

宇宙物理学の基礎 第5巻
輻射電磁流体シミュレーションの基礎 補遺

松本倫明 (TOMOAKI MATSUMOTO)¹

¹ 東京都千代田区富士見 2-17-1 法政大学 人間環境学部
Faculty of Sustainability Studies, Hosei University, Fujimi, Chiyoda-ku, Tokyo 102-8160, Japan

1. はじめに

本稿は、「宇宙物理学の基礎 第5巻 輻射電磁流体シミュレーションの基礎」(松本 et al. 2024) (以降、「シミュレーション本」と言う) の1~5章に書ききれなかった内容を補完する目的で書かれている。

本稿では「シミュレーション本」の数式や図表を参照する。その際には「シミュレーション本」に掲載されている式番号と図表番号を用いる。

APPENDIX

A. HLLC

「シミュレーション本」では、Roeの方法 (Roe 1981) と HLL/HLLE (Einfeldt 1988) ならびに HLLD (Miyoshi & Kusano 2005) の3つのスキームについて解説した。HLLC (Toro et al. 1994) は HLLD に含まれることもあり、「シミュレーション本」では解説を割愛した。しかし、HLLC は宇宙物理学の磁場を考慮しない流体の数値シミュレーションにおいて、もっとも使われているスキームなので、本稿であらためて HLLC について解説する。

A.1. 考え方

HLLC は接触不連続面を補足するように HLL/HLLE を拡張したものである。HLLC にアルフヴェン波を考慮するように拡張すると HLLD になる (表 4.1 参照)。逆に、HLLD は磁場の値が0のとき HLLC に帰着される。

早速、HLLC の数値流束を求めていこう。例によって1次元の場合を考える。すなわち基本方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (\text{A1})$$

である。状態量 \mathbf{U} と流束 \mathbf{F} は式 (3.106) で定義されている。あらためて書き下すと

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho v u \\ \rho w u \\ \rho H u \end{pmatrix} \quad (\text{A2})$$

である。またシミュレーション本と同様に全エネルギーを $e = \rho E$ とする。

HLLC では図 A1 のように、左右の状態 \mathbf{U}_L と \mathbf{U}_R が与えられたとき、リーマンファンを3個の波 S_L, S_M, S_R に挟まれた2個の中間状態 \mathbf{U}_L^* と \mathbf{U}_R^* を考える¹。図 A1 を、図 4.2 (HLL/HLLE の場合) と図 4.5 (HLLD の場合) と比べて欲しい。HLLC では HLL/HLLE に S_M が追加される。これは接触不連続面の速度を表すエントロピー波の速度に対応する。また、HLLD は HLLC に磁場にともなうアルフヴェン速度 S_L^* と S_R^* が追加されてる。

Corresponding author: 松本倫明

matsu@hosei.ac.jp

¹ HLLC の考案者である Toro の教科書 (Toro 2009) では、 S_M のかわりに S^* という表記が用いられている。一方、原論文 (Toro et al. 1994) では S_M が使われている。ここでは原論文を尊重して S_M を使う。

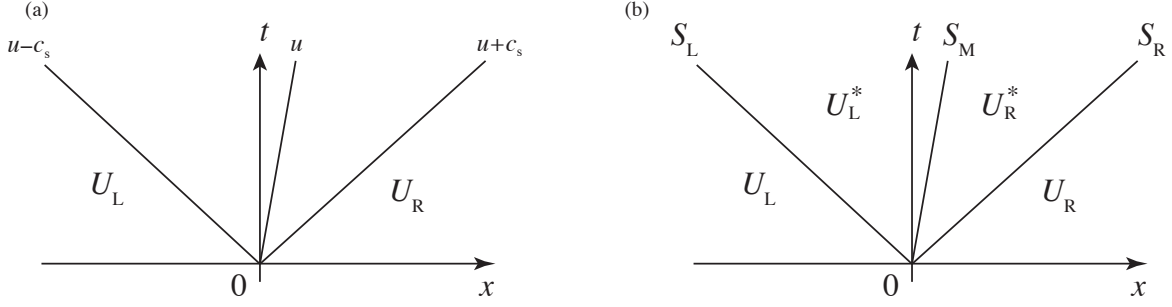


Figure A1. (a) 流体力学のリーマンファンと (b) HLLC 法のリーマンファン。

Table A1. HLLC の中間状態

状態	U_L	U_L^*	U_R^*	U_R
密度	ρ_L	ρ_L^*	ρ_R^*	ρ_R
圧力	p_L	p^*		p_R
速度 (x 方向)	u_L	$u^*(=S_M)$		u_R
速度 (y 方向)	v_L		v_R	
速度 (z 方向)	w_L		w_R	
全エネルギー	e_L	e_L^*	e_R^*	e_R

A.2. 中間状態と数値流束の導出

ここで HLLD と同様に、状態を表すために独立変数を (ρ, u, v, w, p) と選ぶ。中間状態を表 A1 のように仮定をする。これは HLLD の場合の表 4.2 と同様の仮定である。 S_M は接触不連続面をモデル化するので、 S_M の両側で圧力 p と x 方向の速度 u は連続であろう。また、その速度を S_M と等しいと考えるのも妥当である。同様に、 S_L と S_R は音波をモデル化する。音波は縦波なので S_L と S_R の両側で y 方向と z 方向の速度 v と w が連続とする。

式 (4.45) のジャンプ条件を S_L と S_R の 2 個の波に適用すると、

$$\mathbf{F}_L^* = \mathbf{F}_L + S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L), \quad (\text{A3})$$

$$\mathbf{F}_R^* = \mathbf{F}_R + S_R(\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R) \quad (\text{A4})$$

が得られる。HLLD の場合と同様にこれらのジャンプ条件から中間状態を求めてゆく。

いま添字 L と R を α でまとめて表すとすると、2 個のジャンプ条件を $S_\alpha(\mathbf{U}_\alpha^* - \mathbf{U}_\alpha) = (\mathbf{F}_\alpha^* - \mathbf{F}_\alpha)$ とまとめて書くことができる。第 1 成分と第 2 成分だけを書く

$$S_\alpha \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* - \rho_\alpha \\ \rho_\alpha^* u_\alpha^* - \rho_\alpha u_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_\alpha^* u_\alpha^* - \rho_\alpha u_\alpha \\ \rho_\alpha^* u_\alpha^{*2} + p_\alpha^* - \rho_\alpha u_\alpha^2 - p_\alpha \end{pmatrix} \quad (\text{A5})$$

である。第 1 成分より

$$\rho_\alpha^* = \rho_\alpha \frac{S_\alpha - u_\alpha}{S_\alpha - S_M} \quad (\text{A6})$$

である。ここで $u_\alpha^* = u^* = S_M$ の仮定を用いた (表 A1)。同様に、第 2 成分より

$$p_\alpha^* = p_\alpha + \rho_\alpha(S_\alpha - u_\alpha)(S_M - u_\alpha) \quad (\text{A7})$$

であるが、 $p^* = p_L^* = p_R^*$ なので、式 (A7) を S_M と p^* について解くと

$$S_M = \frac{(S_R - u_R)\rho_R u_R - (S_L - u_L)\rho_L u_L - p_R + p_L}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L}, \quad (\text{A8})$$

$$p^* = \frac{(S_R - u_R)\rho_R p_L - (S_L - u_L)\rho_L p_R + \rho_L \rho_R (S_R - u_R)(S_L - u_L)(u_R - u_L)}{(S_R - u_R)\rho_R - (S_L - u_L)\rho_L} \quad (\text{A9})$$

である。 S_α をまたぐジャンプ条件の他の成分を用いて

$$v_\alpha^* = v_\alpha, \quad (\text{A10})$$

$$w_\alpha^* = w_\alpha, \quad (\text{A11})$$

$$e_\alpha^* = \frac{(S_\alpha - u_\alpha)e_\alpha - p_\alpha u_\alpha + p^* S_M}{S_\alpha - S_M} \quad (\text{A12})$$

を導くことができる。

また S_M をまたぐジャンプ条件は

$$\mathbf{F}_R^* = \mathbf{F}_L^* + S_M(\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_L^*) \quad (\text{A13})$$

となるが、表 A1 の仮定の元では式 (A13) は自動的に満たされる（または満たされるように表 A1 の中間状態を決めたとしても良い）。

以上をまとめると中間状態は

$$\mathbf{U}_\alpha^* = \rho_\alpha \left(\frac{S_\alpha - u_\alpha}{S_\alpha - S_M} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ S_M \\ v_\alpha \\ w_\alpha \\ \frac{e_\alpha}{\rho_\alpha} + (S_M - u_\alpha) \left[S_M + \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha(S_\alpha - u_\alpha)} \right] \end{pmatrix} \quad (\text{A14})$$

と書くことができる。これは Toro (2009) でおなじみの表式である。式 (A14) のエネルギー成分（第5成分）の代わりに式 (A12) で表される e_α^* を用いても良い。

数値流束は、ジャンプ条件 (A3) と (A4)、さらに中間状態式 (A14) を用いて、

$$\mathbf{F}^{\text{HLLC}} = \begin{cases} \mathbf{F}_L & \text{if } S_L > 0, \\ \mathbf{F}_L^* = \mathbf{F}_L + S_L(\mathbf{U}_L^* - \mathbf{U}_L) & \text{if } S_L \leq 0 < S^*, \\ \mathbf{F}_R^* = \mathbf{F}_R + S_R(\mathbf{U}_R^* - \mathbf{U}_R) & \text{if } S^* \leq 0 < S_R, \\ \mathbf{F}_R & \text{if } S_R \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A15})$$

となる。

A.3. 波の速度 S_L と S_R の評価

HLL や HLLD の場合と同様に、波の速度 S_L と S_R は自明ではない。 S_L と S_R はリーマンファンの幅を与え、 S_L を十分小さく、 S_R を十分大きく取ればスキームは安定である。Toro の教科書 (Toro 2009) では、 S_L と S_R の見積もりについていくつかの方法が提案されている。

単純な方法 1

左右の状態の波の速度を S_L と S_R とする方法である。

$$S_L = u_L - c_{s,L}, \quad (\text{A16})$$

$$S_R = u_R + c_{s,R}. \quad (\text{A17})$$

ここで左右の音速は

$$c_{s,L} = \sqrt{\frac{\gamma_{\text{ad}} p_L}{\rho_L}}, \quad (\text{A18})$$

$$c_{s,R} = \sqrt{\frac{\gamma_{\text{ad}} p_R}{\rho_R}} \quad (\text{A19})$$

と計算される。すぐに考えれば分かるように、リーマン問題の実際の波の速度は、この方法で求められた S_L と S_R を超える可能性がある。一例を上げれば、リーマン問題において左右のガスが静止しており、左の圧力が高く、右の圧力が低く、衝撃波が右向きに超音速で伝播する場合である。この場合、衝撃波の伝播速度は右の音速 $c_{s,R}$ すなわち S_R を超えてしまう。

単純な方法 2

上記の方法よりも安全な方法は、式 (4.39)–(4.40) と同様に、

$$S_L = \min(u_L - c_{s,L}, u_R - c_{s,R}), \quad (\text{A20})$$

$$S_R = \max(u_L + c_{s,L}, u_R + c_{s,R}) \quad (\text{A21})$$

である。この方法は単純で安全な方法である。

Roe 平均を用いる

式 (4.42)–(4.43) と同様に、Roe 平均を用いて波の速度を見積もる方法である。すなわち、

$$S_L = \bar{u} - \bar{c}_s, \quad (\text{A22})$$

$$S_R = \bar{u} + \bar{c}_s \quad (\text{A23})$$

とする。この方法の意図は、 S_L と S_R はリーマンファンの波における最小と最大の速度なので、中間状態として Roe の近似解を採用するというものである。

PVRS

この方法は「単純な方法 1」と似ているが、衝撃波によって波の速度が音速を超えることを考慮して音速を係数倍する。この係数を q_L と q_R とすると、波の速度を

$$S_L = u_L - c_{s,L} q_L, \quad (\text{A24})$$

$$S_R = u_R + c_{s,R} q_R \quad (\text{A25})$$

とする。添字 L と R を α でまとめて表すと、係数 q_α は

$$q_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{if } p^* \leq p_\alpha, \\ \left[1 + \frac{\gamma_{\text{ad}}+1}{2\gamma_{\text{ad}}} \left(\frac{p^*}{p_\alpha} - 1\right)\right]^{1/2} & \text{if } p^* > p_\alpha \end{cases} \quad (\text{A26})$$

と与えられる。 $p^* \leq p_\alpha$ のとき膨張波は音速で伝播するので、 $q_\alpha = 1$ とする。一方、 $p^* > p_\alpha$ のときは衝撃波が発生するので、 S_α は衝撃波の伝播速度とする。式 (A26) の下段は、衝撃波上流の圧力が p^* で、下流の圧力が p_α の場合の衝撃波伝播速度の厳密解を与えることに注意しよう。

衝撃波上流の圧力 p^* はリーマン問題を解いて得られる。HLLC であれば式 (A9) を用いれば整合的であると思われるが、式 (A9) は S_L と S_R に依存するので今回の目的には使えない。

そこで Toro (2009) はリーマン問題の近似解を用いることを提案している。例として、基本変数リーマン解 (Primitive Variable Riemann Solvers; PVRS) の場合、 p^* は

$$p^* = \frac{1}{2}(p_L + p_R) - \frac{1}{2}(u_R - u_L)\bar{\rho}\bar{c}_s, \quad (\text{A27})$$

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_L + \rho_R), \quad (\text{A28})$$

$$\bar{c}_s = \frac{1}{2}(c_{s,L} + c_{s,R}) \quad (\text{A29})$$

として与えられる。

以下の計算例では、HLLC における S_L と S_R の見積もり方法として、この方法（式 (A24)–(A29)）を採用する。

A.4. 計算例

A.4.1. 衝撃波管問題

HLLC を用いて Sod (1978) の衝撃波管問題を解く。計算領域 $x \in [0, 1]$ において、初期 ($t = 0$) に $x = 0.5$ で不連続面を持つ。初期条件（不連続面に対する左右の状態量）を表 A2 に示す。比熱比を $\gamma_{\text{ad}} = 1.4$ とする。計算では、セル数を 128 個とし、精度は時間・空間ともに 1 次精度とした。

時刻 $t = 0.2$ における状態を図 A2 に示す。HLLC は、おおよそ厳密解を正しく再現している。

図 A3 は HLLC を他のスキーム（Roe の方法と HLL）と比較している。スキームの優劣は接触不連続面によく反映されるため、図 A3（左）は接触不連続面付近を拡大している。HLLC は HLL と比べて接触不連続面がよりシャープに捕

Table A2. 衝撃波管問題の初期条件

	左	右
密度 (ρ)	1	0.125
圧力 (p)	1	0.1
速度 (u)	0	0

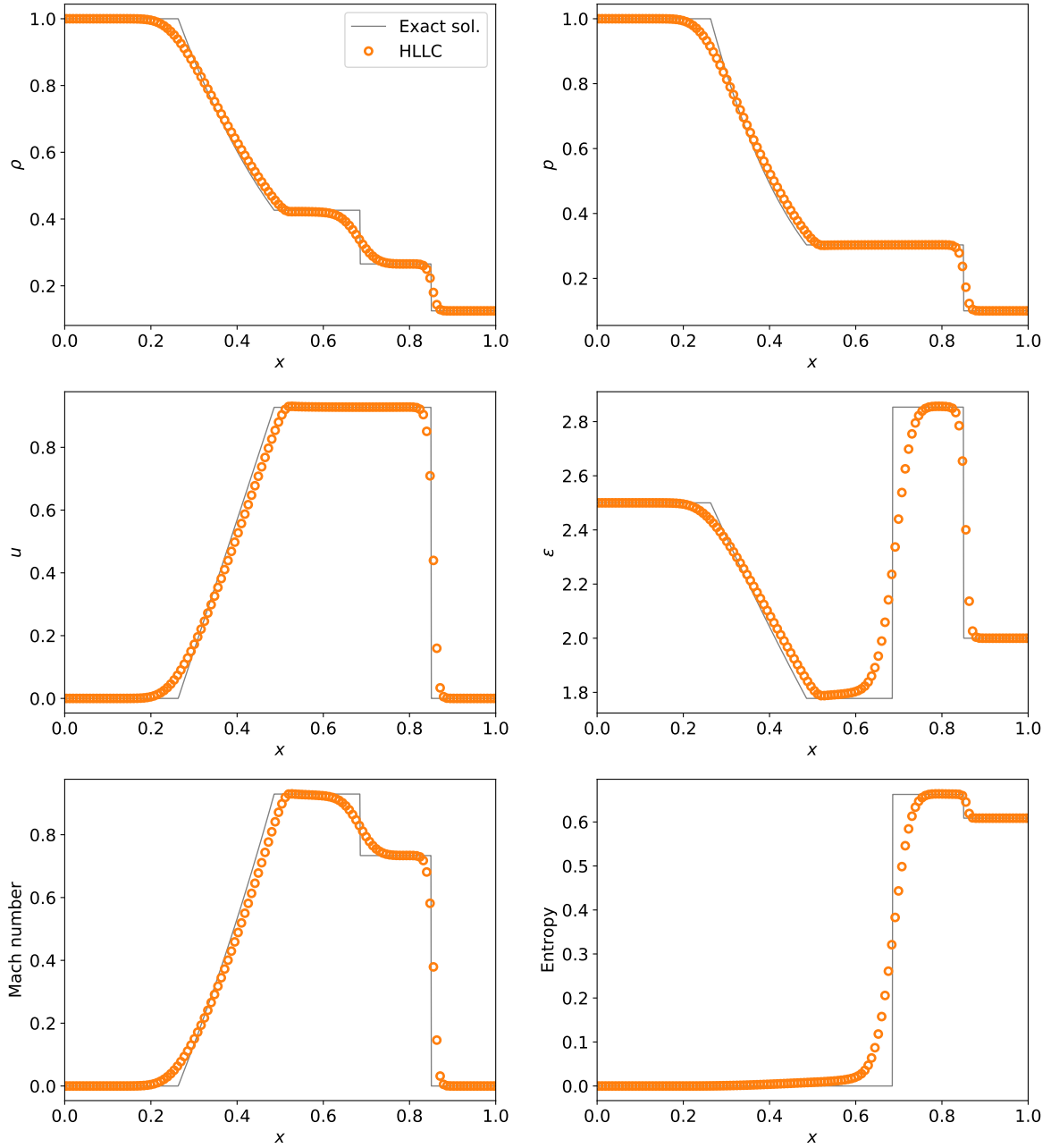


Figure A2. HLLC の衝撃波管問題。○印はセルにおける値を、直線は厳密解を示す。

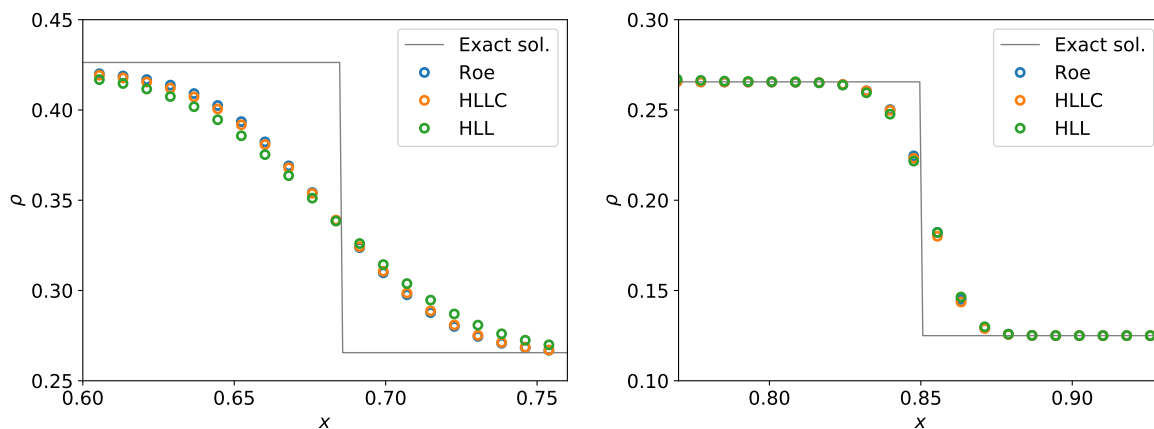


Figure A3. 衝撃波管問題における、接触不連続面（左）と衝撃波（右）の拡大図。Roe の方法, HLLC, HLL による数値解（密度分布）を比較している。○印はセルにおける値を、直線は厳密解を示す。接触不連続面は、Roe の方法, HLLC, HLL の順にシャープに捕捉されている。衝撃波はすべてのスキームでシャープに捕捉されているが、HLL の解は少しだけなまる。

捉されており、HLLC の解は Roe の方法の解に近い。この理由は、HLL は HLLC と Roe の方法とは異なり、スキームのレベルで接触不連続面を分解していないためだ。

まとめると、接触不連続面は Roe の方法、HLLC、HLL の順にシャープに捕捉されている。換言すると、HLL, HLLC, Roe の方法の順に接触不連続面の解がなまる。これは各々のスキームの数値粘性の量を反映している。

図 A3（右）は衝撃波の解をスキーム間で比較している。衝撃波は接触不連続面とくらべ、いずれのスキームでも比較的シャープに捕捉されている。スキーム間で詳しく比較すると、HLLC と Roe はほぼ同一の解を示し、HLL はほんの少しだけなまった解を示す。

以上の接触不連続面と衝撃波におけるスキームの特徴は、接触不連続面と衝撃波の物理的な性質によって理解できる。接触不連続面を司る波はエントロピー波である（3.1.2 節参照）。エントロピー波は単なる移流の波であり、解が一度なまるとそれっきりで構造を修復する仕組みがない。なまる一方である。従ってスキームレベルで接触不連続面を分解しない HLL は、Roe の方法と HLLC に比べて、有意に解がなまる。

一方、衝撃波は音波が集まることによって波が突っ立つことで発生する。したがって、スキームの数値粘性によって解がなまっても、衝撃波を突っ立てる機構が存在するため、HLL の解は Roe の方法や HLLC の解と大差ない。つまり風上差分法（2.4.3 節）やゴドノフ型スキーム（3.2.2 節）のように衝撃波を振動することなく安定に解くことができるスキームであれば、遜色ない解が得られるのだ。

A.4.2. ケルビン・ヘルムホルツ不安定性

つぎにケルビン・ヘルムホルツ不安定性のテストを行う。ケルビン・ヘルムホルツ不安定性は速度差のある流体（シア一流）に発生する不安定性である。この問題では、接触不連続面におけるスキームの性能の優劣が顕著に現れることが知られている。

図 A4（左上）は初期条件における密度分布を表す。色は $\rho \in [1, 2]$ の範囲を示す。上下が低密度で中央部が高密度である。高密度のガスは左に流れ、低密度のガスは右に流れる。圧力は空間的に一定である。比熱比は $\gamma_{\text{ad}} = 5/3$ である。初期条件の詳細は McNally et al. (2012) を参照せよ。境界条件は x 方向と y 方向の両方に周期境界条件を課した。時間と空間精度は 2 時精度とし、MUSCL では minmod 制限関数を用いた。メッシュ数は 256×256 である。Roe の方法、HLLC、HLL の 3 つのスキームについて、それぞれ $t = 3$ まで計算をして結果を比較した。

図 A4 に示すように、Roe の方法と HLLC は渦をシャープに再現しているが、HLL は渦がぼやけている。これは Roe の方法と HLLC がスキームのレベルで接触不連続面を補足しているが、HLL は接触不連続面を考慮していないリーマン解を仮定しているためである。

A.4.3. ステップ付き風洞問題

ここまでの計算例の結果をまとめると、接触不連続面やシア一流の再現では HLLC や Roe の方法が優れており、HLL は力不足であった。また衝撃波の再現では HLL でも HLLC や Roe の方法と遜色ない解が得られた。したがって、HLLC や Roe の方法を用いれば、接触不連続面も衝撃波も両方で優れた性能が発揮されと考えられそうだが、はたしてそうだろうか。

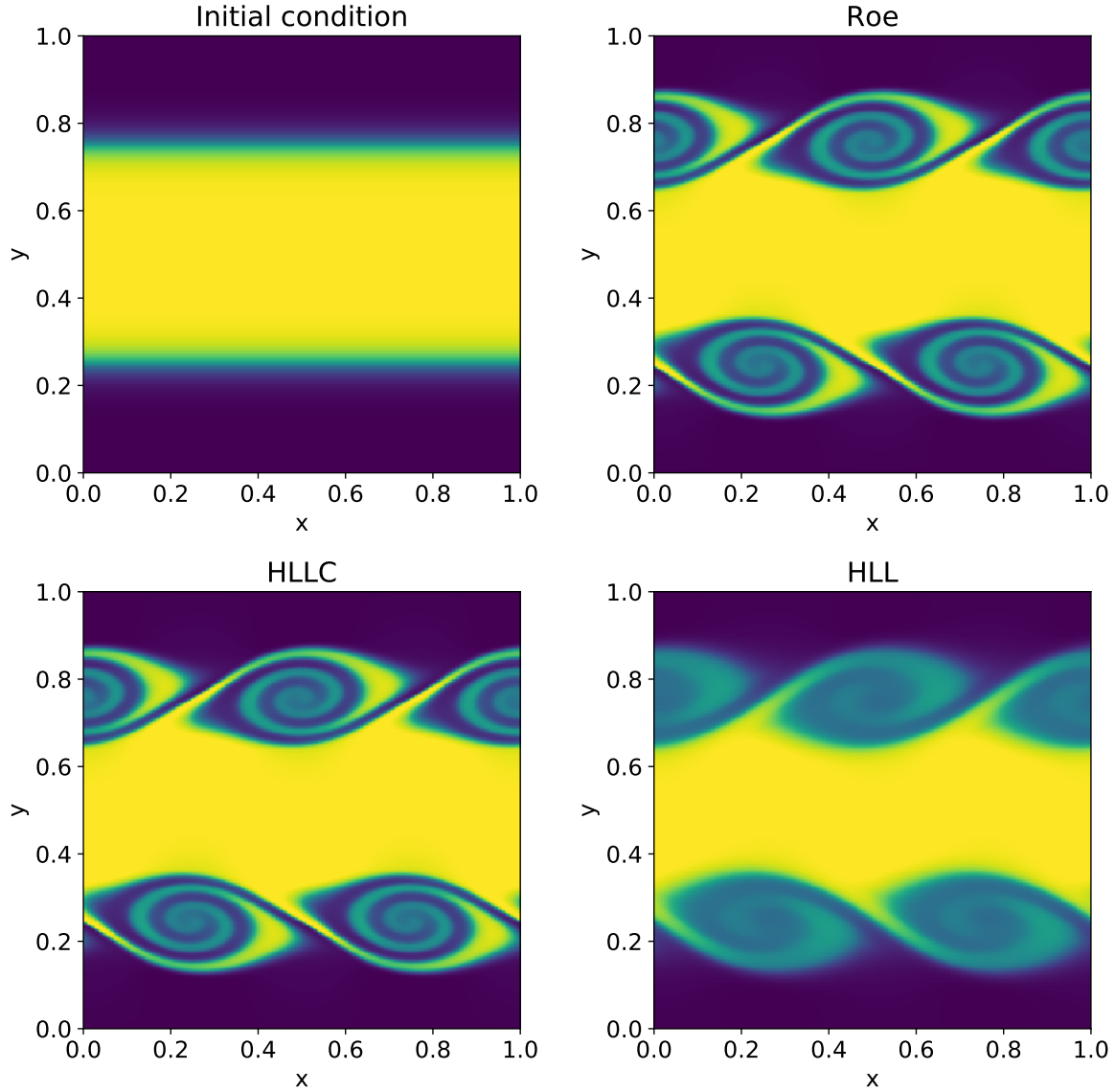


Figure A4. ケルビン・ヘルムホルツ不安定のテスト計算。色は $\rho \in [1, 2]$ の範囲の密度分布を表し、左上から右下へ順に、初期条件、Roe の方法、HLLC、HLL による計算結果を表す。初期条件以外のパネルの時刻は $t = 3$ である。メッシュ数は 256^2 である。精度は時間・空間ともに 2 次精度である。MUSCL の勾配制限関数には minmod を用いた。

ここで、ステップ付き風洞問題 (wind tunnel with a step; Emery 1968; Woodward & Colella 1984) を考えよう。境界条件や初期条件などの計算の設定は 3.6.4 節を参照せよ。

図 A5 は Roe の方法²、HLLC、HLL の 3 個のスキームを比較している。いずれのスキームでも左端の弓状衝撃波 ($x \sim 0.3$ 付近) はうまく解けているように見えるが、詳細に見ると Roe の方法と HLLC は衝撃波の下流側で等高線がギザギザしており、きれいに解けてないことがわかる。とくにステップの上流側の上端 ($x = 0.6 - 1$, $y = 0.2$ 付近) では、Roe の方法と HLLC の解に数値不安定が現れているのに対し、HLL の解はなめらかである。一方、 $x = 0.5 - 3$, $y \sim 0.7 - 0.8$ に存在する横に長いシアー流は、Roe の方法と HLLC はシャープに解けているが、HLL の解はなまっている。つまり、シアー流は HLLC や Roe の方法に軍配が上がり、衝撃波では HLL に軍配が上がる。

HLLC がイマイチなのは、解像度が悪いせいだという意見もありそうだ。そこで、図 A6 は解像度が異なる場合の比較である。解像度を上げて衝撃波のシャープさはあまり変わらない。もともと衝撃波面を数メッシュで分解しているため

² Roe の方法はステップの角の周辺で圧力が負になることが繰り返されるので、救済するべきセルの周囲の平均的な値を上書きする方法を用いて救済した (数値計算の猿知恵を参照のこと)。

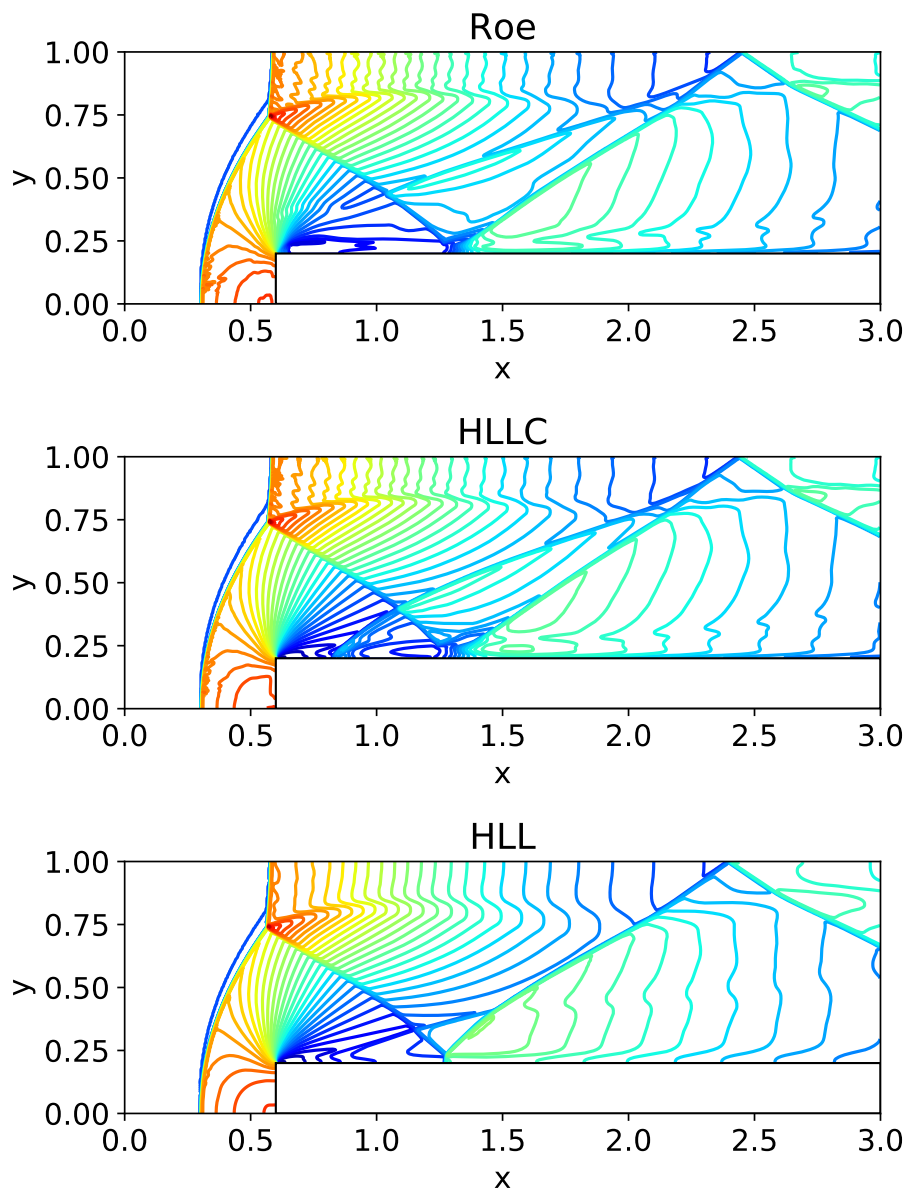


Figure A5. ステップ付き風洞問題におけるスキームの比較。スキームは上から順に、Roe の方法、HLLC、HLL である。等高線は密度分布を示す。等高線のレベルは 0 から 7 まで 0.2 おきである。メッシュ数は 768×256 である。精度は時間・空間ともに 2 次精度である。MUSCL の勾配制限関数には minmod を用いた。

だ。むしろステップ上端の不安定が悪化している。これは、分解能を上げたことにより、数値粘性が減り、不安定性が増加したためだと考えられる。一方で、 $y \sim 0.7 - 0.8$ の横に長いシアー流は、解像度が高いほどシャープに捉えられている。ここは期待通りである。

ここまでの結果をまとめると以下のことが言える。Roe の方法や HLLC は接触不連続面やシアー流をシャープに解くことができるが、多次元の衝撃波では数値不安定が現れてきれいに解くことができない。HLL は接触不連続面やシアー流がなまってしまうが、衝撃波を安定に解くことができる。残念ながら全てを解くことができる万能なスキームは存在しない。

そこで、接触不連続面や衝撃波に応じてスキームを切り替えるというアイデアを思う浮かぶだろう。実際、それは実用化されており、通常は HLLC や Roe の方法を用いるが、衝撃波が存在するセルにだけ HLL やそれに似たスキームを適用するという方法である。衝撃波の判定には H-correction (H 修正) と呼ばれる方法が使われることが多い (Sanders et al. 1998; Stone et al. 2008) (MHD の場合には、Minoshima & Miyoshi (2021) を参照せよ)。H-correction を用いな

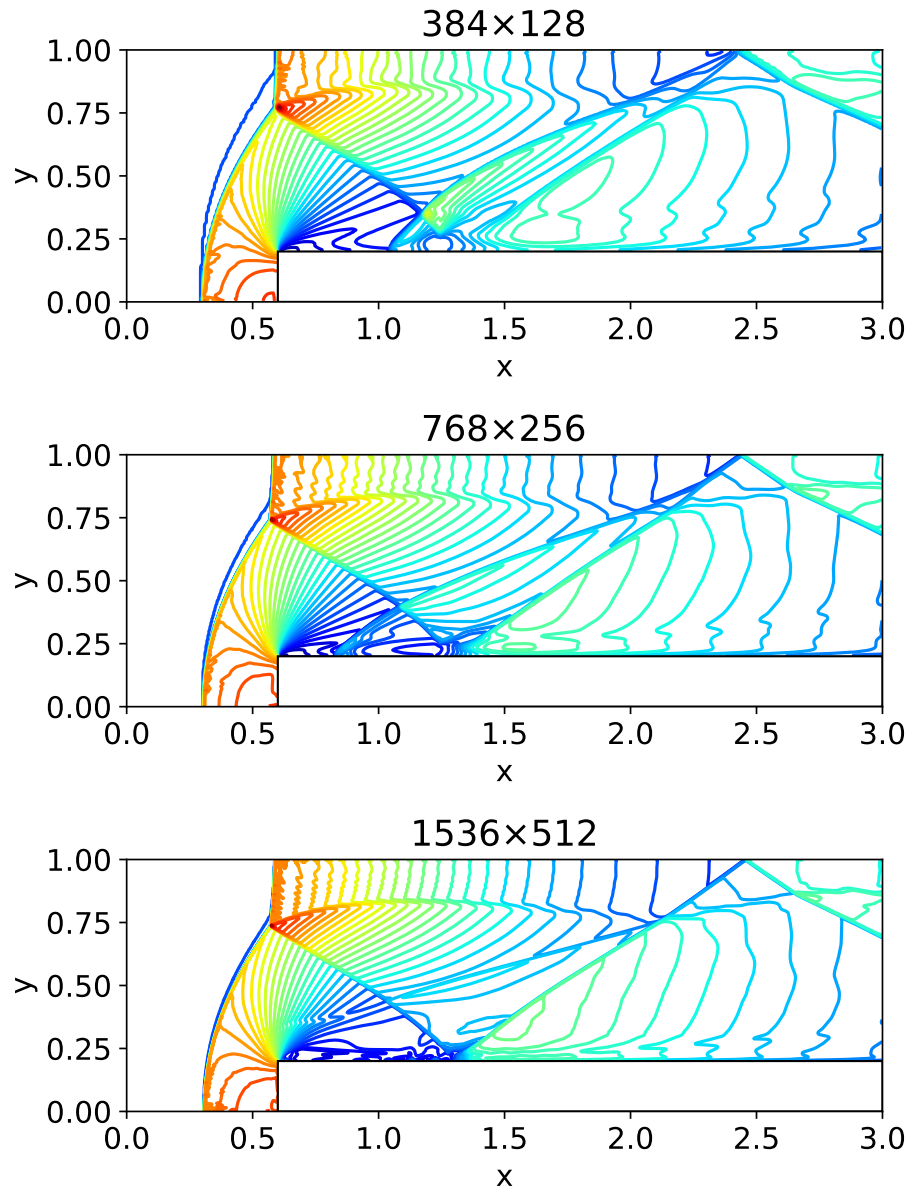


Figure A6. ステップ付き風洞問題における分解能の比較。メッシュ数は上から順に 384×128 、 768×256 、 1536×512 である。等高線は密度分布を示す。等高線のレベルは 0 から 7 まで 0.2 おきである。スキームは HLLC である。精度は時間・空間ともに 2 次精度である。MUSCL の勾配制限関数には minmod を用いた。

いと最悪の場合、弓状衝撃波すら安定に解くことはできない (Kim et al. 2003)。これはカーバンクル現象 (3.6.4 節参照) として知られている。たとえば図 3.21 の 2 段目の図には、カーバンクル現象によって弓状衝撃波が壊れた様子が示されている。実際、図 A5 と図 A6 において、HLL の場合を除いた全ての図において弓状衝撃波にノイズが発生しており、これが成長するとカーバンクル現象になる。一方、図 5.10 は H-correction を用いた例を示しており、Roe の方法を用いたにも関わらず弓状衝撃波が安定に解けている。

実際の天文シミュレーションでは、H-correction は必須であると著者は考える。ただし等温ガスやバロトロピック (barotropic) の状態方程式を仮定している場合には、無条件にカーバンクル現象は現れないので安心して欲しい。これらのガスにはエントロピー波が存在しないからである。カーバンクル現象はエントロピー波と関連することが知られており、実際エントロピー波を考慮しない HLL にはカーバンクル現象は現れない。

図 A7 は、HLLC スキームを用いるが、解法の精度が異なる場合の比較である。図示された解の中では、空間 3 次精度 (下段) の場合がもっとも良い。ステップの上端に数値不安定が現れていない。また、シア一流では、速度差によってケ

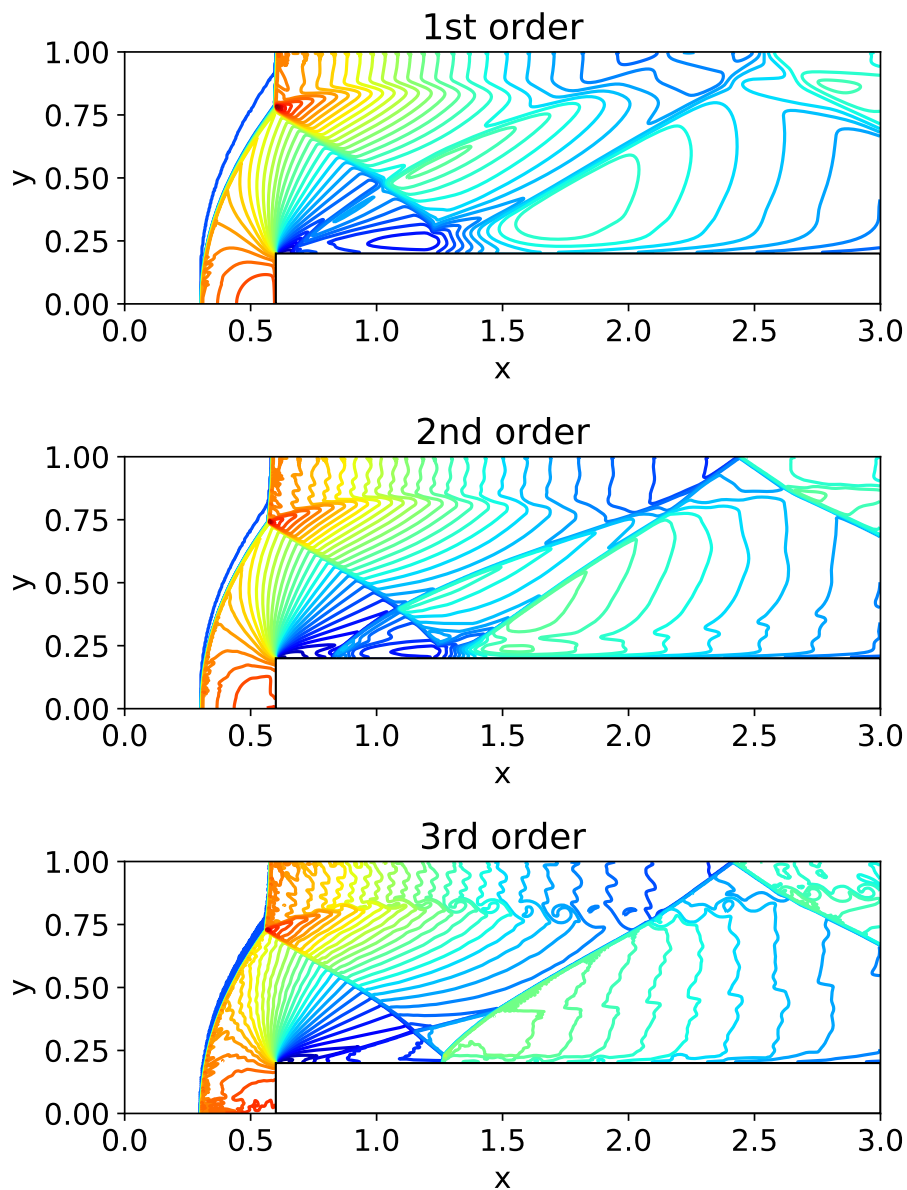


Figure A7. ステップ付き風洞問題における空間精度の比較。精度は上から順に、時間・空間 1 次精度、時間・空間 2 次精度、時間 2 次精度・空間 3 次精度である。等高線は密度分布を示す。等高線のレベルは 0 から 7 まで 0.2 おきである。メッシュ数は 768×256 である。スキームは HLLC である。

ルビン・ヘルムホルツ不安定によって渦が再現されている。これは数値粘性が小さいことの証拠である。ただし、カーバンクル現象対策をしていないため、弓状衝撃波におけるノイズは空間 3 次精度の場合が最悪で、いまにもカーバンクル現象が現れそうな状況である。

B. 非理想 MHD 方程式について

B.1. 導出方法 1: 流体の方程式からの拡張

「シミュレーション本」4.1 節では MHD 方程式を導出した。その際、エネルギー保存の式の導出について補足をする。この章では 2 つの方法を紹介する。

第1の方法では、磁場を考えない流体のエネルギー保存の式に磁場の効果（ジュール熱とローレンツ力による仕事）を加える³。すると、流体のエネルギー保存の式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot [(\rho E + p) \mathbf{v}] = Q_J + W_L. \quad (\text{B30})$$

となり、右辺に源泉項が追加される。ここで、 Q_J はジュール熱、 W_L はローレンツ力による仕事である。また

$$E = \epsilon + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \quad (\text{B31})$$

である。式 (B30) の右辺を順に評価していく。

ジュール熱はよく知られているように

$$Q_J = \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} \quad (\text{B32})$$

である。

ローレンツ力による仕事は

$$W_L = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_L \quad (\text{B33})$$

$$= \frac{1}{c} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \quad (\text{B34})$$

$$= \mathbf{J} \cdot \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \right) \quad (\text{B35})$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} \right) - \nabla \cdot \left(\frac{c\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} \right) - \frac{|\mathbf{J}|^2}{\sigma} \quad (\text{B36})$$

である。上記の変形ではローレンツ力

$$\mathbf{F}_L = \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (\text{B37})$$

オームの法則

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (\text{B38})$$

アンペールの法則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (\text{B39})$$

ファラデーの電磁誘導の法則

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{B40})$$

ならびにベクトル公式を用いた。

(B32) と (B36) を用いると (B30) は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho\epsilon + \frac{\rho|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} \right) + \nabla \cdot \left[\left(\rho\epsilon + \frac{\rho|\mathbf{v}|^2}{2} + p \right) \mathbf{v} + \frac{c\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} \right] = 0. \quad (\text{B41})$$

となる。左辺第1項（時間による偏微分の項）は、磁場を含めた全エネルギーの時間変化を表す。発散の中の第1項はエントルピーの流れ、第2項はポインティング・ベクトルが担うエネルギー流束を表す。(B36) の第3項と Q_J がキャンセルし、(B41) の右辺が0になっていることに注目しよう。エネルギーが保存していることを表している。

ここであらためて全エネルギーに磁場のエネルギーを含めて

$$E = \epsilon + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi\rho}. \quad (\text{B42})$$

³ 「シミュレーション本」では「ローレンツ力による仕事の分だけを修正する」と書いたが、正しくはローレンツ力による仕事以外にもジュール熱の分も修正する必要がある。ただし、最終結果 (4.12) は変更なしである。本稿では説明の仕方をより正しくする。

と再定義する。すると (B41) は、(B38) を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot \left[\left(\rho E + p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} \right) \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}}{4\pi} + \frac{\eta}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right] = 0 \quad (\text{B43})$$

となる。これは「シミュレーション本」の式 (4.12) である。ここで、

$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \quad (\text{B44})$$

である。または電流を消去して、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot \left[\left(\rho E + p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} \right) \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}}{4\pi} + \frac{\eta}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \right] = 0 \quad (\text{B45})$$

となる。 $\eta = 0$ の理想 MHD のリーマン解を使いたい場合には、 η の項を右辺に移動して、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \nabla \cdot \left[\left(\rho E + p + \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} \right) \mathbf{v} - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}}{4\pi} \right] = -\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot (\eta (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \quad (\text{B46})$$

$$= \frac{\eta}{4\pi} |\nabla \times \mathbf{B}|^2 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot (\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B})) \quad (\text{B47})$$

としても良い。なお右辺は η を一定と仮定すると

$$\text{右辺} = \frac{\eta}{4\pi} |\nabla \times \mathbf{B}|^2 + \frac{\eta}{4\pi} \mathbf{B} \cdot (\nabla^2 \mathbf{B}) \quad (\text{B48})$$

となり、右辺第 2 項は拡散項になる。

B.2. 導出方法 2: 全エネルギーから出発する

全エネルギーの定義から出発する方法も紹介する。この方が前節の方法よりも簡単だろう。磁場を含めた単位体積あたりの全エネルギーを

$$\rho E = \rho \epsilon + \frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi}. \quad (\text{B49})$$

と定義する。単位体積あたりの全エネルギーの時間微分は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) = \frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{B50})$$

流体のエネルギー保存式にジュール熱を加えると、(B50) の右辺第 1 項は

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \epsilon \mathbf{v}) - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{\eta}{4\pi} |\nabla \times \mathbf{B}|^2 \quad (\text{B51})$$

となる。流体の運動量保存式にローレンツ力を加えると (B50) の右辺第 2 項は

$$\rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla p + \frac{\mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{4\pi} \quad (\text{B52})$$

となる。(B50) の右辺第 3 項は質量保存則を使って

$$\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (\text{B53})$$

となる。(B50) の右辺第 4 項は磁場の誘導方程式を使って

$$\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{v} \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{v})] - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot [\nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B})] \quad (\text{B54})$$

となる。(B51)–(B54) を (B50) に代入して整理すると、(B43) になる。前節と本節で説明したいずれの方法でも、ジュール熱とローレンツ力の効果を加えていることに着目しよう。両方とも等価な導出になっている。

REFERENCES

- Einfeldt, B. 1988, SIAM Journal on Numerical Analysis, 25, 294, doi: [10.1137/0725021](https://doi.org/10.1137/0725021)
 Emery, A. F. 1968, Journal of Computational Physics, 2, 306, doi: [10.1016/0021-9991\(68\)90060-0](https://doi.org/10.1016/0021-9991(68)90060-0)

- Kim, S.-s., Kim, C., Rho, O.-H., & Kyu Hong, S. 2003, Journal of Computational Physics, 185, 342, doi: [10.1016/S0021-9991\(02\)00037-2](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(02)00037-2)
- McNally, C. P., Lyra, W., & Passy, J.-C. 2012, ApJS, 201, 18, doi: [10.1088/0067-0049/201/2/18](https://doi.org/10.1088/0067-0049/201/2/18)
- Minoshima, T., & Miyoshi, T. 2021, Journal of Computational Physics, 446, 110639, doi: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2021.110639>
- Miyoshi, T., & Kusano, K. 2005, Journal of Computational Physics, 208, 315, doi: [10.1016/j.jcp.2005.02.017](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2005.02.017)
- Roe, P. L. 1981, Journal of Computational Physics, 43, 357, doi: [10.1016/0021-9991\(81\)90128-5](https://doi.org/10.1016/0021-9991(81)90128-5)
- Sanders, R., Morano, E., & Druguet, M.-C. 1998, Journal of Computational Physics, 145, 511, doi: [10.1006/jcph.1998.6047](https://doi.org/10.1006/jcph.1998.6047)
- Sod, G. A. 1978, Journal of Computational Physics, 27, 1, doi: [10.1016/0021-9991\(78\)90023-2](https://doi.org/10.1016/0021-9991(78)90023-2)
- Stone, J. M., Gardiner, T. A., Teuben, P., Hawley, J. F., & Simon, J. B. 2008, ApJS, 178, 137, doi: [10.1086/588755](https://doi.org/10.1086/588755)
- Toro, E. F. 2009, Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics (Springer Berlin, Heidelberg), doi: [10.1007/b79761](https://doi.org/10.1007/b79761)
- Toro, E. F., Spruce, M., & Speares, W. 1994, Shock Waves, 4, 25, doi: [10.1007/BF01414629](https://doi.org/10.1007/BF01414629)
- Woodward, P., & Colella, P. 1984, Journal of Computational Physics, 54, 115, doi: [10.1016/0021-9991\(84\)90142-6](https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90142-6)
- 松本, 倫., 大須賀, 健., & 須佐, 元. 2024, 輻射電磁流体シミュレーションの基礎 (日本評論社)