1　QR 分解に基づく擬似逆行列

縦長列フルランク行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ が $A = QR$ と QR 分解されるとき、A の擬似逆行列 A^+ は

$$A^+ = R^{-1}Q^T \tag{1}$$

となる。このことを証明する。

まず、一般に、行列 A に対して以下の 4 式を満たす行列 A^+ はただ一つ存在し、この A^+ がムーアペンローズの擬似逆行列であることが知られている。

$$AA^+A = A \tag{2}$$

$$A^+AA^+ = A^+ \tag{3}$$

$$(AA^+)^T = AA^+ \tag{4}$$

$$(A^+A)^T = A^+A \tag{5}$$

行列 $B = R^{-1}Q^T$ がこの式を満たすことを確認する。Q^TQ は単位行列 I に等しいので、$BA = (R^{-1}Q^T)(QR) = I$ であることがわかる。ゆえに、

$$ABA = A(BA) = A \tag{6}$$

$$BAB = (BA)B = B \tag{7}$$

$$(BA)^T = I = BA \tag{8}$$

となる。さらに $AB = QRR^{-1}Q^T = QQ^T$ は明らかに対称行列なので、

$$(AB)^T = AB \tag{9}$$

以上より、B は A の擬似逆行列に等しい。