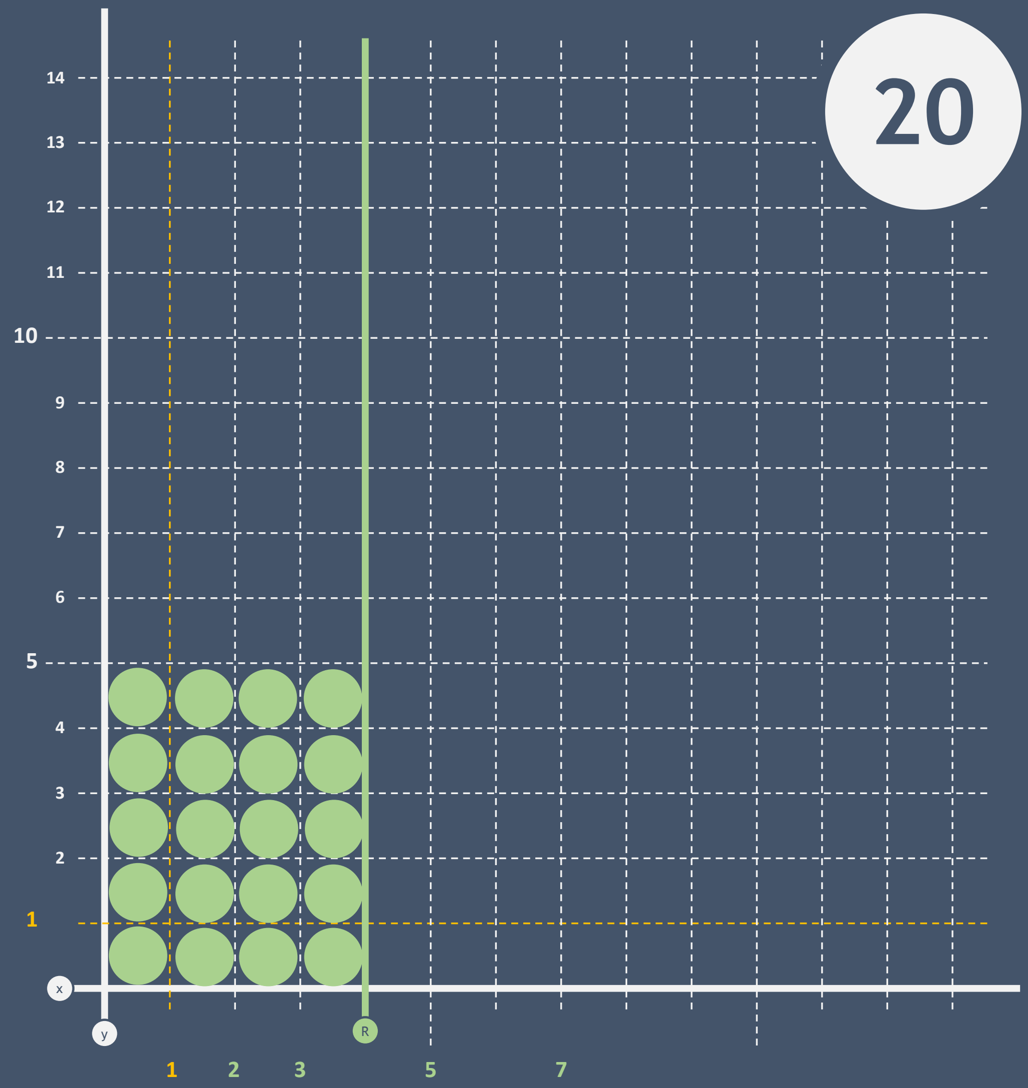


Quadratwurzel abschätzen:

Das Prinzip ist ganz einfach: Wenn wir aus den Kugeln ein Rechteck formen können und es sogar ein Quadrat ist, kann man die Quadratwurzel einfach an den Achsen ablesen (x oder y).

Schauen wir uns das mal bei der 9 an …

An den beiden Achsen können wir die Quadratwurzel ablesen: 3

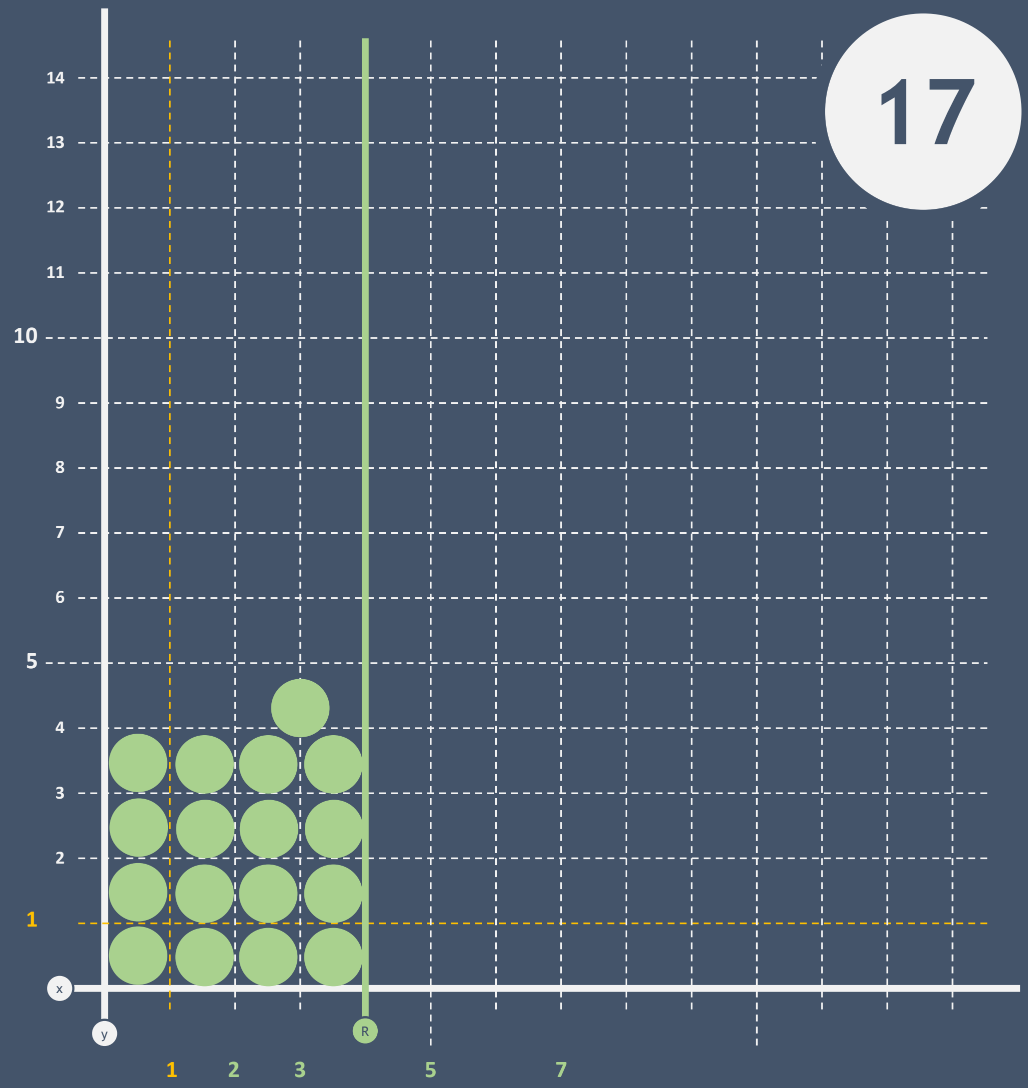


Quadratwurzel abschätzen :

Schauen wir uns jetzt die 20 an. Keine Quadratzahl, aber sie lässt sich ohne Rest darstellen.

Wir können jetzt x = 4 und y = 5 ablesen. Das bedeutet, die Quadratwurzel liegt irgendwo zwischen 4 und 5. Man kann das jetzt noch abschätzen und kommt damit auf 4,5.

Tatsächlich beträgt die Quadratwurzel 4,47.



Quadratwurzel abschätzen :

Schauen wir uns das auch noch mit der 17 an. Eine Primzahl - kann daher keine Quadratzahl sein. Es lässt sich nur mit Rest darstellen.

Wir können auch hier x = 4 und y = 4 ablesen. Wir haben aber noch einen Rest. Also liegt die Quadratwurzel etwas über 4.

1 Kugel = ¼. Davon nehmen wir die Hälfte und addieren das zur 4. Wir erhalten 4,125.

Tatsächlich beträgt die Quadratwurzel 4,123.

Das war ...

Die Primzahlenerkennungsmaschine
Eine theoretische Bauanleitung

Tom Gries (TOMO) | GPN21 | Juni 2023 | Medientheater | 30 Minuten

@tomo@social.tchncs.de

@_TomGries_