

## 第 7 章

### 可動性と形態の力学

技術者の最終目標が構造物の安定 (施工, 使用時の安全性) に置かれることは当然である。しかし, この安定の外にある領域を工学的立場で論じることは少ない。この枠外に漠然と位置付けられる“不安定”を知ることがより自由な技術的発想につながることを期待してこの章に入る。

#### 7.1 可動性と形態

図 7.1(a) は微小変位理論範囲での不安定 (Infinitesimal Mobility) で, その剛体変位の存在する方向を点線で示している。この構造は有限変位を考えると安定 (No Mobility) であるのに対して, (b) は有限変位範囲でも不安定 (Finite Mobility) となる。可動性 (Mobility) とは, 不安定の意味であるが, 安定外としての漠然とした不安定でなく, 不安定にかかわる現象を積極的に工学に応用する意味を込めて可動性という言葉本章のタイトル「可動性と形態の力学」に用いている。本文で言う不安定とはまさにこの意味である。次に形態である。形という言葉からは意匠的な色彩を感じとることができるが, 構造材料によってはその実現可能形状が力学的に制約される場合がある。特に張力でのみしか力を伝達できない線材のケーブル構造や面材による膜構造では, 境界条件でその形状はほぼ決まる。張力材のみを用いるとその形状は比較的単調になりがちであるが, Buckminster Fuller (バックミンスター・フラー) の提案による Tensegrity (テンセグリティ) 構造のように圧縮材とうまく組み合わせることによりその形状も工夫できる。このように, 力学的考察抜きでは成立しない形態もあれば, 構造物に期待する力学的性能を満足させるような積極的意味での形態もある。単なる形ではなく形態は力学的に意味がある。

まず, 幾つかの事例をもとに, より具体的に話を進める。

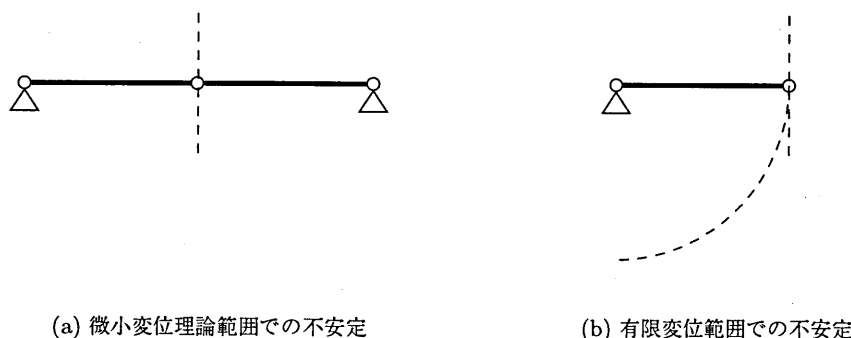
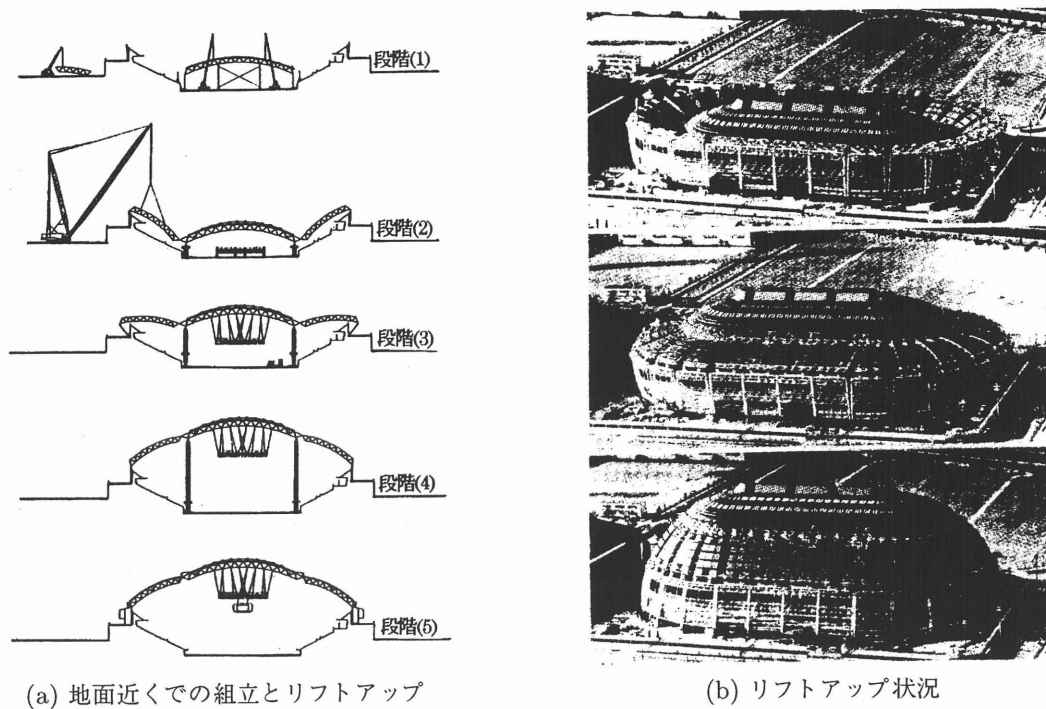
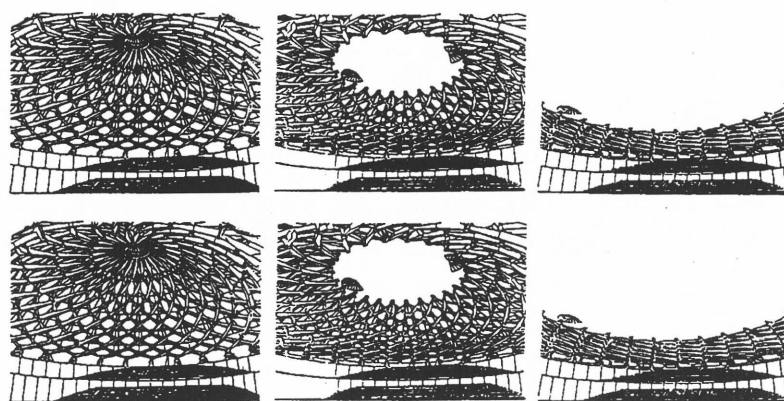


図 7.1: 不安定の種類

図 7.2: パンタドーム<sup>13)</sup>

閉じた屋根

開閉途中

開いた屋根

(a) アイリスドーム (by Hobberman)



(b) プール上屋根 (by Escrig)

図 7.3: 展開構造物

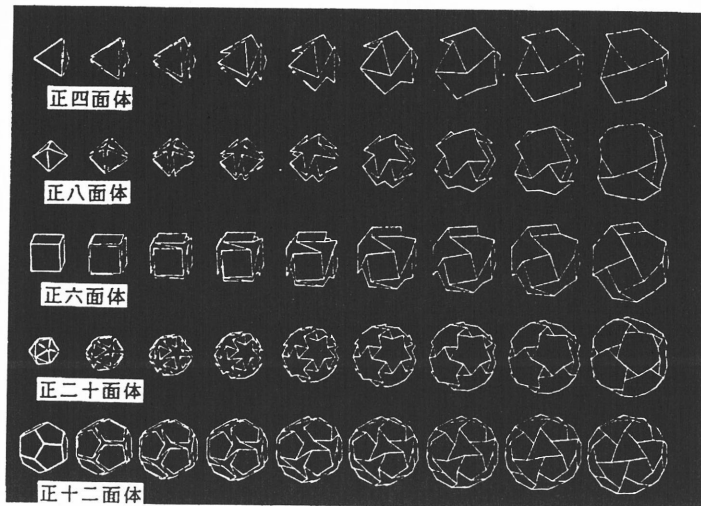
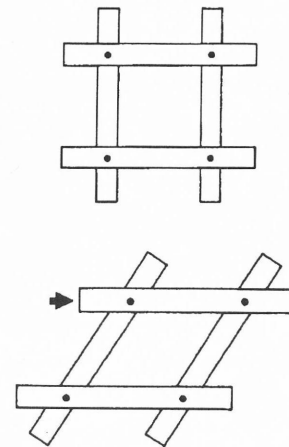
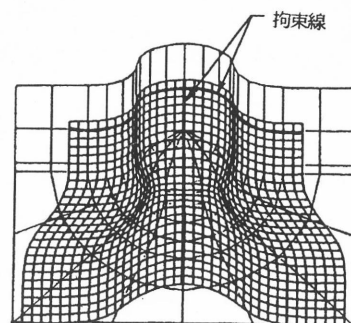
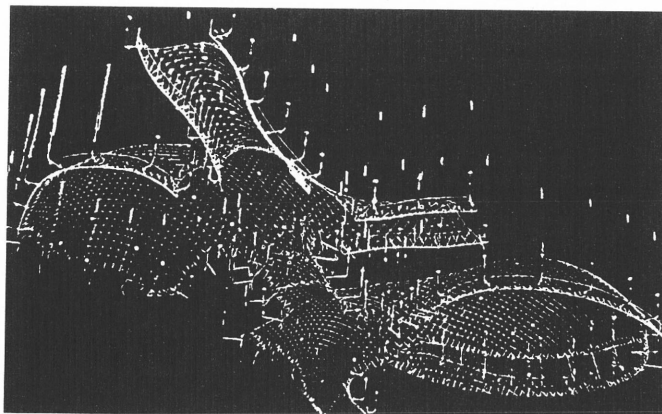
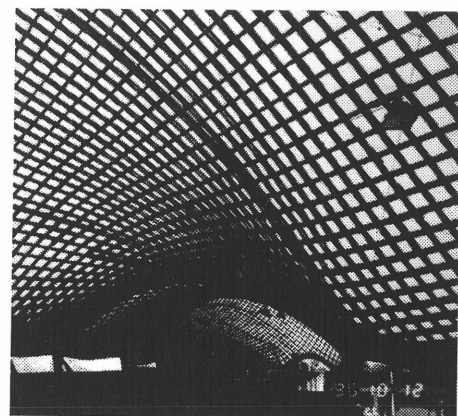
図 7.4: プラトンの正多面体からの位相変化<sup>14)</sup>

図 7.5: 四角形の可動性

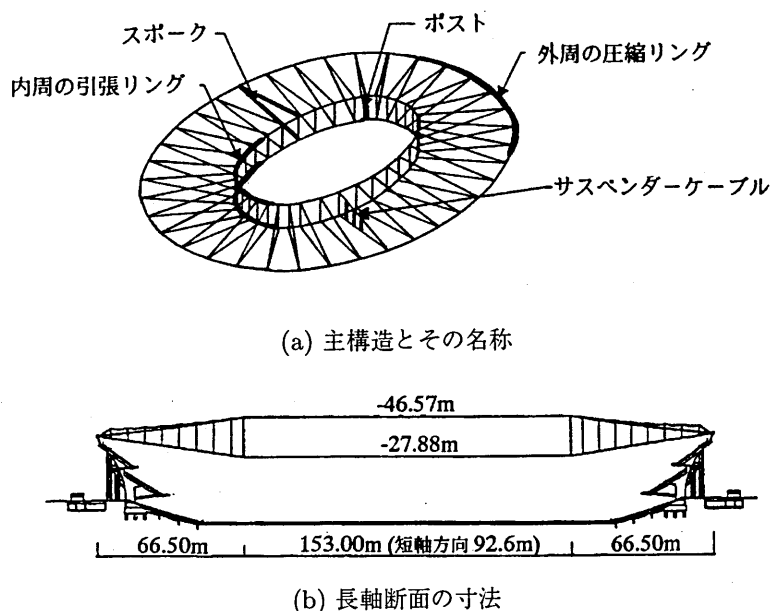
図 7.6: 格子による3次元曲面の形成<sup>12)</sup>

(a) ネットによる吊り下げ曲面



(b) ホール内観 (写真)

図 7.7: マンハイムの多目的ホール<sup>8)</sup>

図 7.8: ケーブル屋根の一例<sup>15)</sup>

- 事例 1: パンタドーム (Panta Dome) (図 7.2)

パンタドームは施工時に 3 次元空間での展開を利用した大スパン建築物である。可動性を積極的に構造に取り込んだ形態の例である。

- 事例 2: 展開構造物

宇宙構造物として関心の高い展開構造物は地上構造物として使用する場合、連結部の設計や全体剛性の確保等に課題はあるが、そのダイナミックな形態変化は感動を与える (図 7.3 参照)。さらには幾何学的可能性としてであるが、正多面体に折り畳んだ部材の展開 (トポロジー変化) 等による形態形成も興味深い (図 7.4 参照)。

- 事例 3: 格子構造

図 7.5 は 4 本の棒を面外軸まわりに回転できるように連結した格子である。この格子は平面内に大きく変形する不安定のため構造ユニットとしては一般的でない。しかしこの可動性は、例えば図 7.6 のように、2 次元構造から 3 次元構造の形成、またその逆形成に効率よく利用することができる。図 7.7 はマンハイムの多目的ホールである。この曲面は、実際には図 7.7 の中で示すように吊り下げ曲面を反転したものであるが、格子のもつ可動性を効率よく形態形成に利用している。

- 事例 4: ケーブル屋根

ケーブルを利用した大スパン屋根の断面は、ケーブル張力により安定を保つ。一例として図 7.8 は 1998 年クアラルンプールに完成した 10 万人収容できるスタジアムである。図 7.8(b) の断面中央に存在する内周リング間 153m 幅の四角形の他に周方向に隣接するポスト間と隣接するスポーク間の四角形には不安定性が内在している。この不安定による変形のし易さ、しなやかさを可動性として積極的に設計に反映させることが規模に対する壁を超える一つの要因になりえる。

可動性は解析的にみると構造物の持つ剛性行列のランク (階数) の制御につながる。使用時の安定構造物をフルランクとすれば、フルランクに満たない状態にある可動性の制御は、この状態でのランクの増減の制御であり、さらには解析空間自体の変動に対する、いわばトポロジーの制御でもある。

## 7.2 基礎式

まず必要な基礎式であるが、適合式、構成式とつり合い式をそれぞれ次式で表現する。特に断らない限り各式は無次元化された量である。

$$Au = \varepsilon \quad (7.1)$$

$$E\varepsilon = \sigma \quad (7.2)$$

$$B\sigma = f \quad (7.3)$$

$A$  は変位  $u$  を伸び  $\varepsilon$  に、 $E$  は伸びを応力  $\sigma$  に、そして  $B$  は応力を荷重  $f$  に変換する行列であり、また  $B = A^t$  である (右肩の添え字  $t$  は転置を示す)。例えばトラス構造の全自由度を  $n$ 、部材数を  $m$  とすれば、 $A$  行列の寸法は  $A(m, n)$  である。式 (7.1) から式 (7.3) より、変位は剛性行列  $K$  によって荷重と次式で直接関係付けられる。

$$Ku = f \quad K = BEA \quad (7.4)$$

このとき、構造物のもつ性能である変位は通常次式で評価できる。

$$u = K^{-1}f \quad (7.5)$$

図 7.1 の構造物に対して剛性行列を具体的に計算すると (a) と (b) は、それぞれ

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A = B^t \quad \therefore K = 2k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad E = k \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad A = B^t \quad \therefore K = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

$k = E_0 A_0 / L_0$  である。 $E_0, A_0, L_0$  は、それぞれ部材のヤング率、断面積と長さである。その行列式は、共に  $\det K = 0$  である。よって剛性行列は特異であるため、逆行列の利用を前提とした式 (7.5) は利用できない。このとき構造物は不安定と呼ばれている。本章では、この漠然とした不安定を可動性と捉えて、その性質を積極的に構造形態の設計に利用するために必要となる解析手法の幾つかを一般逆行列を用いて示す。

## 7.3 一般逆行列と幾何剛性

構造物の安定、不安定状態を説明する場合、その前提を不安定に置くことが合理的である。安定は不安定の中にその一部として存在するという立場である。そのため安定を前提とする逆行列に代えて本章では一般逆行列を利用する。この一般逆行列の定義をはじめ、本章の理解に必要な事項を以下に要約しておく。

### 7.3.1 一般逆行列の定義

用いる一般逆行列はムーア・ペンローズ (Moore・Penrose) 一般逆行列である。長方形行列  $A = (m, n)$  に対するムーア・ペンローズの一般逆行列  $A^-$  は次式で定義される。

$$(AA^-)^t = AA^- \quad (A^-A)^t = A^-A \quad AA^-A = A \quad A^-AA^- = A^- \quad (7.8)$$

$A^-$  は唯一である。特異でない  $m = n$  の正方行列  $A$ ，すなわち  $\det(A) \neq 0$  の場合， $A^- = A^{-1}$  がいえる。一般に連立方程式 (7.9) に対する解は式 (7.10) で表現できる。

$$Ax = y \quad (7.9)$$

$$x = A^-y + (I_n - A^-A)\alpha \quad (7.10)$$

行列  $I_n$  は  $n$  次元単位行列， $\alpha$  は任意ベクトルである。解の 1 項目と 2 項目をそれぞれ特解と余解と呼び区別する。式 (7.10) が式 (7.9) を満足するために必要とする解の存在条件は次式である。

$$(I_m - AA^-)y = 0 \quad (7.11)$$

解の存在条件の成立とは無関係に特解は最小 2 乗法による解と一致するため，最適化問題の解を得る手段としても有効である。この理由からも解の存在条件を満足する特解は最適解，満足されないときの特解は最適近似解となる。

### 7.3.2 ベクトルの一般逆行列

$n$  成分ベクトル  $a$  の一般逆行列は

$$(a)^- = \frac{1}{c_0} a^t, \quad \text{ただし, } c_0 = \sum_{i=1}^n a_i a_i \quad (7.12)$$

$a$  を列ベクトルとすれば，次式が成立する。

$$(a^t)(a^t)^- = (a^t)(a^-)^t = (a^-a)^t = (a^-a) = 1 \quad (7.13)$$

### 7.3.3 直交射影行列の性質

$A^t = A$  かつ  $A^2 = A$  のとき  $A$  は直交射影行列であり， $A^- = A$  が成立する。すでに現れている  $AA^-$ ,  $A^-A$ ,  $(I_m - AA^-)$ ,  $(I_n - A^-A)$  は，直交射影行列の条件を満たしていることが確認できる。 $A$  の対称性から， $AA^- = A^-A$  も成立する。

### 7.3.4 Bott-Duffin 逆行列

式 (7.4) の荷重と変位関係式に変位に関する制約式 (7.15) が課せられる問題に対するラグランジュ乗数法による支配方程式は次式である。

$$Ku + A^t\lambda = f \quad (7.14)$$

$$Au = 0 \quad (7.15)$$

$K(n, n)$ ,  $\det(K) \neq 0$ ,  $A(k, n)$ ,  $k < n$  で，行列  $A$  はフルランク，すなわち  $\text{rank } A = k$  とする。 $\lambda$  はラグランジュ乗数である。式 (7.15) の右辺は任意の既知量でよいが簡単のためゼロとしている。式 (7.14)，(7.15) を連立して解く一般的な解法ではなく，以下の誘導が可能である。まず式 (7.15) の余解を作る。

$$u = (I_n - A^-A)\alpha \quad (7.16)$$

次の関係から変位  $u$  と  $A^t\lambda$  は直交する。

$$u^t \cdot (A^t\lambda) = (Au)^t\lambda = 0 \quad (7.17)$$

式 (7.16), (7.17) より,  $A^t \lambda$  は  $A^- A$  で張られる空間に存在するので,  $A^t \lambda$  を次式で表現する.

$$A^t \lambda = A^- A \alpha \quad (7.18)$$

式 (7.16), (7.18) を式 (7.14) に代入して  $\alpha$  を求めると,

$$\alpha = [K(I_n - A^- A) + A^- A]^{-1} f \quad (7.19)$$

ゆえに, 変位  $u$  は次式で表現できる.

$$u = (I_n - A^- A)[K(I_n - A^- A) + A^- A]^{-1} f \quad (7.20)$$

式 (7.20) の右辺  $f$  に掛かる係数行列が Bott-Duffin 逆行列と呼ばれる. その係数成分が  $A$  の陽な形で表現できることは一般逆行列を用いる利点である.

### 7.3.5 幾何剛性

微小変位と軸力  $N_0$  による自己応力の存在を前提としたとき, 図 7.9 に示すトラス部材の荷重と変位の関係式は

$$(K + K_G)u = f \quad (7.21)$$

ただし,

$$K = k \begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \quad k = \frac{E_0 A_0}{L_0} \quad K_G = \frac{N_0}{L} \begin{bmatrix} m^2 & -lm & -m^2 & lm \\ -lm & l^2 & lm & -l^2 \\ -m^2 & lm & m^2 & -lm \\ lm & -l^2 & -lm & l^2 \end{bmatrix}$$

$$u^t = (u_i \ v_i \ u_j \ v_j)^t \quad f^t = (f_{xi} \ f_{yi} \ f_{xj} \ f_{yj})^t$$

行列内の成分を構成する  $l, m$  は, 図 7.9 中で示すように, 部材と  $x, y$  軸による方向余弦である.  $N_0$  は導入軸力である. 例えば図 7.1(a) の 2 自由度トラス構造では,  $l = 1, m = 0$  より

$$K + K_G = 2k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\frac{N_0}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

$N_0 \neq 0$  のとき, 明らかに  $\det(K + K_G) \neq 0$  であり,  $y$  方向荷重に対しても抵抗できる構造になる. 式 (7.4) との相違は, 式 (7.21) の係数行列が(弾性)剛性行列  $K$  と幾何剛性行列  $K_G$  によって構成されることである.

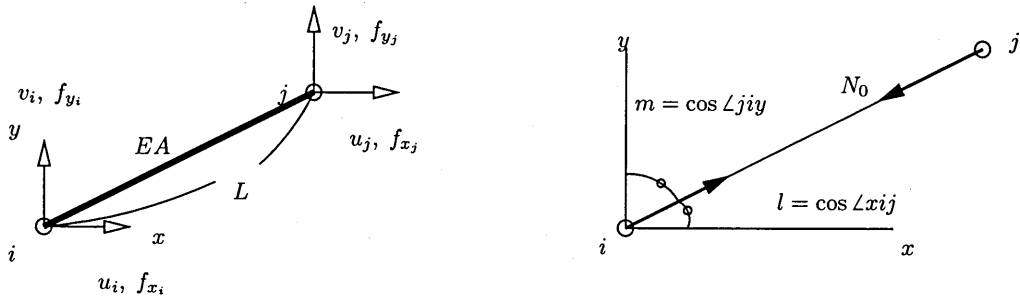


図 7.9: トラス要素の諸元と方向余弦

## 7.4 剛体変位モードと自己応力

適合式 (7.1) の解は、式 (7.10) を参照して次式で表せる。

$$u = A^- \varepsilon + (I_n - A^- A) \alpha \quad (7.23)$$

部材の伸縮を伴わない剛体変位を考えると上式で  $\varepsilon = 0$  である。剛体変位は右辺第 2 項目に見い出すことができる。行列  $A(m, n)$  のランク  $r$  に  $r < n$  の関係があるとき、独立な剛体変位モードは、その数を  $p$  とすれば  $p = n - r$  個存在する。図 7.1(a)(b) のトラス構造を例に、その剛体変位モードを抽出してみる。式 (7.6), (7.7) で与えられる行列  $A (= B^t)$  を利用して、式 (7.23) の右辺第 2 項を具体的に計算すると

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^- = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore (I_2 - A^- A) \alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \alpha_2 \quad (7.24)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A^- = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore (I_1 - A^- A) \alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \alpha_2 \quad (7.25)$$

共に、 $r = \text{rank} A = 1$  であることから、独立に存在する剛体変位モードの数は  $p = 1$  となる。微小変位の範囲では、2つの構造物の剛体変位モードが一致することを本結果は示している。式 (7.24), (7.25) で得た係数  $\alpha_2$  がかかるベクトルである。図 7.1(a) において鉛直方向の点線がそのモードを意味している。図 7.1(b) に円弧で描いた剛体変形に対する軌跡を得るには微小変位を前提とした式 (7.25) では不十分である。一方、自己応力は無荷重状態でつり合い式を満足する応力である。独立な自己応力成分の数  $q$  は、 $q = m - r$  で与えられる。まず、つり合い式 (7.3) の解は

$$\sigma = B^- f + (I_m - B^- B) \beta \quad (7.26)$$

自己応力は右辺第 2 項目に存在する。図 7.1(a)(b) の構造物を例に、具体的に計算すると、それぞれ

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^- = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore (I_2 - B^- B) \beta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \beta_1 \quad (7.27)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \therefore (I_1 - B^- B) \beta = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \beta = 0 \quad (7.28)$$

図 7.1(a) に存在する自己応力は、(b) の構造物には存在し得ないことを式 (7.27), (7.28) は示している。ここでの説明は微小変位を前提としており、有限変位領域での自己応力の存在を知ることはできない。(a) の場合、中間の自由節点の位置を少しでも上下に動かした形状では自己応力は存在しない。(b) は有限変位領域でも自己応力の存在し得ないことは自明である。

## 7.5 不安定構造物の構造解析

構造物の応力や変位がその構造剛性の特異性の有無にかかわらず同一の形式で表現できることを示す。応力法を基礎にした解析である。ただし、つり合い式 (7.3) が、その解の存在条件を満たすことを前提にする。本解法はその構造が不安定、すなわち剛体変形可能な構造物であっても解の存在が保証されるとき有用な解を与えることが期待できる。まず、最小補ひずみエネルギーの原理を次式で表現する。

$$\min \left\{ \frac{1}{2} \sigma^t E^{-1} \sigma \right\} \quad \text{subject to } B \sigma = f \quad (7.29)$$



上式で、制約式となるつり合い式の解は、式 (7.26) であり、再記すると

$$\sigma = B^- f + (I_m - B^- B) \beta \quad (7.30)$$

式 (7.30) を式 (7.29) に代入すると、補ひずみエネルギーは  $\beta$  の関数として次式で表現できる。

$$\Pi(\beta) = \frac{1}{2} \sigma^t E^{-1} \sigma = \frac{1}{2} (B^- f)^t E^{-1} (B^- f) + (I_m - B^- B) E^{-1} (B^- f) + \frac{1}{2} \beta^t (I_m - B^- B) \beta \quad (7.31)$$

いま、Rayleigh-Ritz (レイリー・リッツ) 法、すなわち式 (7.31) の解を次式から誘導することを考える。

$$\frac{\partial \Pi(\beta)}{\partial \beta} = 0 \quad (7.32)$$

結果は次式の通りである。

$$(I_m - B^- B) E^{-1} [B^- f + (I_m - B^- B) \beta] = 0 \quad (7.33)$$

上式は、ひずみと自己応力の直交性を意味している。このとき、7.3.4 で示した解空間の設定と同様に、ひずみを次式で表現する。

$$\varepsilon = E^{-1} [B^- f + (I_m - B^- B) \beta] = B^- B \beta \quad (7.34)$$

上式から  $\beta$  を求めるとき、 $E$  の正則性を考慮すると、常に次式が成立する。

$$\beta = [(E + I_m) B^- B - I_m]^{-1} B^- f \quad (7.35)$$

式 (7.34), (7.35) の結果を式 (7.2) に代入することにより、応力が次式で得られる。

$$\sigma = E B^- B [(E + I_m) B^- B - I_m]^{-1} B^- f = E F B^- f \quad (7.36)$$

ただし、 $F = B^- B [(E + I_m) B^- B - I_m]^{-1}$ 。式 (7.31) で  $\beta$  の関数として表現した補ひずみエネルギーは、式 (7.36) を用いるとき荷重  $f$  の関数として次式で表現できる。

$$\Pi(f) = \frac{1}{2} f^t (B^-)^t F^t E F B^- f \quad (7.37)$$

このとき変位  $u$  は、カスチリアーノの第 2 定理 (Castigliano's Second Theorem), 式 (7.38) から導くことができる。

$$u = \frac{\partial \Pi(f)}{\partial f} \quad (7.38)$$

結果として変位は、

$$u = (B^-)^t F^t E F B^- f \quad (7.39)$$

特に、 $E \propto I_m$  の場合には、 $[2B^- B - I_m]^2 = I_m$  を考慮すれば、 $F = B^- B$  であり、式 (7.36), (7.39) の応力と変位はそれぞれ次式になる。

$$\sigma = B^- f, \quad u = (B^-)^t B^- f \quad (7.40)$$

本節で得た応力と変位の表現式は、不静定、静定構造物や構造剛性が特異となり剛体変位モードを内存する不安定構造物の区別なく解の存在条件を満足する系に対しては有効である。 $E \propto I_m$  の特別な場合であるが、

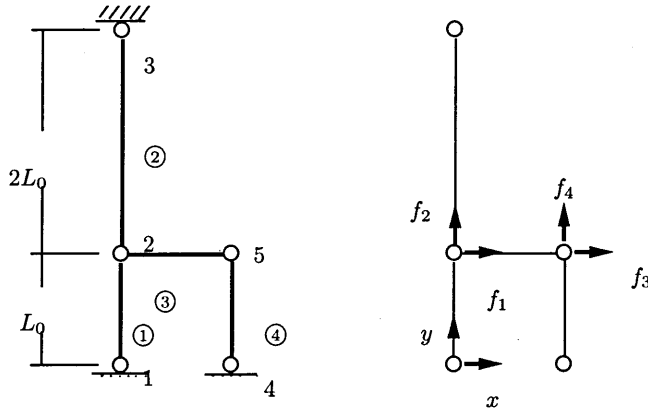


図 7.10: 微小変位で不安定なトラス構造の解析例

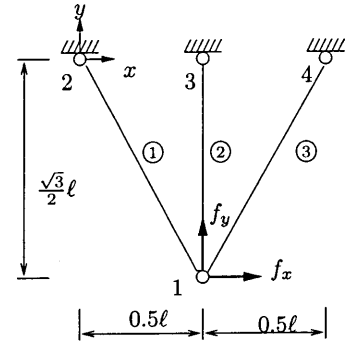


図 7.11: 不静定トラス構造の解析例

その応力表現をみると、不静定であってもその応力がつり合い式から直接誘導できることが分かる。本章で得た解の検討のためトラス構造による簡単な例題を示す。

まず、図 7.10 に示す不安定トラス構造物を例題とする。解析に必要な行列  $B, B^-, E$  と  $f$  は次のようになる。

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B^- = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E = k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \sigma = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad u = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 2/3 \\ 0.5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

解の存在条件  $(I_n - BB^-)f = 0$  を満たすので、式 (7.36) と式 (7.39) による応力と変位が上式のように得られる。応力は文献 10) と一致する。得られた各部材応力を利用して変位の妥当性も示すことができる。

次に、 $E \propto I_m$  の場合について、変位式 (7.40) の妥当性を調べる。図 7.11 の不静定トラス構造物の場合、行列  $B, B^-$ 、および、式 (7.40) による変位解を以下に示す。

$$B = - \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \quad B^- = - \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3}/5 \\ 0 & 2/5 \\ 1 & \sqrt{3}/5 \end{bmatrix} \quad u = (B^-)^t B^- f = \begin{bmatrix} 2f_x \\ 0.4f_y \end{bmatrix}$$

この変位は通常の解析において各部材で  $(E_0 A_0 / L_0)_i = 1$ ,  $(i = 1, 2, 3)$  と置いた結果と確かに一致する。あまりにも単純な例題であるが、得た解に矛盾は無い。

## 7.6 ひずみ零の挙動解析

例えば、自重で垂れた状態から空気圧を受けて安定に至る空気膜ドームの形態変化の過程では、不安定状態にある空気膜ドームのひずみは巨視的にみて無視できる。膜の剛体変位の許容度が徐々に減るにつれて不安定度も減り安定度を増す。最終的に得る形態は、いま考えている荷重(この場合は空気圧)のもとで剛体変形が生じ得ない状態である。以下に、ひずみ零で大きく形態を変える構造物の挙動に対する解法の一つを簡単に紹介する。式 (7.1) で示す適合式の増分表現は

$$A \Delta u = \Delta \varepsilon \quad (7.41)$$

行列  $A$  は増分区間で変化なしとしている。剛体変位のみを生じる不安定状態の構造物は、その形態変化に際しひずみを生じない条件を上式に課すことができ、その結果余解のみの次式を得る。

$$\Delta u = (I_n - A^- A) \Delta \alpha \quad (7.42)$$

未知係数  $\Delta \alpha$  は、作用する静的荷重  $f$  との外力仕事式を利用して求めることができる。外力仕事  $\Delta \Pi$  は

$$f^t \Delta u = \Delta \Pi \quad (7.43)$$

上式に式 (7.42) を代入し、 $\Delta \alpha$  の特解を求めると、7.3.2 と 7.3.3 を参照して、次の式の展開が可能である。

$$\begin{aligned} f^t (I_n - A^- A) \Delta \alpha &= \Delta \Pi \\ \Delta \alpha &= \frac{\Delta \Pi (I_n - A^- A) f}{f^t (I_n - A^- A) (I_n - A^- A) f} = \frac{\Delta \Pi (I_n - A^- A) f}{f^t (I_n - A^- A) f} \end{aligned}$$

このとき式 (7.42) は

$$\Delta u = \frac{\Delta \Pi}{f^t (I_n - A^- A) f} (I_n - A^- A) f \quad (= \Delta \alpha) \quad (7.44)$$

式 (7.44) の右辺の係数をまとめて  $\Delta^*$  とし、体裁上、 $f$  の前に置く。記号  $\Delta^*$  は、小さいという意味であるが [長さ / 力] の単位をもつ。このとき剛体変位は次式で表現できる。

$$\Delta u = (I_n - A^- A) \Delta^* f \quad (7.45)$$

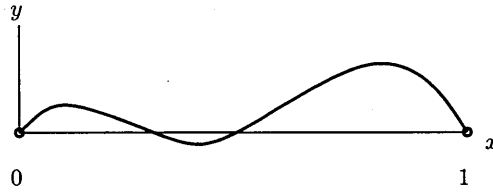


図 7.12: 曲線と区間

フーリエ級数を利用した一つの例題を示す。

図 7.12 に  $x$  方向の区間  $[0, 1]$  に渡された曲線を示す。初期形状は次式で与えられる。

$$y = \sum W_i \sin i\pi x \quad (i = 1, \dots, n \quad 0 \leq x \leq 1) \quad (7.46)$$

曲線の長さ  $s$  を求める公式は

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx \quad (7.47)$$

式 (7.46) を式 (7.47) に代入すると曲線の長さは次式で表現できる。

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \pi^2 \sum \sum ij W_i W_j \cos i\pi x \cos j\pi x} dx \quad (7.48)$$

このとき、長さの増分  $\Delta s$  は、 $s \rightarrow s + \Delta s$ ,  $W_i \rightarrow W_i + \Delta W_i$  の置き換えで得られる。

$$\frac{\Delta s}{\pi^2} = \sum \left[ \int_0^1 \frac{i \cos i\pi x \sum j W_j \cos j\pi x}{\sqrt{1 + \pi^2 \sum \sum kl W_k W_l \cos k\pi x \cos l\pi x}} dx \right] \Delta W_i \quad (7.49)$$

式 (7.49) の成分表示は

$$\frac{\Delta s}{\pi^2} = a_1 \Delta W_1 + a_2 \Delta W_2 + \cdots + a_n \Delta W_n \quad (7.50)$$

上式をベクトル表示すると

$$\frac{\Delta s}{\pi^2} = A^t \Delta W \quad (7.51)$$

ただし,  $A^t = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $\Delta W^t = (\Delta W_1, \Delta W_2, \dots, \Delta W_n)$  とする. 今考えているのは, 伸びの無い曲線の動きであり,  $\Delta s = 0$  である. このとき, 式 (7.51) の解は

$$\Delta W = (I_n - (A^t)^-(A^t)) \alpha \quad (7.52)$$

$\text{rank } A = 1$  より, 独立な剛体成分の数  $p = (n - 1)$  が常に成立する.  $n = 1$  では伸びを伴わずに変化できないことを示している. 次に荷重  $f$  を次式で定義する.

$$f = \sum F_i \sin i\pi x \quad (7.53)$$

このとき, 外力仕事の増分  $\Delta \Pi$  は

$$\Delta \Pi = \int_0^1 f \Delta y dx = \frac{1}{2} \sum F_i \Delta W_i \quad (7.54)$$

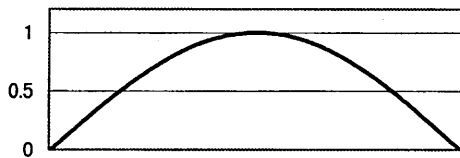
$F^t = (F_1, F_2, \dots, F_n)$  のとき, 式 (7.54) のベクトル表示は次式である.

$$F^t \Delta W = 2\Delta \Pi \quad (7.55)$$

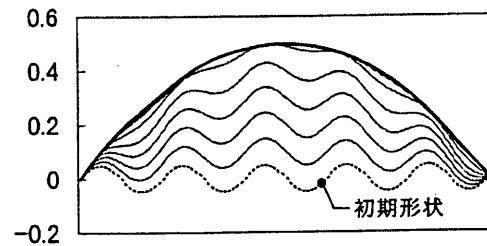
式 (7.52) と式 (7.55) から  $\Delta W$  を求める操作は式 (7.42) から (7.45) の誘導に習う.  $n = 10$  に対する例題を示す.

図 7.13 は, 初期形状  $y = 0.05 \sin 10\pi x$ , 荷重  $\Delta f = 0.005 \sin \pi x$  に対するもので, 200 ステップの計算結果である. 最終の安定曲線に至る 20 ステップごとの移行過程を含めて表現している. 初期長さ 1.4544 に対し 200 ステップ後は 1.4633 であった. ここでの安定曲線の意味は, 図 7.13(a) 与えた荷重モードとの間にもはや剛体変位を生じることのできない曲線である.

示した解法は, 余解に基づいている. そこでは, いかに未知係数を決定するかが問題となる. 一方, 余解を利用しなくても, 例えば適合式 (7.41) と外力仕事式 (7.43) を連立してその特解から直接的に剛体変位を誘導することもできる. 図 7.14 の不安定トラス構造に対する結果は特解を利用している.



(a) 荷重モード



(b) 安定化移行過程と最終形態

図 7.13: 曲線の安定化移行解析

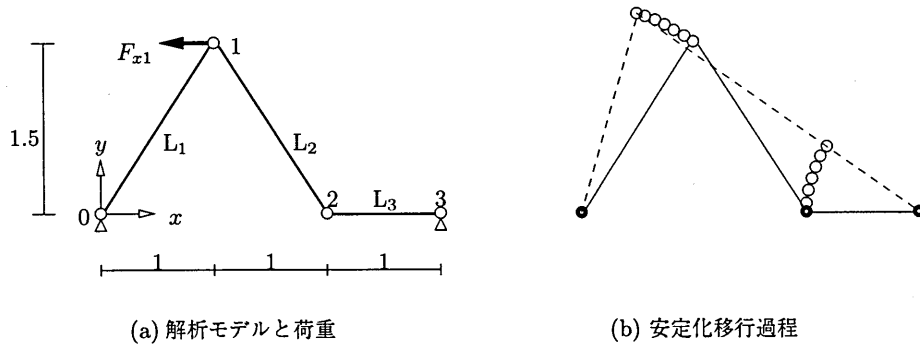


図 7.14: 特解を利用した安定化移行解析の結果

## 7.7 解の存在条件

つり合い式 (7.3) とその解の存在条件は、それぞれ

$$B\sigma = f, \quad (I_n - BB^-)f = 0 \quad (7.56)$$

$B = A^t$  の関係を解の存在条件に代入すると

$$(I_n - BB^-)f = (I_n - A^t(A^t)^-)f = (I_n - A^t(A^-)^t)f = (I_n - (A^-A)^t)f = (I_n - (A^-A))f = 0 \quad (7.57)$$

すなわち、つり合い式に必要な解の存在条件は式 (7.45) との一致から分かるように剛体変位を生じないことである。適合式 (7.1) とその解の存在条件は、それぞれ

$$Au = \varepsilon, \quad (I_m - AA^-)\varepsilon = 0 \quad (7.58)$$

つり合い式の場合と同様に上式の解の存在条件式を変形すると

$$(I_m - AA^-)\varepsilon = (I_m - B^-B)\varepsilon = 0 \quad (7.59)$$

この自己応力で張られる空間と  $\varepsilon$  の直交性はすでに 7.5 で利用している。今まで多用した行列  $A$  や行列  $B(n, m)$  は、変位を荷重と関係付ける剛性行列  $K$  の構成要素であった。式 (7.4) を再記すると

$$Ku = f \quad (7.60)$$

ここで、

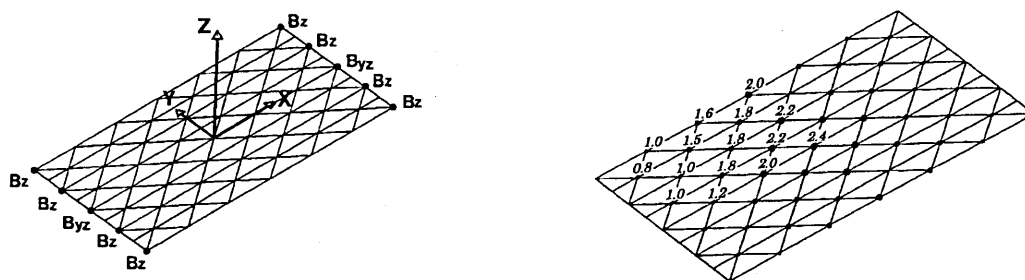
$$K(n, n) = BAE \quad \text{and} \quad B = A^t$$

$K$  の特異性、すなわち  $\det K = 0$  の可能性も考慮すると、式 (7.60) の解は

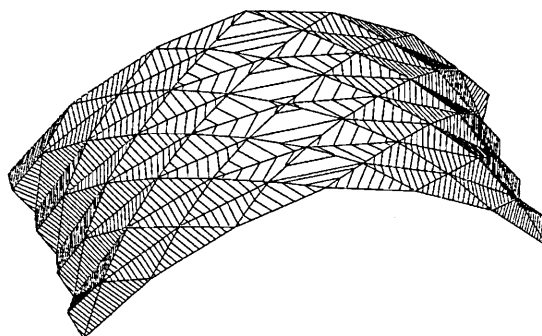
$$u = K^-f + (I_n - K^-K)\gamma \quad (7.61)$$

対称行列  $K$  には、 $KK^- = K^-K$  の関係があり、式 (7.60) に対する解の存在条件式は次の変形ができる。

$$(I_n - KK^-)f = (I_n - K^-K)f = 0 \quad (7.62)$$



(a) 境界条件と鉛直荷重分布



(b) 鳥瞰図

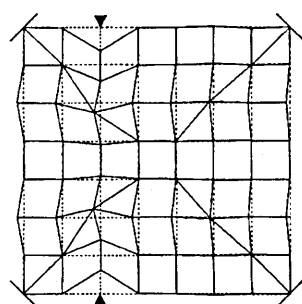
図 7.15: 三角パネルの作る形態

式 (7.61) の余解は剛体変位を提供し、解の存在条件を満足する荷重に対しては、その剛体変位は生じ得ないことを上の 2 式は意味している。この意味を具体的に表現するため、余解には式 (7.45) を用いて、式 (7.61) を次式で表現する。

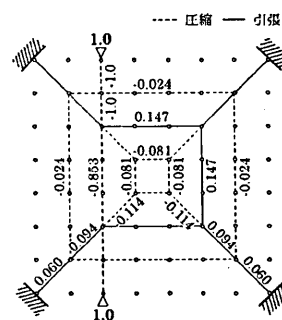
$$u = K^- f + (I_n - K^- K) \Delta^* f \quad (7.63)$$

記号  $\Delta^*$  の意味は式 (7.45) と同じである。式 (7.63) は、解の存在条件を満足するかしないかでその特解と余解を使い分けることになる。すなわち解の存在条件を満足しない場合は、剛体変位を扱う問題であり余解を使用する。解の存在条件を満たせば、構造物の安定や不安定とは無関係に荷重によりひずみを伴う変形を生じ、その変位は特解が与えてくれることになる。ただし、式 (7.63) を工学的問題に適用するためには有効性の検証が不可欠である。その検証の一つの手段として、式 (7.63) の特解を式 (7.39) の変位解と比較する。余解は式 (7.45) と比較できる。以下に検証のための例題を幾つか示す。まず余解である。鉛直荷重下で剛な三角形を組み合わせた不安定パネル構造が作る一つの形態を等高線を含めて描いている (図 7.15(b))。三角形がお互いに共有する辺は回転自由である。図 7.15(a) 中境界条件の記号  $B_z$  は  $z$  方向、 $B_{yz}$  は  $y$  と  $z$  方向の拘束を意味する。この拘束で、同じ図 (a) 中に 1/4 の面積に相当する鉛直荷重を全面に与えたときの解析途中で図 7.15(b) は得られる。

解の存在条件を満足すれば式 (7.63) で余解は消え特解のみが残る。もし、 $\det K \neq 0$  であれば、 $K^- = K^{-1}$  であり、特解は  $u = K^{-1} f$  として問題なく正解を与える。安定構造物に対する通常の解法に一致する。構造的には不安定である図 7.10 のトラス構造では、式 (7.63) での特解  $u = K^- f$  と 7.5 で導いた変位解 (7.39)



(a) 荷重と変位モード



(b) 軸力分布

図 7.16: 特解を利用した安定化移行解析の結果

の結果が一致することを確認される。すなわち、 $u = K^{-1}f$  により得られる変位は工学的に意味のある解になっていることが期待できる。

図 7.16 のトラス構造物は、 $m > n$  で  $\det K = 0$  となる不安定構造物である。  $m = 124$ ,  $n = 120$  である。(ちなみに、図 7.10 の不安定トラス構造の場合は  $\det K = 0$ ,  $m = n = 4$ )

この例題も荷重との間に解の存在条件を満足し、 $u = K^{-1}f$  と 7.5 の式 (7.39) は同じ結果を与えることが確認できる。図 7.16(a) は、鉛直方向に両側から単位荷重を受けた点線の形状が実線の変位モードに変形したことを示している。応力分布を示す (b) では、軸力を伝達しない部材を省略している。上下荷重を結ぶ線上に存在する大きな圧縮力以外の力の流れが面白い。少ない例題の結果に矛盾はないが、特解  $u = K^{-1}f$  の工学的有効性に対する検討は今後の課題になる。

## 7.8 おわりに

7.7 節の特解  $u = K^{-1}f$  に関する検証が十分でないことが現状である。しかし、安定を前提としない解析の意義、その構造物のもつ可能性や自由さを少しでも感じ取って頂ければこの章の役割は果たせたと考える。通常変位は嫌われるが、外乱に対するしなやかな抵抗形式の実現には変位 (変形) が必要である。特に、大変形といえども地上の人間には気づくはずもない程の巨大スパン構造物であれば、変形はもはや構造物の応答として得られるだけのものではなく、外乱による構造物に入るエネルギーを最小限に押さえる手段となる。この手段となる変形を合理的に生み出すためにも不安定を上手に利用することがこの種の構造物設計に関しては重要と考える。

## 参考文献

- 1) 田中尚・半谷裕彦：不安定トラスの剛体変位安定化条件，日本建築学会構造系論文報告集，356号，pp.35-43，1985.
- 2) 半谷裕彦・川口健一：不安定リンク構造の形状決定解析，日本建築学会構造系論文報告集，381号，pp.56-60，1987.
- 3) 半谷裕彦・Guan：ホモログス変形を制約条件とする立体トラス構造の形態解析，日本建築学会構造系論文報告集，405号，pp.97-102，1989.
- 4) 半谷裕彦・川口健一：形態解析 (一般逆行列とその応用)，計算力学と CAE シリーズ 5，培風館，1991.

- 5) 森口繁一・佐藤幸平：布地の幾何学 (フロシキで西瓜を包むことの微分幾何学的考察)1, 2, 3, 4, 数学セミナー, 11 No.8, 9, 10, 11, 1972.
- 6) バックミンスター・フラー, ロバート・W・マオクス共著, 木島安史, 梅沢忠雄共著, 第2版, バックミンスター・フラーのダイマキシオンの世界, 鹿島出版会, 1988.
- 7) Kuznetsov, E.N.: Underconstrained Structural Systems, Springer-Verlag, 1991.
- 8) MULTIHALLE MANNHEIM, IL 13, 1978.
- 9) Pellegrino, S and Calladine, C. R.: Matrix Analysis of Statically and Kinematically Indeterminate Frameworks, Int. J. Solids Structures, Vol.22. No. 4, pp.409-428, 1986.
- 10) Pellegrino S.: Structural Computations with the Singular Value Decomposition of the Equilibrium, Int. J. Solids Structures Vol.30, no.21, pp.3025-3035, 1993.
- 11) Wriggers, P., Wagner, W. and Mieke, C.: A Quadratically Convergent Procedure for the Calculation of Stability Points in Finite Element Analysis, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. (70) pp.329-347, 1988.
- 12) Van West, B. P., Pipes, R. B. and Keefe, M.: A Simulation of the Draping of Bidirectional Fabrics over Arbitrary Surfaces, J. of Textile Institute, 81 No.4, pp.448-460, 1990.
- 13) Kawaguchi, M.: Space Structures with Changing Geometries, Bulletin of IASS, Vol.31, n. 102/103, pp.33-45, 1990.
- 14) Sanchez-Cuenca, L.: Flexible Geometry for Space Structures, Proceedings of IASS, Milano Italy, Vol. 1, pp.239-246, 1995.
- 15) Schlaich, J., Bergemann R. and K.: National Sports Complex ? Kuala Lumpur, Malaysia Lightweight Roof Structures for the Outdoor Stadium and the Swimming Complex, Proceedings of IASS, Singapore, Vol. 2, pp.735-743, 1997.
- 16) 田波徹行・半谷裕彦・川口健一: 不安定形状の安定化移行解析 (連続体形状をフーリエ級数で置換する場合), 日本建築学会関東支部研究報告集, pp.177-180, 1989.
- 17) 田波徹行・半谷裕彦: 制約条件を持つ構造物の形態解析 (一般逆行列を利用する場合の直接および間接解法), 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第14巻, pp.597-602, 1990.
- 18) 田波徹行・半谷裕彦: 不安定構造物の動的解析, 東京大学生産技術研究所生産研究, 第43巻, 第7号, pp.5-7, 1991.
- 19) 田波徹行・半谷裕彦: 不安定構造物の安定化移行に関する直接解法, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第17巻, pp.151-156, 1993.
- 20) 田波徹行: 一般逆行列を用いた連立方程式の解法に関する一考察, コロキウム「構造形態の解析と創生」講演論文集, 日本建築学会, pp.19-24, 1995.
- 21) 田波徹行: 可動性と形態, 空間骨組構造 (形態・性能・生産), 日本建築学会シェル・空間構造運営委員会 / 空間骨組構造小委員会, pp.89-98, 1995.