

第 1 章

単一ケーブルの力学

構造要素に用いられるケーブルを、曲げ剛性、ねじれ剛性を無視して、伸び剛性のみで外力に抵抗する部材として理想化して考える。このとき、ケーブルそのものは、基本的には不定形であり、引張力や自重等が作用してはじめてその形状が決まるといえる。同時に、実際のケーブル構造の多くは部材張力によって生じる剛性(幾何剛性)を利用する構造形式であり、比較的大きい張力が導入されるのが普通である。この場合の最も基本的な展開は、自重などを両端節点に集中化して、ケーブルを非抗圧縮の引張直線部材として扱う方法であるが、初期張力があっても大規模構造の長いケーブルでは避けることのできないたわみ効果を考慮するには、ある程度の要素分割を必要とする。放物線ケーブルは、直線形状を基準として自重によるたわみの効果を実用範囲で近似展開したものであり、近年の電算機を用いる構造解析以前より広く用いられている。自重によって大きくたわんだケーブル s を表現するものとして、カタナリー曲線がよく知られているが、ケーブルの不伸張を基本として直交空間座標 $\{x, y\}$ の間での曲線 $y(x)$ の形で表したものと、ケーブルの初期長さである s -座標を介在させて $\{x(s), y(s)\}$ の曲線で表したものがある。後者は、座標 s で規定される物質点の空間座標を記述するという正確な Lagrange 表現であり、前述した“本来の形がなく外力が作用してはじめて形状が決まる”ケーブルの任意荷重条件下での有限変位 / ひずみ状態を一貫して扱うことができる。このときの等分布の自重に対して伸びの効果を厳密に考慮して表現された曲線は、弾性カタナリーとよばれる。

1.1 直線ケーブル

自重等の分布した外力をすべて節点上の集中荷重に置換した後、節点間のケーブルを、曲げ剛性のない、圧縮には抵抗しない(非抗圧縮性)の引張直線部材として考える。このとき、1本のケーブルの上である数の節点を設けた上で、片端の張力成分のみを基本の未知量とする応力法としての展開を進めることもできるが⁶⁾、ここでは直線ケーブル両端の空間位置(または変位)を基本の未知量とする変位法要素としての展開を示す。

図 1.1 に示すように、ケーブル要素 (m) の初期長さを l 伸び剛性を EA とする (A = 有効断面積, E = 公称弾性定数)。3次元空間直交座標 $\{x, y, z\}$ の中で、 (m) の始端 i 、終端節点 j の空間位置 $x_{i,j} = \{x, y, z\}_{i,j}$ を用いて、要素の空間形状を

$$\bar{x}_{(m)} (= \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}_{(m)}) = \{x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i\} \quad (1.1)$$

で表すものとする。要素の変形である伸び $\Delta \bar{l}$ は

$$\Delta \bar{l} (= \bar{l} - l) = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2} - l \quad (1.2)$$

であり、張力 T は、両端間が初期長さ以下では零値であるとして

$$T = \begin{cases} \frac{EA}{l} \Delta \bar{l} & \text{for } \Delta \bar{l} \geq 0 \\ 0 & \text{for } \Delta \bar{l} < 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

と表される。要素 (m) の張力空間成分 $\bar{T}_{(m)} = \{\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z\} (= -\{T_x, T_y, T_z\}_i = \{T_x, T_y, T_z\}_j)$ は、 T を要素の方向余弦方向へ分解して

$$\{\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z\} = \frac{T}{l} \{\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\} \quad (1.4)$$

で得られる。

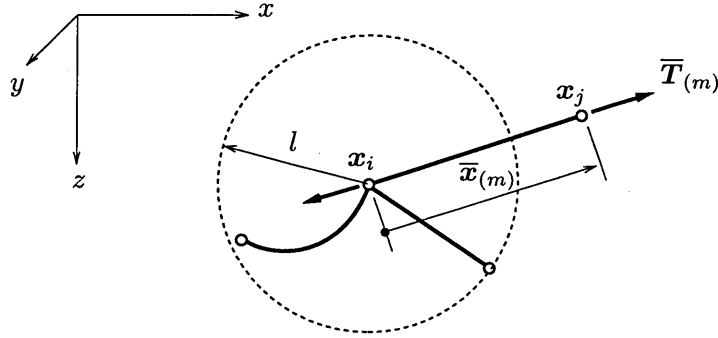


図 1.1: 直線ケーブル要素

式 (1.4) を $\bar{x}_{(m)}$ に関して微分すれば、 $\bar{T}_{(m)}-\bar{x}_{(m)}$ 間の接線剛性が得られる。その結果は、 $\delta \bar{x}_{(m)}$ による伸び $\Delta \bar{l} \rightarrow$ 張力 T の変化に起因する変形剛性 $[\bar{k}_M]_{(m)}$ 、および、張力絶対値の変化 δT がなくても、要素の方向余弦が変わることによって張力成分値が変化することを表す幾何剛性 $[\bar{k}_G]_{(m)}$ の和として求められる：

$$\delta \bar{T}_{(m)} = [\bar{k}]_{(m)} \delta \bar{x}_{(m)}, \quad [\bar{k}]_{(m)} = [\bar{k}_M]_{(m)} + [\bar{k}_G]_{(m)} \quad (1.5a)$$

ここに

$$[\bar{k}_M]_{(m)} = \frac{EA}{l \bar{l}^2} \begin{bmatrix} \bar{x}\bar{x} & \bar{x}\bar{y} & \bar{x}\bar{z} \\ & \bar{y}\bar{y} & \bar{y}\bar{z} \\ \text{Sym.} & & \bar{z}\bar{z} \end{bmatrix}, \quad [\bar{k}_G]_{(m)} = \frac{T}{\bar{l}^3} \begin{bmatrix} \bar{l}^2 - \bar{x}\bar{x} & -\bar{x}\bar{y} & -\bar{x}\bar{z} \\ & \bar{l}^2 - \bar{y}\bar{y} & -\bar{y}\bar{z} \\ \text{Sym.} & & \bar{l}^2 - \bar{z}\bar{z} \end{bmatrix} \quad (1.5b)$$

要素 (m) の伸びによるひずみエネルギー $U_{(m)}$ は、式 (1.3) の構成関係より

$$U_{(m)} \left(= \int T d\bar{l} \right) = \frac{EA}{2l} \Delta \bar{l}^2 \quad \text{または} \quad \frac{l}{2EA} T^2 \quad (1.6)$$

で与えられる。この $U_{(m)}$ の $\bar{x}_{(m)}$ に関する 1 階微係数が張力成分 $\bar{T}_{(m)}$ であり、2 階微係数が前出の接線剛性マトリックス $[\bar{k}]_{(m)}$ となる。ただし、これらは $\Delta \bar{l} \geq 0$ の場合に対する結果であり、 $\Delta \bar{l} < 0$ であれば $U_{(m)}$ は零値、 $[\bar{k}]_{(m)}$ は零マトリックスとなる。

1.2 放物線ケーブル

2次元面内で考えるものとし、直交 $\{x, y\}$ 座標を空間座標として、その y 方向を重力方向にとる。 y 方向にのみ分布荷重が作用するものとし、その値が空間の x 座標に関して $q(x)$ で与えられる場合、あるいはたわ

み量が小さいために、ケーブルの初期長さ s に沿って作用している分布力を x 座標に関する分布とみなせる場合 (シャロー・ケーブル) を考える (図 1.2).

ケーブル断面の $\{x, y\}$ 方向の張力成分を $\{H, V\}$ として、微小 dx 区間のつり合いを考えれば

$$\Sigma X = -H + (H + dH) = 0, \quad \text{したがって} \quad \frac{dH}{dx} = 0 \quad (1.7a)$$

$$\Sigma Y = -V + (V + dV) + q(x) dx = 0, \quad \frac{dV}{dx} = -q(x) \quad (1.7b)$$

$$\Sigma M = -(H + dH) dy + (V + dV) dx + q(x) dx \cdot \frac{dx}{2} = 0, \\ \text{高次項を無視して} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H} \quad (1.7c)$$

の微分式が得られる。式 (1.7a) より、また物理的にも明らかに、張力水平成分 H はケーブル内で一定であり、式 (1.7c) は、断面張力方向とケーブルの軸線方向が一致することを表している。 $H = \text{const.}$ のもとに、式 (1.7b) を (1.7c) に代入すれば、ここでのケーブルの微分基礎式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{q(x)}{H} \quad (1.8)$$

が得られ、始端の張力垂直成分を V_0 として 2 回積分すれば、たわみ形状 $y(x)$ は

$$y(x) = \frac{1}{H} \int_0^x \left[V_0 - \int_0^\tau q(\tau) d\tau \right] dx \quad (1.9)$$

と表されることになる。

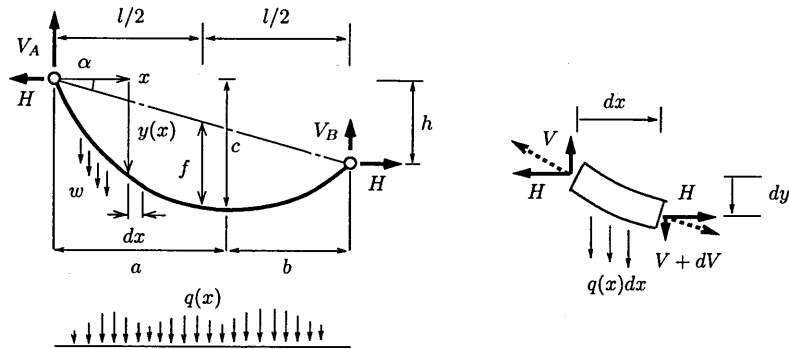


図 1.2: 放物線ケーブル

分布荷重が x -座標に関して等分布 $q(x) = w: \text{const.}$ であるとき、式 (1.9) の解を図 1.2 のスパン l 、高さ h の境界条件に合わせて

$$y(x) = \frac{w}{2H} x(l-x) + \frac{h}{l} x \quad (1.10)$$

の放物線ケーブルが得られる。このときの両端 A, B での張力垂直成分は、傾き dy/dx と式 (1.7c) の関係より

$$V_A = \frac{Hh}{l} + \frac{wl}{2}, \quad V_B = -\frac{Hh}{l} + \frac{wl}{2} \quad (1.11)$$

と表すことができる。また、たわみ量 $\eta(x) = y(x) - hx/l$ の最大値であるサグ f は、 $x = l/2$ で生じ

$$f \left(= \frac{w}{2H} x(l-x) \Big|_{x=l/2} \right) = \frac{wl^2}{8H} \quad (1.12)$$

となる。

A-B 間の傾角 $\tan \alpha = h/l$ を考慮した放物線ケーブルの最下点 C は、 $dy/dx = 0$ の条件より決定することができ、図 1.2 での長さ a, b, c は

$$a = \frac{l}{2} + \frac{hl}{8f}, \quad b = \frac{l}{2} - \frac{hl}{8f}, \quad c = f + \frac{h}{2} \left(1 + \frac{h}{8f}\right) \quad (1.13)$$

となる。このとき、A-C 間と C-B 間のケーブルの空間での長さ L_A と L_B は、 $dL = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$ を積分することにより求まり、全長 L は

$$L = L_A + L_B \quad (1.14a)$$

$$L_A = \frac{a}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{wa}{H}\right)^2} + \frac{H}{wa} \ln \left(\frac{wa}{H} + \sqrt{1 + \left(\frac{wa}{H}\right)^2} \right) \right\}$$

$$L_B = \frac{b}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{wb}{H}\right)^2} + \frac{H}{wb} \ln \left(\frac{wb}{H} + \sqrt{1 + \left(\frac{wb}{H}\right)^2} \right) \right\} \quad (1.14b)$$

と表すことができる。これらの式をベキ級数展開すれば

$$L = a \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left(\frac{wa}{H}\right)^2 - \frac{1}{40} \left(\frac{wa}{H}\right)^4 + \frac{1}{112} \left(\frac{wa}{H}\right)^6 \cdots \right\}$$

$$+ b \left\{ 1 + \frac{1}{6} \left(\frac{wb}{H}\right)^2 - \frac{1}{40} \left(\frac{wb}{H}\right)^4 + \frac{1}{112} \left(\frac{wb}{H}\right)^6 \cdots \right\}$$

と表され、 wa/H と wb/H が小さいとき、すなわちサグ比 $f/l (= wl/8H)$ および傾角 α が小さいシャロー・ケーブル(偏平ケーブルとも呼ぶ)の場合では、ベキ級数の第 2 項までを用いて

$$L = l \left\{ 1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{l}\right)^2 + \frac{1}{2} \tan^2 \alpha \right\} \quad (1.16)$$

と近似することができる。

断面張力の垂直成分は、 $V(x) = V_A - wx$ に式 (1.11) と式 (1.12) を代入すれば

$$V(x) = H \left\{ \frac{8f}{l^2} \left(\frac{l}{2} - x\right) + \frac{h}{l} \right\} \quad (1.17)$$

が得られる。ケーブルの弾性伸びは、張力絶対値 $T(x) = \sqrt{H^2 + V^2}$ に対する

$$dL^e = \frac{T(x)}{EA} ds = \frac{T(x)}{EA} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \frac{T(x)}{EA} \cdot \frac{T(x)}{H} dx$$

$$= \frac{H}{EA} \left[1 + \left\{ \frac{8f}{l^2} \left(\frac{l}{2} - x\right) + \frac{h}{l} \right\}^2 \right] dx$$

を積分して

$$\Delta L^e = \frac{Hl}{EA} \left\{ 1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2 + \frac{16}{3} \left(\frac{f}{l}\right)^2 \right\} \quad (1.19)$$

として得られる。この伸びは式 (1.16) の空間でのケーブル全長に含まれている量であり、ケーブルの初期長さは $L_0 = L - \Delta L^e$ と表してよい。

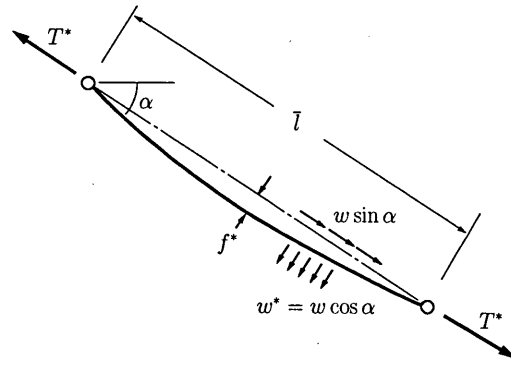


図 1.3: 傾角の大きいシャロー・ケーブル

次に、図 1.3 に示すような、たわみ量は小さいが、弦方向の傾角 α が大きい偏平ケーブルの場合での近似展開を考える。自重 w を弦直角方向の $w^* = w \cos \alpha$ と弦方向の $w \sin \alpha$ に分解した上で、弦張力 $T^* (= H / \cos \alpha)$ が比較して十分大きいとき、 $w \sin \alpha$ の効果は無視できる。このとき、傾角 α のたわみケーブルは、自重 w^* を受ける水平ケーブルと同一とみなすことができ、式 (1.12), (1.16), および (1.19) において $\tan \alpha (= h/l) = 0$ として w^* に対して得られる サグ, ケーブル長, 弾性伸び :

$$f^* = \frac{w^* \bar{l}^2}{8 T^*}, \quad L = \bar{l} \left\{ 1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f^*}{\bar{l}} \right)^2 \right\}, \quad \Delta L^e = \frac{T^* \bar{l}}{EA} \left\{ 1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f^*}{\bar{l}} \right)^2 \right\}, \quad (1.20)$$

をそのまま用いる。ここに、 \bar{l} は両端間の空間長さを表す。ケーブルの自然長 $L_0 = L - \Delta L^e$ は、式 (1.20) の最初の $f^*/\bar{l} = w^* \bar{l} / 8 T^*$ を後の 2 式に代入して

$$L_0 = \left(1 - \frac{T^*}{EA} \right) \bar{l} + \frac{1}{24} \cdot \frac{w^{*2} \bar{l}^3}{T^{*2}} - \frac{1}{12} \cdot \frac{w^{*2} \bar{l}^3}{EA T^*} \quad (1.21)$$

となる。この式を微分して、弦張力の微小変化 δT^* と弦スパン長の変化 $\delta \bar{l}$ の間の弾性関係を考えるものとするれば、自然長 L_0 が変化しないことより

$$\begin{aligned} (\delta L_0 =) & \left\{ 1 - \frac{T^*}{EA} + \frac{1}{8} \left(\frac{w^* \bar{l}}{T^*} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{w^* \bar{l}}{T^*} \right)^2 \left(\frac{T^*}{EA} \right) \right\} \delta \bar{l} \\ & - \frac{\bar{l}}{EA} \left\{ 1 + \frac{1}{12} \left(\frac{w^* \bar{l}}{T^*} \right)^2 \left(\frac{EA}{T^*} \right) - \frac{1}{12} \left(\frac{w^* \bar{l}}{T^*} \right)^2 \right\} \delta T^* = 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

が得られる。ここで、1 に比較して T^*/EA および $(w^* \bar{l} / T^*)^2$ の大きさを無視するものとするれば、 $\delta T^* = E^* A / \bar{l} \cdot \delta \bar{l}$ と表したときの見掛けの接線弾性係数 E^* は

$$E^* = \frac{E}{1 + \frac{1}{12} \left(\frac{w^* \bar{l}}{T^*} \right)^2 \left(\frac{EA}{T^*} \right)} \quad (1.23)$$

で評価できることになる。式 (1.21) 自体を、弦長 \bar{l} と傾角 α に対して弦張力 T^* が規定されるケーブル方程式と考えることができるが、Ernst の式とは、接線関係式 (1.22) より得られる式 (1.23) の換算弾性係数 E^* のことをいう。

重力方向にたわむ放物線ケーブルの関係式 (1.10)~(1.19) を、つり合い構造解析の変位法展開に組込むことも示されている⁸⁾⁹⁾。文献 [9] では、ケーブルの全長重量 W を不変の量とし、両端間の水平、鉛直距離 $\{l, h\}$

に対して、傾き $m = h/l$ でスパン l に $w = W/l$ の鉛直等分布荷重が作用するときの $L - \Delta L^e = L_0 : \text{const.}$ の関係を式 (1.14) と (1.19) により展開して、サグ比 $n = f/l$ に関する

$$\begin{aligned} \phi(n) &= (\{L - \Delta L^e - L_0\} \times n) \\ &= \frac{l}{16} \left[(4n+m)\sqrt{1+(4n+m)^2} + (4n-m)\sqrt{1+(4n-m)^2} \right. \\ &\quad \left. + \ln \left\{ (4n+m) + \sqrt{1+(4n+m)^2} \right\} + \ln \left\{ (4n-m) + \sqrt{1+(4n-m)^2} \right\} \right] \\ &\quad - \frac{Wl}{8EA} \left(1 + \frac{16}{3}n^2 + m^2 \right) - nL_0 = 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

のケーブル方程式を与えている。この方程式を n について数値的に解けば、式 (1.11) と (1.12) より、材端張力成分は

$$H = \frac{W}{8n}, \quad V (= -V_B) = \frac{W}{2} \left(\frac{m}{4n} - 1 \right) \quad (1.25)$$

として得られ、さらに それらの関係式の微分式として接線剛性式を展開することができる。

1.3 カテナリー・ケーブル

1.2節と同じ座標系のもとで、たわみが十分大きく、傾いたケーブルの実長当たりに対して垂直方向の分布荷重 $q(s)$ が作用する場合を考える。このときのつり合い形状を、弾性伸びがないことを基準として展開する。ケーブルの長さに沿った微小要素 ds ($\{x, y\}$ -方向への投影長さ $\{dx, dy\}$) のつり合い式は、断面の $\{x, y\}$ -方向の張力成分を $\{H, V\}$ として

$$\Sigma X = -H + (H + dH) = 0, \quad \text{したがって} \quad \frac{dH}{dx} = 0 \quad (1.26a)$$

$$\Sigma Y = -V + (V + dV) + q(s)ds = 0, \quad \frac{dV}{ds} = -q(s) \quad (1.26b)$$

$$\Sigma M = -(H + dH)dy + (V + dV)dx + q(s)ds \cdot \frac{dx}{2} = 0, \quad \text{高次項を無視して} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{V}{H} \quad (1.26c)$$

となる (図 1.4)。式 (1.26a) より $H = \text{const.}$ であり、(1.26b) を (1.26c) に代入して x を独立変数として考えるものとすれば、 $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$ より、次の微分基礎式が得られる。

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{q(s)}{H} \quad (1.27)$$

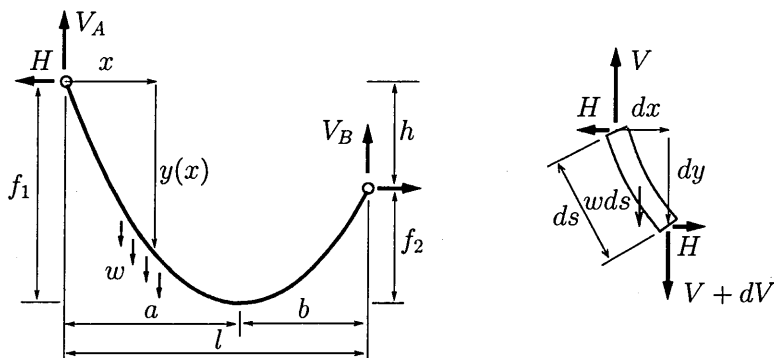


図 1.4: カテナリー・ケーブル

ここで, $q(s) = w : \text{const.}$ のケーブルの実長に沿った等分布荷重を考える. 図 1.4 に示している $x = a$ で $dy/dx = 0$ のもとに, 式 (1.27) を 1 回積分すれば

$$\frac{dy}{dx} = \sinh\left(\frac{w}{H}(a-x)\right) \quad (1.28)$$

が得られ, さらに $x = a$ で $y = f_1$ のもとに積分すれば

$$y(x) = \frac{H}{w} \left\{ 1 - \cosh\left(\frac{w}{H}(a-x)\right) \right\} + f_1 \quad (1.29)$$

の懸垂曲線 (カテナリー曲線) が得られる. 両端 A, B の張力成分 $\{H, V\}_{A, B}$ と長さ a, b, f_1, f_2 の関係は, $dy/dx|_{x=0, l} = V_A/H, -V_B/H$ および $y|_{x=0, l} = 0, f_1 - f_2$ より

$$a = \frac{H}{w} \ln \left(\frac{V_A}{H} + \sqrt{1 + \left(\frac{V_A}{H}\right)^2} \right) \quad \left(\text{または } \frac{V_A}{H} = \sinh\left(\frac{wa}{H}\right) \right) \quad (1.30a)$$

$$f_1 = \frac{H}{w} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{V_A}{H}\right)^2} - 1 \right) \quad \left(f_1 = \frac{2H}{w} \sinh^2\left(\frac{wa}{2H}\right) \right) \quad (1.30b)$$

$$b = \frac{H}{w} \ln \left(\frac{V_B}{H} + \sqrt{1 + \left(\frac{V_B}{H}\right)^2} \right) \quad \left(\frac{V_B}{H} = \sinh\left(\frac{wb}{H}\right) \right) \quad (1.30c)$$

$$f_2 = \frac{H}{w} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{V_B}{H}\right)^2} - 1 \right) \quad \left(f_2 = \frac{2H}{w} \sinh^2\left(\frac{wb}{2H}\right) \right) \quad (1.30d)$$

として表される.

また, ケーブルの空間長については, $ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx$ に式 (1.28) を代入して, $x = 0$ で $s = 0$ のもとに積分すれば

$$s = \frac{H}{w} \left\{ \sinh\left(\frac{w}{H}a\right) - \sinh\left(\frac{w}{H}(a-x)\right) \right\} \quad (1.31)$$

であり, $A-C, C-B$ 間のケーブル長を L_A, L_B として

$$L (= L_A + L_B) = \frac{H}{w} \sinh\left(\frac{wa}{H}\right) + \frac{H}{w} \sinh\left(\frac{wb}{H}\right) \quad (1.32)$$

で得られる.

さらに, ケーブルの弾性伸びは, 張力絶対値が

$$T(x) = H \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = H \cosh\left(\frac{w}{H}(a-x)\right)$$

で与えられることを用いて

$$\Delta L_A^e = \int_0^{L_A} \frac{T(s)}{EA} ds = \frac{H}{EA} \int_0^a \cosh^2\left(\frac{w}{H}(a-x)\right) dx$$

を積分すれば

$$\Delta L^e (= \Delta L_A^e + \Delta L_B^e) = \frac{H}{2EA} \left\{ a + \frac{H}{2w} \sinh\left(\frac{2wa}{H}\right) \right\} + \frac{H}{2EA} \left\{ b + \frac{H}{2w} \sinh\left(\frac{2wb}{H}\right) \right\} \quad (1.33)$$

として求まる。ただし、先の式 (1.29) は、ケーブルの空間での実長当たり等分布荷重 w を既知量として誘導されており、この弾性伸びが十分小さいことを前提としている。

以上のカタナリー・ケーブルの関係式 (1.29)~(1.33) を、ケーブル構造の変位法による非線形つり合い解析に用いることも行われている。文献 10) では、終端の始端に対する相対位置 $\{l, h\}$ において生じている張力成分 $\{H, V\}$ ($V = -V_B$) を求めるために、無次元量 $\psi = wl/2H$ に関する

$$\frac{\sinh^2 \psi}{\psi^2} + \frac{h^2}{l^2} = \frac{L^2}{l^2} \quad (1.34)$$

の関係式に注目している。この方程式を ψ に関して数値的に解くことによって、張力水平成分は先の無次元量より $H = wl/2\psi$ として、鉛直成分は

$$V = \frac{w}{2} (h \coth \psi - L) \quad (1.35)$$

で得られている。また、それらの微分展開による接線剛性式、および弾性伸びに対する補正についても述べられている。

1.4 弾性カタナリー・ケーブル

初期長さ l 、伸び剛性 EA のケーブルを、空間直交座標 $\{x, y, z\}$ 、およびケーブルの始端からの自然長として定義された物体固定座標 s ($0 \leq s \leq l$) の上で考える。作用位置が物体固定の s -座標で規定された

分布荷重： $\mathbf{q}(s) = \{q_x(s), q_y(s), q_z(s)\}$ 、集中荷重： $\mathbf{P}_\alpha = \{P_x, P_y, P_z\}_\alpha$ (作用点： s_α) (1.36)

の外力が作用しているときの空間形状を、 $\{x(s), y(s), z(s)\}$ の形で Lagrange 表現するものとする (図 1.5)。

空間形状 $\{x(s), y(s), z(s)\}$ において、変形前の長さ ds のケーブル要素は

$$d\bar{s} = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} ds$$

の長さであり、断面の張力は

$$T(s) = EA \left(\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} - 1 \right) \quad (1.37)$$

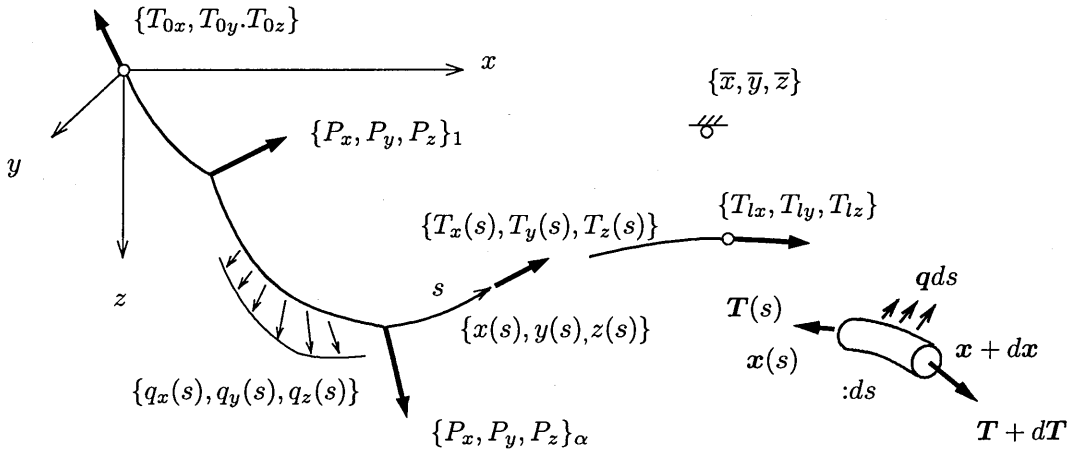


図 1.5: 一般的な荷重のもとにある単一ケーブルと微小要素

で与えられる。曲げ剛性のないとき、この張力はケーブルの接線方向に一致しており、断面張力の空間 $\{x, y, z\}$ -方向成分は

$$\begin{Bmatrix} T_x(s) \\ T_y(s) \\ T_z(s) \end{Bmatrix} = \frac{T}{\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2}} \begin{Bmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \\ \frac{dz}{ds} \end{Bmatrix} \quad (1.38)$$

と表わせる。

他方で、 ds 区間での張力成分と分布外力とのつり合いは

$$\frac{d}{ds} \{T_x, T_y, T_z\} + \{q_x, q_y, q_z\} = \{0, 0, 0\}$$

であり、始端張力成分 ($T_o = \{T_{ox}, T_{oy}, T_{oz}\}$)、あるいは終端張力成分 ($T_l = \{T_{lx}, T_{ly}, T_{lz}\}$) を積分定数として、集中荷重をも含めて積分すれば、ケーブル内の張力成分の分布は

$$\begin{Bmatrix} T_x(s) \\ T_y(s) \\ T_z(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{ox} \\ T_{oy} \\ T_{oz} \end{Bmatrix} - \int_0^s \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} ds - \sum_{s_\alpha < s} \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix}_\alpha \quad (1.39a)$$

$$, \text{ or } = \begin{Bmatrix} T_{lx} \\ T_{ly} \\ T_{lz} \end{Bmatrix} + \int_s^l \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} ds + \sum_{s_\alpha > s} \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{Bmatrix}_\alpha \quad (1.39b)$$

と表されることになる。

式 (1.37) と式 (1.39) より

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} = 1 + \frac{T(s)}{EA}, \quad T(s) = \sqrt{T_x(s)^2 + T_y(s)^2 + T_z(s)^2}$$

であり、式 (1.38) 右辺の分母に代入すれば、微係数 $\{dx/ds, dy/ds, dz/ds\}$ を張力成分 $\{T_x(s), T_y(s), T_z(s)\}$ に関して表すことができる。その式を積分することにより、ケーブルつり合い形状の一般解が、式 (1.39) の張力分布を用いて

$$\begin{Bmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{Bmatrix} = \int_0^s \left(\frac{1}{\sqrt{T_x(s)^2 + T_y(s)^2 + T_z(s)^2}} + \frac{1}{EA} \right) \begin{Bmatrix} T_x(s) \\ T_y(s) \\ T_z(s) \end{Bmatrix} ds \quad (1.40)$$

で得られることになる¹¹⁾。式 (1.40) のつり合い形状は、当然ながら、式 (1.39) に含まれる終端 (または始端) の張力成分 $\{T_{lx}, T_{ly}, T_{lz}\}$ の値によって変化する。例えば、始端は固定されているが、終端が自由端であり外力 $\{P_{lx}, P_{ly}, P_{lz}\}$ が作用している場合には、式 (1.39) の張力分布はつり合い条件より直接求まり、式 (1.40) のつり合い形状が決定される。他方で、終端もある空間位置 $\{x^*, y^*, z^*\}$ に固定されているときには、 $\{T_{lx}, T_{ly}, T_{lz}\}$ を直接得ることはできない。その値は、 $\{x(l), y(l), z(l)\} = \{x^*, y^*, z^*\}$ の適合条件が満たされるように生じる力成分であり、 $\{T_{lx}, T_{ly}, T_{lz}\}$ を未知パラメータとする一つの応力法としての適用となる。

適合条件 $x(l) = x^*$ を満たす終端張力値 T_l は、 $x(l) - T_l$ 間の接線係数、すなわち接線撓性マトリックスを用いた繰返計算により数値的に求められるのが一般的である。式 (1.36) の一般的な外力を受ける弾性ケー

ブルのつり合い形状は、終端張力成分 $T_l (= \{T_{lx}, T_{ly}, T_{lz}\})$ をパラメータとした式 (1.39) の張力分布のもとに、式 (1.40) のように表されている。終端張力の微小変化 δT_l による終端座標の変化 $\delta x_l (= \delta\{x_l, y_l, z_l\})$ は、 $\delta T(s) = \delta T_l$ のもとに式 (1.40) を微分することにより

$$\delta x_l = [Q(T_l)] \delta T_l \quad (1.41a)$$

$$[Q(T_l)] = \left[\int_0^l A(s) ds \right], \quad [A(s)] = \left(\frac{1}{|T(s)|} + \frac{1}{EA} \right) [I] - \frac{T(s)T(s)^T}{|T(s)|^3} \quad (1.41b)$$

として得られる。また、この撓性マトリックス $[Q(T_l)]$ の対称性により、 $\delta F = x_l(T_0)^T \delta T_l$ は完全微分形であり、経路によらない積分結果としてのスカラー関数

$$F(T_l) = \int_0^l \left[|T(s)| + \frac{|T(s)|^2}{2EA} \right] ds \quad (1.42)$$

が得られるが、これは x_l - T_l 間の 1 つの補ポテンシャルとして存在する。

以上の式を、自重のような伸び変形前の長さに沿った等分布荷重が作用する場合に対して具体的に展開する。z-方向に $q_z(s) = w : \text{const.}$ とし、式 (1.39) の張力分布は、始端張力成分 $\{T_{0x}, T_{0y}, T_{0z}\}$ に対して

$$\{T_x(s), T_y(s), T_z(s)\} = \{T_{0x}, T_{0y}, T_{0z} - ws\} \quad (1.43)$$

であり、式 (1.40) に代入して積分すれば

$$x(T_0; s) = \frac{T_{0x}s}{EA} + \frac{T_{0x}}{w} \ln \left\{ \frac{T_{0z} + \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + T_{0z}^2}}{(T_{0z} - ws) + \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + (T_{0z} - ws)^2}} \right\} \quad (1.44a)$$

$$y(T_0; s) = \frac{T_{0y}s}{EA} + \frac{T_{0y}}{w} \ln \left\{ \frac{T_{0z} + \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + T_{0z}^2}}{(T_{0z} - ws) + \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + (T_{0z} - ws)^2}} \right\} \quad (1.44b)$$

$$z(T_0; s) = \frac{T_{0z}s - \frac{w}{2}s^2}{EA} + \frac{1}{w} \left\{ \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + T_{0z}^2} - \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + (T_{0z} - ws)^2} \right\} \quad (1.44c)$$

のつり合い形状が得られ ($0 \leq s \leq l$)、弾性カテナリー曲線と呼ばれている。近年の電算機と数値計算手法のもとに、この解を実際の構造解析に適用することができるが、弾性カテナリー (2 次元) の曲線そのものは、文献 4)7) の議論の中で、Routh⁵⁾ によって 19 世紀末に示されていることが紹介されている。

弾性カテナリーでの $\{x_l, y_l, z_l\}$ - $\{T_{lx}, T_{ly}, T_{lz}\}$ 間の接線撓性マトリックスは、 $\{\delta T_{lx}, \delta T_{ly}, \delta T_{lz}\} = \{\delta T_{0x}, \delta T_{0y}, \delta T_{0z}\}$ のもとに式 (1.44) を微分すれば

$$\{\delta x_l, \delta y_l, \delta z_l\} = [Q(T_0)] \{\delta T_{lx}, \delta T_{ly}, \delta T_{lz}\} \quad (1.45a)$$

$$\text{ただし } [Q(T_0)] = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{bmatrix}$$

$$Q_{xx} = \frac{l}{EA} + \frac{1}{w} \left[\ln \left\{ \frac{T_{0z} + \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + T_{0z}^2}}{(T_{0z} - wl) + \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + (T_{0z} - wl)^2}} \right\} \right]$$

$$+ \frac{T_{0x}^2}{T_{0x}^2 + T_{0y}^2} \left\{ \frac{T_{0z} - wl}{\sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + (T_{0z} - wl)^2}} - \frac{T_{0z}}{\sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + T_{0z}^2}} \right\} \quad (1.45b)$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = \frac{T_{0x}T_{0y}}{w(T_{0x}^2 + T_{0y}^2)} \left\{ \frac{T_{0z} - wl}{\sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + (T_{0z} - wl)^2}} - \frac{T_{0z}}{\sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + T_{0z}^2}} \right\} \quad (1.45c)$$

$$Q_{xz} = Q_{zx} = \frac{T_{0x}}{w} \left\{ \frac{1}{\sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + T_{0z}^2}} - \frac{1}{\sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + (T_{0z} - wl)^2}} \right\} \quad (1.45d)$$

$$Q_{yy} = \frac{l}{EA} + \frac{1}{w} \left[\ln \left\{ \frac{T_{0z} + \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + T_{0z}^2}}{(T_{0z} - wl) + \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + (T_{0z} - wl)^2}} \right\} + \frac{T_{0y}^2}{T_{0x}^2 + T_{0y}^2} \left\{ \frac{T_{0z} - wl}{\sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + (T_{0z} - wl)^2}} - \frac{T_{0z}}{\sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + T_{0z}^2}} \right\} \right] \quad (1.45e)$$

$$Q_{yz} = Q_{zy} = \frac{T_{0y}}{w} \left\{ \frac{1}{\sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + T_{0z}^2}} - \frac{1}{\sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + (T_{0z} - wl)^2}} \right\} \quad (1.45f)$$

$$Q_{zz} = \frac{l}{EA} + \frac{1}{w} \left\{ \frac{T_{0z}}{\sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + T_{0z}^2}} - \frac{T_{0z} - wl}{\sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + (T_{0z} - wl)^2}} \right\} \quad (1.45g)$$

として得られる。式 (1.44) で与えられる $s = l$ の終端座標を、 $\delta F = x_l(T_0) \delta T_{lx} + y_l(T_0) \delta T_{ly} + z_l(T_0) \delta T_{lz}$ に用いて式 (1.42) を実際に積分すれば、この場合の補ポテンシャルとして

$$\begin{aligned} F(T_0) &= \frac{1}{2EA} \{ T_{0x}^2 l + T_{0y}^2 l + T_{0z}^2 l - T_{0z} w l^2 \} \\ &+ \frac{T_{0x}^2 + T_{0y}^2}{2w} \ln \left\{ \frac{T_{0z} + \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + T_{0z}^2}}{(T_{0z} - wl) + \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + (T_{0z} - wl)^2}} \right\} \\ &+ \frac{1}{2w} \left\{ T_{0z} \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + T_{0z}^2} - (T_{0z} - wl) \sqrt{T_{0x}^2 + T_{0y}^2 + (T_{0z} - wl)^2} \right\} \quad (1.46) \end{aligned}$$

が得られる。

1.5 ケーブルの有限要素

これまでに示した単一ケーブルの力学は次章で述べるケーブル構造の静的解析の基本であって、その扱いは、

- 1) ケーブル要素を用いる有限要素法、
- 2) 特定分布荷重に釣り合うケーブル形状の解析解を利用して、ケーブル端でのつりり合い条件あるいは適合条件式を解く方法、

の二つに大別される。後者については、1.2 ~ 1.4 にその基礎を示した放物線ケーブルおよびカタナリーケーブルの力学に基づき、ケーブル部材に対する接線剛性方程式を誘導して、ケーブル構造解析に組み込まれることも多い⁹⁾¹⁰⁾。これらのケーブル部材要素は特定荷重が作用する場合には高精度でかつ簡便な解法となるもの

の、汎用性にやや欠ける面があることは否めない。これに対して、より汎用的な解法を与えるのが前者の有限要素法である。ケーブルに中間節点を設け、1.1で示した直線ケーブル要素を基本とした折れ線状の多部材として解析する方法はその代表であるが、任意の荷重を受け、大きなサグを有するケーブルに対して精度を確保するためには解析自由度が増大することから、曲線ケーブル要素もいくつか提案されている^{12)~15)}。

文献12),13)では、3節点アイソパラメトリック要素を用いて、Total Lagrangian手法に基づいたケーブル構造の大変形解析法が提案されているが、それでも、ケーブルの非線形性が強い場合には解析自由度が多くならざるを得ない。文献14)ではこの点を改善するものとして、階段状の応力場の仮定に基づく混合法が、また文献15)ではUpdated Lagrangian手法に基づく柔ケーブル要素が提案されている。詳細は参考文献に譲るが、柔ケーブル要素については第9章、9.1.2にその誘導過程を示してあるので参照されたい。

参考文献

- 1) 日本鋼構造協会：吊構造，コロナ社，1975年。
- 2) 土木学会：構造力学公式集，第9章，1986。
- 3) Irvine, H.A. : *Cable Structures*, MIT press, 1981.
- 4) Jennings, A. : discussion of "Cable Movements under Two-Dimensional Loading" by W.T. O'Brien and A.J. Francis, *J. of Str. Div.*, ASCE, Vol.91, No.ST1, pp.307-311, 1965.
- 5) Routh, E.J. : *A Treatise on Analytical Statics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, Vol.1, 2nd Edition, 1896.
- 6) Michalos, J. and Birnstiel, C. : Movements of A Cable due to Changes in Loading, *Transactions*, ASCE, Vol.127, Part II, pp.267-282, 1962.
- 7) O'Brien, W.T. and Francis, A.J. : Cable Movements under Two-Dimensional Loads, *J. of Str. Div.*, ASCE, Vol.90, No.ST3, pp.89-123, 1964.
- 8) Mollman, H : Analysis of Plane Prestressed Cable Structures, *J. of Str. Div.*, ASCE, Vol.96, No.ST10, pp.2059-2081, 1970.
- 9) 前田幸雄・林 正・前田研一：サグを考慮したケーブル部材の計算式，土木学会論文報告集，No.257, pp.123-126, 1977.
- 10) 後藤茂夫：柔ケーブル材の接線剛性方程式について，土木学会論文報告集，No.270, pp.41-49, 1978.
- 11) 阿井正博・西岡 隆・奥村敏恵：ケーブル構造に関する一理論解析，土木学会論文報告集，No.260, pp.17-32, 1977.
- 12) Henghold, W.H. and J.J. Russell : Equilibrium and natural frequencies of cable structures (a nonlinear finite element approach), *Computer & Structures*, Vol.6, pp.267-271, 1976.
- 13) W.Kanok-Nukulchai, A.Hasegawa and F.Nishino: Generic formulation procedure for large deformation analysis of structural elements, *Structural Engineering/Earthquake Engineering*, Vol.3, No.1, JSCE, pp.53s-61s, 1986.
- 14) 中西宏・波田凱夫：曲線要素を用いた有限要素法によるケーブル構造の大変形解析，土木学会論文報告集，No.318, pp.41-50, 1982.
- 15) 謝旭・伊藤学・山口宏樹：Updated Lagrangian 手法に基づく柔ケーブルの非線形解析，構造工学論文集，土木学会，Vol.41A, pp.427-434, 1995.