

SPHについて

ナビエ-ストークス方程式の差分近似による離散化

四則演算はコンピュータにプログラムできるが、微分はプログラムできない。そのため、微分方程式の微分の項は四則演算に置き換える必要がある。この置き換え、近似のことを**離散化**という。

非圧縮性流体の流れが満たすNS方程式：

$$\frac{D\mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t))}{Dt} = -\frac{\nabla p(t, \mathbf{x}(t))}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}$$

1次精度で差分近似すると次のようになる。注意：**ラグランジュ的**に考えるので、位置 \mathbf{x} も時間とともに変化させる。

$$\longrightarrow \frac{\mathbf{u}(t + \delta t, \mathbf{x}(t + \delta t)) - \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t))}{\delta t} = -\frac{\nabla p(t, \mathbf{x}(t))}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}$$

このように引数を書くと長くなるので、次のように、上付きの整数を使って変数のタイムステップを表すことにする。

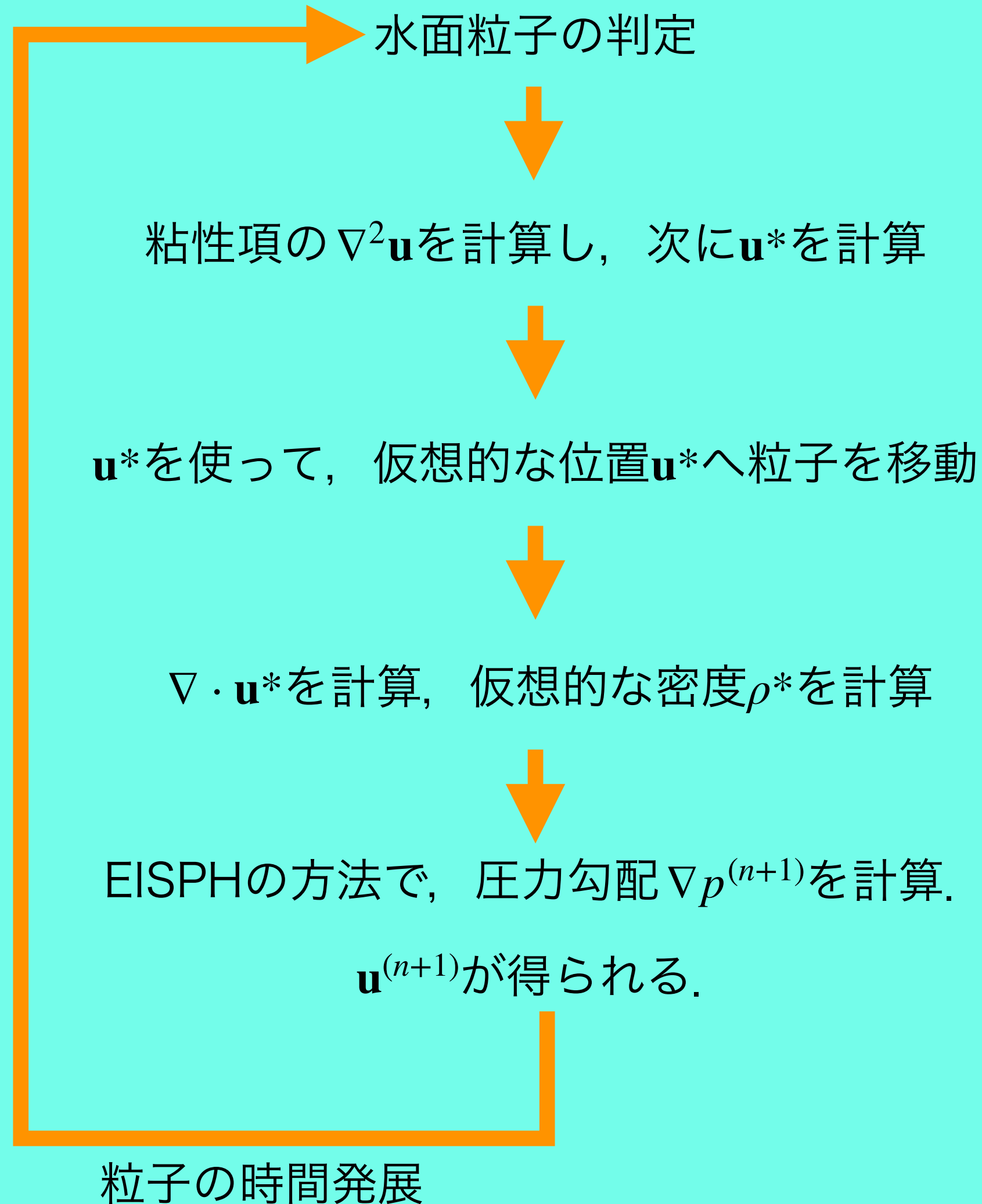
$$\longrightarrow \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} = -\frac{\nabla p^n}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{g}$$

さらに、この式を次のように変形し、仮の流速として \mathbf{u}^* と考える。

$$\longrightarrow \mathbf{u}^{n+1} + \frac{\nabla p^n}{\rho} \delta t = \mathbf{u}^n + (\nu \nabla^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{g}) \delta t = \mathbf{u}^*$$

EISPH

シミュレーションの流れ

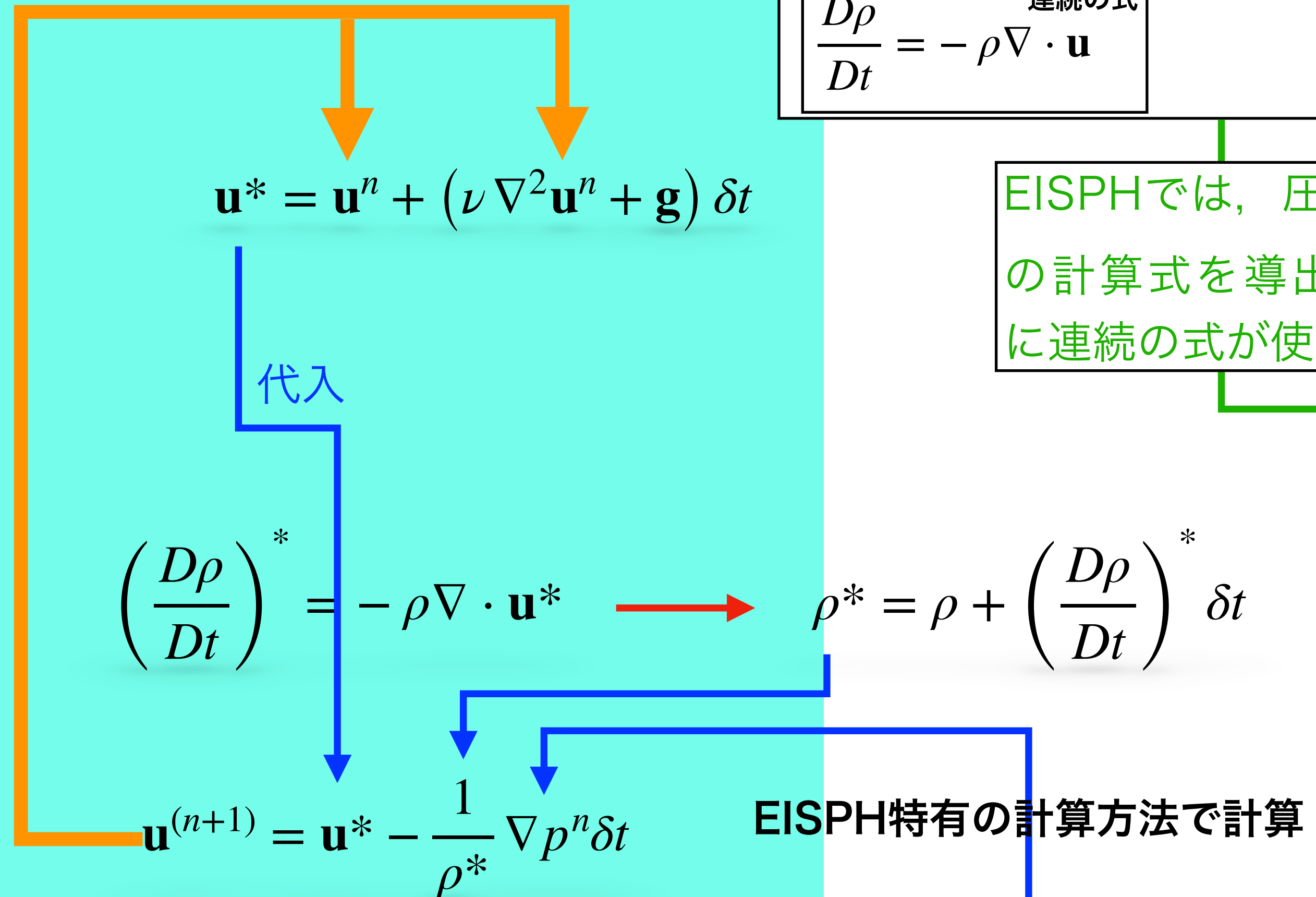


時間発展にはルンゲクッタ法を使う：

時間発展させる変数の時間微分を、ある時刻において数回評価し、それを元にして、次の時刻の変数を見積もることができる。時間発展させる変数：位置 \mathbf{x} 、流速 \mathbf{u} なので、流速 \mathbf{u} と加速度 $D\mathbf{u}/Dt$ を評価する。

シミュレーションの流れ

ルンゲクッタから与えられた \mathbf{x} と \mathbf{u} を使う。



$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} \quad \text{N.S.方程式}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad \text{連続の式}$$

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta$$

EISPHでは、圧力勾配 ∇p の計算式を導出するために連続の式が使われる。

この ∇p を簡便な方法で近似するのがEISPH。従来のISPHと呼ばれる方法では、連続の式から連立方程式を作り、それを数値的に解くことで求めている。

ISPHは、流体領域全体で調和が取れるように圧力を計算するのに対して、EISPHは局所的な情報だけを基に簡易的に圧力勾配を計算していると考えられる。

EISPH

シミュレーションの流れ

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g}$$

N.S.方程式

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}$$

連続の式

$$\nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta$$

EISPHでは、圧力勾配 ∇p の計算式を導出するために連続の式が使われる。

圧力 p は時間発展させていない。圧力は、次の時刻の流れが**連続の式** $\nabla \cdot \mathbf{u}^{(n+1)} = 0$ を満たすように、現在のタイムステップにおいて決定する量と考える（辻褄を合わせるように）。
現在のタイムステップだけで決まるのではないという意味を込めて、 ∇p は、 $\nabla p^{(n)}$ ではなく、よく $\nabla p^{(n+1)}$ と書かれる。
しかし、考えることは1つ、**次のタイムステップにおいて、連続の式を満たすように圧力を決定することができているか、だけである。**

ルンゲクッタから与えられた \mathbf{x} と \mathbf{u} を使う。

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + (\nu \nabla^2 \mathbf{u}^n + \mathbf{g}) \delta t$$

代入

$$\left(\frac{D\rho}{Dt}\right)^* = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}^* \longrightarrow \rho^* = \rho + \left(\frac{D\rho}{Dt}\right)^* \delta t$$

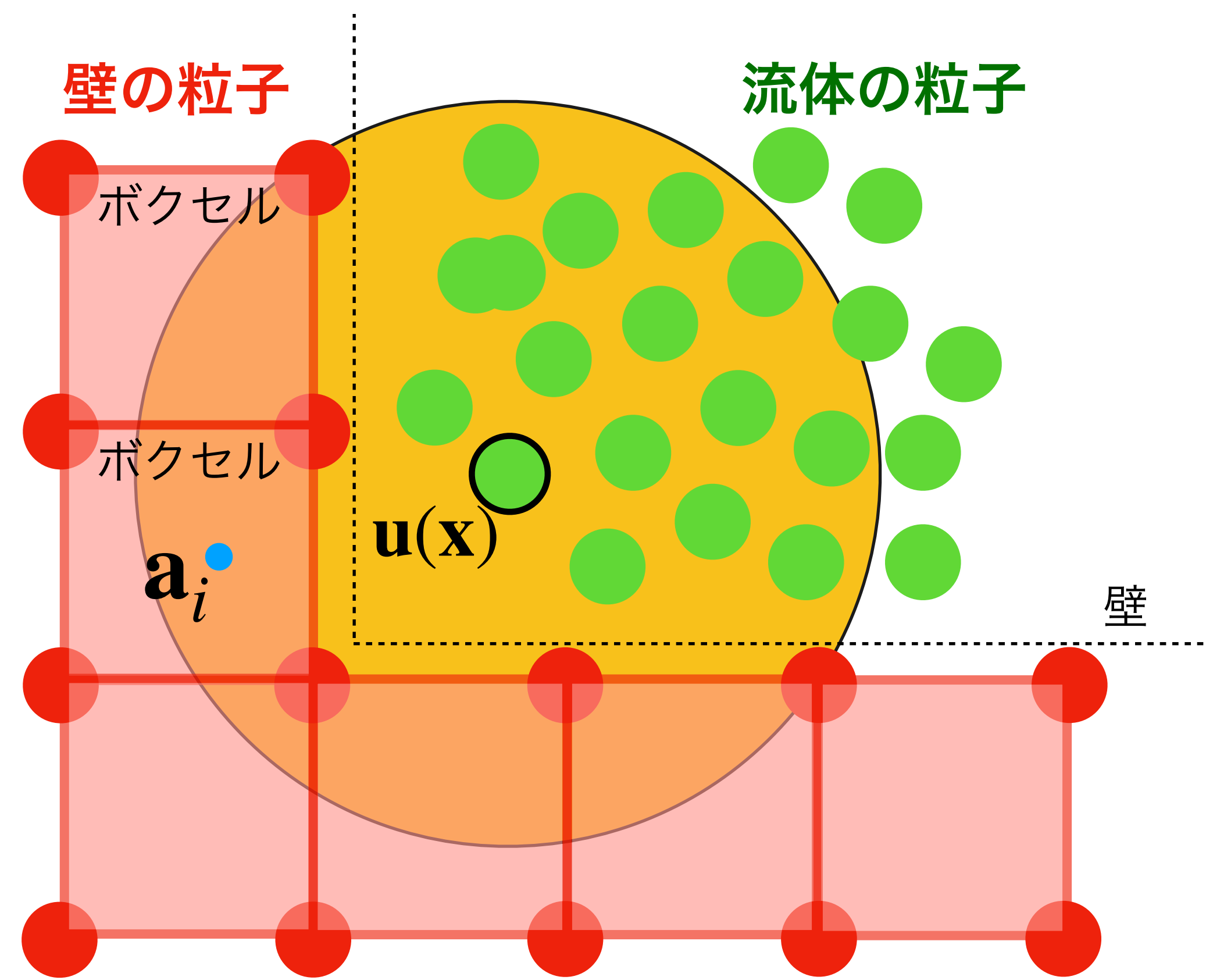
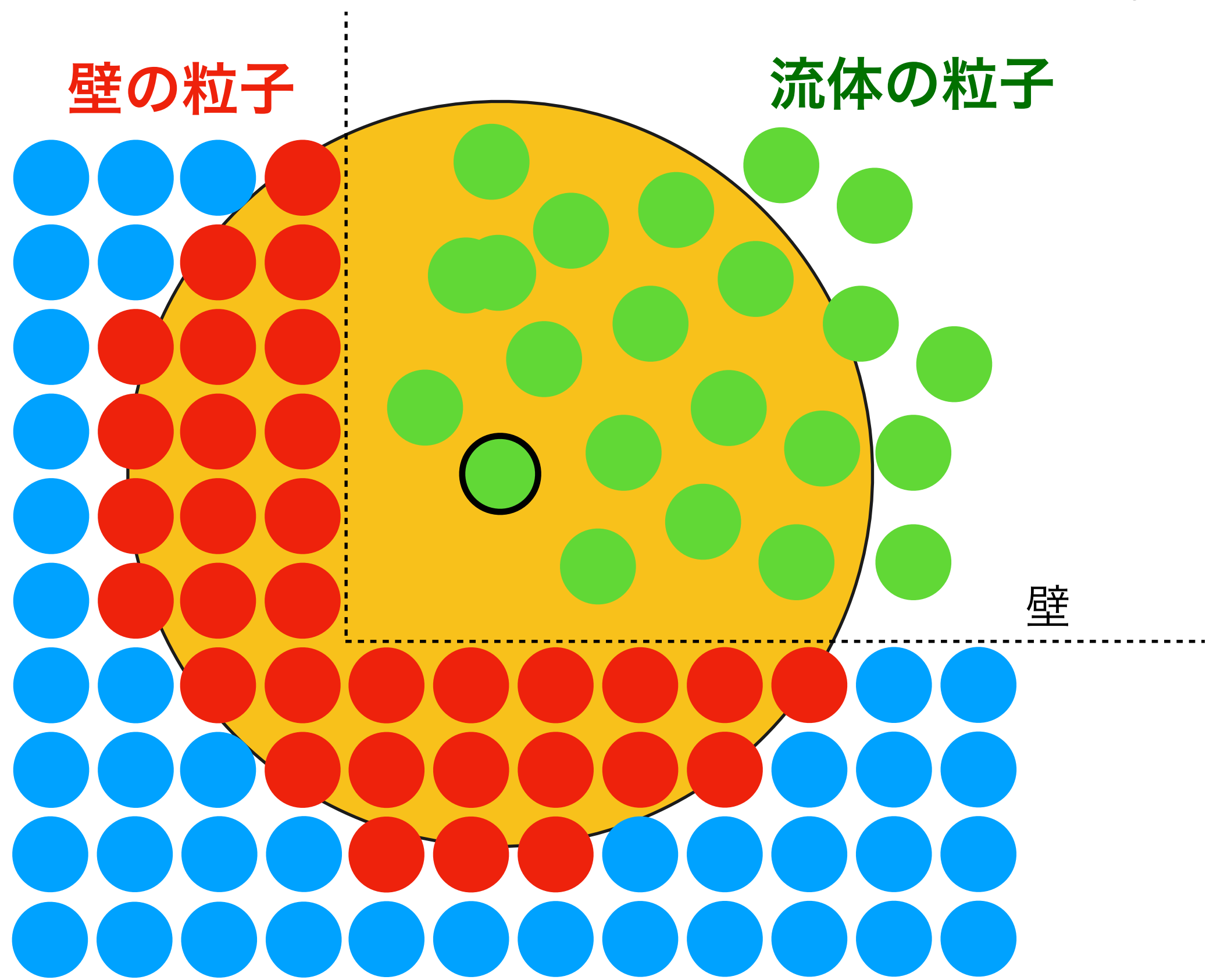
$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^* - \frac{1}{\rho^*} \nabla p^n \delta t$$

EISPH特有の計算方法で計算

この ∇p を簡便な方法で近似するのがEISPH。従来のISPHと呼ばれる方法では、連続の式から連立方程式を作り、それを数值的に解くことで求めている。
ISPHは、流体領域全体で調和が取れるように圧力を計算するのに対して、EISPHは局所的な情報だけを基に簡易的に圧力勾配を計算していると考えられる。

ボクセル化した目的：任意の位置で関数を評価するため. →ガウス求積（数値積分）が可能になる. →精度が向上する？

SPHで使う近似 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \int f(\mathbf{a})W(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|)d\mathbf{a}$



SPHで使う近似 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}_j) W(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|, h)$

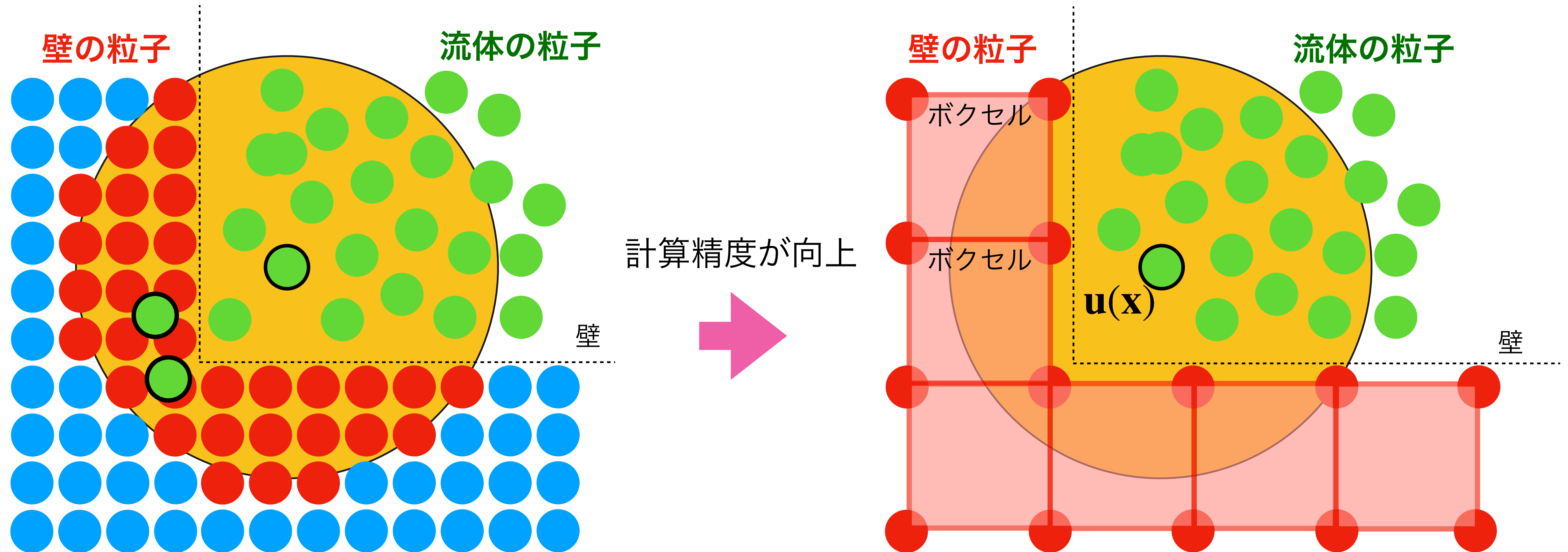
粒子の位置で関数を評価し、足し合わせている.

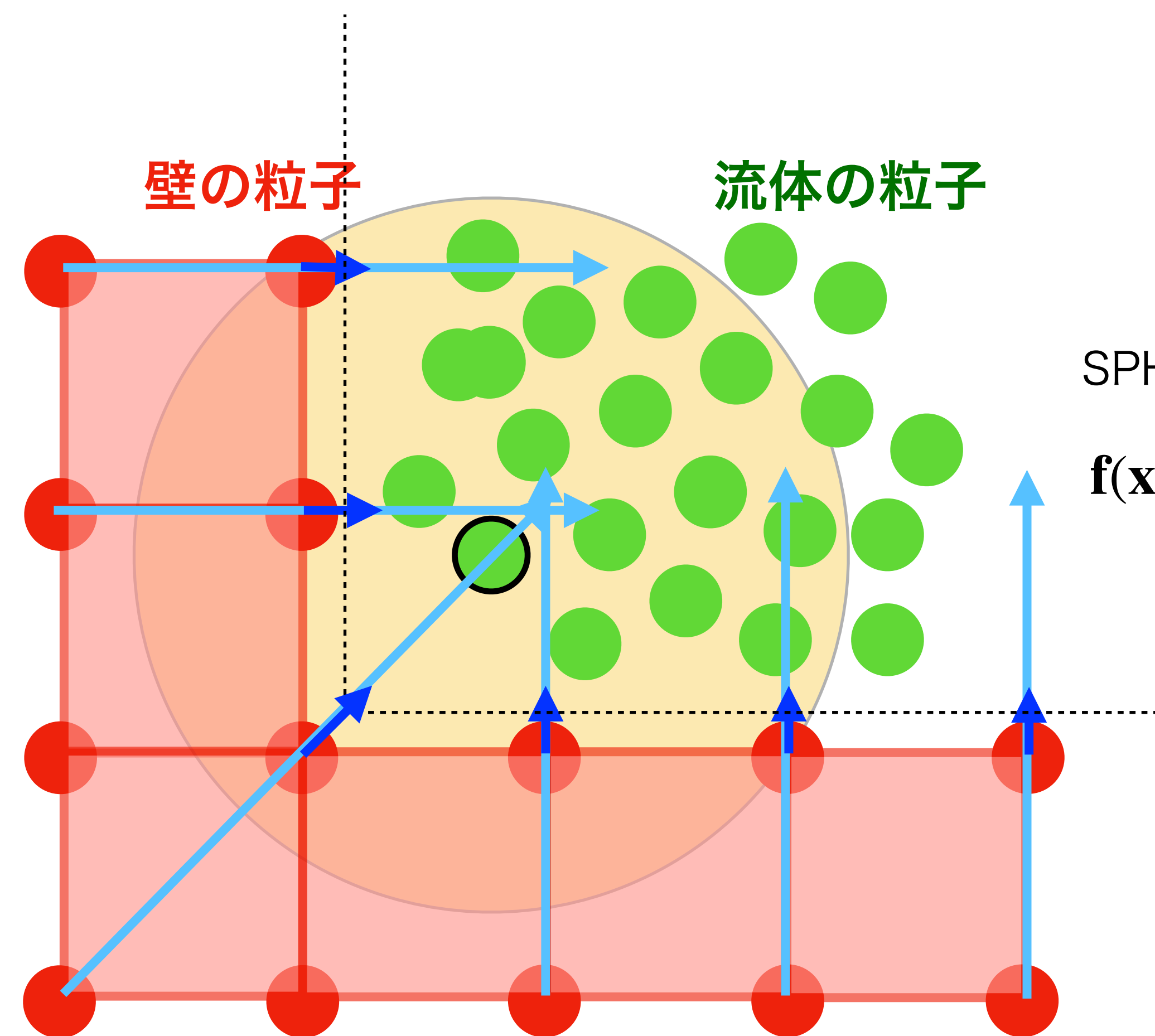
ボクセル化して、3次元線形補間することで任意の位置aでfを評価できる

ガウス求積による積分の評価 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \sum w_i f(\mathbf{a}_i) W(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}_i\|)$

計算精度が向上し、粒子の貫入を防ぐことができるのではないかな？ 5

問題点：流体粒子の構造物内部への貫入





SPHで使う近似

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{f}(\mathbf{x}_j) W(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|, h)$$

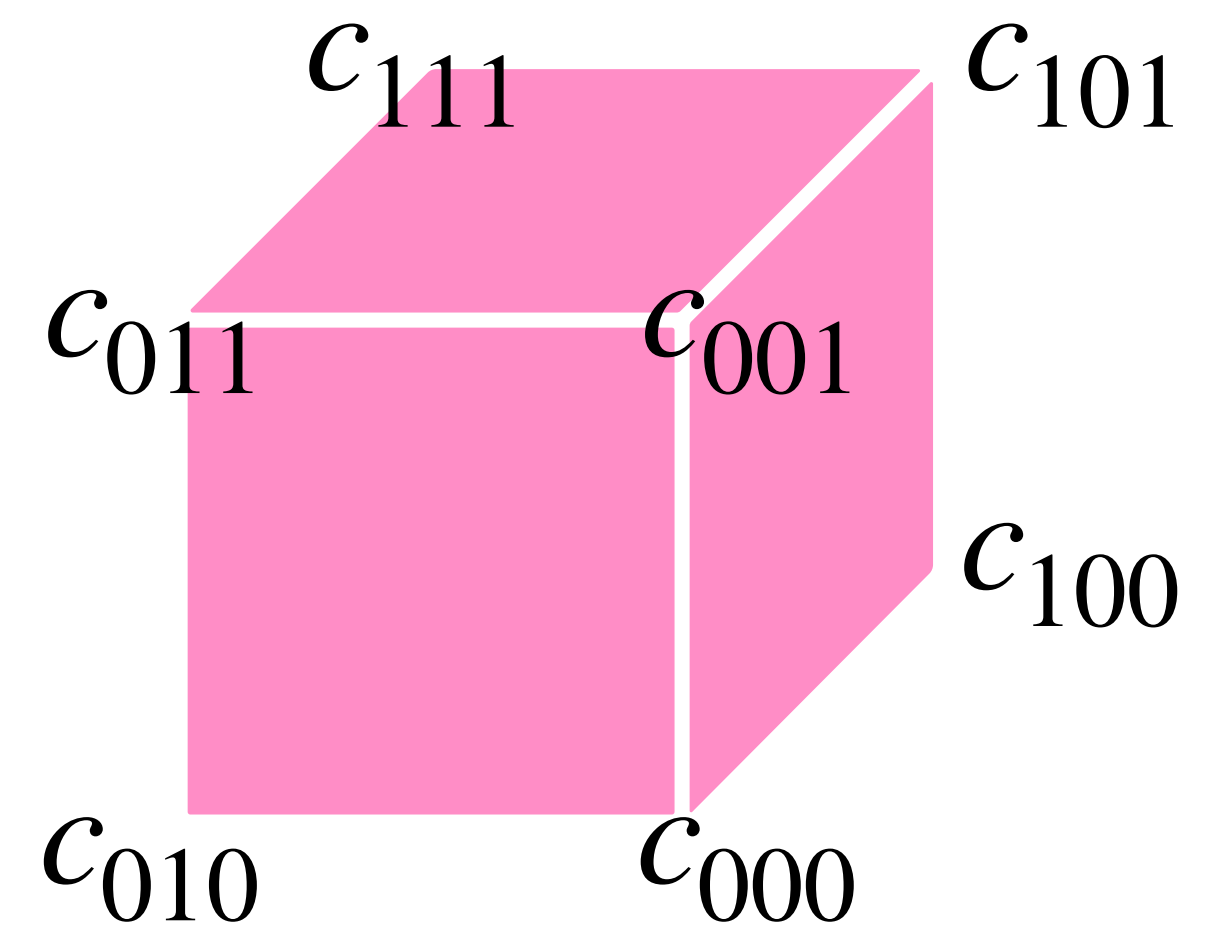
3次元線形補間について

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} f(x, y, z) dx dy dz$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} (a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7xyz) dx dy dz$$

$$= -\frac{1}{8}(x_0 - x_1)(y_0 - y_1)(z_0 - z_1)(c_{000} + c_{001} + c_{010} + c_{011} + c_{100} + c_{101} + c_{110} + c_{111})$$

解析的に計算



線形補間であれば、ガウス求積（いくつかの場所でfを計算して、それに重みをかけて、足し合わせることで、**数值的に**積分を計算する方法のこと）を使わずに、**解析的に**計算できるようだ。

$$c_{000} = f(\mathbf{x}_{000})W(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{000}\|)$$

積分補間を使った勾配や発散の計算

積分補間を使って $\nabla \mathbf{u}$ を表すと,

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \int_V (\nabla f(\mathbf{x}))|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}} w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, h) d\boldsymbol{\xi}$$

ここで $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. これを変形すると,

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \int_V \left\{ \nabla (fw) - f \nabla w \right\} d\boldsymbol{\xi}$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \int_S fw \mathbf{n} d\boldsymbol{\xi} - \int_V f \nabla w d\boldsymbol{\xi}$$

ここで, $\int_S fw \mathbf{n} d\boldsymbol{\xi} = 0$ なので,

$$\nabla f(\mathbf{x}) = - \int_V f(\nabla w)|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\xi}} d\boldsymbol{\xi}$$

となる. 一定要素の積分と同じように考えて, この積分を近似すると,

$$\nabla f(\mathbf{x}) \approx - \sum_j \left\{ V_j f(\boldsymbol{\xi}_j) \nabla w(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_j, h) \right\} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}_j}$$

詳細

参考

Nomeritae, Daly, E., Grimaldi, S., & Bui, H. H. (2016).

Explicit incompressible SPH algorithm for free-surface flow modelling: A comparison with weakly compressible schemes.

Advances in Water Resources, 97, 156–167. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2016.09.008>

\mathbf{u}^* の計算方法.

1) まず, $\nabla \cdot \nabla \mathbf{u}$ を計算する. Lee (2007)の方法を使う.

$$(\nabla \cdot \nabla \mathbf{u})_i = \frac{8m_j (\nu_j + \nu_i) \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{\nu_i (\rho_j + \rho_i) \mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} + \left(0.0005(h_i + h_j)\right)^2} \nabla W(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j, h_i)$$

$$2) \mathbf{u}^* = \mathbf{u} + (\nu \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{g})dt$$

粒子壁と六面体壁の結果の違い

Dan Koschier and Jan Bender (2017)

SPHでの境界処理の諸問題を改善するために密度マップを導入している.