

第 2 章

ケーブル構造の静的解析

2.1 直線ケーブル要素による変位法つり合い解析

ケーブル部材のたわみ効果を考慮しながら変位法によってケーブル構造の解析を進めることもできるが¹³⁾ 17) 18), 最も基本的なモデル化としては, 第 1.1 節で述べた引張直線ケーブルを用いた変位法つり合い解析が考えられる. ここでは, ケーブル構造の問題設定を簡潔に説明するために, 後者の範囲での記述を進めるものとする. 直線ケーブル要素であっても, 例えば たわみケーブルなども適当な要素分割によって折線直線ケーブルとして近似表現できるなど, その実用性は十分確認されている. ケーブル構造の解析は広く考えれば幾何学的強非線形問題であり, 直線ケーブル要素を用いるここでのつり合い解析では, 構造中の不安定機構や部材の弛緩によって生じる解の追従性の困難さが問題となる. もう一つの問題は, ケーブル構造の形状や内力の分布状態は, 自重等の外力を作用させたつり合い解析 (あるいは, モデル実験) を行っではじめて決まるものと考えてよく, その状態をあらかじめ知ることは一般にはできない. この場合, 初期部材長等の構造パラメータを調整することにより, 所定の外力条件下でのつり合いを制御しながら目的の状態を得る必要があり, 一般的な形式のケーブル構造を実現するためにはこの形状決定の問題が重要となる.

2.1.1 構造系のつり合い式と接線剛性

1.1 節の直線ケーブル要素の関係式を用いるものとし, $(m) = (1), \dots, (M)$ の要素から成る節点数 J (自由節点数 = N , 固定節点数 = K) のケーブル構造系を考える. 固定節点の空間位置 $\{\mathbf{x}_K^*\} = \{\mathbf{x}_k^*, k = 1, \dots, K\}$ は与えられており, 自由節点の空間位置 $\{\mathbf{x}_N\} = \{\mathbf{x}_n, n = 1, \dots, N\}$ を基本の未知量として, 全体の節点位置を $\{\mathbf{x}_J\} = \{\mathbf{x}_j, j = 1, \dots, J\}$ と表わすものとする. 各要素の式 (1.1) の形状は, $\{\mathbf{x}_J\}$ より取り出した両端節点座標の差で決まるが, それらの要素形状を集めて $\{\bar{\mathbf{x}}_{(M)}\} = \{\bar{\mathbf{x}}_{(m)}, m = 1, \dots, M\}$ と表わすものとすれば, $\pm \mathbf{I}$ と $\mathbf{0}$ (3×3 の土単位マトリックスと零マトリックス) を成分とする接続マトリックス $[\bar{\mathbf{S}}_X]$ を用いて

$$\{\bar{\mathbf{x}}_{(M)}\} = [\bar{\mathbf{S}}_X] \{\mathbf{x}_J\} \quad (2.1)$$

と表すことができる. 各要素の $\bar{\mathbf{x}}_{(m)}$ に対する張力成分 $\bar{\mathbf{T}}_{(m)}$, 接線剛性 $[\bar{\mathbf{k}}]_{(m)}$, および ひずみエネルギー $U_{(m)}$ は, 式 (1.2)~(1.6) のように与えられる. 構造の形状 $\{\mathbf{x}_J\}$ において生じている節点力 $\{\mathbf{F}_J\} = \{\mathbf{F}_j, j = 1, \dots, J\}$ は, 各節点に接続する要素の張力成分を加え合わせて得られるが, そのことは全要素の張力成分の組を $\{\bar{\mathbf{T}}_{(M)}\} = \{\bar{\mathbf{T}}_{(m)}, m = 1, \dots, M\}$ として

$$\{\mathbf{F}_J\} = [\bar{\mathbf{S}}_F] \{\bar{\mathbf{T}}_{(M)}\} \quad (2.2)$$

の形で表せる。ここに、 $[\bar{S}_F]$ は、 $\pm I$ と 0 を成分とする接続マトリックスであるが、仮想仕事の式 $\{F_J\}^T \delta\{x_J\} = \{\bar{T}_{(M)}\}^T \delta\{\bar{x}_{(M)}\}$ に式 (2.1) を代入して仮想変位 $\delta\{x_J\}$ の任意性を考えれば、前述の接続マトリックス $[\bar{S}_X]$ と

$$[\bar{S}_F] = [\bar{S}_X]^T \quad (2.3)$$

の反傾関係にあることがいえる。全節点力 $\{F_J\}$ において、可動自由度 $\{x_N\}$ -方向の節点力 $\{F_N\}$ は、それらの成分を取り出すマトリックス $[C_F]$ ($I, 0$ より成る) を用いて

$$\{F_N\} = [C_F] \{F_J\} \quad (2.4)$$

と表わすことができ、その方向に与えられた節点外力 $\{P_N\}$ に対して、つり合い条件は

$$\{F_N(\{x_N\})\} = \{P_N\} \quad (2.5)$$

となる。

このつり合い式を満たす節点位置は、後述の接線剛性などを用いた繰返し計算で求めるのが一般的であるが (第2.3節)、それによって数値解 $\{x_N\}$ が得られたとき、そのときの全節点力 $\{F_J\}$ より、固定自由度 $\{x_K\}$ -方向の成分を取り出すマトリックス $[C_X]$ を用いて、反力 $\{F_K^*\}$ は

$$\{F_K^*\} = [C_X] \{F_J\} \quad (2.6)$$

と表せる ($[C_F]^T [C_F] + [C_X]^T [C_X] = [I]$)。

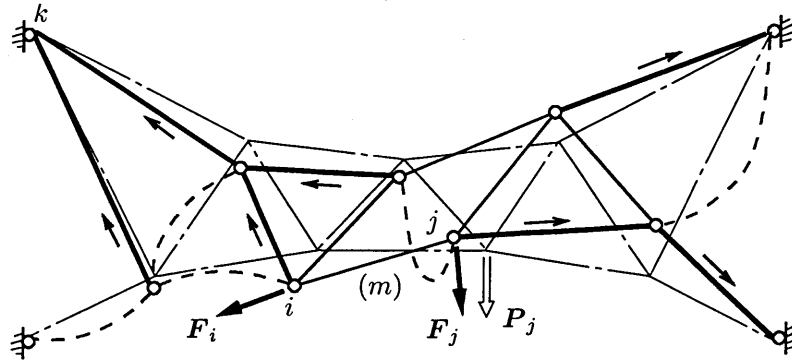


図 2.1: 変位法ケーブル構造系 (引張直線要素)

次に、ある自由節点位置 $\{x_N\}$ で節点力 $\{F_N\}$ が生じている変形状態の上で、自由節点の微小な変位 $\delta\{x_N\}$ による節点力の変化、すなわち $\{F_N\}$ - $\{x_N\}$ 間の接線剛性を考える。Newton-Raphson 法系統の繰返し計算では、接線剛性マトリックスを修正係数とした繰返し計算によってつり合いの解が得られ、つり合い状態の正則/特異性はその剛性マトリックスの特性によって決まる。接線剛性関係は、 $\{x_N\}$ を独立変数としたこれまでの関係式を微分して得られる：式 (2.4), (2.2) より、 $\delta\{F_N\} = [C_F][\bar{S}_F]\delta\{\bar{T}_{(M)}\}$ であり、各要素の $\bar{T}_{(m)}$ - $\bar{x}_{(m)}$ 間の接線剛性 $[\bar{k}]_{(m)}$ は式 (1.5) で与えられている。また、自由節点位置の微小変化 $\delta\{x_N\}$ による全節点の変位は $\delta\{x_J\} = [C_F]^T \delta\{x_N\}$ であり、式 (2.1) より $\delta\{\bar{x}_{(M)}\} = [\bar{S}_X][C_F]^T \delta\{x_N\}$ となる。以上の関係を連続させれば、 $\{F_N\}$ - $\{x_N\}$ 間の接線剛性マトリックスは

$$\delta\{F_N\} = [K_N(\{x_N\})] \delta\{x_N\} \quad (2.7a)$$

$$[K_N] = [C_F][\bar{S}_F][\bar{K}_{(M)}][\bar{S}_X][C_F]^T \quad (2.7b)$$

ただし,

$$[\bar{K}_{(M)}] = \begin{bmatrix} [\bar{k}]_{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & [\bar{k}]_{(M)} \end{bmatrix} \quad (2.7c)$$

で与えられることになる.

接線剛性 $[K_N(\{x_N\})]$ の対称性より, 全微分 $\delta U = \{F_N(\{x_N\})\}^T \delta\{x_N\}$ は完全微分形であり, 積分経路によらない積分結果としての構造系のひずみエネルギー $U(\{x_N\})$ があることがいえる. これまでの関係式を逆にたどってその積分を展開することができ, 構造全体の $U(\{x_N\})$ は, 式 (1.6) で与えられる各要素のひずみエネルギー $U_{(m)}$ の和:

$$U(\{x_N\}) = \sum_{m=1}^M U_{(m)}(\Delta \bar{l}) \quad (2.8)$$

で与えられることが確認できる. 外力ポテンシャルを加えて, 系の全ポテンシャル・エネルギーは

$$W(\{x_N\}) = U(\{x_N\}) - \{P_N\}^T \{x_N\} \quad (2.9)$$

となる. このとき, ケーブル構造では, 式 (2.5) を満たすつり合い状態で $W(\{x_N\})$ は最小値となる (後述).

2.1.2 つり合いの正則性と特異状態

1) ケーブル要素

式 (1.5) で表される要素の接線剛性マトリックスの形状微小変化 $\delta \bar{x}_{(m)} (\neq 0)$ に対する 2 次形式 $\delta^2 I_{(m)} = \delta \bar{x}_{(m)}^T [\bar{k}(\bar{x})]_{(m)} \delta \bar{x}_{(m)}$ は, 式 (1.3) の構成関係を代入して整理すれば

$$\delta^2 I_{(m)} = \begin{cases} \frac{EA}{\bar{l}^3} (\bar{x}\delta\bar{x} + \bar{y}\delta\bar{y} + \bar{z}\delta\bar{z})^2 + \frac{T}{\bar{l}} (\delta\bar{x}^2 + \delta\bar{y}^2 + \delta\bar{z}^2) \geq 0 & \text{for } \bar{l} \geq l \\ 0 & \text{for } \bar{l} < l \end{cases} \quad (2.10)$$

と展開できる. これより, $\bar{l} > l$ で張力 T が生じている \bar{x} の領域では, 剛性マトリックス $[\bar{k}]_{(m)}$ は正定値であり, その 2 回積分としてのひずみエネルギー $U_{(m)}(\bar{x})$ は, その領域で下に凸な関数となっている. $\bar{l} = l$ の状態では, $\bar{x}\delta\bar{x} + \bar{y}\delta\bar{y} + \bar{z}\delta\bar{z} = 0$ となる $\bar{x}_{(m)}$ とは直角方向の形状変化に対しては零値 すなわち剛性はなくなり, 2 次形式は半正定値となる. また, $\bar{l} < l$ の領域では, 任意の $\delta \bar{x}_{(m)}$ に対して常に零値をとる. これらの状態は, それぞれ 要素張力成分 $\bar{T}_{(m)}$ と形状 $\bar{x}_{(m)}$ が 1 対 1 対応にある正則領域, $\bar{l} = l$ の円周上のすべての $\bar{x}_{(m)}$ に対して $\bar{T}_{(m)} = 0$ が対応する限界状態, および 任意の $\bar{x}_{(m)}$ に対して張力成分が生じない特異領域 (弛緩状態) を表している.

2) 変位法構造系

構造の節点位置 $\{x_N\}$ での接線剛性マトリックス $[K_N(\{x_N\})]$ の節点微小変位 $\delta\{x_N\}$ に対する 2 次形式 $\delta^2 \Gamma$ を考える. 式 (2.7b) 右辺において $[\bar{S}_X][C_F]^T \delta\{x_N\}$ は自由節点の変位 $\delta\{x_N\}$ によって生じる各要素の形状変化 $\{\delta \bar{x}_{(m)}, m = 1, \dots, M\}$ を表しており ($[C_F][\bar{S}_F] = ([\bar{S}_X][C_F]^T)^T$ も同等), 構造の $\delta^2 \Gamma$ は, これらの $\delta \bar{x}_{(m)}$ による式 (2.10) の要素毎の 2 次形式の総和:

$$\delta^2 \Gamma (= \delta\{x_N\}^T [K_N] \delta\{x_N\}) = \sum_{m=1}^M \delta^2 I_{(m)} \geq 0 \quad (2.11)$$

として表すことができる。したがって、全体剛性の2次形式もまた、零値はとりうるが、負値になることはない。この2次形式が $\delta\{x_N\} (\neq \{0\})$ に対して零値となるようなケーブル構造の状態 $\{x_N\}$ が特異状態であり、要素の弛緩が関与して生じる。ある要素が弛緩していれば、その要素自体の剛性は零マトリックスとなるが、その両端の節점에接続する他の要素が緊張状態にあれば、必ずしも全体剛性の中でこれらの節点に特異性が生じるとは限らない。

特異状態について、次のように考えることができる²¹⁾。ケーブル構造の中である数の弛緩要素が生じているとしても、図2.1に示すように、各自由節点に対して、引張力を生じている一連の要素があり、それらをたどって少なくとも各1つの固定節点につながっている(アンカーされている)状態 $\{x_N\}$ を考える。ここで、自由節点の任意の微小変位 $\delta\{x_N\} (\neq \{0\})$ において、その中の非零の δx_n を取り出し、前述のようにしてその節点を固定節点にアンカーしている要素の組 $\{(m')\}$ に注目する(図2.2)。先端の微小変位 δx_n に対して、これらの要素の他端は固定されており、その中の少なくとも1つの要素 (m') で $\delta \bar{x}_{(m')} \neq 0$ は明かであり、その要素で $\delta^2 I_{(m')} > 0$ となる。したがって、全体でも $\delta^2 \Gamma > 0$ すなわち構造の接線剛性 $[K_N(\{x_N\})]$ は正定値にある。このような状態にある $\{x_N\}$ の領域がケーブル構造の正則領域であり、この範囲で式(2.8)の構造のひずみエネルギーは下に凸の曲面となっており、節点力 $\{F_N\}$ と節点位置 $\{x_N\}$ は1対1対応にある。この領域の中につり合い状態があれば、それは唯一解であり、式(2.9)の全ポテンシャル・エネルギーはその位置で最小値をとる。

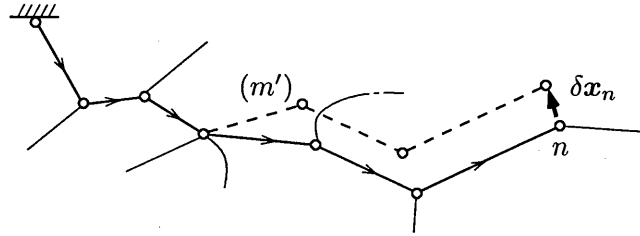


図 2.2: 正則の自由節点

前述の状態にないとき、すなわちある1つの節点、または1群の節点があり、それを周りの節点に連結しているすべての要素が弛緩している場合には、その節点の変位、あるいはその1群全体の並進変位に対しては、構造の剛性はなく、節点力 $\{F_N\}$ は変化せず接線剛性マトリックス $[K_N]$ は特異となる。それらの要素の弛緩が保持される範囲が1つの特異領域となる。ここで、その中の2つの状態 $\{x_N\}_I$ と $\{x_N\}_{II}$ を考えて、それらを結ぶ線分上の任意点

$$\{x_N\}' = \alpha \{x_N\}_I + (1 - \alpha) \{x_N\}_{II} \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \quad (2.12)$$

について考える。特異状態 $\{x_N\}_{I, II}$ において、両端節点 i, j の要素 (m) が弛緩しているとき、 $\{x_N\}'$ でその空間長さは

$$\begin{aligned} \bar{l}'_{(m)} &= |x'_j - x'_i| = |\alpha(x_j - x_i)_I + (1 - \alpha)(x_j - x_i)_{II}| \\ &\leq \alpha |x_j - x_i|_I + (1 - \alpha) |x_j - x_i|_{II} = \alpha \bar{l}_{(m)I} + (1 - \alpha) \bar{l}_{(m)II} \end{aligned} \quad (2.13)$$

と展開できる。 $\{x_N\}_{I, II}$ で $\bar{l}_{(m)I, II} < l_{(m)}$ より $\{x_N\}'$ でも $\bar{l}'_{(m)} < l_{(m)}$ であり、 $\{x_N\}'$ は $\{x_N\}_{I, II}$ と同じ特異状態にあることになる。すなわち、1つの特異領域は凸領域となっている。

一般の弾性安定理論にあてはめて考えると、ここでの変位法ケーブル構造系の正則領域とは安定領域を意味する。全体剛性 $[K_N]$ の2次形式 $\delta^2 \Gamma$ が負の値、すなわち不安定状態になることはない。特異領域とは中立

状態の集合であり、その中につり合いの解が1つあれば、それ以外にも解があることになるが、それらは離れて存在するのではなく、ある凸閉領域の中で互いに連結している。すなわち、特異状態を生じさせている要素の弛緩が保持される範囲がすべて解であり、それらの全ポテンシャル・エネルギーは同じ最小値を持つ。この凸領域自体を1つの解として広義に解釈すれば、全領域で $\{F_N\}$ と $\{x_N\}$ は1対1対応にあるということもできる。

2.2 弾性カテナリー要素による応力法つり合い解析

2.2.1 組合せケーブルでの応力法展開

単一ケーブルの応力法によるつり合い解析として、文献6)7) がある。Michalos and Birnstiel⁶⁾ は、分布外力を節点上の集中外力に置換する直線ケーブルとしての扱いであるが、ケーブルの片端断面力のみを未知量として、他端の適合条件をその決定条件とする問題設定を示している。O'Brien and Francis⁷⁾ は、同様の考え方を、区分的等分布荷重と集中荷重が作用した単一ケーブルの2次元問題に適用している。ここでは、任意荷重条件下での一般ケーブル構造に対する展開を考える²⁰⁾。

第1.4節で述べている応力法による単一弾性カテナリー・ケーブルの扱いを、ケーブル構造に展開することを考える。構造はケーブル部材のみから成るものとし、構造を空間に固定している支持節点を $k = 1, \dots, K$ と表し、構造の中で3本以上のケーブルが結合している点およびケーブルの自由端に自由節点 $n = 1, \dots, N$ を置くものとし、それらの節点間のケーブルを要素として $(m) = (1), \dots, (M)$ と表す。要素の両端は始端と終端とに区別して、始端 \rightarrow 終端の方向に物体固定座標 s (初期長さ) をとるが、このとき、すべての自由節点 n が少なくとも1つの要素の終端となるように s -座標の方向を決めることができる。ここで、この構造に応力法を適用するために、それぞれの自由節点 n において、それを終端とする任意の1つ以外のすべての要素の終端を節点 n より切り離すことを考える。切断された終端には疑似節点 i を置くものとし、連続しているはずのケーブル張力は適合力 \hat{T}_i (疑似節点側に \hat{T}_i , 自由節点側に $-\hat{T}_i$) に置き換える。支持節点 k では、それを終端とするすべての要素を切り離して疑似節点を考え、適合力を置く。以上の結果、ケーブル構造は、 s -座標の正方向には要素が分岐しながら自由端に達し、反対方向は各1つの支持節点に繋がるケーブル集合に置換される (図2.3)。この構造を、分岐型の組合せケーブルとよぶものとする。

分岐型ケーブル構造中では、静的つり合いより、要素の任意点の断面張力 $T(s)$ は、その点より s -方向側にある全区間に作用する外力と適合力 \hat{T}_i の和で与えられる。適合力の値を仮に与えたとすれば、構造中の張

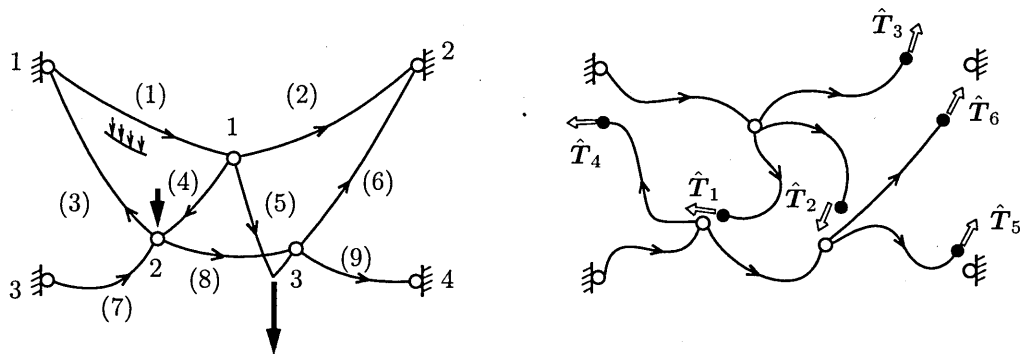


図 2.3: 分岐型組合せケーブルへの置換

力分布が決まることになり、自重などの等分布荷重に対しては1.4節の式(1.44)（あるいは、一般荷重に対しては式(1.40)）により各要素形状が得られる。これらのケーブル形状を分岐型に組み合わせたとき、仮定した \hat{T}_i が真値でなければ、切断した箇所が適合しない結果となる。つり合い解析は、適合条件が満たされる適合力 $\{\hat{T}_i, i=1, \dots, I\}$ を求める問題に帰着することになる。

前述した切断の手順より、適合条件の数 I は

$$\begin{aligned} I &= \sum_n [\text{自由節点 } n \text{ に終端接続する要素数} - 1] + \sum_k [\text{支持節点 } k \text{ に終端接続する要素数}] \\ &= \text{要素数 } M - \text{自由節点数 } N \end{aligned} \quad (2.14)$$

となる。分岐型の組合せケーブルの中で張力は前述のように分布するが、特に各要素の始端張力 $\{T_0\} = \{T_{0(m)}, m=1, \dots, M\}$ 、および支持節点での反力 $\{R\} = \{R_k, k=1, \dots, K\}$ に注目すれば

$$\{T_0\} = [S_P] \{\hat{T}\} + [S_{PN}] \{P_N\} + [S_{PM}] \{\bar{P}_{(M)}\} \quad (2.15a)$$

$$\{R\} = [S_P^*] \{\hat{T}\} + [S_{PN}^*] \{P_N\} + [S_{PM}^*] \{\bar{P}_{(M)}\} \quad (2.15b)$$

の形で表すことができる。ここに、 $\{\hat{T}\}$ 、 $\{P_N\}$ は、それぞれ切断箇所の適合力、および自由節点に作用する集中外力を成分とする列ベクトルであり、 $\{\bar{P}_{(M)}\}$ は、各要素上にある分布外力と集中外力の和：

$$\bar{P}_{(m)} = \left(\int_0^l q(s) ds + \sum_{\alpha} P_{\alpha} \right)_{(m)} \quad (2.16)$$

を成分とするベクトルを表す。また、 $[S_P]$ 、 $[S_{PN}]$ 、 $[S_{PM}]$ および $[S_P^*]$ 、 $[S_{PN}^*]$ 、 $[S_{PM}^*]$ は、節点と要素の連結状態によって決まる力の接続性を表すマトリックスであり、 $\pm I$ 、 $0(3 \times 3 \text{ の } \pm \text{単位, 零行列})$ の成分よりなる。図2.3の例では、これらの接続マトリックスは以下のようになる：

$$\begin{aligned} [S_P] &= \begin{bmatrix} I & & & & & & & & & \\ & I & & & & & & & & \\ & & I & & & & & & & \\ & & & I & & & & & & \\ & I & & & & & & & & \\ & & I & & & & & & & \\ & & & & & & I & & & \\ -I & -I & & I & I & I & & & & \\ & & -I & & I & I & & & & \\ & & & & & & I & & & \\ & & & & & & & I & & \end{bmatrix}, \quad [S_{PN}] = \begin{bmatrix} I & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & I & I & & \\ & & & & & & & I & & \\ & & & & & & & & I & \end{bmatrix} \\ [S_{PM}] &= \begin{bmatrix} I & I & & I & I & & & & & \\ & I & & & & & & & & \\ & & I & & & & & & & \\ & & & I & & & & & & \\ & & & & I & & & & & \\ & & & & & I & & & & \\ & & & & & & I & & & \\ & & & & & & & I & I & I \\ & & & & & & & I & I & I \\ & & & & & & & & I & \end{bmatrix}, \quad [S_P^*] = \begin{bmatrix} I & I & I & -I & & & & & & \\ & & & -I & & & & & & -I \\ -I & -I & & I & I & I & & & & \\ & & & & & & -I & & & \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[S_{PN}^*] = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & I \\ & & \end{bmatrix}, \quad [S_{PM}^*] = \begin{bmatrix} I & I & & I & I \\ & & I & & I & I & I & I \\ & & & & & & & \end{bmatrix}$$

外力 $\{\mathbf{P}_N\}$ と $\{\bar{\mathbf{P}}_{(M)}\}$ は既知量であり、適合力 $\{\hat{\mathbf{T}}\}$ の値を仮定して与えれば、前式と式 (1.43) (あるいは、式 (1.39)) により、各要素内の張力分布が決まり、式 (1.44) (あるいは、式 (1.40)) のように各要素のつり合い形状が得られる。それらの各要素毎の始端から終端までの位置ベクトルを、 $\{\bar{\mathbf{x}}_{(M)}\} = \{\bar{\mathbf{x}}_{(m)}, m = 1, \dots, M\}$ と表すものとする。

仮定した適合力は一般に真値ではないから、各要素形状を分岐型ケーブル構造に組み上げれば、最初に切断していた箇所に不適合を生じる。この不適合ベクトル $\{\hat{\mathbf{x}}\} = \{\hat{\mathbf{x}}_i, i = 1, \dots, I\}$ は、要素両端間の形状 $\{\bar{\mathbf{x}}_{(M)}\}$ と 支持節点の空間位置 $\{\mathbf{x}^*\} = \{\mathbf{x}_k^*, k = 1, \dots, K\}$ (: 定数) を組み合わせて

$$\{\hat{\mathbf{x}}\} = [S_X] \{\bar{\mathbf{x}}_{(M)}\} + [S_X^*] \{\mathbf{x}^*\} \quad (2.17)$$

と表すことができる。ここに、 $[S_X]$ と $[S_X^*]$ は、 $\pm I, \mathbf{0}$ を成分とする接続マトリックスであるが、後述するように、式 (2.15) 中の力の接続マトリックスと

$$[S_X] = [S_P]^T, \quad [S_X^*] = [S_P^*]^T \quad (2.18)$$

の反傾関係にある。

適合条件： $\{\hat{\mathbf{x}}(\{\hat{\mathbf{T}}\})\} = \{\mathbf{0}\}$ を満たす適合力 $\{\hat{\mathbf{T}}\}$ を求める問題は、次節で述べるように正凸ポテンシャルの最小値問題であり、前述した $\{\hat{\mathbf{T}}\} \rightarrow \{\hat{\mathbf{x}}\}$ の関係と以下に示すその間の接線撓性マトリックスを用いれば、例えば 2.3 節で述べられている数値計算法によりその唯一解を求めることができる。適合力の微小な変化による各要素の始端張力の変化は、式 (2.15a) より、 $\delta\{\mathbf{T}_0\} = [S_P]\delta\{\hat{\mathbf{T}}\}$ であり、それによる各要素の形状変化を表す撓性マトリックス $[Q(\mathbf{T}_0)]_{(m)}$ は、1.4 節の式 (1.45) (あるいは、式 (1.41)) により既に求めている。これらの要素形状変化による不適合ベクトルの変化は、式 (2.17) の接続マトリックス $[S_X]$ により表せる。以上をマトリックス表示のもとに連続させれば、分岐型組合せケーブルの接線撓性マトリックスは

$$\delta\{\hat{\mathbf{x}}\} = [Q_I(\{\hat{\mathbf{T}}\})] \delta\{\hat{\mathbf{T}}\} \quad (2.19a)$$

ただし、

$$[Q_I] = [S_X] [Q_{(M)}] [S_P], \quad [Q_{(M)}] = \begin{bmatrix} [Q]_{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & [Q]_{(M)} \end{bmatrix} \quad (2.19b)$$

と表せることになる。

分岐型ケーブル構造において真の適合力が得られれば、そのときの要素形状 $\{\bar{\mathbf{x}}_{(M)}\}$ を用いて、つり合い状態での自由節点位置 $\{\mathbf{x}_N\} = \{\mathbf{x}_n, n = 1, \dots, N\}$ と要素上の s 点の空間位置 $\{\mathbf{x}_{(M)}(s)\} = \{\mathbf{x}_{(m)}(s), m = 1, \dots, M\}$ は

$$\{\mathbf{x}_N\} = [S_{XN}] \{\bar{\mathbf{x}}_{(M)}\} + [S_{XN}^*] \{\mathbf{x}^*\} \quad (2.20a)$$

$$\{\mathbf{x}_{(M)}(s)\} = [S_{XM}] \{\bar{\mathbf{x}}_{(M)}\} + [S_{XM}^*] \{\mathbf{x}^*\} + \left\{ \int_0^s \left(\frac{1}{EA} + \frac{1}{|T(s)|} \right) T(s) ds \right\} \quad (2.20b)$$

と表すことができる。このとき、これらの接続マトリックス $[S_{XN}], [S_{XM}], [S_{XN}^*], [S_{XM}^*]$ は、式 (2.18) と同等に、式 (2.15a), (2.15b) に含まれる接続マトリックスと

$$\begin{aligned} [S_{XN}] &= [S_{PN}]^T, \quad [S_{XN}^*] = [S_{PN}^*]^T, \\ [S_{XM}] &= [S_{PM}]^T - [I], \quad [S_{XM}^*] = [S_{PM}^*]^T \end{aligned} \quad (2.21)$$

の反傾関係にある。

式 (2.18) と (2.21) の反傾関係については、仮想仕事の原理を用いて次のように説明できる。分岐型組合せケーブルの中での各要素の s 点での仮想変位を $\delta \mathbf{x}_{(m)}(s)$ とし、それによる伸び率の変化を $\delta \epsilon_{(m)}(s)$ とする。このときの自由節点と支持節点の仮想変位を $\delta \mathbf{x}_n, \delta \mathbf{x}_k^*$ 、そして不適合ベクトルの変化を $\delta \hat{\mathbf{x}}_i$ とすれば、仮想仕事の式は

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \left(\int_0^l [T(s) \delta \epsilon(s) - q(s) \cdot \delta \mathbf{x}(s)] ds - \Sigma_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha} \cdot \delta \mathbf{x}(s_{\alpha}) \right)_{(m)} \\ - \sum_{n=1}^N \mathbf{P}_n \cdot \delta \mathbf{x}_n - \sum_{i=1}^I \hat{\mathbf{T}}_i \cdot \delta \hat{\mathbf{x}}_i - \sum_{k=1}^K (-\mathbf{R}_k) \cdot \delta \mathbf{x}_k^* = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

と表される。他方で、要素の始端、終端の張力成分を $\mathbf{T}_{0(m)}, \mathbf{T}_{l(m)}$ とし、その仮想変位を $\delta \mathbf{x}_{0(m)}, \delta \mathbf{x}_{l(m)}$ とすれば、要素 (m) 毎の仮想仕事の式

$$\left(\int_0^l [T(s) \delta \epsilon(s) - q(s) \cdot \delta \mathbf{x}(s)] ds - \Sigma_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha} \cdot \delta \mathbf{x}(s_{\alpha}) \right)_{(m)} - \mathbf{T}_{l(m)} \cdot \delta \mathbf{x}_{l(m)} + \mathbf{T}_{0(m)} \cdot \delta \mathbf{x}_{0(m)} = 0 \quad (2.23)$$

が成立する。この式を前式に代入した後、各要素の形状変化 $\delta \bar{\mathbf{x}}_{(m)}$ 、 $m = 1, \dots, M$ （始端に対する終端の相対変位）と支持節点の変位 $\delta \mathbf{x}_k^*$ 、 $k = 1, \dots, K$ を、ここでの独立な仮想変位として考える。さらに、 $\mathbf{T}_{l(m)} = \mathbf{T}_{0(m)} - \bar{\mathbf{P}}_{(m)}$ 、 $\delta \mathbf{x}_{l(m)} = \delta \mathbf{x}_{0(m)} + \delta \bar{\mathbf{x}}_{(m)}$ の関係を考慮しながら、式 (2.17) および式 (2.20) の微分式を代入して整理すれば

$$\begin{aligned} & \left([S_P] \{ \hat{\mathbf{T}} \} + [S_{PN}] \{ \mathbf{P}_N \} + [S_{PM}] \{ \bar{\mathbf{P}}_{(M)} \} \right)^T \delta \{ \bar{\mathbf{x}}_{(M)} \} \\ & + \left([S_P^*] \{ \hat{\mathbf{T}} \} + [S_{PN}^*] \{ \mathbf{P}_N \} + [S_{PM}^*] \{ \bar{\mathbf{P}}_{(M)} \} \right)^T \delta \{ \mathbf{x}^* \} \\ & - \{ \hat{\mathbf{T}} \}^T ([S_X] \delta \{ \bar{\mathbf{x}}_{(M)} \} + [S_X^*] \delta \{ \mathbf{x}^* \}) \\ & - \{ \mathbf{P}_N \}^T ([S_{XN}] \delta \{ \bar{\mathbf{x}}_{(M)} \} + [S_{XN}^*] \delta \{ \mathbf{x}^* \}) \\ & - \{ \bar{\mathbf{P}}_{(M)} \}^T ([S_{XM}] - [I]) \delta \{ \bar{\mathbf{x}}_{(M)} \} + [S_{XM}^*] \delta \{ \mathbf{x}^* \} = 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

の恒等式が得られる。仮想変位 $\delta \{ \bar{\mathbf{x}}_{(M)} \}$ 、 $\delta \{ \mathbf{x}^* \}$ 、および作用する力 $\{ \hat{\mathbf{T}} \}$ 、 $\{ \mathbf{P}_N \}$ 、 $\{ \bar{\mathbf{P}}_{(M)} \}$ はそれぞれ独立であり、それらの任意性のもとに前式が成立することより、前述の力と変位の接続マトリックスの間の反傾関係がいえる。

2.2.2 適合条件まわりの補ポテンシャル

1) 単一ケーブル

第 1.4 節で述べた終端を座標 $\mathbf{x}^* = \{x^*, y^*, z^*\}$ に固定する単一たわみケーブルの問題を考える。終端張力成分 $\mathbf{T}_l (= \{T_{lx}, T_{ly}, T_{lz}\})$ を未知量とする応力法において、そのある値でのつり合い形状の上で、張力の微

小変化 $\delta T_l (= \delta T(s))$ によって生じる終端座標の変化 $\delta x_l (= \delta \{x_l, y_l, z_l\})$ を表す接線撓性 $[Q(T_l)]$ は式 (1.41) で与えられているが、そこに含まれるマトリックス $[A(s)]$ の2次形式を展開すれば

$$\begin{aligned} \delta T_l^T [A(s)] \delta T_l &= \frac{1}{EA} \{ \delta T_{lx}^2 + \delta T_{ly}^2 + \delta T_{lz}^2 \} \\ &+ \frac{1}{|T(s)|^3} \{ (T_z \delta T_{ly} - T_y \delta T_{lz})^2 + (T_x \delta T_{lz} - T_z \delta T_{lx})^2 + (T_y \delta T_{lx} - T_x \delta T_{ly})^2 \} \end{aligned} \quad (2.25)$$

であって、断面張力 $T(s) \neq 0$ で任意の非零の δT_l に対して $\delta T_l^T [A(s)] \delta T_l > 0$ となる。したがって、接線撓性マトリックス $[Q(T_l)] = [\int_0^l A(s) ds]$ も、区間 $0 \leq s \leq l$ で $T(s) \neq 0$ であれば、正定値対称となる。これにより、式 (1.42) のポテンシャル $F(T_l)$ は下に有界な正凸関数であることがわかり、 x_l と T_l の関数関係は1対1対応にある。終端が $\{x^*, y^*, z^*\}$ に固定される問題では、第1変分が $\delta W^* = (x_l(T_l) - x^*)^T \delta T_l$ となる全補ポテンシャルとして

$$W^*(T_l) = F(T_l) - (x^* T_{lx} + y^* T_{ly} + z^* T_{lz}) \quad (2.26)$$

を考えることができ、適合条件を満たす解 T_l で $W^*(T_l)$ は絶対最小値をとる。

ケーブルの1点 ($s = \tau$) で断面力が $T(\tau) = 0$ であれば、撓性マトリックス $[Q(T_l)]$ の中で ∞ の成分が生じる特異状態となる。等分布荷重の弾性カテナリーの場合では、図 2.4 に示す荷重鉛直方向に折れ曲がって垂れる状態において撓性マトリックスの x_l - T_{lx} 成分が ∞ 、すなわち水平方向の剛性がなくなる。しかし、この場合も含めて x_l と T_l の関数関係は1対1の対応にあり、数値計算上除去することが(あるいは、無視することが)できる特異状態といえる。

ここで、伸びを考えない場合 ($EA = \infty$) を考えると、 $T(s) \times \delta T_l = 0$ の方向の δT_l に対して式 (2.25) の2次形式は零値となる。区間 $[0, l]$ でそのような δT_l がある場合、すなわち図 2.5 に示すような作用外力が一定方向でケーブルが直線形状にあるとき、その方向の δT_l に対して x_l の変化はなく、撓性マトリックスは半正定値となる。伸びを考える場合でも、実際に用いられるケーブルの引張力 $/EA$ の比では式 (2.25) の第1項は第2項に比べて十分小さく、直線形状に近い引張ケーブルの撓性マトリックス $[Q(T_l)]$ は比較的特異マトリックスに近い。実際の数値解析において、ケーブルが弛緩して大きくたわむ状態から直線に近い緊張状態までを一貫して処理するためには、適切な倍精度計算や誤差評価などが必要とされる。

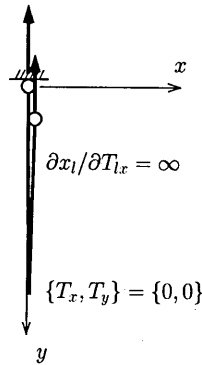


図 2.4: カテナリー・ケーブルの特異状態

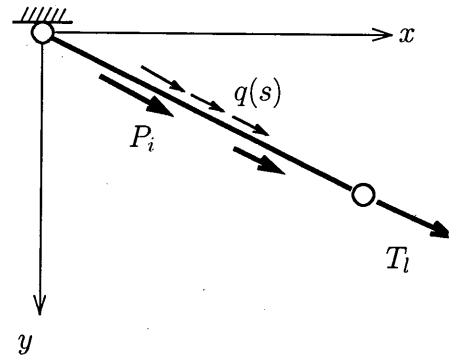


図 2.5: ケーブルの直線状態

2) 分岐型組合せケーブル

式 (2.19) の $\{\hat{x}\}$ - $\{\hat{T}\}$ 間の接線撓性マトリックス $[Q_I(\{\hat{T}\})]$ の適合力の微小変化 $\delta\{\hat{T}\}$ に対する 2 次形式は、式 (2.15a) と (2.18) に含まれる接続マトリックス $[S_P]$ と $[S_X]$ の意味より

$$\delta^2\Gamma (= \delta\{\hat{T}\}^T [Q_I(\{\hat{T}\})] \delta\{\hat{T}\} = \delta\{\mathbf{T}_0\}^T [Q_{(M)}] \delta\{\mathbf{T}_0\}) = \sum_{m=1}^M \delta^2 I_{(m)} \quad (2.27a)$$

$$\delta^2 I_{(m)} = \delta\mathbf{T}_{0(m)}^T [Q]_{(m)} \delta\mathbf{T}_{0(m)} \left(= \delta\mathbf{T}_{0(m)}^T \left[\int_0^l A(s) ds \right] \delta\mathbf{T}_{0(m)} \right) \quad (2.27b)$$

として、各要素の 2 次形式の総和で表される。ただし、 $\delta\mathbf{T}_{0(m)}$ は、 $\delta\{\hat{T}\}$ によって生じる各要素の始端張力変化 ($\delta\{\mathbf{T}_0\} = [S_P] \delta\{\hat{T}\}$) を表わす。したがって、単一ケーブルの場合と同じ条件の下に、分岐組合せケーブルの不適合ベクトル-適合力間の接線撓性 $[Q_I(\{\hat{T}\})]$ もまた正定値対称となる。

マトリックス $[Q_I] = [\partial\{\hat{x}\}/\partial\{\hat{T}\}]$ が対称であることより、 $\delta W^* = \{\hat{x}(\{\hat{T}\})\}^T \delta\{\hat{T}\}$ は完全微分形にあり、式 (2.15), (2.17) および (2.18) を用いれば

$$\delta W^*(\{\hat{T}\}) = (\{\bar{x}_{(M)}\}^T [S_X]^T + \{x^*\}^T [S_X^*]^T) \delta\{\hat{T}\} = \{\bar{x}_{(M)}\}^T \delta\{\mathbf{T}_0\} + \{x^*\}^T \delta\{\mathbf{R}\} \quad (2.28)$$

と展開できる。この式を積分するとき、右辺第 1 項は、第 1.4 節の弾性カテナリー要素での式 (1.46) (一般形としては、式 (1.42)) で表される要素毎の補ポテンシャル $F_{(m)}(\mathbf{T}_0)$ の和で表されることになり、分岐型組合せケーブルの全補ポテンシャル・エネルギーは

$$W^*(\{\hat{T}\}) = \sum_{m=1}^M F_{(m)}(\mathbf{T}_0) + \{x^*\}^T \{\mathbf{R}\} \quad (2.29)$$

与えられることになる。前述の $[Q_I(\{\hat{T}\})]$ の正定値性は、この全補ポテンシャル $W^*(\{\hat{T}\})$ が下に凸のスカラー関数であることを意味しており、適合条件: $\{\hat{x}(\{\hat{T}\})\} = \{\mathbf{0}\}$ を満たす解 $\{\hat{T}\}$ で絶対最小値をとる。

2.3 つり合い解析での繰返し計算

本章 2.1, 2.2 節のようにモデル化された後、実際のつり合いの解を得るには、自由度の数の代数方程式を数値的に解く手順が必要となる。電算機の使用を前提とすれば、Newton-Raphson 法を基本の手法として考えることができるが、構造上の不安定機構や部材の弛緩による特異状態の発生などによって、ケーブル構造は原則的には強非線形系として扱われる必要がある。Buchholdt¹⁰⁾ は、不安定機構 (変位法) による接線剛性の逆行列計算不能の状況を考慮して、全ポテンシャル・エネルギーの勾配方向、すなわちつり合い力の方向で、修正の大きさ (スカラー値) を全ポテンシャル・エネルギーが最小となるように決定する手順を提案している。接線剛性の上での Newton-Raphson 法は、修正が小さい範囲では有効であり、修正の大きさを別途に制御しようとする考え方がある。Saafan¹¹⁾ と Haug and Powell¹²⁾ は、必要な回数だけその修正量を半減させる方法を提案しており、Kar and Okazaki¹⁹⁾ は、不釣り合い誤差ベクトルの 1 成分に注目して、繰返しの前回、前々回でのその値を用いて次の修正の大きさを決定する手順を提案している。ここでは、単純 Newton-Raphson 法、および系のポテンシャル値をスカラー指標に用いて接線係数の上での修正の大きさを制御する部分修正法^{20), 21)}について述べる。

2.3.1 Newton-Raphson 法

弾性有限変位系が離散化されればベクトル変数 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ とその関数 $\mathbf{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_N\}$ の問題となり、つり合いの解を決定する条件は代数方程式 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}$ の形をとる。このとき、系は変分問題にあり、接線関係 $\delta\mathbf{F} = [\mathbf{D}(\mathbf{x})]\delta\mathbf{x}$ の係数マトリックス $[\mathbf{D}(\mathbf{x})]$ は対称となる。したがって、 $\delta\Pi = (\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{C})^T\delta\mathbf{x}$ は完全微分形となり、その積分としての系のポテンシャル $\Pi(\mathbf{x})$ が存在する。2.1節の変位法ケーブル構造解析では、これらの $\mathbf{F}, \mathbf{x}, \mathbf{C}, [\mathbf{D}], \Pi$ に対して、自由節点での節点力 $\{\mathbf{F}_N\}$ 、節点位置 $\{\mathbf{x}_N\}$ 、節点外力 $\{\mathbf{P}_N\}$ 、接線剛性 $[\mathbf{K}_N]$ 、全ポテンシャル・エネルギー W がそれぞれ対応しており、つり合い式 $\{\mathbf{F}_N(\{\mathbf{x}_N\})\} = \{\mathbf{P}_N\}$ が解を決定する条件式となる。また、2.2節の応力法によるつり合い解析では、分岐型組合せケーブルでの不適合ベクトル $\{\hat{\mathbf{x}}\}$ 、適合力 $\{\hat{\mathbf{T}}\}$ 、零ベクトル $\{\mathbf{0}\}$ 、接線撓性 $[\mathbf{Q}_I]$ 、全補ポテンシャル W^* 、そして適合条件式 $\{\hat{\mathbf{x}}(\{\hat{\mathbf{T}}\})\} = \{\mathbf{0}\}$ が、それらに対応する。

離散化において関数関係 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ と同時に接線係数 $[\mathbf{D}(\mathbf{x})]$ も展開されるとき、方程式 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}$ を解く1つの基本的な数値計算法として Newton-Raphson 法がよく知られている。初期値 $\mathbf{x}_0 (= \mathbf{x}_{[0]})$ を与えて計算を始めるが、繰返し $[i]$ 回目の $\mathbf{x}_{[i]}$ での誤差ベクトル $\Delta\mathbf{F}_{[i]} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{[i]}) - \mathbf{C}$ と接線係数 $\delta\mathbf{F} = [\mathbf{D}]_{[i]}\delta\mathbf{x}$ を求めた段階で、誤差を逆方向に $-\Delta\mathbf{F}_{[i]}$ だけ動かすような変数 \mathbf{x} の修正を接線係数の上で考えれば、その修正量は $\Delta\mathbf{x}_{[i]} = -[\mathbf{D}]_{[i]}^{-1}\Delta\mathbf{F}_{[i]}$ であり、 $[i+1]$ 回目の変数値として

$$\mathbf{x}_{[i+1]} = \mathbf{x}_{[i]} - [\mathbf{D}]_{[i]}^{-1}\Delta\mathbf{F}_{[i]} \quad (2.30)$$

が決まる。係数マトリックス $[\mathbf{D}]_{[i]}$ が正則であり、修正前の誤差 $\Delta\mathbf{F}_{[i]}$ が比較的小さい限り、修正後の $\mathbf{x}_{[i+1]}$ での $\mathbf{F}_{[i+1]} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_{[i+1]})$ はより解に近くなる。この $\mathbf{x}_{[i+1]}$ に対して同じ手順をさらに繰り返すことにより、 $\Delta\mathbf{F} = \mathbf{0}$ となる解 \mathbf{a} に数値的に到達することができる。

この方法では、初期値 \mathbf{x}_0 が解 \mathbf{a} に近く設定されて、その間での接線係数 $[\mathbf{D}(\mathbf{x})]$ の変化が比較的小さいとき、収束値を得ることが保証される。いわゆる弱非線形問題に対して有効な方法であることが知られているが、非線形問題一般での収束域は数学的には明確にされていない。ケーブル構造のつり合い解析は、問題の設

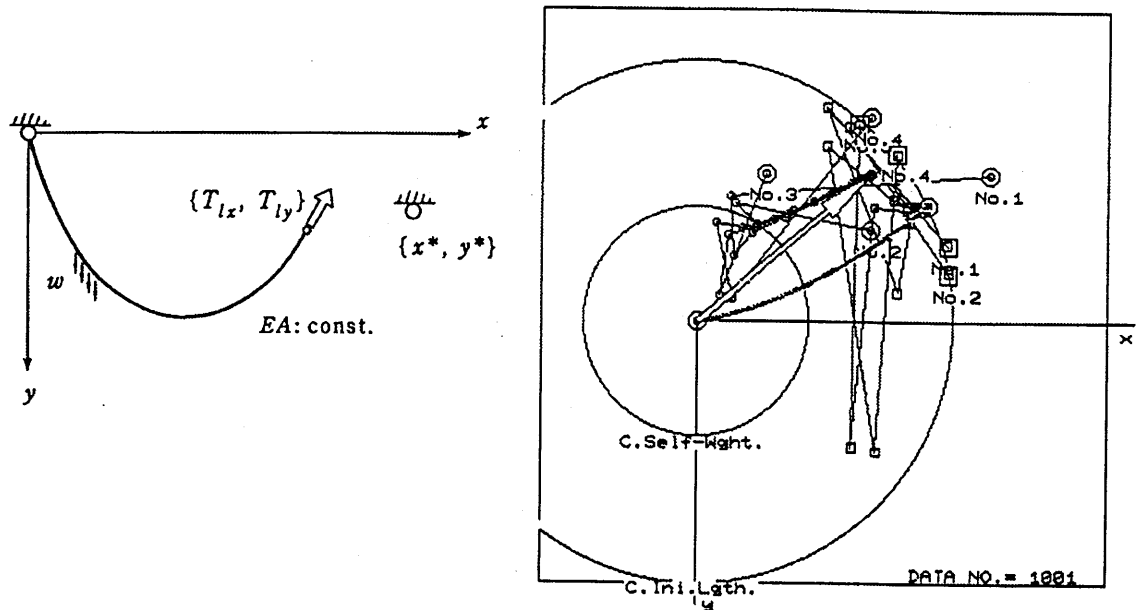


図 2.6: Newton-Raphson 法による単一たわみケーブル

定にもよるが、一般には強非線形問題であり、Newton-Raphson 法では収束解が得られにくい場合が少なくない。2.1節の直線ケーブル要素による変位法解析では、修正後の $\mathbf{x}_{[i+1]}$ が特異領域に入ることが生じれば、接線係数 $[D]_{[i+1]}$ の逆関係は不能となり計算が続行できなくなる（正則域で計算される限り比較的良好な収束傾向にある）。2.2節のたわみケーブルを用いた応力法解析では、特異領域はないものの、単純 Newton-Raphson 法による収束は一般に難しい。

図 2.6 は、前節の単一たわみケーブルの適合問題において、 $l = 100.[L]$ 、 $EA = 1000.[F]$ 、 $w = 0.1 [F/L]$ の弾性ケーブルを $\{x^*, y^*\} = \{90., -45.\}[L]$ の位置に張るものとして、その終端張力成分 $\{T_x, T_y\}_l$ を Newton-Raphson 法で求めるときのおおよその収束範囲を示している。共通の $\{x, y\}$ -座標の上で、終端張力 $\{T_x, T_y\}_{l[i]}$ とその座標値 $\{x, y\}_{l[i]}$ の軌跡をそれぞれ \bigcirc -印と \square -印で表しており（2つの円は自重 wl の大きさと初期長さ l の大きさを意味する）、適合張力 $\{T_x, T_y\}_l = \{15.35, -12.88\}[F]$ に対して x -方向に $\pm 10.$ 、 y -方向には $\pm 4.[F]$ 程度の範囲が収束域となっている。

2.3.2 部分修正法

これまで述べてきたように、ケーブル構造のつり合い解析は系のポテンシャルの最小値問題であり、そのことに注目する。前節での一般的な表記を用いるものとして、1つの既知の正則許容状態 $\mathbf{x}_{[i]}$ から $\Delta \mathbf{x}$ だけ動かしたときの系のポテンシャルは、Taylor 展開の上で

$$\Pi(\mathbf{x}_{[i]} + \Delta \mathbf{x}) = \Pi_{[i]} + (\mathbf{F}_{[i]} - \mathbf{C})^T \Delta \mathbf{x} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{x}^T [D]_{[i]} \Delta \mathbf{x} + 0(\Delta \mathbf{x}^3) \quad (2.31)$$

と表される。ここに、添字 $()_{[i]}$ は、 $\mathbf{x}_{[i]}$ での値を意味する。Newton-Raphson 法(式(2.30))による $\mathbf{x}_{[i]}$ からの修正 $\Delta \mathbf{x} = -[D]_{[i]}^{-1} \Delta \mathbf{F}_{[i]}$ を前式に代入すれば、修正後のポテンシャルは

$$\Pi(\mathbf{x}_{[i]} + \Delta \mathbf{x}) = \Pi_{[i]} - \frac{1}{2} \Delta \mathbf{F}_{[i]}^T [D]_{[i]}^{-1} \Delta \mathbf{F}_{[i]} + 0(\Delta \mathbf{F}_{[i]}^3) \quad (2.32)$$

と表すことができる。 $\mathbf{x}_{[i]}$ が $\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{C}$ の解 \mathbf{a} に比較的近いとき、右辺の $\Delta \mathbf{F}_{[i]}$ 3 次以上の高次項は相対的に小さく、第2項は正定値であるから、系のポテンシャルはその分だけ小さくなるといえる。修正後の $\mathbf{x}_{[i]} + \Delta \mathbf{x}$ は十分に解 \mathbf{a} に近づいており、それを近似解とみなせば、 $\mathbf{x}_{[i]}$ でのポテンシャルは解での最小値 $\Pi(\mathbf{a})$ より第2項分だけエネルギー位が高い状態にあることが第1近似としていえる。ここで、ベクトル誤差 $\Delta \mathbf{F}_{[i]} = \mathbf{F}_{[i]} - \mathbf{C}$ の2次形式であるこの項を、 $\Delta \mathbf{F}_{[i]}$ の同次量に直して

$$R_{[i]} = \sqrt{\Delta \mathbf{F}_{[i]}^T [D]_{[i]}^{-1} \Delta \mathbf{F}_{[i]}} \quad (2.33)$$

をスカラー誤差として考えるものとする。ベクトル誤差に対する同次量スカラー値としては、その絶対値 $|\Delta \mathbf{F}_{[i]}|$ が先ず考えられるが、 $\Delta \mathbf{F}_{[i]}$ の中の成分の大小関係は、 \mathbf{x} -空間へ変換した $\Delta \mathbf{x}_{[i]} = [D]_{[i]}^{-1} \Delta \mathbf{F}_{[i]}$ の成分のそれとは一般に異なる（さらに一般の問題では、成分の次元が一致するとも限らない）。接線係数 $[D]_{[i]}$ を重さとした絶対値である式(2.33)の $R_{[i]}$ は、前述したエネルギーとしての意味を持ち、離散化ポテンシャル系一般で用いることができる。

$\mathbf{x}_{[i]}$ が解 \mathbf{a} から大きく離れていれば、 $\Delta \mathbf{F}_{[i]}$ を接線係数の上で修正したとき、その誤差が改善されるとは限らない。接線係数が小さい修正量に対して正確であることに注目して、ここでは、全誤差 $\Delta \mathbf{F}_{[i]}$ の方向にその一部 $\theta_{[i]} \Delta \mathbf{F}_{[i]}$ だけを修正するものとして

$$\mathbf{x}_{[i+1]} = \mathbf{x}_{[i]} - \theta_{[i]} [D]_{[i]}^{-1} \Delta \mathbf{F}_{[i]} \quad (2.34)$$

とする修正式を考える． $\theta_{[i]}$ は $0 < \theta_{[i]} \leq 1$ の範囲の修正係数であるが，係数 $[D]_{[i]}$ が正則であれば，その値を小さくする限り誤差の改善は保証される：式 (2.34) を式 (2.31) に代入すれば，修正前後のポテンシャルは

$$\Pi_{[i+1]} = \Pi_{[i]} - (\theta - \frac{\theta^2}{2})_{[i]} R_{[i]}^2 + O(\theta_{[i]}^3 R_{[i]}^3) \quad (2.35)$$

の関係にあり， $0 < \theta \leq 1$ で $\theta - \theta^2/2 > 0$ であることより，小さい $\theta_{[i]}$ で高次項である右辺第3項は幾らでも小さくなり， $\Pi_{[i]} > \Pi_{[i+1]}$ がいえる．

実際の繰返し計算の中では，各回の修正係数 $\theta_{[i]}$ をどのように決めるかが問題となる． $\theta_{[i]}$ を極端に小さくとれば，その割合としての修正は確実となるが，解に到るまでの全繰返し回数は不必要に多くなる．式 (2.34) の修正の正確さは修正量 $\theta_{[i]} \Delta F_{[i]}$ の大きさにかかっており，収束が進んで誤差 $\Delta F_{[i]}$ 自体が小さくなれば，係数 $\theta_{[i]}$ は相対させて大きくするのが合理的である．ベクトル $\theta_{[i]} \Delta F_{[i]}$ にはスカラー量として式 (2.33) より $\theta_{[i]} R_{[i]}$ が対応するが，1つの方法として，その値が各回 $[i]$ で一定となるように係数 $\theta_{[i]}$ を決める手順が考えられる．基本の修正係数として $\theta_0 (= \theta_{[0]}$ ：初回の修正係数) を最初に $0 < \theta_0 \leq 1$ の範囲で1つ与えるものとし，それ以降の $\theta_{[i]}$ は $\theta_{[i]} R_{[i]} = \theta_0 R_{[0]}$ により決定する．このとき，収束が進んで $R_{[i]}$ 自体が十分小さくなって $R_{[i]} < \theta_0 R_{[0]}$ となれば $\theta_{[i]}$ はいくらでも大きくなるが，1より大きい修正係数は無意味であり，その後は $\theta_{[i]} = 1$ として Newton-Raphson 法で継続計算するものとする．式で表せば

$$\theta_{[i]} = \min \left(\theta_0 \frac{R_{[0]}}{R_{[i]}}, 1 \right) \quad (2.36)$$

となる．この場合であっても，適切な基本修正係数 θ_0 をあらかじめ知ることはできず，適当な値を与えて計算を開始するものとするれば，その値の変更が必要となる場合も生じる．誤差の改善は $\Pi_{[i]} > \Pi_{[i+1]}$ をみるのが理論上正しいが，差 $\Pi_{[i+1]} - \Pi_{[i]}$ は前述のように $\Delta F_{[i]}$ の2次項より始まる量であり，解の近傍で高次微小項となり，実際の数値計算では桁落ちによって正確な比較は難しくなる．逆に，スカラー値 $R_{[i]}$ は解の近くで誤差指標としてより正確となる． $x_{[i]}$ の解 a からの遠近は $\theta_{[i]} < 1$, or $= 1$ に対応しており，各回の修正の成否は

$$\Pi_{[i]} > \Pi_{[i+1]} \quad \text{for } \theta_{[i]} < 1 \quad (2.37a)$$

$$R_{[i]} > R_{[i+1]} \quad \text{for } \theta_{[i]} = 1 \quad (2.37b)$$

で確認するものとする． $[i] \rightarrow [i+1]$ で式 (2.37) が成立しないことが生じれば，その理由は θ_0 がなお大き過ぎること以外になく，前回の $x_{[i]}$ に戻して θ_0 をより小さくして計算をやり直すものとする．例えば，不成立のときの $\theta_{[i]}^{\text{false}}$ に対して新しい $\theta_{[i]}^{\text{new}}$ を半減させるには，基本修正係数を

$$\theta_{0\text{new}} = \frac{\theta_{[i]}^{\text{false}}}{2} \cdot \frac{R_{[i]}}{R_{[0]}} \quad (2.38)$$

とすればよい (単に， $\theta_0 \rightarrow \theta_0/2$ でもよい)．この結果，数列 $\{\Pi_{[0]}, \Pi_{[1]} \dots \Pi_{[I]}\}, \{R_{[I+1]}, R_{[I+2]} \dots\}$ は単調減少列となり， $\Pi(x)$ と $R(x)$ は下に有界であるから，その収束がいえる．2.2節の応力法ケーブル構造系のような正凸ポテンシャル問題 (接線係数 $[D(x)]$ が常に正定値対称) では，十分小さい正の θ_0 で式 (2.37) は保証され，式 (2.38) によるやり直しの連続によって $\theta_0 \rightarrow 0$ となることはなく， $x_{[i]}$ は解 a に収束することがいえる．

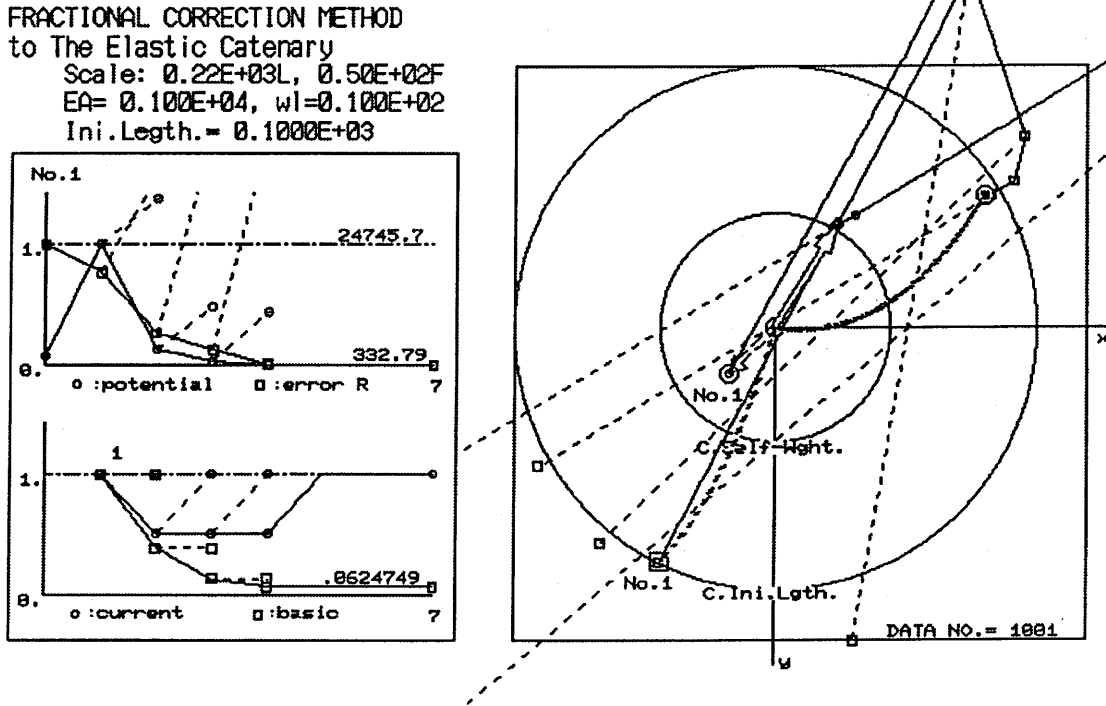


図 2.7: 部分修正法による単一たわみケーブル

図 2.7 は、図 2.6 と同じケーブルを $\{x^*, y^*\} = \{80., -50.\}[L]$ の位置に張る場合において、部分修正法を適用した結果である。終端張力の初期値を $\{T_x, T_y\}_{l[0]} = \{-4., 4.\}[F]$ とし基本修正係数 $\theta_0 = 1.$ を与えたときの部分修正法での計算過程を示している。左枠内での "○ : potential" と "□ : error R" が式 (2.26) の全補ポテンシャル W^* とスカラー誤差 $R_{[i]} = \sqrt{\Delta x_l^T [Q]^{-1} \Delta x_l}_{[i]}$ の変化, "○ : current" と "□ : basic" が各回での修正係数 $\theta_{[i]}$ と基本修正係数 θ_0 の変化を表している。破線部はやり直し計算を意味しており, $R_{[2]} > R_{[1]}$ ($\theta_{[1]} = 1.$) および $W_{[3]}^* > W_{[2]}^*$, $W_{[4]}^* > W_{[3]}^*$ ($\theta_{[2], [3]} < 1.$) による 3 回のやり直しによって $\theta_0 = 0.0625$ となった後, 解 $\{T_x, T_y\}_l = \{5.398, -8.957\}[F]$ に収束している。

2.1 節の直線ケーブル要素による変位法解析は半凸ポテンシャル問題であり, $[i] \rightarrow [i+1]$ で修正された $x_{[i+1]}$ が特異領域に入れば, 式 (2.34) による計算は不能となる。これに対しては, 式 (2.37) の収束傾向の確認の他に, 修正後が特異状態でないこと

$$\det[D]_{[i+1]} \neq 0 \quad (2.39)$$

を確認事項として加えて, 不成立のときにはやり直し計算をするものとする。それにより特異領域に入ることが強制的に排除される。この場合においても, $\{\Pi_{[0]}, \Pi_{[1]} \dots \Pi_{[I]}\}, \{R_{[I+1]}, R_{[I+2]} \dots\}$ は単調減少列であり, 収束することがいえる。しかし, 前述の解 a への収束以外に, 次の種類の収束が理論上考えられる: 式 (2.39) によるやり直し計算が連続すれば, 式 (2.34) で修正される $\theta_{[i]} \Delta F_{[i]}$ において $\Delta F_{[i]} \neq 0$ であるのに修正係数が $\theta_0 \rightarrow 0$ となり, $x_{[i]}$ の動きが止まる。すなわち, $\{x_{[0]}, x_{[1]}, x_{[2]} \dots\}$ が解 a 以外の極限点に収束することが生じうる。 $x_{[i]}$ が正則領域の内点 (2.1.2 節) であれば, 有限の十分小さい θ_0 に対して修正後の $x_{[i+1]}$ も正則領域内にあり収束傾向 (2.37) も保持される。 $\theta_0 \rightarrow 0$ の種類の極限点は, 正則領域と特異領域の境界点に限られることになる。しかし, 特異領域の凸性 (2.1.2 節) により, 後の例でも示すように, この種類の収束はまれにしか生じない。

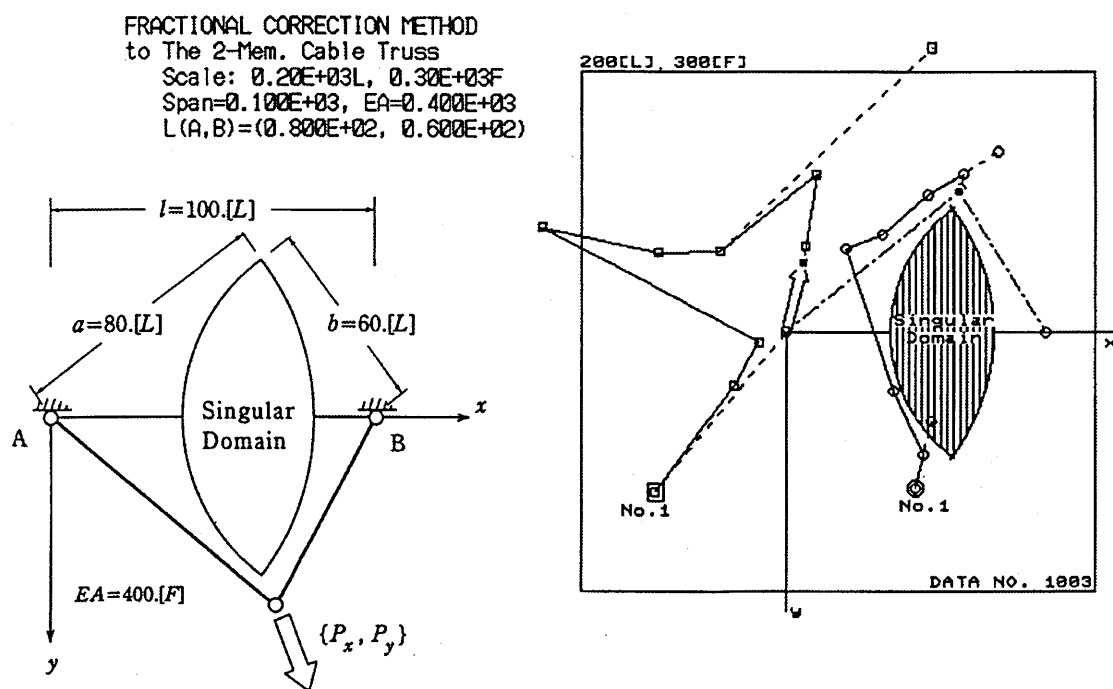


図 2.8: 部分修正法による 2 部材ケーブル・トラス

FRACTIONAL CORRECTION METHOD
to The 2-Mem. Cable Truss
Scale: $0.20E+03L$, $0.20E+03F$
Span= $0.100E+03$, $EA=0.400E+03$
 $L(A,B)=(0.800E+02, 0.600E+02)$

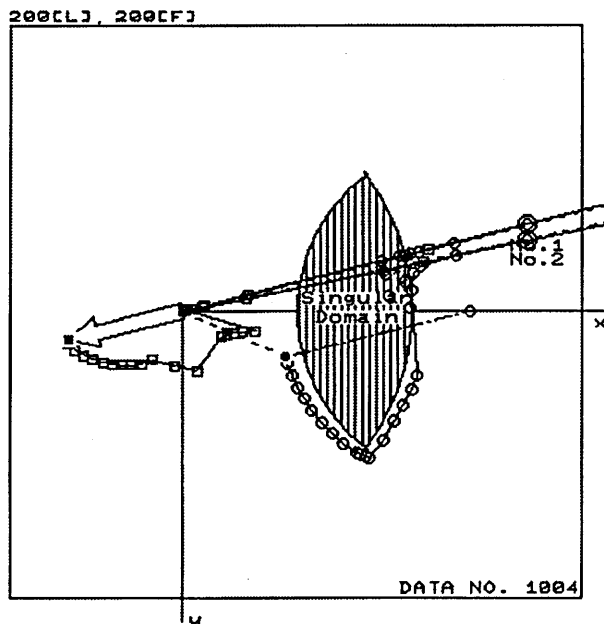
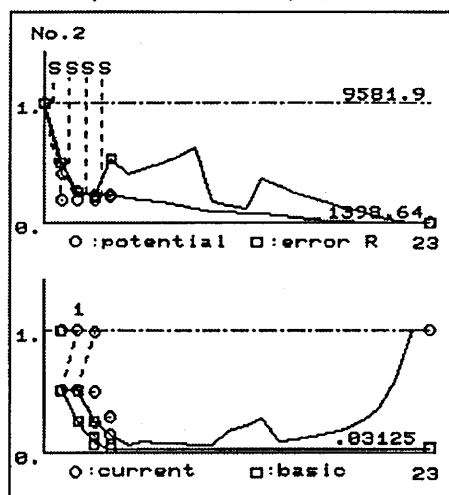


図 2.9: 特異領域まわりでの収束過程

伸び剛性 $EA = 400.[F]$ で長さ $80., 60.[L]$ の 2 直線ケーブルを組み合わせた図 2.8 の例では、両部材が弛緩する特異領域があり、典型的な例として、自由節点の外力 $\{P_x, P_y\} = \{10., -40.\}[F]$ に対して、初期位置 $\{x, y\}_{[0]} = \{50., 60.\}[L]$ より基本修正係数 $\theta_0 = 1.$ として計算したときの収束過程を表している。同じ

$\{x, y\}$ -座標の上で、自由節点位置 $\{x, y\}_{[i]}$ (○-印) とその節点力 $\{F_x, F_y\}_{[i]}$ (□-印) の変化を表している： $\{x, y\}_{[1]}$ が特異領域に入ることによって基本修正係数 θ_0 が $1. \rightarrow 0.5$ となった後、 $\{x, y\}_{[6]}$ で全ポテンシャルが $W_{[6]} > W_{[5]}$ となり さらに θ_0 は $0.5 \rightarrow 0.25$ に変更されて、つり合いの節点位置 $\{x, y\} = \{56.24, 34.39\}[\text{L}]$ に達している。

同じ構造において、図 2.9 は、外力 $\{P_x, P_y\} = \{-40., 10.\}[\text{F}]$ に対する 2 つの数値例を示している。初期位置 $\{x, y\}_{[0]} = \{120., -30.\}[\text{L}]$ より基本修正係数 $\theta_0 = 1.$ で始めた計算では (No.1), $\{P_x, P_y\}, \{x, y\}_{[0]}, \{F_x, F_y\}_{[0]}$ が同一直線上にあり、接線剛性もその軸まわりで対称となる (節点 B に繋がるケーブルは弛緩)。したがって、計算はその軸線上で行われることになる。最初の $\{x, y\}_{[1]}$ が特異領域に入るが、式 (2.39) による $\theta_0 : 1. \rightarrow 0.5$ のやり直し計算で修正が半減されて、対称軸上で特異境界点と $\{x, y\}_{[0]}$ の間に $\{x, y\}_{[1]}$ が決まる。次の $\{x, y\}_{[2]}$ も特異領域内となり、さらに $\theta_0 : 0.5 \rightarrow 0.25$ とされて特異境界線と $\{x, y\}_{[1]}$ の間に $\{x, y\}_{[2]}$ が決定される。この手順が繰り返されて、 $\theta_0 \rightarrow 0.$ となりながら $\{x, y\}_{[i]}$ は対称軸上で外側より境界点へ収束する結果となる。次に、初期位置を y -方向にわずかに移して $\{x, y\}_{[0]} = \{120., -25.\}[\text{L}]$ より計算を始めた場合では (No.2), 同様の経過のもと 5 回のやり直しによって $\theta_0 : 1. \rightarrow 0.03125$ となって $\{x, y\}_{[4]}$ までは十分境界に近づく。しかし、式 (2.10) に関連して述べたように、特異領域近傍では接線剛性マトリックスはいくらでも特異に近くなり、境界接線方向の剛性はなくなる。初期位置をずらせたことにより、ここでの不釣り合い力 $\{\Delta F_x, \Delta F_y\}_{[i]}$ は、境界面に正確に垂直ではなく、わずかに接線方向の成分も含んでおり、式 (2.34) で修正された $\{x, y\}_{[5]}$ は、境界接線方向へ大きく動かされる。前述のように特異領域は凸であり、この動きは特異領域を避ける傾向となり、図に示す経路をたどってつり合いの解に収束する。このように、つり合いの解以外の境界点への収束は極めてまれであり、この例では初期値が前述の対称軸上以外であればすべて解に収束する。

1) 変位法解析例 (直線要素)

直線ケーブル要素より成る 図 2.10 のサドル型ケーブル・ネット構造を考える。ケーブルとしての弾性係数を $1600.\text{tonf}/\text{cm}^2$ とし、内側ケーブルの有効断面積と単位長さ重量は $5.66, 4.6$, 外縁ケーブルのそれらは $11.32\text{cm}^2, 9.2\text{kgf}/\text{m}$ としている。図 2.10 では、自由節点の $\{x, y\}$ -座標が図の平面位置にあって内側ケーブル張力の $\{x, y\}$ -面内成分が $1.\text{tonf}$ となるよう形状決定が行われており²¹⁾、実線が結果としてのつり合い状態を表している。このとき、全 48 部材の初期長さは、最初に自由節点を $z = 0.$ の平面内で所定の $\{x, y\}$ -座標に置いたとき、各ケーブル張力が $1.\text{tonf}$ となるように与えている (1 点鎖線)。形状決定後の部材長さ、自由節点の z -座標、外縁ケーブルの張力値は表 2.1 のように得られている。

図 2.13 は、図 2.10 の形状決定後の状態で自由節点 10 の z -方向に $-10.\text{tonf}$ の集中荷重を加えたときのつり合い形状を表わしている。このとき、Newton-Raphson 法による計算過程は図 2.11 のようになる。横軸を回数 $[i]$ として、縦軸方向に全ポテンシャル W (△-印) と スカラー誤差 R (○-印) をそれぞれ最大値を 1. に無次元化して表している。部材の弛緩によって、回数 $[3]$ と $[4]$ は特異状態となり、強制的に続行された計算において、それらの直後では異常に大きいエネルギー値となる (回数 $[8]$ は “nearly singular”)。それにもかかわらず、それ以降 $[27]$ 回目で解に収束していることは注目される。

図 2.12 は、基本修正係数を $\theta_0 = 1.$ (□-印: “BASIC”) に与えたときの部分修正法による計算過程を表している。回数 $[0] \rightarrow [1]$ の間で、 $W_{[0]} > W_{[1]}$ とするために 4 回のやり直しが行われて $\theta_0 \rightarrow 0.0625$ とされ、 $[6] \rightarrow [7]$ でも式 (2.37) を保持するために $\theta_0 \rightarrow 0.013$ に変更されているが、その後 エネルギー誤差は順調に減少して、 $[9]$ 回目で修正係数 $\theta_{[i]}$ (○-印: “CURRENT”) は 1. に達し $[10]$ 回目で解に収束している。

(特異領域に入ることはない). 節点 10 の変位後の位置は $\{x, y, z\}_{10} = \{-9.272, 0., 0.557\}$ (m) であり, そのときのケーブルの張力を表 2.2 に示す.

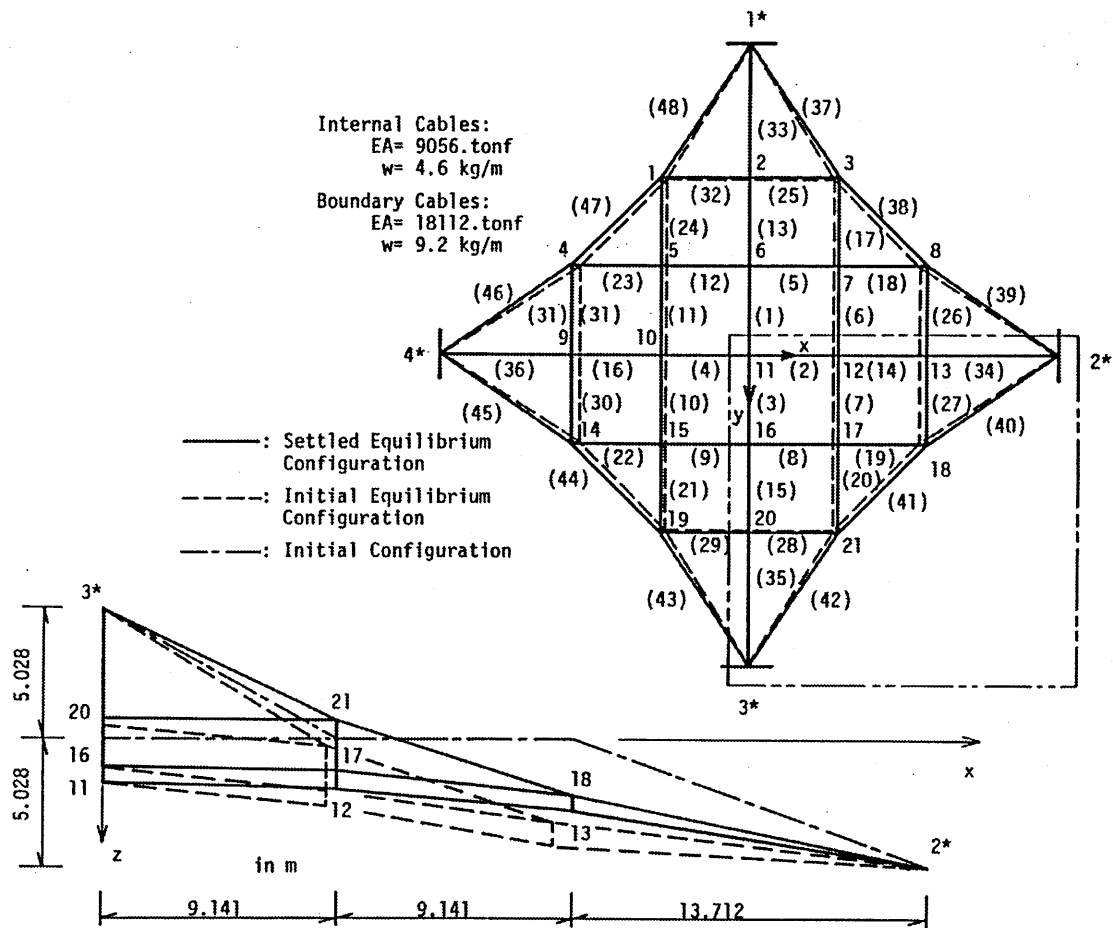


図 2.10: 形状決定後の初期つり合い状態 (直線ケーブル要素)

表 2.1: 直線要素による変位法での形状決定結果 (tonf, m)

ケーブル番号	無応力長	節点番号	z-座標
(1)(3)	9.162	1, 3, 19, 21	-0.712
(2)(4)	9.144	2, 20	-0.772
(5)(8)(9)(12)	9.143	4, 8, 14, 18	2.024
(6)(7)(10)(11)	9.165	5, 7, 15, 17	1.276
(13)(15)	9.322	6, 16	1.063
(14)(16)	9.178	9, 13	2.788
(17)(20)(21)(24)	9.354	10, 12	1.953
(18)(19)(22)(23)	9.171	11	1.700
(25)(28)(29)(32)	9.140		
(26)(27)(30)(31)	9.172		
(33)(35)	14.356		
(34)(36)	13.892	外縁ケーブル	張力絶対値
(37)(42)(43)(48)	17.029	(37)(42)(43)(48)	7.454
(38)(41)(44)(47)	13.208	(38)(41)(44)(47)	7.227
(39)(40)(45)(46)	16.744	(39)(40)(45)(46)	7.329

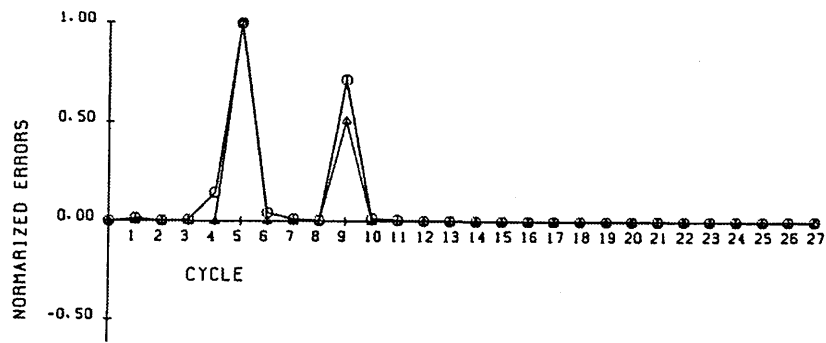


図 2.11: Newton-Raphson 法 (変位法)

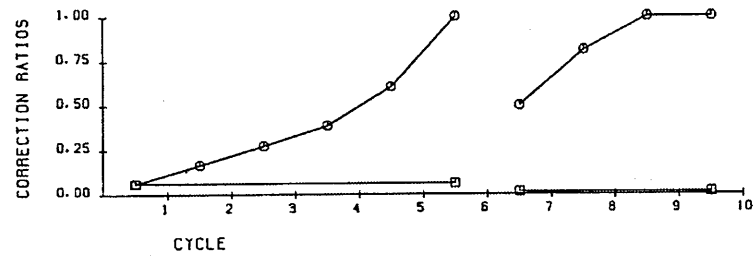
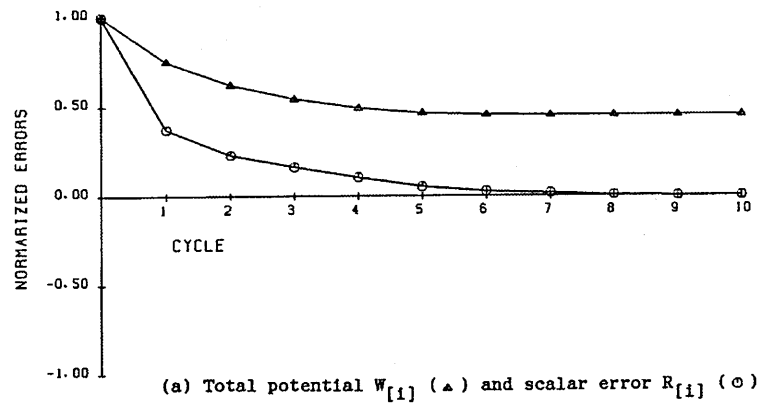
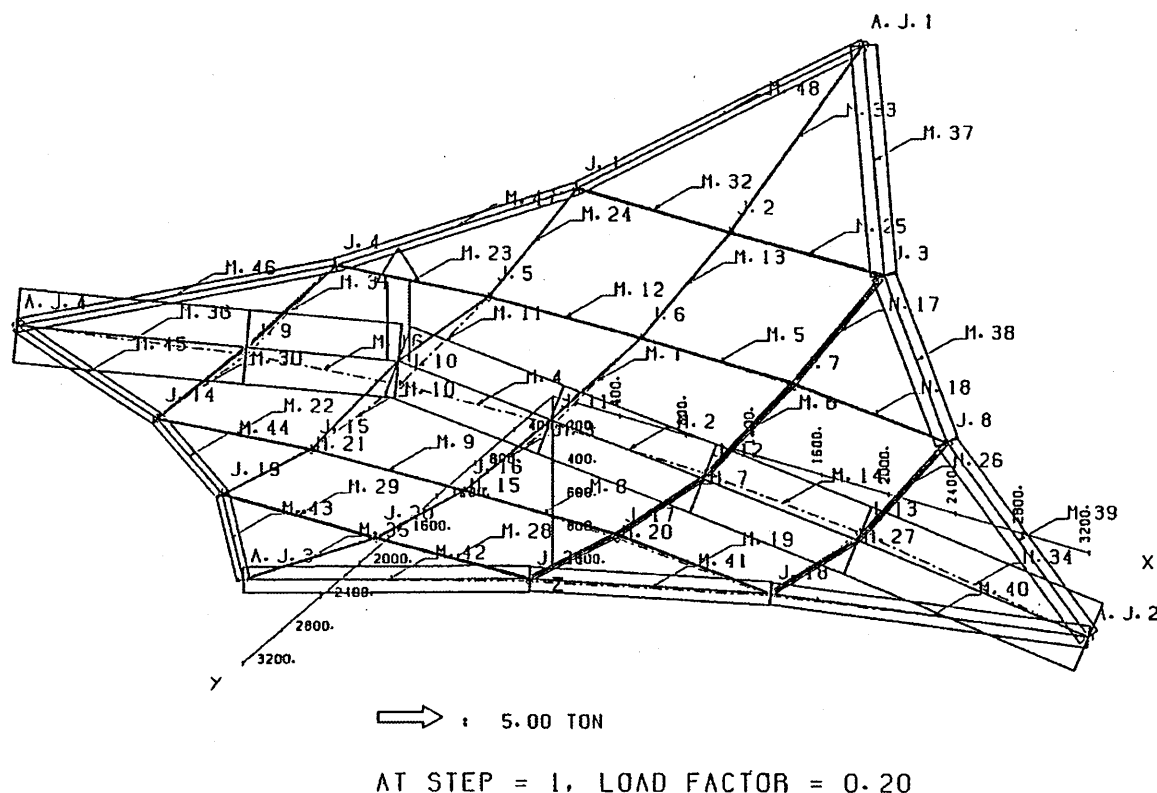


図 2.12: 部分修正法 (変位法)

表 2.2: 集中荷重後 (節点 10) のケーブル張力 (tonf)

ケーブル	張力値	ケーブル	張力値	ケーブル	張力値
(1)	0.626	(17)(20)	2.093	(36)	34.232
(2)(3)	33.711	(18)(19)	0.747	(37)(42)	11.988
(4)	33.730	(21)(24)	0.479	(38)(41)	11.007
(5)(8)	0.722	(22)(23)	0.715	(39)(40)	10.179
(6)(7)	2.071	(25)(28)	1.141	(43)(48)	5.927
(9)(12)	0.716	(26)(27)	2.150	(44)(47)	6.217
(10)(11)	0.474	(29)(32)	1.138	(45)(46)	6.147
(13)(15)	0.644	(30)(31)	0.931		
(14)	33.704	(33)(35)	0.674		
(16)	34.236	(34)	33.723		

図 2.13: $P_{z10} = -10.\text{tonf}$ 載荷時のつり合い状態

2) 応力法解析例（弾性カテナリー）

前述 1) と同じ構造を、各要素を弾性カテナリーとして扱う 2.2 節の応力法で数値解析した場合を示す。同じ諸元の内側 / 外縁ケーブルを用いて、同じ所要値に対して、応力法としての形状決定²⁰⁾を行ったつり合い状態は 図 2.14(実線) のようである(破線は、初期つり合い形状を示すが、ケーブル初期長さは変位法 1) とは異なる)。直線要素を用いた場合の表 2.1 に対して、ここでの形状決定の結果は表 2.3 のようになる。

図 2.15 は、形状決定後の状態で要素 (5), (18), (25) の中央点 A, B, C の z -方向に 10.tonf の集中荷重を加えたときのつり合い形状を示している。自重つり合い状態を初期値として、応力法でこの場合では、 $\theta_0 = 1$ の基本修正係数を与えて部分修正法で計算を行っている (Newton-Raphson 法では収束しない)。その収束過程を、図 2.16 に示す。横軸を回数 $[i]$ として、全補ポテンシャル W^* (実線)、修正係数 $\theta_{[i]}$ (破線) および基本修正係数 θ_0 (2 点鎖線) の変化を表わしている。回数 $[i] = [1], [3], [8]$ で、 $W_{[i-1]}^* < W_{[i]}^*$ となり、 $\theta_0 = 1. \rightarrow 0.25 \rightarrow 0.0625 \rightarrow 0.03125$ と変更された後、順調に解に収束している。その結果、A, B, C 点は、 $\{x, y, z\}_{A, B, C} = \{4.825, 9.003, 3.371\}, \{14.014, 8.896, 2.041\}, \{4.766, 18.121, 4.290\}$ (m) のつり合い位置となり、ケーブル要素の張力は表 2.4 のように得られている。

表 2.3: 応力法による形状決定結果 (tonf, m)

ケーブル番号	無応力長	節点番号	z-座標
(1)(3)	9.147	1, 3, 19, 21	2.024
(2)(4)	9.166	2, 20	2.788
(5)(8)(9)(12)	9.169	4, 8, 14, 18	-0.713
(6)(7)(10)(11)	9.146	5, 7, 15, 17	1.274
(13)(15)	9.182	6, 16	1.951
(14)(16)	9.326	9, 13	-0.773
(17)(20)(21)(24)	9.174	10, 12	1.062
(18)(19)(22)(23)	9.357	11	1.699
(25)(28)(29)(32)	9.176		
(26)(27)(30)(31)	9.144		
(33)(35)	13.899		
(34)(36)	14.326	外縁ケーブル	最大張力値
(37)(42)(43)(48)	16.750	(37)(42)(43)(48)	7.344
(38)(41)(44)(47)	13.218	(38)(41)(44)(47)	7.240
(39)(40)(45)(46)	17.034	(39)(40)(45)(46)	7.474

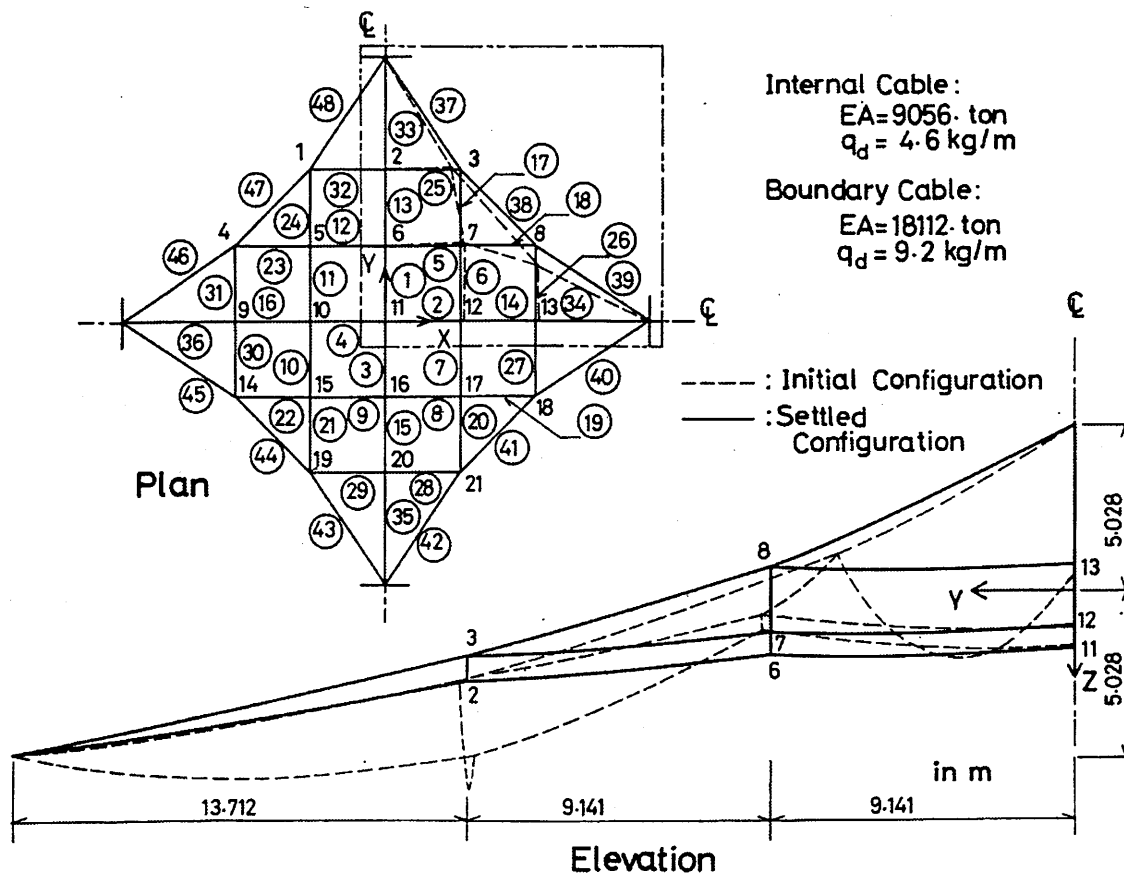


図 2.14: 形状決定後のつり合い状態 (弾性カテナリー要素)

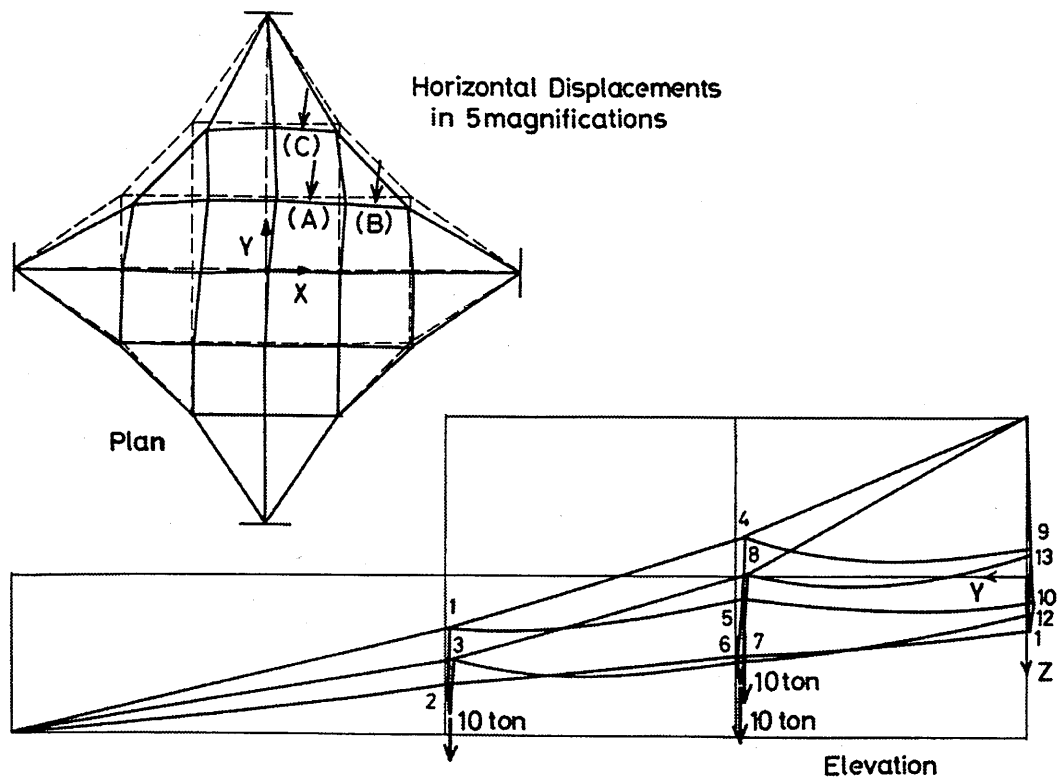
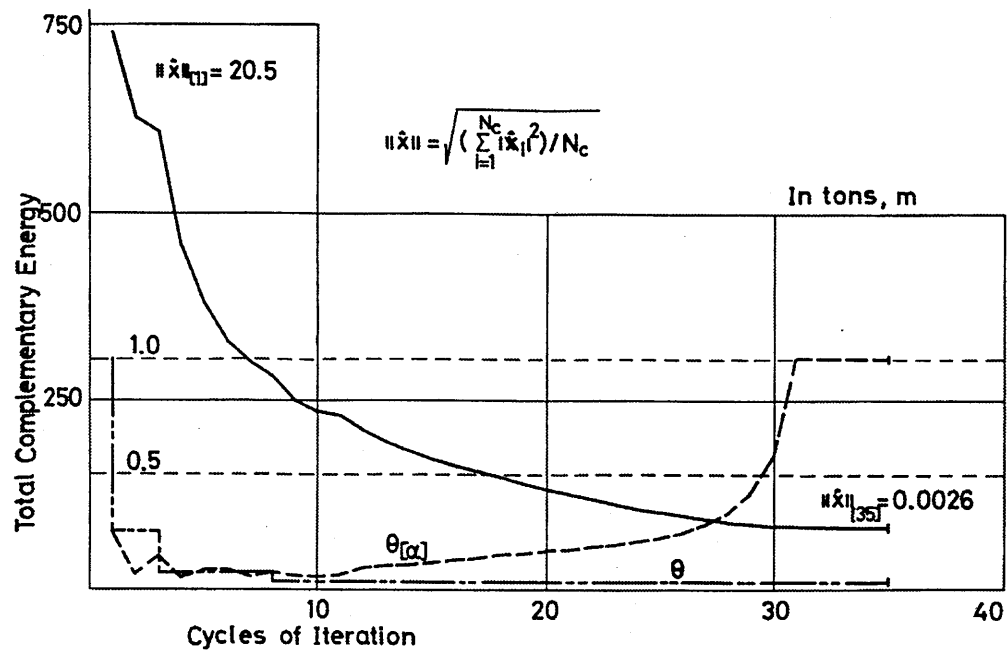
図 2.15: $P_z A, B, C = 10. \text{tonf}$ 载荷時のつり合い状態

図 2.16: 部分修正法の繰返し計算過程

表 2.4: A,B,C 点集中荷重後のケーブル張力 (tonf)

ケーブル	最大張力値	ケーブル	最大張力値	ケーブル	最大張力値
(1)	0.493	(17)	0.106	(33)	1.756
(2)	0.832	(18)	33.011	(34)	0.878
(3)	0.481	(19)	1.031	(35)	0.493
(4)	0.848	(20)	0.194	(36)	0.898
(5)	30.282	(21)	0.137	(37)	63.072
(6)	0.209	(22)	1.030	(38)	75.712
(7)	0.196	(23)	30.303	(39)	102.036
(8)	1.015	(24)	0.139	(40)	4.478
(9)	1.016	(25)	19.418	(41)	3.681
(10)	0.129	(26)	0.079	(42)	3.304
(11)	0.125	(27)	0.096	(43)	3.164
(12)	30.289	(28)	0.766	(44)	3.586
(13)	1.177	(29)	0.767	(45)	4.386
(14)	0.846	(30)	0.096	(46)	95.855
(15)	0.485	(31)	0.084	(47)	71.603
(16)	0.867	(32)	18.555	(48)	59.573

参考文献

- 1) 日本鋼構造協会：吊構造，コロナ社，1975.
- 2) 土木学会：構造力学公式集，第9章，1986.
- 3) Irvine, H.A. : *Cable Structures*, MIT press, 1981.
- 4) Buchholdt, H.A. : *Introduction to Cable Roof Structures*, Cambridge University Press, 1985.
- 5) Jennings, A. : discussion of "Cable Movements under Two-Dimensional Loading" by W.T. O'Brien and A.J. Francis, *J. of Str. Div.*, ASCE, Vol.91, No.ST1, pp.307-311, 1965.
- 6) Michalos, J. and Birnstiel, C. : Movements of A Cable due to Changes in Loading, *Transactions*, ASCE, Vol.127, Part II, pp.267-282, 1962.
- 7) O'Brien, W.T. and Francis, A.J. : Cable Movements under Two-Dimensional Loads, *J. of Str. Div.*, ASCE, Vol.90, No.ST3, pp.89-123, 1964.
- 8) Thronton, C.H. and Birnstiel, C. : Three-Dimensional Suspension Structures, *J. of Str. Div.*, ASCE, Vol.93, No.ST2, pp.247-270, 1967.
- 9) Johnson, D. and Brotton, D.M. : A Finite Deflection Analysis for Space Structures, ed. by R.M. Davis, John Wiley and Sons, New York, 1967.
- 10) Buchholdt, H.A. : A Non-Linear Deformation Theory applied to Two Dimensional Prestressed Cable Assemblies, *Proceedings*, Inst. of C.E., Vol.42, pp.129-142, 1969.
- 11) Saafan, S.A. : Theoretical Analysis of Suspension Roofs, *J. of Str. Div.*, ASCE, Vol.96, No.ST2, pp.393-405, 1970.
- 12) Haug, E. and Powell, G.H. : discussion of "Inelastic Analysis of Suspension Roof Structures" by D.P. Greenberg, *J. of Str. Div.*, ASCE, Vol.97, No.ST4, pp.1360-1363, 1971.
- 13) Mollman, H : Analysis of Plane Prestressed Cable Structures, *J. of Str. Div.*, ASCE, Vol.96, No.ST10, pp.2059-2081, 1970.
- 14) Namita, Y., Shinke, T. and Hironaka, K. : Computer Analysis and Model Experiment of Cable Structures, *Preliminary Report of Ninth Congress*, IABSE, 1972.
- 15) Argyris, J.H. and Scharpf, D.W. : Large Deflection Analysis of Prestressed Networks, *J. of Str. Div.*, ASCE, Vol.98, No.ST3, 1972.
- 16) 波田凱夫・中西 宏：吊構造の形状決定計算に関する一考察，日本建築学会論文報告集，No.212，1973.
- 17) 前田幸雄・林 正・前田研一：サグを考慮したケーブル部材の計算式，土木学会論文報告集，No.257，pp.123-126，1977.

- 18) 後藤茂夫：柔ケーブル材の接線剛性方程式について，土木学会論文報告集，No.270，pp.41-49，1978.
- 19) Kar, A and Okazaki, C.Y. : Convergence in Highly Nonlinear Cable Net Problems, *J. of Str. Div.*, ASCE, Vol.99, No.ST3, pp.321-334, 1973.
- 20) 阿井正博・西岡 隆・奥村敏恵：ケーブル構造に関する一理論解析，土木学会論文報告集，No.260，pp.17-32，1977.
- 21) 阿井正博・西野文雄：変位法ケーブル構造系のつり合いと形状決定に関する一理論解析，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，日本鋼構造協会，No.12，pp.109-114，1988.