パーコレーションの臨界確率に関する研究

教育学研究科教育科学専攻 理数生活系教育領域
215M020
坂倉史健
2017年2月10日提出

目次

1　概要および本論文の主な主張

1.1　概要

本論文では，次の 3 つの結果を紹介する．1 つ目は，パーコレーションの臨界確率 p_c の値について考え，その値が $\frac{1}{2}$ に定まることで，2 つ目は，ボンドパーコレーションにおいて臨界確率 p_c と p_T の一意性を示すことである．そして 3 つ目は，ツリー上においてパーコレーションの臨界確率 p_c と p_T の一意性が成り立つことおよび，そのときの臨界確率の正確な値について求めたことである．

1.2　背景

臨界確率 $p_c = \frac{1}{2}$ は Kesten による結果であるが，Bollobas-Riordan が注意したように sharp threshold theorem を使うことで，簡単に証明できるようになった．本論文では，sharp threshold theorem を使った $p_c = \frac{1}{2}$ の証明を紹介する．

また，臨界確率 p_c と p_T の一意性は 1980 年に Kesten によって解かれており，さらにこの二つの値が $\mathbf{Z^2}$ において $\frac{1}{2}$ に等しいことまでが示されている．

本論文では以上 2 つの結果を丁寧に解説するように努めた．そのうえで，ツリー上におけるパーコレーションの臨界確率 p_c と p_T の一意性が成り立つことおよび，そのときの臨界確率の正確な値について得られた結果を報告する．

1.3　主な主張

1.3.1　パーコレーションとは

Percolation という言葉を辞書で引くと「浸透」「しみ出し」という訳語が書いてある．1957 年 J. M. Hammersley は，パーコレーションを数学的問題として提唱し，果樹園における病害虫の広がり方を一つの例とした．

まず，グラフ上のパーコレーションの一般的な定義を与える．その後 $\mathbf{Z^2}$ 上におけるパーコレーションの定義を与える．

V を可算無限集合とし，$v_0 \in V$ を原点として固定する．$\mathbb{E}$ を $V \times V$ の部分集合とし，$(v,w) \in \mathbb{E}$ ならば $(w,v) \in \mathbb{E}$ を満たすものとする．このとき，(v,w) と (w,v) を同一視しておく．そして，$G = (V, \mathbb{E})$ を無限グラフと呼び，$\mathbb{E}$ の元を **ボンド** と呼ぶ．G は連結であるものとする．このとき $\mathbb{E}$ の各ボンドを独立に確率 p で開き，確率 $1-p$ で閉じるとする．これを表すのに，$\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{E}}$ を使う．Ω は**配置空間** (configuration space) と呼ばれ，その元 $\omega \in \Omega$ は**配置** (configuration) と呼ばれる．配置 ω が決まると，ボンド $b \in \mathbb{E}$ は $\omega(b) = 1$ なら開いており，$\omega(b) = 0$ なら閉じている．このとき $\omega(b)$ の値は確率 p で 1 となり，確率 $1-p$ で 0 となる．それぞれのボンドの状態が独立であることにより，Ω 上では直積測度 P_p が与えられる．つまり P_p は，任意の有限個のボンド $b_1, b_2, \ldots, b_n$ と任意の 0 または 1 の値の列 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ に対して，

$$P_p(\omega(b_i) = a_i, 1 \leq i \leq n) = p^{a_1+\cdots+a_n}(1-p)^{n-a_1-\cdots-a_n}$$

を満たす Ω 上の確率測度である．

$V \times V$ の点列 $v_1, \ldots, v_k$ が**路** (path) であるとは任意の $1 \le i \le k-1$ に対して $b_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in \mathbb{E}$ となるときにいう．路はつながったボンドの列である．$U \subset V \times V$ が**連結**であるとは U の任意の 2 点 u, v に対して U 内の路 $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ がとれて $v_1 = u, v_k = v$ を満たすときにいう．

路 $\{v_1, \ldots, v_k\}$ が配置 ω の**開路** (open path) であるとは，任意の $1 \le i \le k-1$ に対して $\omega(b_i) = 1$ を満たすことをいう．$U \subset \mathbb{E}$ が ω において**開路連結** (open connected) であるとは U の任意の 2 点の u, v に対して U 内に ω の開路 $\{v_1, \ldots, v_k\}$ がとれて $v_1 = u, v_k = v$ を満たすときにいう．配置 ω に対して極大な開路連結集合を**開クラスター**と呼ぶ．$v \in \mathbb{E}$ に対して v を含む ω の開クラスターを $C_v(\omega)$ とかく．とくに v が原点 v_0 のとき $C_{v_0}(\omega)$ と書く．一つの開クラスター $C_v(\omega)$ が無限集合の時，これを**無限開クラスター**と呼ぶ．

以上の準備のもとに，パーコレーション問題を定義していく．

定義 1.1 $\theta(p)$ を原点が無限開クラスタ―の中に含まれている確率とする．すなわち，

$$\theta(p) = P_p(|C_{v_0}| = \infty).$$

このとき，$\theta(p) > 0$ ならば, パーコレーションが存在するという．ただし，$|C_{v_0}|$ は原点を含む開クラスターに属する点の個数とし，p はボンドが開く確率とする．

定義 1.2 パーコレーションの**臨界確率** (critical probability) を以下で定義する．

$$p_c = \inf\{p \in [0,1]; \theta(p) > 0\}.$$

次に，$\mathbf{Z^2}$ 上のパーコレーションについて定義する．J.M.Hammersley の果樹園における病害虫の広がりを例に説明しよう．まず，果樹園の樹木を碁盤の目のように並べるとする．このとき，この碁盤の目は一対の整数の組 (x^1, x^2) によって表すことができ，無限に広がった碁盤は

$$\mathbf{Z^2} = \{(x^1, x^2); x^1, x^2 \text{は整数}\}$$

と表すことができる．$x = (x^1, x^2)$ に対して，$|x| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}$ と表すとき，隣り合った樹木は，$|x - y| = 1$ となり，その $\mathbf{Z^2}$ の 2 点の対 $\{x, y\}$ で表されたものを**ボンド** (bond) と呼ぶ．$\mathbf{Z^2}$ のボンド全体を $\mathbf{E^2}$ と書き

$$\mathbf{E^2} = \big\{\{x, y\}; x, y \in \mathbf{Z^2}, |x - y| = 1\big\}$$

と表す．それぞれのボンドはランダムに開いているか閉じているかしている．これを表すのに，$\Omega = \{0,1\}^{\mathbf{E^2}}$ を使う．Ω は**配置空間** (configuration space) と呼ばれ，その元 $\omega \in \Omega$ は**配置** (configuration) と呼ばれる．配置 ω が決まると，ボンド b は $\omega(b) = 1$ なら開いており，$\omega(b) = 0$ なら閉じている．このとき $\omega(b)$ の値は確率 p で 1 となり，確率 $1 - p$ で 0 となる．

ボンドどうしをつなげた路 $\{x_1, \ldots, x_k\}$ が配置 ω の**開路** (open path) であるとは，任意の $1 \le i \le k-1$ に対して $\omega(b_i) = 1$ を満たすことをいう．$V \subset \mathbf{Z^2}$ が ω において**開路連結** (open connected) であるとは V の任意の 2 点の x, y に対して V 内に ω の開路 $\{x_1, \ldots, x_k\}$ がとれて $x_1 = x, x_k = y$ を満たすときにいう．配置 ω に対して極大な開路連結集合を**開クラスター**と呼ぶ．$x \in \mathbf{Z^2}$ に対して x を含む ω の開クラスターを $C_x(\omega)$ とかく．とくに x が原点 O のとき $C_{\mathrm{O}}(\omega)$ と書く．一つの開クラスター $C_x(\omega)$ が無限集合の時，これを**無限開クラスター**と呼ぶ．

以上の準備のもとに，$\mathbf{Z^2}$ におけるパーコレーション問題について定義していく．

定義 1.3　$\theta(p)$ を原点が無限開クラスター―の中に含まれている確率とする．すなわち,

$$\theta(p) = P_p(|C_{\mathrm{O}}| = \infty).$$

このとき，$\theta(p) > 0$ ならば, パーコレーションが存在するという．ただし，$|C_{\mathrm{O}}|$ は原点を含む開クラスターに属する点の個数とし，p はボンドが開く確率である．

定義 1.4　パーコレーションの**臨界確率** (critical probability) を以下で定義する．

$$p_c = \inf\{p \in [0,1]; \theta(p) > 0\}.$$

定義 1.5　期待値による臨界確率 p_T は以下のように定義される．

$$p_T = \inf\{p \in [0,1]; E_p(|C_{\mathrm{O}}|) = \infty\}.$$

以上をもとに 3 つの結果を紹介する．

1.3.2　パーコレーションにおける臨界確率について

臨界確率 p_c についてその値が $\frac{1}{2}$ であることを示す前に，以下のことが示される．

定理 1.6　$\mathbf{Z^2}$ 上のパーコレーションにおいて，臨界確率 p_c は次を満たす．

$$\frac{1}{3} \le p_c \le \frac{2}{3}.$$

この定理により臨界確率 p_c のおよその値がわかるだろう．そして，さらに正確な p_c の値を求めるために次の 3 つの定理および sharp threshold theorem ，横断確率の変化について考える．

定義 1.7　Ω_n 上の関数 f が**単調増加** (increasing) であるとは $\omega \le \eta$ ならば $f(\omega) \le f(\eta)$ となることをいう．f が**単調減少** (decreasing) であるとは $-f$ が単調増加なときにいう．

定義 1.8　事象 A に対して

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

と定めると，$1_A(\omega)$ が単調増加なとき A は単調増加という．1_A は A の**指示関数**と呼ばれる．

定理 1.9　(Harris-FKG 不等式) Ω_n 上の単調増加な関数 f，g に対して

$$E_p(f,g) \le E_p(f)E_p(g)$$

が成り立つ．

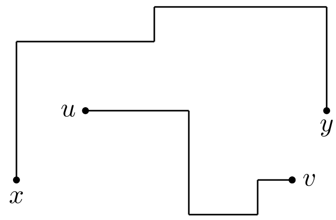
定理 1.10　(BK 不等式) A, B を Ω_n の単調増加な事象とするとき，

$$P(A \circ B) \le P(A)P(B).$$

ただし，

$$A \circ B = \{\omega \in \Omega_n; \exists J \subset K(\omega), [1]_J \subset A \text{ かつ } [1]_{K(\omega)\setminus J} \subset B\},$$
$$K(\omega) = \{1 \le j \le n; \omega(j) = 1\}\ ,\ [1]_J = \{\omega(j) = 1, \forall j \in J\}.$$

$A \circ B$ とは，図のように x と y とをつなぐ開路が存在する事象 A，u と v とをつなぐ開路が存在する事象 B とすると，それぞれが交わらないという事象である．



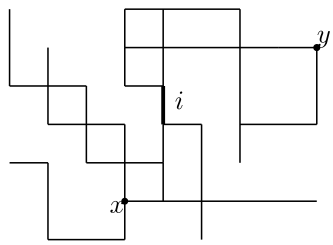
$A \circ B$

定理 1.11　(Russo の公式) $A \subset \Omega_n$ が単調増加なとき，

$$\frac{d}{dp}P_p(A) = \sum_{1 \le i \le n} P_p(\Delta_i A).$$

ただし，$\Delta_i A = \{\omega \in \Omega_n; i$ は A に関してωで pivotal$\}$ である．

$A = \{\omega \in \Omega_n; x$ と y がオープンパスでつながる $\}$ として i が A に関して ω で pivotal であるとは，図のように i を開くか閉じるかによって A が起こるか否かが決まるようになっていることである．



i が A に関して ω で pivotal

また，この等式は，$P_p(A)$ の微分は，pivotal な点の数の期待値によってあらわされることを意味する．

さらに独立確率変数列の特徴を示すひとつとして sharp threshold theorem を考える。この定理をパーコレーションへ応用し横断確率の変化につなげる．

定理 1.12　ある定数 $K > 0$ が n, p に依存せず存在して, 任意の $0 \le p \le 1$ と任意の単調増加な $A \subset \Omega_n$ に対して

$$P_p(A)(1 - P_p(A)) \le K(1-p)\log\frac{2}{p(1-p)}\sum_{i \le n}\frac{P_p(A_i)}{\log\dfrac{1}{(1-p)P_p(A_i)}}.$$

ただし，$A_i = A \cap \Delta_i A$ とする．

この式を少し変形して Russo の公式を用いると次の系を得る．

系 1.13　$\varepsilon' = \sup\limits_{0 \le p \le 1}\sup\limits_{1 \le i \le n} P_p(A_i)$ とおくと, ある定数 $K' > 0$ が n, p によらず存在して，$p_1 < p_2$ に対して常に

$$P_{p_1}(A)(1 - P_{p_2}(A)) \le (\varepsilon')^{(p_2 - p_1)K'}.$$

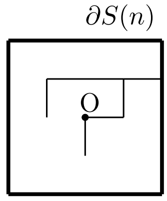
このとき，$\varepsilon' \to 0$ なら，$P_{p_1}(A) \to 0$ か $P_{p_2}(A) \to 1$ かのどちらかが成り立つことがわかる．

次に，sharp threshold theorem のパーコレーションへの応用としての横断確率の変化について考える．

補題 1.14　$S(n) = [-n, n]^2, \partial S(n) = \{(x^1, x^2) \in \mathbf{Z^2}; \max\{|x^1|, |x^2|\} = n\}$ とする．このとき，ある $C > 0$ と $c > 0$ に対して $n \geq 1$ ならば

$$P_{1/2}(\text{原点と}\partial S(n)\text{ を結ぶ開路がある}) \leq Cn^{-c}$$

となる．



原点 O と $\partial S(n)$ を結ぶ開路

系 1.15

$$\theta\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

したがって p_c の定義より $p_c \geq 1/2$ である．

また，$Q_n = [0, n] \times [0, n]$($\mathbf{Z^2}$ の正方形) とし，

$$H(Q_n) = \{Q_n\text{を左右に横断する開路がある }\}$$

とおく．

系 1.16

$$\varepsilon' = \sup_{0 \leq p \leq 1} \sup_{b=\{x,y\} \subset Q_n} P_p(H(Q_n) \cap \Delta_b H(Q_n))$$

とおくとき，

$$\varepsilon' \leq 2P_{\frac{1}{2}}\left(\text{原点と}\partial S\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)\text{ を結ぶ開路がある}\right)$$

が成り立つ．ただし，$u > 0$ に対して

$$\lfloor u \rfloor = \max\{k; k\text{ は整数で，}k \leq u\}.$$

したがって特に $n \to \infty$ のとき，補題 1.14 により $\varepsilon' \to 0$ である．

以上の定理を用いて次の定理が示される．

定理 1.17

$$p_c = \frac{1}{2}.$$

つまり，平面の正方格子 $\mathbf{Z^2}$ のパーコレーションにおいて，臨界確率は 1/2 である．

1.3.3　臨界確率の一意性

定理 1.18　$p < p_c$ のとき，定数 $K > 0, c > 0$ が存在して任意の $x \in \mathbf{Z^2}$ に対して

$$\tau_p(0, x) \leq Ke^{-c|x|}$$

が成り立つ．ただし，$\tau_p(0, x) = P_p(C_{\mathrm{O}} = C_x)$ である．

この定理より次の系を得る．

系 1.19

$$p_c = \inf\{p \in [0,1]; E_p(|C_0|) = \infty\}.$$

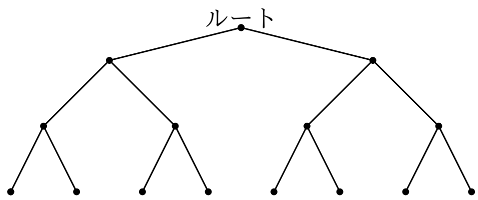
つまり，$p_c = p_T$ となり臨界確率の一意性がわかる．

1.3.4　ツリー上における臨界確率の一意性について

ツリーについて説明する．

例えば 2 分ツリーの場合について考える．まず，ルートと呼ばれる特別な点が存在する．ルートには 2 人の子ども (点) がいて，またその 2 人の子どもにはそれぞれ 2 人の子どもがいる．このような状況が以下同様に続いていくと考える．つまり，ルートは第 0 世代，その子どもは第 1 世代，$\cdots$ と続く．一般に 2 分ツリーの場合，第 k 世代では 2^k 個の点が存在する．

ルートには 2 個の最近接点が存在し，他のすべての点には 3 個の最近接点が存在する．したがって各点から出発するボンドは (ルートを除いて)3 個存在する．



2 分ツリー

$p \in [0,1]$ とする．各ボンドはすべて他のボンドとは独立に，確率 p で開き確率 $1-p$ で閉じているとする．そして C をツリー上の開路でルートにつながっている点の集合とする．つまり C はルートを含む開クラスターである．

また，Z_n を開路でルートにつながっている第 n 世代の点の数とする．各点が次世代に Y 個の点を生じさせるものとし，Y を非負の整数値をとる確率変数で，その分布は $(p_k)_{k\geq 0}$ で与えられる．式で表すと，

$$P(Y=k) = p_k = {}_2C_k\, p^k (1-p)^{2-k}\ (k=0,1,2)$$

のようになる．

このとき次のような結果が知られている．

定理 1.20

$$m \leq 1 \text{ ならば，} P(\text{任意の } n \geq 0 \text{ に対して，} Z_n \geq 1 | Z_0 = 1) = 0$$
$$m > 1 \text{ ならば，} P(\text{任意の } n \geq 0 \text{ に対して，} Z_n \geq 1 | Z_0 = 1) = 1 - q > 0$$

ただし，$m = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$ で期待値を表す．

この定理 1.20 を利用することで 2 分ツリーにおける臨界確率 p_c の値が $\frac{1}{2}$ であることが求められる．これをもとに，2 分ツリーについて臨界確率 p_T の値を考えると次のことがわかった．

定理 1.21　2 分ツリーにおける臨界確率 p_c と p_T は一致し，その値は $\frac{1}{2}$ である．

また，このことを一般化し n 分ツリーにおける臨界確率の値，および p_T との一意性を考えると次のことがわかった．

定理 1.22　n 分ツリーにおける臨界確率 p_c と p_T は一致し，その値は $\frac{1}{n}$ である．

以上が，本論文の主な主張である．次章からこれらの主張を証明していく．

2　確率論における基本的な定理および概念

前章の主な主張を証明していく前に，確率論における基本的な定理および概念について紹介する．第 3 章からパーコレーションについて議論していく．

2.1　集合における基本的な定理

はじめに，集合における基本的な定理を証明しておく．

定理 2.1　ド・モルガンの法則

3 つの集合 X, A, B に対して次が成り立つ．

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \tag{2.1.1}$$

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \tag{2.1.2}$$

《(2.1.1) の証明》

これを証明するために

$$x \notin A \cup B \Longleftrightarrow x \notin A \text{ かつ } x \notin B$$

を示す．

$x \notin A \cup B$ とする．$x \in A$ ならば，$x \in A \cup B$ となり矛盾するので，$x \notin A$．同様にして $x \notin B$ がわかる．

また，$x \notin A$ かつ $x \notin B$ とする．$x \in A \cup B$ ならば，$x \in A$ または $x \in B$ となり，$x \notin A$ かつ $x \notin B$ に矛盾する．よって，$x \notin A \cup B$.

以上より，$x \notin A \cup B \Longleftrightarrow x \notin A$ かつ $x \notin B$ である．

それでは

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

を証明する．

$x \in X \setminus (A \cup B)$ とする．

$$\begin{aligned}
x \in X \setminus (A \cup B) &\Longleftrightarrow x \in X \text{ かつ } x \notin A \cup B \\
&\Longleftrightarrow x \in X \text{ かつ } (x \notin A \text{ かつ } x \notin B) \\
&\Longleftrightarrow (x \in X \text{ かつ } x \notin A) \text{ かつ } (x \in X \text{ かつ } x \notin B) \\
&\Longleftrightarrow x \in (X \setminus A) \text{ かつ } x \in (X \setminus B) \\
&\Longleftrightarrow x \in (X \setminus A) \cap (X \setminus B).
\end{aligned}$$

したがって，

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B).$$

《(2.1.2) の証明》

(2.1.1) より X を全体集合とみれば

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

が成り立っている．このことから

$$\begin{aligned}(A \cap B)^c &= \{(A^c)^c \cap (B^c)^c\}^c \\ &= \{(A^c \cup B^c)^c\}^c \\ &= A^c \cup B^c.\end{aligned}$$

したがって，

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

定理 2.2　集合系に対するド・モルガンの定理

全体集合 X の部分集合からなる集合系 $\{A_\lambda\}$ に対して，次が成り立つ．

(2.1.3)
$$\Big(\bigcup_\lambda A_\lambda\Big)^c = \bigcap_\lambda A_\lambda^c$$

(2.1.4)
$$\Big(\bigcap_\lambda A_\lambda\Big)^c = \bigcup_\lambda A_\lambda^c$$

《(2.1.3) の証明》

まず，

$$\Big(\bigcup_\lambda A_\lambda\Big)^c \subset \bigcap_\lambda A_\lambda^c$$

を示す．つまり

$$x \in \Big(\bigcup_\lambda A_\lambda\Big)^c \Longrightarrow x \in \bigcap_\lambda A_\lambda^c$$

を対偶により示す．

$$\begin{aligned} x \notin \bigcap_\lambda A_\lambda^c &\Longleftrightarrow \text{任意の}\lambda \in \Lambda\text{に対して } x \in A_\lambda^c \text{でない}. \\ &\Longrightarrow \text{ある}\lambda' \in \Lambda\text{に対して } x \in A_{\lambda'}. \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcup_\lambda A_\lambda. \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$x \in \Big(\bigcup_\lambda A_\lambda\Big)^c \Longrightarrow x \in \bigcap_\lambda A_\lambda^c.$$

したがって，

$$\Big(\bigcup_\lambda A_\lambda\Big)^c \subset \bigcap_\lambda A_\lambda^c$$

が示された．

次に，

$$\Big(\bigcup_\lambda A_\lambda\Big)^c \supset \bigcap_\lambda A_\lambda^c$$

を示す．つまり

$$x \in \bigcap_\lambda A_\lambda^c \Longrightarrow x \in \Big(\bigcup_\lambda A_\lambda\Big)^c$$

を対偶により示す．

$$\begin{aligned} x \notin \big(\bigcup_{\lambda} A_{\lambda}\big)^c &\iff x \in \big(\bigcup_{\lambda} A_{\lambda}\big)^c \text{でない．} \\ &\Longrightarrow x \in \bigcup_{\lambda} A_{\lambda} \\ &\iff \text{ある}\lambda' \in \Lambda\text{に対して } x \in A_{\lambda'}. \\ &\Longrightarrow x \notin \bigcap_{\lambda} A_{\lambda}^c. \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$x \in \bigcap_{\lambda} A_{\lambda}^c \Longrightarrow x \in \big(\bigcup_{\lambda} A_{\lambda}\big)^c$$

したがって，

$$\big(\bigcup_{\lambda} A_{\lambda}\big)^c \supset \bigcap_{\lambda} A_{\lambda}^c$$

が示された． 以上より，

$$\big(\bigcup_{\lambda} A_{\lambda}\big)^c = \bigcap_{\lambda} A_{\lambda}^c$$

が成立する．

《(2.1.4) の証明》

上と同様に，まず，

$$\big(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}\big)^c \subset \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}^c$$

を示す．つまり

$$x \in \big(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}\big)^c \Longrightarrow x \in \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}^c$$

を対偶により示す．

$$\begin{aligned} x \notin \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}^c &\iff x \in \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}^c \text{でない．} \\ &\iff \text{ある}\lambda' \in \Lambda\text{に対して } x \in A_{\lambda'}^c \text{でない．} \\ &\Longrightarrow \text{任意の}\lambda \in \Lambda\text{に対して } x \in A_{\lambda}. \\ &\iff x \in \bigcap_{\lambda} A_{\lambda}. \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$x \in \big(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}\big)^c \Longrightarrow x \in \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}^c$$

したがって，

$$\big(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}\big)^c \subset \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}^c$$

が示された．

次に，

$$\big(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}\big)^c \supset \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}^c$$

を示す．つまり

$$x \in \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}^{c} \Longrightarrow x \in \Big(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}\Big)^{c}$$

を対偶により示す．

$$\begin{aligned} x \notin \Big(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}\Big)^{c} &\Longleftrightarrow x \in \Big(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}\Big)^{c}\text{でない．} \\ &\Longrightarrow x \in \bigcap_{\lambda} A_{\lambda}. \\ &\Longleftrightarrow \text{任意の}\lambda \in \Lambda\text{に対して } x \in A_{\lambda}. \end{aligned}$$

が成り立つ．よって，

$$x \in \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}^{c} \Longrightarrow x \in \Big(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}\Big)^{c}$$

したがって，

$$\Big(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}\Big)^{c} \supset \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}^{c}$$

が示された．以上より

$$\Big(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}\Big)^{c} = \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}^{c}$$

が成立する．

2.2　可測空間

Ω は任意の集合を表すとし，2^{Ω} は Ω の部分集合の全体を表すとする．

定義 2.3　$\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ であるとき，$\mathcal{F}$ を Ω 上の**部分集合族**という．

定義 2.4　Ω 上の部分集合族 $\mathcal{F}$ が次の条件を満たすとき，$\mathcal{F}$ は Ω 上の**集合体**であるという：

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$；
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^{c} \in \mathcal{F}$；
3. $A,\ B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$.

定理 2.5　$\mathcal{F}$ を Ω 上の集合体とする．このとき，次が成立する：

1. $\Omega \in \mathcal{F}$；
2. $A,\ B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B,\ A \setminus B,\ A \triangle B \in \mathcal{F}$；
3. $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$.

《証明》

1 の証明：$\Omega = \emptyset^{c} \in \mathcal{F}$.

2 の証明：$A,\ B \in \mathcal{F}$ とする．

$$\begin{gathered} A \cap B = (A^{c} \cup B^{c})^{c} \in \mathcal{F}, \\ A \setminus B \equiv A \cap B^{c} \in \mathcal{F}, \\ A \triangle B \equiv (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{F}. \end{gathered}$$

3 の証明：

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} \in \mathcal{F}$$

を数学的帰納法により示す．$n = 1$ のときは明らかである．$n = k$ のとき命題が正しいと仮定する．A_1，A_2，$\ldots$，A_k，$A_{k+1} \in \mathcal{F}$ とすると，帰納法の仮定より $\bigcup_{i=1}^{k} A_i \in \mathcal{F}$ であるから，

$$\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \right) \cup A_{k+1} \in \mathcal{F}.$$

が示され，$n = k + 1$ のときも命題は正しい．

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$$

の方は，上記の結果にド・モルガンの法則を用いれば示される．

定理 2.5 の 3 が成立するからといって，

$$A_1,\ A_2,\ \cdots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

が言えるとは限らない．そこで，上記のような可算個の集合の演算を自由に行えるような集合体を考える．

定義 2.6　集合 Ω に対してその部分集合族 $\mathcal{F}$ が次の条件を満たすとき，$\mathcal{F}$ は Ω 上の **σ-集合体**であるという：

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$；
2. $A \in \mathcal{F}$ ならば，$A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$；
3. $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ ならば $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

また，このとき，組 $(\Omega, \mathcal{F})$ は**可測空間**であるという．

2.2.1　測度の定義

測度論においては $\pm\infty$ も数として扱う．そこで実数空間を拡張する．$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{+\infty,\ -\infty\}$ として，$\bar{\mathbf{R}}$ の $\pm\infty$ に関する演算は

$$\begin{aligned}
a \in \mathbf{R} \Rightarrow (\pm\infty) + a = a + (\pm\infty) = (\pm\infty),\\
a > 0 \Rightarrow (\pm\infty) \times a = a \times (\pm\infty) = (\pm\infty),\\
(\pm\infty) \times 0 = 0 \times (\pm\infty) = 0,\\
a < 0 \Rightarrow (\pm\infty) \times a = a \times (\pm\infty) = (\mp\infty),\\
a \in \mathbf{R} \Rightarrow \frac{a}{\pm\infty} = 0
\end{aligned}$$

とするが，$(\pm\infty) + (\mp\infty)$ や $\dfrac{(\pm\infty)}{(\pm\infty)}$ などは定義しない．

定義 2.7　$\mathcal{A}$ を Ω 上の部分集合族として，μ: $\mathcal{A} \to \bar{\mathbf{R}}$ とする．このとき，μ は Ω 上の**集合函数**という．

定義 2.8 $\mathcal{F}$ を Ω 上の集合体とする．$\mathcal{F}$ 上で定義された集合函数 μ が

$$A,\ B \in \mathcal{F} \text{ かつ } A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

を満たすとき，μ は **(有限) 加法的**である (または，**加法性**を満たす) という．

定義 2.9 $\mathcal{F}$ を Ω 上の σ-集合体として，$\mathcal{F}$ 上で定義された集合函数 μ が，

$$A_1,\ A_2,\cdots \in \mathcal{F} \text{ が互いに素} \Longrightarrow \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

を満たすとき，μ は **σ-加法的**である (または，**σ-加法性**を満たす) という．

定義 2.10 $(\Omega,\ \mathcal{F})$ を可測空間とする．$\mu\colon \mathcal{F} \to [0,\ +\infty]$ が $\mu(\emptyset) = 0$ かつ σ-加法性を満たすとき，μ は $(\Omega,\ \mathcal{F})$ 上の**測度**であるという．

定義 2.11 μ が可測空間 $(\Omega,\ \mathcal{F})$ 上の測度であるとき，$(\Omega,\ \mathcal{F}, \mu)$ を**測度空間**と呼ぶ．

2.3 確率空間

定義 2.12 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が**確率空間**であるとは，測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ において，μ が $\mathcal{F}$ 上で定義された非負値の関数であり，

$$\mu(\Omega) = 1, \quad \mu(\emptyset) = 0$$

を満たすときに呼ぶ．このとき，Ω を**標本空間**，$\mathcal{F}$ を**事象系**，μ を**確率 (測度)** といい，Ω の元を**基本事象**，$\mathcal{F}$ の元を事象という．また，確率 μ は以下，確率 P と置き換えて考える．

定義 2.13 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，Ω から $\mathbf{R}^1$ への関数 $X : \Omega \to \mathbf{R}^1$ が **(実) 確率変数**であるとは，X が $\mathcal{F}$ に関して可測なことをいう．つまり，任意の実数 a に対し，

$$\{\omega \in \Omega; X(\omega) \le a\} \in \mathcal{F} \tag{2.3.1}$$

が成り立つことをいう．

また，$X_1, X_2, \ldots, X_d$ を実確率変数とすると，ベクトル $\mathbf{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_d(\omega))$ は $\mathbf{R}^d$ の元であるが，このとき任意の $a_1, \ldots, a_d \in \mathbf{R}^1$ に対して，

$$\{\omega \in \Omega; X_1(\omega) \le a_1, \ldots, X_d(\omega) \le a_d\} \in \mathcal{F} \tag{2.3.2}$$

となる．そこで，Ω から $\mathbf{R}^d$ への関数 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_d)$ が (2.3.2) をみたすとき，$\mathbf{X}$ は d **次元確率変数**という．一般に，$(\Xi, \mathcal{B})$ を可測空間として，Ω から Ξ への値をとる関数 X が，任意の $E \in \mathcal{B}$ に対して

$$\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in E\} \in \mathcal{F} \tag{2.3.3}$$

をみたすとき，X は，$\Xi -$ 値確率変数 という．

定義 2.14 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数の系 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が**独立**であるとは，任意の $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbf{R}^1$ に対して

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega; X_i(\omega) \le a_i\}\Big) = \prod_{i=1}^{n} P(\{\omega \in \Omega; X_i(\omega) \le a_i\}) \tag{2.3.4}$$

となるときにいう．

定義 2.15 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$，$(\Xi_1,\mathcal{B}_1),(\Xi_2,\mathcal{B}_2),\cdots,(\Xi_n,\mathcal{B}_n)$ を可測空間とし，各 i に対して，X_i は Ξ_i- 値確率変数 であるとき，系 $\{X_1,\cdots,X_n\}$ が独立であるとは，任意の $E_1\in\mathcal{B}_1,\cdots,E_n\in\mathcal{B}_n$ に対して

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega\in\Omega;X_i(\omega)\leq E_i\}\Big)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\in E_i) \tag{2.3.5}$$

が成り立つことをいう．

定義 2.16 確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},P)$，$n\leq 1$ に対して X_n を可測空間 $(\Xi_n,\mathcal{B}_n)$ に値をとる Ξ_n- 値確率変数とする．このとき，系 $\{X_n;n\leq 1\}$ が独立であるとは，このうちの任意の有限個の部分系 $\{X_{n_1},X_{n_2},\cdots,X_{n_k}\}$ を任意にとったとき，これが独立なときにいう．

命題 2.17 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ を確率空間とするとき，以下が成立する．

(1) $E_1,E_2,\cdots\in\mathcal{F}$ ならば，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathcal{F}.$$

(2) $E_1,E_2,\cdots\in\mathcal{F}$ かつ $E_1\subset E_2\subset\cdots$ となっているならば，

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=\lim_{n\to\infty}P(E_n).$$

(3) $E_1,E_2,\cdots\in\mathcal{F}$ かつ $E_1\supset E_2\supset\cdots$ となっているならば，

$$P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=\lim_{n\to\infty}P(E_n).$$

(4) $E_1,E_2,\cdots\in\mathcal{F}$ のとき，

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)\leq\sum_{n=1}^{\infty}P(E_n).$$

(5) (Borel-Cantelli の定理) $E_1,E_2,\cdots\in\mathcal{F}$ が

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(E_n)<\infty \tag{2.3.6}$$

をみたすならば，

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty}E_n\Big)=0$$

である．

《(1) の証明 》

$$E_1,E_2,\cdots\in\mathcal{F}\Longleftrightarrow {E_1}^c,{E_2}^c,\cdots\in\mathcal{F}$$

であり，

$${E_1}^c,{E_2}^c,\cdots\in\mathcal{F}\Longleftrightarrow\bigcup_{n=1}^{\infty}{E_n}^c\in\mathcal{F}$$

が成り立つ．

ド・モルガンの法則より

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} {E_n}^c = \big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\big)^c \in \mathcal{F}.$$

これより，

$$E_1, E_2, \cdots \in \mathcal{F} \text{ ならば } \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$$

が示される．

《(2) の証明》

$A_1 = E_1, A_2 = E_2 \setminus A_1, A_3 = E_3 \setminus E_2, \cdots, A_n = E_n \setminus E_{n-1}$ とおくと，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

よって

$$\begin{aligned}
P\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big) &= P\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P\big(A_n\big) \\
&= \lim_{n\to\infty}\big(\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)\big) \\
&= \lim_{n\to\infty}\big(\sum_{k=1}^{\infty}(P(E_k) - P(E_{k-1}))\big) \\
&= \lim_{n\to\infty}\big(P(E_n) - P(E_0)\big) \qquad (\because P(E_0) = 0 \text{ とする}) \\
&= \lim_{n\to\infty}\big(P(E_n)\big)
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

が示される．

《(3) の証明》

$A_n = E_{n_0} \setminus E_{n_0+n}$ とおくと，A_n は単調に増加する．$P(A_n) = P(E_{n_0}) - P(E_{n_0+n})$ で，命題 2.17 の (2) より，

$$\begin{aligned}
P\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) &= \lim_{n\to\infty} P(A_n) \\
&= \lim_{n\to\infty}\big(P(E_{n_0}) - P(E_{n_0+n})\big) \\
&= P(E_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} P(E_{n_0+n}) \qquad (2.3.7)
\end{aligned}$$

また，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E_{n_0} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{n_0+n}$$

より，

$$(2.3.8) \qquad P\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = P(E_{n_0}) - P\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n_0+n}\big)$$

(2.3.7),(2.3.8) より，

$$P(E_{n_0}) - \lim_{n\to\infty} P(E_{n_0+n}) = P(E_{n_0}) - P\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n_0+n}\big)$$

ゆえに，

$$P\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_{n_0+n}\big) = \lim_{n\to\infty} P(E_{n_0+n}).$$

よって，

$$P\big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\big) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)$$

が示される．

《(4) の証明 》

$$A_1 = E_1, A_2 = E_2 \setminus A_1, A_3 = E_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \cdots, A_n = E_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \quad (n \geq 2)$$

と定めると，$\{A_n\} \subseteq \mathcal{F}$ で，互いに素である．このとき，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

であるので，定義 (2.9) と，$P(A_n) \leq P(E_n)$ であることより，

$$\begin{aligned} P\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\big) &= P\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) \end{aligned}$$

よって成立する．

《(5) の証明 (Borel-Cantelli の定理) 》

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$$

かつ，

$$\begin{aligned} P\big(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\big) &\leq \sum_{n=k}^{\infty} P(E_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) - \sum_{n=1}^{k-1} P(E_n) \end{aligned}$$

より，

$$P(\limsup_{n\to\infty} E_n) \leq P\big(\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n\big)$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) - \sum_{n=1}^{k-1} P(E_n)$$

を得る．このとき，$k \to \infty$ とすると仮定より

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) - \sum_{n=1}^{k-1} P(E_n) \to 0$$

となる．よって，$P(\limsup_{n\to\infty} E_n) = 0$ を得る．

命題 2.18　$\Xi = \{0,1\}, \mathcal{B} = \mathcal{P}(\Xi)$ のとき，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ として次のことがわかる．

(1) $X : \Omega \to \Xi$ が $\Xi-$ 値確率変数であることと，$\{\omega \in \Omega; X(\omega) = 0\} \in \mathcal{F}$ とは同値である．

(2) $X_n : \Omega \to \Xi$ が $\Xi-$ 値確率変数であるとき，$\{X_n; n = 1, 2, \cdots\}$ が独立であることと，任意有限個の相異なる自然数の組 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ に対して

$$P(X_{n_1} = X_{n_2} = \cdots = X_{n_k} = 1) = \prod_{j=1}^{k} P(X_{n_j} = 1)$$

が成り立つこととは同値である．

《(1) の証明 》

($\Rightarrow$)

$X : \Omega \to \Xi$ が $\Xi-$ 値確率変数であることより，X は任意の $E \in \mathcal{B}$ に対して $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\} \in \mathcal{F}$ をみたす．E は任意なので，$E = 0$ とすると，$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \{0\}\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\} \in \mathcal{F}$，よって，成立する．

($\Leftarrow$)

$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\} \in \mathcal{F}$ であることより，$\{0\}$ 以外の他の $\mathcal{B}$ の要素について調べればよい．

$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \emptyset\} = \emptyset \in \mathcal{F}$，$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \Xi\} = \Omega \in \mathcal{F}$ である．

また，$\mathcal{F}$ は Ω の $\sigma-$ 加法族なので，仮定より，$\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\}^c \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\} \in \mathcal{F}$ である．ゆえに成立する．

以上より，(1) の証明終了．

《(2) の証明 》

($\Rightarrow$)

$\{X_n : n = 1, 2, \cdots\}$ が独立だから，定義 (2.3.5) より成立する．

($\Leftarrow$)

$k = 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
P(X_{n_1} = X_{n_2} = 1) &= \prod_{j=1}^{2} P(X_{n_j} = 1) \\
&= P(X_{n_1} = 1) \cdot P(X_{n_2} = 1)
\end{aligned}
$$

が成立する．このとき，

$$
P(X_{n_1} = X_{n_2} = 1) = P(X_{n_1} \in \{1\}, X_{n_2} \in \{1\})
$$

と表されることに注意して，

$$
P(X_{n_1} \in \{1\}, X_{n_2} \in \{0\}) \ , \ P(X_{n_1} \in \{0\}, X_{n_2} \in \{1\}) \ , \ P(X_{n_1} \in \{0\}, X_{n_2} \in \{0\})
$$

が独立であることを調べる．

$$
\begin{aligned}
P(X_{n_1} \in \{1\}, X_{n_2} \in \{0\}) &= P(X_{n_1} \in \{1\}, X_{n_2} \in \Xi) - P(X_{n_1} \in \{1\}, X_{n_2} \in \{1\}) \\
&= P(X_{n_1} \in \{1\}) - P(X_{n_1} \in \{1\}, X_{n_2} \in \{1\}) \\
&= P(X_{n_1} \in \{1\}) - P(X_{n_1} \in \{1\}) \cdot P(X_{n_2} \in \{1\}) \\
&= P(X_{n_1} \in \{1\}) \cdot (1 - P(X_{n_2} \in \{1\})) \\
&= P(X_{n_1} \in \{1\}) \cdot P(X_{n_2} \in \{0\})
\end{aligned}
$$

よって，$P(X_{n_1} \in \{1\}, X_{n_2} \in \{0\})$ は独立である．

$$
\begin{aligned}
P(X_{n_1} \in \{0\}, X_{n_2} \in \{1\}) &= P(X_{n_1} \in \Xi, X_{n_2} \in \{1\}) - P(X_{n_1} \in \{1\}, X_{n_2} \in \{1\}) \\
&= P(X_{n_1} \in \{1\}) - P(X_{n_1} \in \{1\}, X_{n_2} \in \{1\}) \\
&= P(X_{n_1} \in \{1\}) - P(X_{n_1} \in \{1\}) \cdot P(X_{n_2} \in \{1\}) \\
&= P(X_{n_1} \in \{1\}) \cdot (1 - P(X_{n_2} \in \{1\})) \\
&= P(X_{n_1} \in \{1\}) \cdot P(X_{n_2} \in \{0\})
\end{aligned}
$$

よって，$P(X_{n_1} \in \{0\}, X_{n_2} \in \{1\})$ は独立である．

$$
\begin{aligned}
P(X_{n_1} \in \{0\}, X_{n_2} \in \{0\}) &= 1 - \{P(X_{n_1} \in \{1\}, X_{n_2} \in \{1\}) + P(X_{n_1} \in \{1\}, X_{n_2} \in \{0\}) + P(X_{n_1} \in \{0\}, X_{n_2} \in \{1\})\} \\
&= 1 - P(X_{n_1} \in \{1\}) \cdot P(X_{n_2} \in \{1\}) - P(X_{n_1} \in \{1\}) \cdot P(X_{n_2} \in \{0\}) \\
&\qquad - P(X_{n_1} \in \{0\}) \cdot P(X_{n_2} \in \{1\}) \\
&= 1 - P(X_{n_1} \in \{1\}) \cdot \{P(X_{n_2} \in \{1\}) + P(X_{n_2} \in \{1\})\} - P(X_{n_1} \in \{0\}) \cdot P(X_{n_2} \in \{1\}) \\
&= 1 - P(X_{n_1} \in \{1\}) - P(X_{n_1} \in \{0\}) \cdot P(X_{n_2} \in \{1\}) \\
&= P(X_{n_1} \in \{0\}) - P(X_{n_1} \in \{0\}) \cdot P(X_{n_2} \in \{1\}) \\
&= P(X_{n_1} \in \{0\}) \cdot \{1 - P(X_{n_2} \in \{1\})\} \\
&= P(X_{n_1} \in \{0\}) \cdot P(X_{n_2} \in \{0\}).
\end{aligned}
$$

よって，$P(X_{n_1} \in \{0\}, X_{n_2} \in \{0\})$ は独立である．以上より，$k = 2$ のとき十分性は示された．

次に，k のとき

$$
P(X_{n_1} = X_{n_2} = \cdots = X_{n_k} = 1) = \prod_{j=1}^{k} P(X_{n_j} = 1)
$$

が成り立てば，$\{X_n : n = 1, 2, \cdots\}$ が独立であると仮定すると，$k + 1$ のとき，

$$
P(X_{n_1} = X_{n_2} = \cdots = X_{n_k} = X_{n+k} = 1) = \prod_{j=1}^{k+1} P(X_{n_j} = 1)
$$

が成立する．このとき，

$$\begin{aligned}
&P(X_{n_1} \in \{1\}, X_{n_2} \in \{1\}, \cdots, X_n \in \{1\}, X_{n+k} \in \{0\}) \\
&= P\big(\bigcap_{i=1}^{k} \{\omega \in \Omega : X_{n_i}(\omega) \in \{1\}\}, X_{n+k} \in \{0\}\big) \\
&= P\big(\bigcap_{i=1}^{k} \{\omega \in \Omega : X_{n_i}(\omega) \in \{1\}\}, X_{n+k} \in \Xi\big) - P\big(\bigcap_{i=1}^{k} \{\omega \in \Omega : X_{n_i}(\omega) \in \{1\}\}, X_{n+k} \in \{1\}\big) \\
&= P\big(\bigcap_{i=1}^{k} \{\omega \in \Omega : X_{n_i}(\omega) \in \{1\}\}\big) - P\big(\bigcap_{i=1}^{k} \{\omega \in \Omega : X_{n_i}(\omega) \in \{1\}\}\big) \cdot P(X_{n_{k+1}} \in \{1\}) \\
&= P\big(\bigcap_{i=1}^{k} \{\omega \in \Omega : X_{n_i}(\omega) \in \{1\}\}\big) \cdot \big(1 - P(X_{n_{k+1}} \in \{1\})\big) \\
&= P\big(\bigcap_{i=1}^{k} \{\omega \in \Omega : X_{n_i}(\omega) \in \{1\}\}\big) \cdot P(X_{n_{k+1}} \in \{0\}).
\end{aligned}$$

よって， $X_n : \Omega \to \Xi$ が Ξ- 値確率変数であるとき，$\{X_n; n = 1, 2, \cdots\}$ が独立であることと，任意有限個の相異なる自然数の組 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ に対して

$$P(X_{n_1} = X_{n_2} = \cdots = X_{n_k} = 1) = \prod_{j=1}^{k} P(X_{n_j} = 1)$$

が成り立つこととは同値であることが示される．

2.4　函数空間 $L^p(X)$

本論文，第 4 章 sharp threshold theorem においてノルムの考えおよびヘルダーの不等式，イェンゼンの不等式を用いるため，基本的なノルムの定義およびヘルダーの不等式，イェンゼンの不等式の証明を簡単に紹介する．

$(X, \mathbf{B}, \mu)$ を測度空間とする．X 上の可測函数 f で $|f|^p$ $(p > 0)$ が可積分となるもの全体 $\mathcal{L}_p$ が線形空間をなすことは

$$(|f| + |g|)^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

よりわかる．

以下，$p \geq 1$ とし，ほとんどいたるところで等しい函数を同一視したものを $L^p(X)$，あるいは $L^p(X, \mu)$ とかく．

定義 2.19　線形空間 V 上で定義された $||f||$ が

1. $||f|| \geq 0$ かつ 等号が成立 $\Leftrightarrow$ $f = 0$.
2. $||\alpha f|| = |\alpha|\ ||f||$.
3. $||f + g|| \leq ||f|| + ||g||$.　　　$(f, g \in V, \alpha \in C)$

を満たすとき (V 上の) ノルムと呼ぶ．ノルムの与えられた線形空間をノルム空間という．

以下，$||f||_p = \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ とおく．

定理 2.20 (ヘルダーの不等式) $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ のとき，$f \in L^p(X), g \in L^q(X)$ に対し

$$\int |fg| d\mu \leq ||f||_p ||g||_q \tag{2.4.1}$$

が成り立つ．

《証明》

$x \geq 0$ で $\varphi(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}-x$ を定義し x で微分すると，

$$\varphi'(x)=x^{p-1}-1.$$

よって，$\varphi(x)$ の $x \geq 0$ における増減表は次のようになる．

x	0		1	
$\varphi'(x)$	-1	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\frac{1}{q}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

ゆえに，$x=1$ で最小値 $\varphi(x)=0$ をとる．このことから，

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}-x \geq 0\\ \Leftrightarrow x &\leq \frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\end{aligned}$$

となり，$x=ab^{1-q}$ $(a \geq 0, b \geq 0)$ とおけば次の不等式

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q \tag{2.4.2}$$

が得られる．

$||f||_p=0$ または $||g||_q=0$ のときは $fg=0$ 　となり (2.4.1) は成り立つから $||f||_p>0, ||g||_q>0$ として $a=\dfrac{|f(x)|}{||f||_p}, b=\dfrac{|g(x)|}{||g||_q}$ を (2.4.2) に代入すると

$$\frac{|f(x)|\cdot|g(x)|}{||f||_p\cdot||g||_q} \leq \frac{1}{p}\cdot\frac{|f(x)|^p}{\int|f|^p d\mu}+\frac{1}{q}\cdot\frac{|g(x)|^q}{\int|g|^q d\mu}$$

この不等式の両辺を μ で積分すると

$$\begin{aligned}\frac{\int|f|\cdot|g|d\mu}{||f||_p\cdot||g||_q} &\leq \frac{1}{p}\cdot\frac{\int|f|^p d\mu}{\int|f|^p d\mu}+\frac{1}{q}\cdot\frac{\int|g|^p d\mu}{\int|g|^p d\mu}\\ &=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.\end{aligned}$$

つまり，

$$\int |f|\cdot|g|d\mu \ \leq \ ||f||_p\cdot||g||_q.$$

これより，(2.4.1) を得る．

定理 2.21 (イェンゼンの不等式) X を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義された確率変数，$g(x)$ を R^1 上の凸関数とする．さらに，X の平均 $E(X)$ が存在するとする．このとき，

$$E(g(x)) \geq g(E(X)).$$

とくに，$g(x)$ が強い意味での凸関数ならば，

$$E(g(x)) > g(E(X)).$$

イェンゼンの不等式を証明するために，いくつか準備をする．

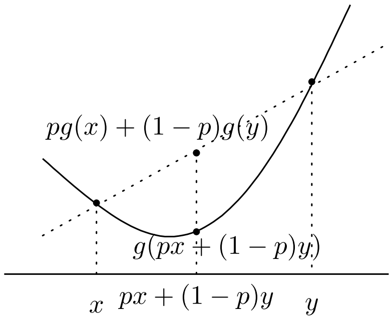
定義 2.22 実軸上の区間を I とする．$g(x)$ は I で定義された実数値をとる関数とする．いま，x，$y \in I$ と $0 < p < 1$ に対して

$$pg(x) + (1-p)g(y) \geq g(px + (1-p)y) \tag{2.4.3}$$

を満たすとき，$g(x)$ は区間 I で**凸関数** (convex function) という．
とくに

$$pg(x) + (1-p)g(y) > g(px + (1-p)y)$$

のとき，強い意味 (strict sense) で凸関数という．



定理 2.23 関数 $g(x)$ が区間 I で凸関数とする．さらに a を I の内点とする．このとき

$$g(x) - g(a) \geq m(x-a)\ ,\ x \in I \tag{2.4.4}$$

を満たす実数 m が存在する．

とくに $g(x)$ が強い意味での凸関数ならば，つぎの不等式が成り立つ．

$$g(x) - g(a) > m(x-a)\ x \in I$$

《証明》

関数

$$f(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x-a},\ x \neq a,\ x \in I$$

について，$f(x)$ が非減少関数 (強い意味での凸関数の場合は増加関数) であることが示されたとする．このとき定理の証明は次のようになる．

まず，

$$f(a-0) \leq m \leq f(a+0)$$

を満たす m をとる．

いま，$x < a$ とする．このとき，

$$f(x) \leq f(a-0) \leq m$$

が成り立ち，$f(x)$ の定義より

$$\frac{g(x) - g(a)}{x-a} \leq m$$

が成り立つ．さらに，$x - a < 0$ であるから求める不等式

$$g(x) - g(a) \geq m(x-a)$$

が導かれる．

次に，$x > a$ のとき

$$f(x) \geq f(a+0) \geq m$$

が成り立ち，$f(x)$ の定義より

$$\frac{g(x) - g(a)}{x-a} \geq m$$

が成り立つ．さらに，$x-a>0$ であるから求める不等式

$$g(x)-g(a) \geq m(x-a)$$

が導かれる．

したがって，$f(x)$ が非減少 (あるいは増加) 関数であることを示せばよい．いま，I の点 x, y が

$$a<x<y$$

の場合を考える．このとき，$f(x) \leq f(y)$．すなわち

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a} \leq \frac{g(y)-g(a)}{y-a},$$

あるいは，$g(x)$ について整理して

$$g(x) \leq \left(1-\frac{x-a}{y-a}\right) g(a)+\frac{x-a}{y-a} g(y)$$

を示せばよい．ところが，この最後の式は $0<\frac{x-a}{y-a}<1$ に注意すると $g(x)$ が凸関数であることに他ならない．以上より証明終了．

定理 2.21(イェンゼンの不等式) の証明

定理 2.23 より，凸関数 $g(x)$ に対して，

$$g(x) \geq g(E(X))+m(x-E(X))$$

を満たす m が存在する．この式の両辺の平均をとると，

$$\begin{aligned} E(g(X)) &\geq g(E(X))+m(E(X)-E(X)) \\ &= g(E(X)) \end{aligned}$$

また，$g(x)$ が強い意味での凸関数のときも同様にして示すことができる．以上より証明終了．

3　パーコレーション

さて，パーコレーションの話に戻ろう．

3.1　$\mathbf{Z^2}$ 上での浸透確率 $\theta(p)$ のいろいろな性質

$\mathbf{Z^2}$ 上において，浸透確率 $\theta(p)$ のいろいろな性質について紹介する．

命題 3.1　関数 θ は単調増加関数である．すなわち，$p_1 < p_2$ ならば，$\theta(p_1) \leq \theta(p_2)$．

《証明》

カップリングの手法を用いる．

すべての $p \in [0,1]$ に対して，同時にパーコレーションを構成する．$\mathbf{Z^2}$ 内の各ボンド e に対して，$U(e)$ は区間 $[0,1]$ 上の一様分布に従う確率変数とする．さらに，すべての $U(e)$ は独立であるとする．

このとき，パラメータ p をもつパーコレーションに対して，1 つのボンド e が開いていることと $U(e) < p$ であることとは同値である．

そして，あるボンド e が開いている事象は，確率 p で他のすべてのボンドとは独立におきる．このことはすべての p に対するパーコレーションに同時に成り立つ．

特に，$p_1 < p_2$ としたとき，$U(e) < p_1$ ならば，$U(e) < p_2$ となる．

したがって，C_p をパラメータ p のモデルに対する原点を含む開クラスターとすると，

$$p_1 < p_2 \text{ に対して，} C_{p_1} \subset C_{p_2}$$

が得られる．したがって，

$$p_1 < p_2 \text{ に対して，} \{|C_{p_1}| = \infty\} \subset \{|C_{p_2}| = \infty\}$$

が成り立つ．よって θ は単調増加関数である．

$\mathbf{Z^2}$ における路の正確な定義を述べる．

定義 3.2　$\mathbf{Z}^2$ の点と $\mathbf{B}^2$ のボンドを交互に並べた集合

$$\gamma = \{x_0, b_1, x_1, b_2, x_2, \cdots, b_n, x_n\}$$

が路であるとは，以下の二つをみたすときにいう．

(i) $b_i = \{x_{i-1}, x_i\}, 1 \leq i \leq n$.

(ii) $i \neq j \Longrightarrow b_i \neq b_j$

ここで，路 γ に現れるボンドの数を γ の長さと呼び，$||\gamma||$ と表す．また，原点を出発する長さ n の路の総数は (i)(ii) より $i = 0$ のときは，原点から出る 4 本のボンドから選ぶが，それ以降は高々 3 本のボンドから選ぶから，$4 \cdot 3^{n-1}$ 以下になる．

また，各 $b \in \mathbf{E}^2$ に対してランダムに 0 または 1 をとる変数 X_b を考える．X_b は，ボンドが開いているとき $X_b = 1$，ボンドが閉じているとき $X_b = 0$ をとるものとする．

定理 3.3　Z^2 上のパーコレーションにおいて，臨界確率 p_c は次を満たす．

$$\frac{1}{3} \le p_c \le \frac{2}{3}. \tag{3.1.1}$$

《証明》

まず，$p_c \ge \dfrac{1}{3}$ を示す．

原点を出発した長さ n の路，$\gamma = \{\mathrm{O}, b_1, x_1, b_2, x_2, \cdots, b_n, x_n\}$ を任意にとってくる．また，γ に現れるボンドの集合 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ を再び γ とかく．このとき

$$P_p(\gamma \subset C_{\mathrm{O}}) = P(X_{b_i} = 1, 1 \le i \le n) = p^n$$

であるので，これを原点から出発する路全体にわたってたし合せると，

$$\sum_{\mathrm{O}\in\gamma} P_p(\gamma \subset C_{\mathrm{O}}) \le \sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n \tag{3.1.2}$$

を得る．(3.1.2) の右辺は

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4 \cdot 3^{n-1} \cdot p^n = \sum_{n=1}^{\infty} 4p \cdot (3p)^{n-1} = \frac{4p\{1-(3p)^n\}}{1-3p}$$

より $p < \dfrac{1}{3}$ のとき収束して有限になる．

$p < \dfrac{1}{3}$ のとき，Borel-Cantelli の定理より

$$P_p\Big(\text{無限個の } n \text{ について，原点を出発し長さ } n \text{ の路が } C_{\mathrm{O}} \text{の中にある．}\Big) = 0 \tag{3.1.3}$$

となる．なぜなら，(3.1.3) の左辺の集合は，原点を出発する路に適当に順番をつけたとき

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega; \gamma_k \subset C_{\mathrm{O}}(\omega)\}$$

とかけるからである．

また，$||C_{\mathrm{O}}(\omega)|| = \infty$ ならば，どの n に対しても，必ず長さ n の原点を出発する路が，$C_{\mathrm{O}}(\omega)$ の中にとれるので，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega; \gamma_k \subset C_{\mathrm{O}}(\omega)\} \supset \{\omega \in \Omega; ||C_{\mathrm{O}}(\omega)|| = \infty\}$$

$$\Longleftrightarrow P_p\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega; \gamma_k \subset C_{\mathrm{O}}(\omega)\}\right) \ge P_p\left(\subset \{\omega \in \Omega; ||C_{\mathrm{O}}(\omega)|| = \infty\}\right).$$

ゆえに，(3.1.3) より

$$\theta(p) = 0, \quad (p < \frac{1}{3}\text{のとき}) \tag{3.1.4}$$

つまり，$p \ge \dfrac{1}{3}$ のとき $\theta(p) > 0$ である．

よって，

$$p_c \ge \frac{1}{3}$$

次に，$p_c \leq \dfrac{2}{3}$ を示す．

そのために，$\mathbf{Z}^2$ の裏格子 $(\mathbf{Z}^2)^*$ を用いる．$\mathbf{Z}^2$ の裏格子 $(\mathbf{Z}^2)^*$ の各点は，$\mathbf{Z}^2$ の各点を，$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ だけ平行移動することによって得られる．

つまり，

$$(\mathbf{Z}^2)^* = \{(n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}); n, m \in \mathbf{Z}\}$$

と表されるのだが，$(\mathbf{Z}^2)^*$ のボンドの全体 $(\mathbf{E}^2)^*$ は，

$$(\mathbf{E}^2)^* = \{(n+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}), (n'+\frac{1}{2}, m'+\frac{1}{2}); |n-n'|+|m-m'|=1\}$$

と表せる．$\mathbf{E}^2$ の元 b と $(\mathbf{E}^2)^*$ の元 b^* との対応のさせ方は，$b \in \mathbf{E}^2$ に対して，b の中点を通って，b と直交している $b^* \in (\mathbf{E}^2)^*$ が取れることを利用して，$b \to b^*$ という 1 対 1 の対応を決める．

そこで $\xi_b^*(\omega) = X_b(\omega)$，$b \in \mathbf{E^2}$ とおくことで，新しい独立な確率変数の系

$$\{\xi_b^*; b^* \in (\mathbf{B}^2)^*\} = \{\xi_b^*; b \in \mathbf{B}^2\}$$

ができる．

$C_{\mathrm{O}}(\omega)$ が有限集合のとき，$\partial C_{\mathrm{O}}(\omega)$ も有限集合である．ただし，$\partial C_{\mathrm{O}}(\omega)$ は $C_{\mathrm{O}}(\omega)$ の境界である．つまり，C_{O} を囲む閉じたボンドの集合である．

ここで $(\partial C_{\mathrm{O}}(\omega))^*$ を次のようにおく．

$$(\partial C_{\mathrm{O}}(\omega))^* = \{b^*; b \in \partial C_{\mathrm{O}}(\omega)\}$$

このとき，$(\partial C_{\mathrm{O}}(\omega))^*$ のボンドをうまく

$$b_1^*, b_2^*, \cdots, b_n^*\ ,\ \text{ただし}\ b_i^* = \{x_{i-1}^*, x_i^*\} \quad (1 \leq i \leq n)$$

とするとき，

$$\gamma^* = \{x_0^*, b_1^*, x_1^*, b_2^*, x_2^*, \cdots, b_n^*, x_n^*\}$$

は $(\mathbf{Z}^2)^*$ での路となる．

その上，$x_n^* = x_0^*$ となっており，

$$x_0^* \to x_1^* \to x_2^* \to \cdots \to x_{n-1}^* \to x_n^* = x_0^*$$

と一周してきて, それを結ぶことで，平面上に閉じた折れ線（多角形）ができる．

ゆえに，このとき原点を内側に囲む $(\mathbf{E}^2)^*$ の路を含む．

つまり，原点 O はこの折れ線（多角形）の内部にある．

$||C_{\mathrm{O}}(\omega)|| = \infty$ のとき，このような折れ線（多角形）は表れない．$||C_{\mathrm{O}}(\omega)|| < \infty$ のとき，C_{O} を取り囲む $(\mathbf{B}^2)^*$ 内の閉じた路が存在することが分かった．

$N \geq 1$ に対して

$$\overline{V_N} = \{(n, m); \max(|n|, |m|) \leq N\}$$

$$V_N = \{b = \{x, y\} \in \mathbf{E}^2; x, y \in \overline{V_N}\}$$

とする．

V_N を原点の代わりに考えることで，$S(\omega) = \{b \in \mathbf{E}^2; \omega(b) = 1\}$ とすると，

$$\begin{aligned} P_p(S(\omega)\text{ は }V_N\text{から無限に伸びる連結成分を持たない}) &= P_p(V_N\text{を囲む }(\mathbf{E}^2)^*\text{内の閉じた路}\gamma^*\text{が存在する}) \\ &\leq \sum_{V_N\text{を囲む閉じた路}} P_p(\xi_{b^*} = 0, b^* \in \gamma^*). \end{aligned}$$

ここで，γ^* の長さ $||\gamma^*||$ は V_N を囲むことにより，$||\gamma^*|| = k$ とすると $k \geq 4(2N+1) = 8N+4$ となる．

更に γ^* は閉じた折れ線なので $\{(j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}; 1 \leq j \leq ||\gamma^*||\}$ のどれかの点を通る．したがって，最初は 4 方向へ進むことができるが次のステップでは多くとも 3 方向にしか進むことができないことから，γ^* の個数は $k \cdot 4 \cdot 3^{k-1}$ を超えない．

よって，

$$\sum_{V_N\text{を囲む閉じた路}} P_p(\xi_{b^*} = 0, b^* \in \gamma^*) \leq \sum_{k \geq 8N}^{\infty} k \cdot 4 \cdot 3^{k-1}(1-p)^k.$$

ここで，

$$a_k = k \cdot 4 \cdot 3^{k-1}(1-p)^k \quad (k \geq 8N)$$

とすると

$$a_{k+1} = (k+1) \cdot 4 \cdot 3^k (1-p)^{k+1}$$

と書け，

この a_{k+1} と，a_k の比の値は，a_k が 0 でないことに注意すると，

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{(k+1) \cdot 4 \cdot 3^k (1-p)^{k+1}}{k \cdot 4 \cdot 3^{k-1}(1-p)^k} \\ &= (1 + \frac{1}{k}) \cdot 3(1-p) \end{aligned}$$

となり，ダランベールの判定法により $\lim_{k \to \infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = r$ が存在して，$0 \leq r < 1$ を満たすならば，$\sum a_k$ は収束するので，$p > \frac{2}{3}$ のとき 0 に収束する．

したがって，$N = N(p)$ を十分大きくとると，

$$P_p(S(\omega)\text{ は }V_N\text{から無限に伸びる連結成分を持つ}) \geq \frac{1}{2} \tag{3.1.5}$$

となるようにできる．

$P_p(S(\omega)$ は V_Nから無限に伸びる連結成分を持つ) は $\{X_b; b \notin V_N\}$ だけに依存し $\{X_b; b \in V_N\}$ とは独立なので，

$$\begin{aligned} &P_p(\{X_b = 1, \forall b \in V_N\} \cap \{S(\omega)\text{ は }V_N\text{から無限に伸びる連結成分を持つ }\}) \\ &= P_p(X_b = 1, \forall b \in V_N) \times P(S(\omega)\text{ は }V_N\text{から無限に伸びる連結成分を持つ}) \\ &\geq \frac{1}{2} P_p(X_b = 1, \forall b \in V_N) \qquad (\because (3.1.5)) \\ &> 0 \end{aligned}$$

集合 $\{X_b = 1, \forall b \in V_N\} \cap \{S(\omega)$ は V_Nから無限に伸びる連結成分を持つ $\}$ は $\{||C_{\mathrm{O}}|| = \infty\}$ の部分集合であるから

$$P_p(||C_{\mathrm{O}}|| = \infty) \geq P_p(\{X_b = 1, \forall b \in V_N\} \cap \{S(\omega) \text{ は } V_N \text{から無限に伸びる連結成分を持つ }\})$$

より $p > \dfrac{2}{3}$ のとき $\theta(p) > 0$，すなわち，$p_c \leq \dfrac{2}{3}$ が分かる．

以上より，$\dfrac{1}{3} \leq p_c \leq \dfrac{2}{3}$

命題 3.4 $p > p_c$ ならば，$\mathbf{Z^2}$ 上のどこかに無限開クラスターが存在する確率は 1 である．一方，$p < p_c$ ならば $\mathbf{Z^2}$ 上のどこかに無限開クラスターが存在する確率は 0 である．

《証明》

まず，事象 A を $\mathbf{Z^2}$ 上のどこかに無限開クラスターが存在する事象とする．事象 A が起きるためには，少なくとも 1 つの開クラスター$C(x)$ は無限でなけらばならない．

したがって，

$$P(A) \leq \sum_{x \in \mathbf{Z^2}} P(|C(x)| = \infty)$$

が成り立つ．

$p < p_c$ ならば $\theta(p) = 0$ なので任意の x に対して，$P(|C(x)| = \infty) = P(|C_{\mathrm{O}}| = \infty) = 0$ が成り立つ．それゆえ，$p < p_c$ に対して，$P(A) = 0$ となる．つまり無限開クラスターが存在する確率は 0 である．

一方，事象 A が起きるためには，原点が無限開クラスターに含まれていれば十分である．

したがって，

$$P(A) \geq P(|C_O| = \infty) = \theta(p)$$

が得られる．

この式で，$p > p_c$ ならば $\theta(p) > 0$ なので，$P(A) > 0$ となる．

しかし，事象 A は任意の有限なボンドの集合に依存しない．すなわち，事象 A が起きるか起きないかは，有限個のボンドを開いたり閉じたりしても変わらない．このような事象は末尾事象とよばれる．ボンドの状態は独立であるので，コルモゴロフの 0-1 法則より，$P(A) = 0$ または 1 の結論を得る．

したがって，$p > p_c$ のとき，$P(A) > 0$ なので $P(A) = 1$ となる．つまり，無限開クラスターが存在する確率は 1 である．

定義 3.5 実数値関数 g が t で**上半連続** (upper semicontinuous) とは，$c > g(t)$ となる定数 c に対して，$|h| < \delta$ ならば $c \geq g(t + h)$ となる $\delta > 0$ が存在することである．

補題 3.6 関数 g_i が t で連続であると仮定したとき，$g = \inf_i g_i$ は t で上半連続である．

《証明》

ある定数 c に対して $c > g(t)$ と仮定すると，g の定義 $(g = \inf_i g_i)$ により

$$c > g_{i_0}(t) \geq g(t)$$

となるような i_0 が存在する．しかし，g_{i_0} は t で連続なので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，

$$|t+h-t| < \delta \Leftrightarrow |h| < \delta$$

ならば，

$$|g_{i_0}(t+h) - g_{i_0}(t)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow g_{i_0}(t+h) \leq \varepsilon + g_{i_0}(t)$$

となる．

いま，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\varepsilon = c - g_{i_0}(t) \ > 0$ とすると $g_{i_0}(t+h) \leq c$ が得られる．このことより，$g(t+h) = \inf_i g_i(t+h)$ なので

$$g(t+h) < g_{i_0}(t+h) \leq c$$

が成り立つ．

この式から g が t で上半連続であることがわかる．

補題 3.7　もし，g が上半連続で，かつ単調増加関数であるならば, 右連続である．

《証明》

$t > 0$ を固定し，任意の $\varepsilon > 0$ に対して $c = g(t) + \varepsilon$ とする．

このとき，上半連続性により $|h| < \delta$ ならば

$$g(t+h) \leq c = g(t) + \varepsilon$$

となるような $\delta > 0$ が存在する．

いま，$0 < h < \delta$ とし g が単調増加関数であることを利用すると，

$$0 \leq g(t+h) - g(t) \leq \varepsilon$$

が成り立つ．

これは，関数 g が右連続であることを示している．

命題 3.8　関数 θ は p_c を除いた $[0,1]$ 上で連続である．

《証明》

$S(n)$ を 1 辺の長さが $2n$ の正方形の境界とする．つまり，

$$S(n) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{Z^2} : |x_1| = n, |x_2| \leq n \text{ または } |x_1| \leq n, |x_2| = n\}$$

と定義する．

ここで，$\{\mathrm{O} \leftrightarrow S(n)\}$ を原点から $S(n)$ 上のある点までオープンパスが存在する事象とする．このとき，事象列 $\{\mathrm{O} \leftrightarrow S(n)\}$ は n に関して単調減少である．

なぜなら，$\{\mathrm{O} \leftrightarrow S(n+1)\} \Rightarrow \{\mathrm{O} \leftrightarrow S(n)\}$ が成り立つから $\{\mathrm{O} \leftrightarrow S(n+1)\} \subseteq \{\mathrm{O} \leftrightarrow S(n)\}$ であるので，n に関して単調減少である．

したがって，命題 2.17 より

$$\lim_{n\to\infty} P(\mathrm{O} \leftrightarrow S(n)) = P(\bigcap_{n\geq 1} \{\mathrm{O} \leftrightarrow S(n)\})$$

が得られる．

しかし，事象 $\bigcap_{n\geq 1}\{\mathrm{O} \leftrightarrow S(n)\}$ が起きることと，原点が無限開クラスターに含まれることは同値である．したがって，$g_n(p) = P(\mathrm{O} \leftrightarrow S(n))$ とすると

$$\theta(p) = \lim_{n\to\infty} g_n(p) = \inf_{n\to\infty} g_n(p)\ (\because\ g_n(p)\ \text{は下に有界で単調減少})$$

が導かれる．

また，$B(n) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{Z^2} : |x_1| \leq n$ かつ $|x_2| \leq n\}$ とすると，事象 $\{\mathrm{O} \leftrightarrow S(n)\}$ は $B(n)$ 内のボンドのみに依存し，$B(n)$ 内のパーコレーションの配置の共通部分を持たない有限和として書き表せる．

すなわち，各配置に対して，i は $B(n)$ 内の開いたボンドの数，j は $B(n)$ 内の閉じたボンドの数とすると，その配置をとる確率は，$p^i(1-p)^j$ となる．

したがって $g_n(p) = P(\mathrm{O} \leftrightarrow S(n))$ は $p^i(1-p)^j$ の形の有限和であるので，p の多項式になる．ゆえに，$g_n(p)$ は連続関数であり，$\theta(p)$ は $g_n(p)$ の極限値である．

しかし，θ は必ずしも連続ではない．ここで，θ の連続性について考えよう．

補題 3.6 より，θ は上半連続となる．また，θ は単調増加関数であるから，補題 3.7 より，θ は $[0, 1]$ 上のすべての点で右連続である．

次に，θ の左連続性について考える．

命題 3.1 の証明に際して導入したパーコレーションの構成法を用いる．

すべての $p \in [0, 1]$ に対して同時にパーコレーションを構成する．ここで，C_p をパラメータ p のパーコレーションに対する原点を含む開クラスターとする．この構成法により，

$$\text{もし，} p_1 < p_2 \Rightarrow C_{p_1} \subset C_{p_2}$$

が成立する．

$p > p_c$ のとき，θ は p で左連続であることを証明したい．すなわち，左からの極限

$$\lim_{t\to p-} \theta(t)\ \text{が}\ \theta(p)\ \text{と一致すること}$$

を示す． ただし，以下のことに注意

$$\lim_{t\to p-} \theta(t) = \lim_{t\to p-} P(|C_t| = \infty) = P(\text{ある}\ t < p\ \text{に対して}, |C_t| = \infty)$$

(2 つめの等号は，事象列 $\{|C_t| = \infty\}$ が t に関して単調増加列であることによる)

また，すべての $t < p$ に対して $C_t \subset C_p$ なので，

$$\begin{aligned}
0 &\leq \theta(p) - \lim_{t\to p-} \theta(t) \\
&= P(|C_p| = \infty) - P(\text{ある}\ t < p\ \text{に対して}\ |C_t| = \infty) \\
&= P(|C_p| = \infty, \text{すべての}\ t < p\ \text{に対して}\ |C_t| < \infty)
\end{aligned}$$

ここで，2 つ目の等号は $A \subset B \Rightarrow P(B) - P(A) = P(B \cap A^c)$ による

このとき左連続性を示すためには，最後に現れた項 $P(|C_p| = \infty, \text{すべての}\ t < p\ \text{に対して}\ |C_t| < \infty) = 0$ となることを示せばよい．

以下，$|C_p| = \infty$ を仮定し，$p_c < t_0 < p$ とする．このとき，命題 3.4 からパラメータ t_0 におけるパーコレーションにおいて確率 1 で無限クラスターがどこかに存在する．

この無限開クラスターを B_{t_0} で表す．さらに，この B_{t_0} は C_p と交わらなければならない．

($\because$ もし B_{t_0} と C_p が交わらないとすると，パラメータ $p(> t_0 > p_c)$ のパーコレーションでは無限開クラスターが 2 つ存在することになり定理 6.5 に矛盾する)

したがって (パラメータ p のパーコレーションの場合) 原点から B_{t_0} 内のある点までオープンパス γ が存在する．このオープンパスは有限で，パスに属するボンドに対しても $U(e) < p$ が成り立つ．

いま，t_1 をオープンパス γ 内のすべてのボンドに対する $U(e)$ の最大値とする．

この最大値は p より真に小さいことに注意．

ここで，$t_2 = \max(t_0, t_1)$ とおく．すると，パラメータ t_2 のパーコレーションにおいて γ は開いているだけでなく B_{t_0} も無限開クラスターとなる．

したがって，パラメータ t_2 のパーコレーションにおいて原点は無限開クラスターに属する．言い換えると，

$$\text{ある } t_2 < p \text{ に対して } |C_{t_2}| = \infty$$

このことから

$$P(|C_p| = \infty, \text{すべての } t < p \text{ に対して } |C_t| < \infty) = 0$$

が示された．ゆえに，θ は左連続である．

以上より，θ は，定義により $[0, p_c)$ 上で 0 なので連続であり，一方で $[0, 1]$ 上で右連続なので θ は p_c を除いた $[0, 1]$ 上で連続である．

3.2 パーコレーションの相転移と基本的な定理

この章では次章においてボンドパーコレーションの臨界確率 p_c の値，および p_c と p_T の一意性を考えるにあたり 3 つの基本的な定理を紹介する．パーコレーション確率 $\theta(p)$ は先に定義した臨界確率 p_c を境に値が 0 から正に変わる．では，他の量を考えるとどのような変化を見ることができるのだろうか．ここで考えるのは次の二つの量である．

1. **連結性関数** (connectivity function)

   (3.2.1) $$\tau_p(x, y) := P_p(C_x = C_y).$$

2. **平均クラスターサイズ** (expected cluster size)

   (3.2.2) $$\chi(p) := E_p(|C_0|) = \sum_{x \in \mathbf{Z}^2} \tau_p(0, x).$$

連結性関数は $p < p_c$ のとき $|x - y|$ について指数的に減少するのだが，$p > p_c$ ならば $\theta(p)^2$ 以上となることが知られている．また，平均クラスターサイズは臨界確率 p_T を考える上で重要である．

これらの量は $p = p_c$ を境に挙動が大きく変動する．その変化を見るためにいくつか基本的な定理が必要となる．

最初に，P_p の**平行移動不変性**について説明する．$x \in \mathbf{Z}^2$ のとき，B を $\mathbf{E}^2$ の有限集合として，$B + x$ で B を x だけ平行移動した集合を表す．P_p が平行移動で不変とは，P_p で見ると $\{\omega(b); b \in \mathbf{E}^2\}$ は独立同分布の確率変数な

ので，$\{\omega(b); b \in B\}$ と $\{\omega(b); b \in B+x\}$ の確率法則が同じであるということ．つまり，$B+x = \{b+x; b \in B\}$ とかくとき任意の $\sigma \in \{0,1\}^B$ に対して

$$P_p(\omega(b) = \sigma(b), \forall b \in B) = P_p(\omega(b+x) = \sigma(b), \forall b \in B)$$

を言えばよいが，これは明らかである．

パーコレーションは無限個のボンドの状態を問題にするのでもう少し一般の事象について平行移動不変性を定める．

以下，事象 A は $\mathcal{F} = \sigma\{\omega(b); b \in \mathbf{E^2}\}$ の要素とする．$\mathcal{F}$ はすべての関数

$$\omega(b) : \Omega \ni \omega \mapsto \omega(b) \in \{0,1\} \quad (b \in \mathbf{E^2})$$

を可測にする最小の Ω の σ-加法族である．

まず，$\Omega = \{0,1\}^{\mathbf{E^2}}$ の元 ω と $x \in \mathbf{Z^2}$ に対して ω の x 方向への**平行移動** $S_x\omega$ を次のように定める．

定義 3.9 $\omega \in \Omega, x \in \mathbf{Z^2}$のとき $S_x\omega \in \Omega$ を

$$S_x\omega(b) := \omega(b-x)$$

で定義する．次に，$A \in \mathcal{F}$ に対しては

$$S_xA := \{S_x\omega; \omega \in A\}$$

と定める．

このとき，平行移動不変性を次のように定義することができる．

定義 3.10 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率測度 P が平行移動不変であるとは任意の $A \in \mathcal{F}$ と任意の $x \in \mathbf{Z^2}$ に対して

$$P(S_xA) = P(A)$$

を満たすときにいう．

次に 3 つの定理を紹介する．

3.2.1 Harris-FKG 不等式

定義 3.11 Ω_n 上の関数 f が**単調増加**であるとは $\omega \le \eta$ ならば $f(\omega) \le f(\eta)$ となることをいう．
f が**単調減少**であるとは $-f$ が単調増加なときにいう．

定義 3.12 事象 A に対して

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

と定めると，$1_A(\omega)$ が単調増加なとき A は単調増加という．

1_A は A の**指示関数**と呼ばれる．

定理 3.13 (Harris-FKG 不等式) Ω_n 上の単調増加な関数 f, g に対して

$$E_p(f,g) \le E_p(f)E_p(g) \tag{3.2.3}$$

が成り立つ.

注意 1.1 いま $\Omega_n=\{0,1\}^n$ で紹介したが，$\Omega=\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ でもこの不等式は f,g がともに P_p で 2 乗可積分という条件を加えれば正しい.

補題 3.14 任意の $0<p\leq 1$ と $a\in\mathbf{Z^2}$，$a\neq 0$ に対して極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\tau_p(0,na)}{n|a|}=-\psi_p(a)\in(-\infty,0] \tag{3.2.4}$$

が存在する.

《証明》

$x,y\in\mathbf{Z^2}$ がオープンパスでつながることを $\{x\leftrightarrow y\}$ と書く．このとき，

$$\{0\leftrightarrow y\}\cap\{y\leftrightarrow x\}\subset\{0\leftrightarrow x\}$$

が成り立つ.

これらの集合は単調増加なので**注意 1.1** より $x=(n+m)a$，$y=na$ に対して Harris-FKG 不等式が使えて

$$\begin{aligned}
P_p(0\leftrightarrow x)&\geq P_p(0\leftrightarrow y)P_p(y\leftrightarrow x)\\
\Leftrightarrow \tau_p(0,(n+m)a)&\geq\tau_p(0,na)\tau_p(na,(n+m)a)\\
&=\tau_p(0,na)\tau_p(0,ma)
\end{aligned}$$

$\alpha(n)=\log\tau_p(0,na)$ とおくと，上の不等式から

$$\alpha(n+m)\geq\alpha(n)+\alpha(m) \tag{3.2.5}$$

が任意の自然数 m,n に対して成り立つ.

m を任意にとめて，N が十分大きいとき

$$\alpha_*(m)=\min\{\alpha(1),\ldots,\alpha(m-1)\}$$

とおくと，$N=km+l$(ただし $0\leq l\leq m-1$ とする) ならば (3.2.5) から

$$\begin{aligned}
\alpha(N)&=\alpha(km+l)\\
&\geq\alpha(km)+\alpha(l)\\
&=k\alpha(m)+\alpha(l)\\
&\geq k\alpha(m)+\alpha_*(m)
\end{aligned}$$

両辺を N で割って

$$\frac{\alpha(N)}{N}\geq\frac{k\alpha(m)}{N}+\frac{\alpha_*(m)}{N}$$

となり，$N\to\infty$ として両辺の下極限をとると

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{\alpha(N)}{N}\geq\liminf_{N\to\infty}\frac{k\alpha(m)}{N}\geq\frac{\alpha(m)}{m}.$$

最後に，$m\to\infty$ として，

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{\alpha(N)}{N}\geq\limsup_{N\to\infty}\frac{\alpha(N)}{N}.$$

また，明らかに $\liminf_{N\to\infty}\dfrac{\alpha(N)}{N}\leq\limsup_{N\to\infty}\dfrac{\alpha(N)}{N}$ は成立する.

以上より，求める極限が存在することが示される．

さらに，$\alpha(n)$ の定義から，$\alpha(n) \leq 0$ だから極限値も 0 以下であり，$\tau_p(0,a) > 0$ であることに注意すると，

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\alpha(N)}{N|a|} \geq \frac{\alpha(1)}{|a|} > -\infty$$

を得る．(3.2.5) を満たす数列を優加法列と呼び，(3.2.5) の逆向きの不等式を満たす数列を劣加法列と呼ぶ．$\{\alpha(n)\}$ が劣加法列なら，$\{-\alpha(n)\}$ は優加法列だから，どちらにしても極限 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\alpha(n)}{n}$ が存在することが上の議論からわかる．ただし，この極限は $\pm\infty$ の可能性もある．

もう一つの Haris-FKG 不等式の応用として，補題 3.14 の $\psi_p(a)$ について情報を得ることができる．

$$U_\infty = \{\text{ 無限開クラスターは一つしかない }\}$$

とおく．(これは第 6 章で詳しく述べる．)P_p は平行移動で不変であるが，独立確率変数列から作られているので**エルゴード的**であることが知られている．つまり，任意の平行移動不変な事象 A の確率 $P_p(A)$ は 0 または 1 であることが知られている．以下で簡単に証明する．

定理 3.15　$A \in \mathcal{F}$ が平行移動不変，つまり任意の $x \in \mathbf{Z^2}$ に対して

$$A = S_x A \tag{3.2.6}$$

を満たすならば $P_p(A) = 0$ または 1 である．

《証明》

$A \in \mathcal{F}$ を平行移動不変な事象とする．拡張定理により任意の $\varepsilon > 0$ に対して有限のボンドの集合 $\Lambda \subset \mathbf{E^2}$ と $\sigma\{\omega(b) : b \in \Lambda\}$ の元 $A(\varepsilon)$ がとれて，

$$P_p(A \triangle A(\varepsilon)) = P_p(A \setminus A(\varepsilon)) + P_p(A(\varepsilon) \setminus A) < \varepsilon \tag{3.2.7}$$

とできる．

これに平行移動 S_x を作用させると，$S_x A = A$ を満たしているから，

$$\begin{aligned} P_p(A \triangle S_x A(\varepsilon)) &= P_p(S_x A \triangle S_x A(\varepsilon)) \\ &= P_p(A \triangle A(\varepsilon)) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

となる．x が原点から十分遠く，$\Lambda \cap (\Lambda - x) = \phi$ のとき

$$\begin{aligned} P_p(A) &= P_p(A \cap A) \\ &= P_p(S_x A(\varepsilon) \cap A(\varepsilon)) + P_p((S_x A \cap A) \setminus (S_x A(\varepsilon) \cap A(\varepsilon))) - P_p((S_x A(\varepsilon) \cap A(\varepsilon)) \setminus (S_x A \cap A)) \end{aligned}$$

ここで，$S_x A(\varepsilon) \in \sigma\{\omega(b) : b \in \Lambda - x\}$ であることに注意すると，独立性から

$$P_p(S_x A(\varepsilon) \cap A(\varepsilon)) = P_p(S_x A(\varepsilon)) P_p(A(\varepsilon)) = P_p(A(\varepsilon))^2$$

また，

$$P_p((A \cap S_x A) \triangle (A(\varepsilon) \cap S_x A(\varepsilon)) < 2\varepsilon$$

だから，

$$|P_p(A) - P_p(A(\varepsilon)^2)| \leq 4\varepsilon.$$

(3.2.7) とこの式から証明終了．

補題 3.16

(3.2.8)
$$\tau_p(x,y) \geq P_p(U_\infty \cap \{|C_O| = \infty\})^2$$

したがって $p > p_c$ のとき $P_p(U_\infty) = 1$ ならば，右辺は正になり，$\psi_p(x) = 0$ が任意の x に対して成立する．

《証明》

まず，$\tau_p(x,y) = P_p(x \leftrightarrow y)$ だから

$$\{x \leftrightarrow y\} = \{C_x = C_y\} \supset \{|C_x| = |C_y| = \infty\} \cap U_\infty$$

また，U_∞ は平行移動不変な事象なので，P_p は平行移動に関してエルゴード的であることから，$P_p(U_\infty) = 0$ または 1 となる．

$P_p(U_\infty) = 0$ ならば，補題 3.16 の右辺は 0 となり，明らかである．

$P_p(U_\infty) = 1$ ならば，Harris-FKG 不等式より

$$\begin{aligned} P_p(\{|C_x| = |C_y| = \infty\} \cap U_\infty) &= P_p(|C_x| = \infty, |C_y| = \infty) \\ &\geq P_p(|C_x| = \infty) \cdot P_p(|C_y| = \infty) \\ &= P_p(|C_O| = \infty) \cdot P_p(|C_O| = \infty) \\ &= P_p(U_\infty \cap \{|C_O| = \infty\})^2 \end{aligned}$$

よって，

$$\tau_p(x,y) \geq P_p(\{|C_x| = |C_y| = \infty\} \cap U_\infty) \geq P_p(U_\infty \cap \{|C_O| = \infty\})^2$$

3.2.2 BK-Reimer 不等式

定義 3.17 $A, B \subset \Omega_n$ が単調増加なとき

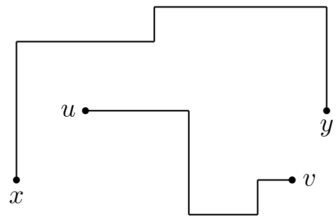
(3.2.9)
$$A \circ B = \{\omega \in \Omega; \exists J \subset K(\omega), [1]_J \subset A, \text{かつ } [1]_K(\omega) \setminus J \subset B\}$$

と定める．ただし，

$$K(\omega) = \{1 \leq j \leq n; \omega(j) = 1\}\ ,\ [1]_J = \{\omega(j) = 1, \forall j \in J\}$$

とする．

$A \circ B$ とは，図のように x と y とをつなぐ開路が存在する事象 A，u と v とをつなぐ開路が存在する事象 B とすると，それぞれが交わらないという事象である．



$A \circ B$

定理 3.18 (BK 不等式)A, B を Ω_n の単調増加な事象とするとき，

(3.2.10)
$$P(A \circ B) \leq P(A)P(B).$$

次に，BK 不等式の応用として次の定理を紹介する．この定理の証明では，本論文の後半で示す $p_c = p_T$ を仮定する．ただし，この定理は後に紹介する $p_c = p_T$ の証明に直接関係しないことを注意しておく．

定理 3.19　$p < p_c$ ならば，すべての $n \geq 1$ に対して，以下の不等式が成り立つような (p に依存している) $\alpha > 0$ が存在する．

(3.2.11)
$$P(0 \leftrightarrow S(n)) \leq e^{-\alpha n}.$$

《証明》

$S(x,k)$ を 1 辺が $2k$ で中心が点 x の正方形とする．すなわち，

$$S(x,k) = \{y \in \mathbf{Z^2} : \text{ある } z \in S(k) \text{ に対して}, y = x + z\}$$

また，原点から $S(n+k)$ $(= S(0, n+k))$ までオープンパスが 1 つ存在するためには，原点から $S(n)$ 上のある点 x までオープンパスが 1 つ存在し，しかも x から $S(x,k)$ までオープンパスが 1 つ存在しなければならない．さらに，これら 2 つのパスは点 x を除いて，それぞれ交わらないようにとることができる．

したがって，

$$P(0 \leftrightarrow S(n+k)) \leq \sum_{x \in S(n)} P(\{0 \leftrightarrow x\} \circ \{x \leftrightarrow S(x,k)\})$$

が成り立つ．

ここで，BK 不等式を使うと

$$\begin{aligned}
P(0 \leftrightarrow S(n+k)) &\leq \sum_{x \in S(n)} P(\{0 \leftrightarrow x\} \circ \{x \leftrightarrow S(x,k)\}) \\
&\leq \sum_{x \in S(n)} P(0 \leftrightarrow x) P(x \leftrightarrow S(x,k)) \\
&= \sum_{x \in S(n)} P(0 \leftrightarrow x) P(0 \leftrightarrow S(0,k)) \\
&= P(0 \leftrightarrow S(0,k)) \sum_{x \in S(n)} P(0 \leftrightarrow x)
\end{aligned}$$

ここで，$B_n = \sum_{x \in S(n)} P(0 \leftrightarrow x)$ とおく．

また，1_A を事象 A の定義関数とする．

$$\sum_{x \in S(n)} 1_{\{0 \leftrightarrow x\}} : \text{オープンパスを使って原点までつながる } S(n) \text{ 上の点の個数}$$

である．したがって，$E(1_{\{0 \leftrightarrow x\}}) = P(0 \leftrightarrow x)$ に注意して

$$E(\sum_{x \in S(n)} 1_{\{0 \leftrightarrow x\}}) = \sum_{x \in S(n)} P(0 \leftrightarrow x) = B_n$$

が成り立つ．

つまり，B_n は，オープンパスを使って原点につながっている $S(n)$ の点の個数の期待値である．

同様にして

$$|C_O| = \sum_{x \in \mathbf{Z^d}} 1_{\{0 \leftrightarrow x\}} = \sum_{n \geq 0} \sum_{x \in S(n)} 1_{\{0 \leftrightarrow x\}}.$$

さらに，各項はすべて非負なので，

$$\begin{aligned}
E(|C_O|) &= E(\sum_{n \geq 0} \sum_{x \in S(n)} 1_{\{0 \leftrightarrow x\}}) \\
&= \sum_{n \geq 0} E(\sum_{x \in S(n)} 1_{\{0 \leftrightarrow x\}}) \\
&= \sum_{n \geq 0} B_n
\end{aligned}$$

が得られる．

いま，$p < p_c = p_T$ と仮定すると，$E(|C_O|) < \infty$ となる．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} B_n = 0 \quad (\because \sum_{n\geq 0} B_n < \infty \text{ より})$$

が成り立つ．

特に任意の $n \leq N$ に対して，$B_n < \frac{1}{2} \cdots (*)$ となる N が存在する．ここで，$n > N$ とすると，ある正数 $r < N$ と S が存在して，$n = Ns + r$ と表せる．

$n \geq Ns$ となるので

$$P(0 \leftrightarrow S(n)) \leq P(0 \leftrightarrow S(Ns))$$

が得られる．さらに $(*)$ より

$$\begin{aligned}
P(0 \leftrightarrow S(n)) &\leq P(0 \leftrightarrow S(Ns)) \\
&= P(0 \leftrightarrow S(N(s-1)+N) \\
&\leq P(0 \leftrightarrow S(N(s-1))) \sum_{x \in S(N)} P(0 \leftrightarrow x) \\
&= P(0 \leftrightarrow S(N(s-1)))B_N \\
&\leq \frac{1}{2} P(0 \leftrightarrow S(N(s-1)))
\end{aligned}$$

が成り立つ．

3.2.3 Russo の公式

定義 3.20 $A \subset \Omega_n$，$1 \leq i \leq n$ とする．$\omega \in \Omega_n$ に対し，i が A に関して ω で **pivotal** であるとは，ω_0^i と ω_1^i とが同時には A にも A^c にも属さないときにいう．つまり，

$$1_A(\omega_0^i) + 1_A(\omega_1^i) = 1 \tag{3.2.12}$$

となることをいう．記号 $\Delta_i A$ で i が A に関して pivotal となる ω の全体を表すことにする．

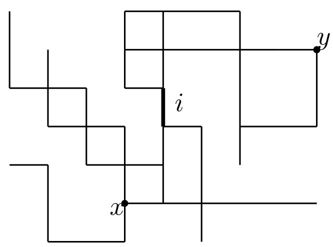
$$\Delta_i A = \{\omega \in \Omega_n; i \text{ は } A \text{ に関して} \omega \text{で pivotal}\}. \tag{3.2.13}$$

ただし，$\Omega_n = \{0,1\}^n, \omega \in \Omega_n$ と $1 \leq i \leq n$ に対し，

$$\omega_0^i(j) = \begin{cases} 0, & j = i \text{ のとき} \\ \omega(j), & j \neq j \text{ のとき} \end{cases} \qquad \omega_1^i(j) = \begin{cases} 1, & j = i \text{ のとき} \\ \omega(j), & j \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

とする． このことを，もう少しわかりやすく図示すると次のようになる．

$A = \{\omega \in \Omega_n; x \text{ と } y \text{ がオープンパスでつながる}\}$ として i が A に関して ω で pivotal であるとは，図のように i を開くか閉じるかによって A が起こるか否かが決まるようになっていることである．



i が A に関して ω で pivotal

定理 3.21　(Russo の公式)$A \subset \Omega_n$ が単調増加なとき,

$$\frac{d}{dp}P_p(A) = \sum_{1 \le i \le n} P_p(\Delta_i A). \tag{3.2.14}$$

つまり，$P_p(A)$ の微分は，pivotal な点の数の期待値によってあらわされる．

$A \subset \Omega_n$，$1 \le i \le n$ のとき

$$\begin{aligned} A_0^i &= \{\omega \in \Omega_n; \omega_0^i \in A\} \\ A_1^i &= \{\omega \in \Omega_n; \omega_1^i \in A\} \end{aligned}$$

とおく．

《証明》

見やすいように，$P = q_1 \times \cdots \times q_n$ とかく．ただし，q_j は $\{0,1\}$ 上の確率で，$q_j(1) = 1 - q_j(0) = p_j$ を満たすとする．

$$A = \{A \cap \{\omega(i) = 1\}\} \cup \{A \cap \{\omega(i) = 0\}\}$$

と変形できるので,

$$\begin{aligned} A \cap \{\omega(i) = 1\} &= \{\omega \in A; \omega(i) = 1\} \\ &= \{\omega \in \Omega_n; \omega(i) = 1, {\omega_1}^i \in A\} \\ &= \{\omega \in \Omega_n; \omega(i) = 1\} \cap \{\omega \in \Omega_n; \omega \in \Omega_n; {\omega_1}^i \in A\} \\ &= \{\omega(i) = 1\} \cap A_1^i \end{aligned}$$

とでき，同様にして

$$A \cap \{\omega(i) = 0\} = \{\omega(i) = 0\} \cap A_0^i$$

を得るから,

$$A = (\{\omega(i) = 1\} \cap A_1^i) \cup (\{\omega(i) = 0\} \cap A_0^i) \tag{3.2.15}$$

と書ける．

A_0^i，A_1^i はすでに i 番目が決まっているおり，$\omega(i)$ にはよらないので P_p でみると $\omega(i)$ とは独立であり (3.2.15) から

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\omega(i) = 1)P(A_1^i) + P(\omega(i) = 0) \cdot P(A_0^i) \\ &= p_i P(A_1^i) + (1 - p_j)P(A_0^i) \end{aligned}$$

を得る．$P(A_1^i) < P(A_0^i)$ は変数 p_j を含まないので，上で得た $P(A)$ を P_i で微分すると

$$\frac{\partial P(A)}{\partial p_i} = P({A_1}^i) - P({A_0}^i) \tag{3.2.16}$$

ここで，A が単調増加ならば，$A_0^i \supset A_1^i$ であることに注意.

したがって，(3.2.16) より,

$$\frac{\partial P(A)}{\partial P_i} = P(A_1^i) - P(A_0^i) = P(A_1^i \setminus A_0^i) \tag{3.2.17}$$

右辺は，$P(\mathit{\Delta}_i A)$ と等しいことは A が単調増加なことからわかる．

したがって，すべての i について，$p_i = p$ となっているとき

$$\frac{d}{dp}P_p(A) = \sum_{i=1}^{n} P_p(\mathit{\Delta}_i A)$$

が単調増加な事象 A に対して成り立つ．

4 Sharp threshold theorem

独立確率変数列の特徴を示すひとつとして sharp threshold theorem を考える．この定理を応用し横断確率の変化につなげる．

4.1 sharp threshold theorem

定理 4.1 ある定数 $K > 0$ が n, p に依存せず存在して，任意の $0 \le p \le 1$ と任意の単調増加な $A \subset \Omega_n$ に対して

$$P_p(A)(1 - P_p(A)) \le K(1-p)\log\frac{2}{p(1-p)}\sum_{i\le n}\frac{P_p(A_i)}{\log\dfrac{1}{(1-p)P_p(A_i)}}. \tag{4.1.1}$$

ただし，$A_i = A \cap \Delta_i A$ とする．

定理の証明の前にいくつか準備をする

まず，A が単調増加だから，

$$\begin{aligned}
P_p(A_i) = P_p(A \cap \mathit{\Delta}_i A) &= P_p(\{\omega(i) = 1\} \cap \mathit{\Delta}_i A) + P_p(\{\omega(i) = 0\} \cap \mathit{\Delta}_i A) \\
&= P_p(\{\omega(i) = 1\} \cap \mathit{\Delta}_i A) \\
&= P_p(\{\omega(i) = 1\}) \cap P_p(\mathit{\Delta}_i A) \\
&= p \cdot P_p(\mathit{\Delta}_i A)
\end{aligned}$$

と変形して，i を n まで加えると，Russo の公式から

$$\sum_{i\le n} P_p(A_i) = p\sum_{i\le n} P_p(\mathit{\Delta}_i A) = p\frac{d}{dp}P_p(A)$$

となるので，次の系を得る．

系 4.2 $A \subset \Omega_n$ を単調増加な事象とする．$\varepsilon = \sup_{1\le i\le n} P_p(A_i)$ とおくとき，

$$\frac{dP_p(A)}{dp} \ge \frac{\log(\frac{1}{\varepsilon})}{Kp(1-p)\log[\frac{2}{p(1-p)}]}P_p(A)(1 - P_p(A)). \tag{4.1.2}$$

《証明》

(4.1.1) の右辺分母を $\log\dfrac{1}{\varepsilon}$ で置き換えて，Russo の公式を使えばよい．

ε の定義から，$(1-p)\cdot P_p(A_i) \le \varepsilon$ より，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-p)P_p(A_i)} &\ge \frac{1}{\varepsilon} \\
\Leftrightarrow \log\frac{1}{(1-p)P_p(A_i)} &\ge \log(\frac{1}{\varepsilon})
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\log\dfrac{1}{(1-p)P_p(A_i)}} &\le \frac{1}{\log(\dfrac{1}{\varepsilon})} \\
\Leftrightarrow \sum_{i\le n}\frac{P_p(A_i)}{\log\dfrac{1}{(1-p)P_p(A_i)}} &\le \sum_{i\le n}\frac{P_p(A_i)}{\log(\dfrac{1}{\varepsilon})}
\end{aligned}$$

よって，

$$P_p(A)\cdot(1-P_p(A)) \le K(1-p)\cdot\log\frac{2}{p(1-p)}\cdot\sum_{i\le n}\frac{P_p(A_i)}{\log(\dfrac{1}{\varepsilon})}$$
$$= K(1-p)\cdot\log\frac{2}{p(1-p)}\cdot\frac{1}{\log(\dfrac{1}{\varepsilon})}\cdot\frac{d}{dp}P_p(A).$$

つまり，

$$\frac{d}{dp}P_p(A) \ge \frac{\log(\dfrac{1}{\varepsilon})}{Kp(1-p)\log(\dfrac{2}{p(1-p)})}\cdot P_p(A)\cdot(1-P_p(A)) \tag{4.1.3}$$

を得る．よって証明終了．

(4.1.3) は $p\in[0,1]$ をとめて $n\to\infty$ とするとき，$\varepsilon\to 0$ となる状況で考えると，$P_p(A)$ が 0 からも 1 からも離れていればその微分 $\frac{d}{dp}P_p(A)$ が発散することを意味している．

$P_p(A)$ が単調増加だから $\varepsilon\to 0$ が p について一様に成り立てば，$P_p(A)$ が 0 からも 1 からも一定距離離れている p はただ 1 つしかないことが分かる．

もう少し明示的にこのことを主張したのが次の系である．

系 4.3 $\varepsilon' = \sup\limits_{0\le p\le 1}\sup\limits_{1\le i\le n} P_p(A_i)$ とおくと，ある定数 $K'>0$ が n, p によらず存在して，$p_1<p_2$ に対して常に

$$P_{p_1}(A)(1-P_{p_2}(A)) \le (\varepsilon')^{(p_2-p_1)K'}. \tag{4.1.4}$$

(4.1.4) より $\varepsilon'\to 0$ が示せれば，$P_{p_1}(A)\to 0$ か $P_{p_2}(A)\to 1$ かのどちらかが成り立たなくてはならないことが分かる．

《証明》

$g(x)=\log\dfrac{x}{1-x}$ に対して系 4.2 から，

$$\frac{d}{dp}(g(P_p(A))) = \frac{1}{P_p(A)(1-P_p(A))}\cdot\frac{d}{dp}P_p(A)$$
$$\ge \frac{1}{P_p(A)(1-P_p(A))}\cdot\frac{\log\dfrac{1}{\varepsilon}}{Kp(1-p)\log\dfrac{2}{p(1-p)}}\cdot P_p(A)(1-P_p(A))$$
$$= \frac{\log\dfrac{1}{\varepsilon}}{Kp(1-p)\log\dfrac{2}{p(1-p)}}$$

となる．

ここで，$p(1-p)=-(p-\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{1}{4}\le\dfrac{1}{4}$ であるから，定数 $K'>0$ が n,p に依存せずに取れて上式の右辺は，

$$\frac{\log\dfrac{1}{\varepsilon'}}{Kp(1-p)\cdot\log\dfrac{2}{p(1-p)}} \ge \frac{\log\dfrac{1}{\varepsilon'}}{K'}.$$

これより，

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dp} g\Big(P_p(A)\Big) \geq \frac{\log 1\varepsilon'}{K'} \\ \Leftrightarrow\ & g\Big(P_{p_2}(A))\Big) - g\Big(g(P_{p_1}(A))\Big) \geq \frac{p_2-p_1}{K'}\cdot\log\frac{1}{\varepsilon'}. \end{aligned}$$

ところが，$x_i = P_{p_i}(A), i=1,2$ とするとき，

$$\begin{aligned} x_1(1-x_2) &\leq \frac{x_1}{1-x_1}\cdot\frac{1-x_2}{x_2} \\ &= e^{\log\frac{x_1}{1-x_1}}\cdot e^{\log\frac{1-x_2}{x_2}} \\ &= \exp\{g(x_1)-g(x_2)\} \\ &\leq \exp\Big\{-\frac{p_2-p_1}{K'}\cdot\log\frac{1}{\varepsilon'}\Big\} \\ &= \Big(e^{\log\frac{1}{\varepsilon'}}\Big)^{-\frac{p_2-p_1}{K'}} \\ &= \Big(\varepsilon'\Big)^{\frac{p_2-p_1}{K'}} \\ &\leq (\varepsilon')^{(p_2-p_1)K'} \end{aligned}$$

ゆえに，$P_{p_1}(A)(1-P_{p_2}(A)) \leq (\varepsilon')^{(p_2-p_1)K'}$ を得る．

定理 4.4　ある定数 $K>0$ が n,p に依存せず存在して，任意の Ω_n 上の関数 f で $E_p(f)=0$ を満たすものについて

$$||f||_2^2 \leq K\log\frac{2}{p(1-p)}\sum_{i=1}^{n}\frac{||U_if||_2^2}{\log[e||U_if||_2/||U_if||_1]} \tag{4.1.5}$$

ただし，$||\cdot||_r$ は $L_r(P_p)$-ノルムを表し，

$$U_if(\omega) = [(1-p)\omega(i)+p(1-\omega(i))][f(\omega)-f(\omega^i)].$$

ω^i は i で ω の状態を 0 と 1 を入れ替えてそれ以外は ω と同じ配置とする．つまり，

$$\omega^i(j)=\omega(j)\quad(j\neq i)\ ,\ \omega^i(i)=1-\omega(i).$$

これで定理 4.1 の証明の準備ができた．

《定理 4.1 の証明》A を単調増加な事象とし，$f(\omega)=1_A(\omega)-P_p(A)$ に対して定理 4.4 を使う．

$$U_if(\omega) = [(1-p)\omega(i)+p(1-\omega(i))][f(\omega)-f(\omega^i)],$$

$$\begin{aligned} f(\omega)-f(\omega^i) &= 1_A(\omega)-P_p(A)-\Big(1_A(\omega^i)-P_p(A)\Big) \\ &= 1_A(\omega)-1_A(\omega^i) \end{aligned}$$

だから，

$$U_if(\omega) = [(1-p)\omega(i)+p(1-\omega(i))][1_A(\omega)-1_A(\omega)]$$

とでき，

1. $\omega(i)=1$ のとき

$$U_i f(\omega) = (1-p)\Big[1_A(\omega_1^i) - 1_A(\omega_0^i)\Big] = \Big(\omega(i)-p\Big)\Big[1_A(\omega_1^i) - 1_A(\omega_0^i)\Big]$$

2. $\omega(i)=0$ のとき

$$U_i f(\omega) = p\Big[1_A(\omega_0^i) - 1_A(\omega_1^i)\Big] = \Big(\omega(i)-p\Big)\Big[1_A(\omega_1^i) - 1_A(\omega_0^i)\Big]$$

以上より，

$$U_i f(\omega) = \Big(\omega(i)-p\Big)\Big[1_A(\omega_1^i) - 1_A(\omega_0^i)\Big].$$

また，

$$\begin{aligned}
||U_i f(\omega)||_1 &= \int_{\Delta_i A} |U_i f(\omega)| dp \\
&= \int_{\Delta_i A \cap \{\omega(i)=1\}} |1-p| dp + \int_{\Delta_i A \cap \{\omega(i)=0\}} |p| dp \\
&= (1-p)\int_{\Delta_i A \cap \{\omega(i)=1\}} dp + p\int_{\Delta_i A \cap \{\omega(i)=0\}} dp \\
&= (1-p)\cdot P_p(\Delta_i A \cap \{\omega(i)=1\}) + p \cdot P_p(\Delta_i A \cap \{\omega(i)=0\}) \\
&= (1-p)P_p(\Delta_i A)\cdot p + pP_p(\Delta_i A)\cdot(1-p) \\
&= 2p(1-p)P_p(\Delta_i A) \\
&= 2(1-p)P_p(A_i),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
||U_i f(\omega)||_2{}^2 &= \int_{\Delta_i A} |U_i f(\omega)|^2 dp \\
&= \int_{\Delta_i A \cap \{\omega(i)=1\}} |1-p|^2 dp + \int_{\Delta_i A \cap \{\omega(i)=0\}} |p|^2 dp \\
&= (1-p)^2\int_{\Delta_i A \cap \{\omega(i)=1\}} dp + p^2\int_{\Delta_i A \cap \{\omega(i)=0\}} dp \\
&= (1-p)^2\cdot P_p(\Delta_i A \cap \{\omega(i)=1\}) + p^2 \cdot P_p(\Delta_i A \cap \{\omega(i)=0\}) \\
&= (1-p)^2 P_p(\Delta_i A)\cdot p + p^2 P_p(\Delta_i A)\cdot(1-p) \\
&= p(1-p)P_p(\Delta_i A) \\
&= (1-p)P_p(A_i).
\end{aligned}$$

そして，ノルムの定義から以下のような変形ができることに注意

$$\begin{aligned}
||1_A(\omega) - P_p(A)||_2^2 &= \int |1_A(\omega) - P_p(A)|^2 dP \\
&= \int \Big\{1_A(\omega)^2 - 2P_p(A)\cdot P_p(A)\cdot 1_A(\omega) + P_p(A)^2\Big\} dP \\
&= \int (1_A(\omega))^2 dP - 2\int P_p(A) 1_A(\omega) dP + \int P_p(A)^2 dP \\
&= \int 1_A(\omega) dP - 2P_p(A)\int 1_A(\omega) dP + P_p(A)^2 \int dP \\
&= P_p(A) - 2P_p(A)\cdot P_p(A) + P_p(A)^2 \\
&= P_p(A) - P_p(A)^2 \\
&= P_p(A)(1-P_p(A))
\end{aligned}$$

これらを (4.1.5) へ代入すると,

$$\begin{aligned}
P_p(A)(1-P_p(A)) &= ||1_A(\omega)-P_p(A)||_2^2 \\
&\leq K\log\frac{2}{p(1-p)}\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-p)P_p(A_i)}{\log[e\sqrt{(1-p)P_p(A_i)}/2(1-p)P_p(A_i)]} \\
&= K\log\frac{2}{p(1-p)}\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-p)P_p(A_i)}{\log\frac{e}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{(1-p)P_p(A_i)}} \\
&\leq 2K(1-p)\log\frac{2}{p(1-p)}\sum_{i=1}^{n}\frac{P_p(A_i)}{\log\left\{\frac{1}{(1-p)\cdot P_p(A_i)}\right\}}
\end{aligned}$$

ただし，3 つめの等号，4 つめの不等号について次のように考えた．

$$\begin{aligned}
\log\frac{e\sqrt{(1-p)\cdot P_p(A_i)}}{2(1-p)\cdot P_p(A_i)} &= \log\frac{e}{2\sqrt{(1-p)\cdot P_p(A_i)}} \\
&= \log\frac{e}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-p)P_p(A_i)}} \\
&= \log\frac{e}{2}+\frac{1}{2}\log\left\{\frac{1}{(1-p)P_p(A_i)}\right\} \\
&\geq \frac{1}{2}\log\left\{\frac{1}{(1-p)P_p(A_i)}\right\}
\end{aligned}$$

である．

4.2 sharp threshold theorem の証明

定理 4.1 は証明することができたが，その際，定理 4.4 を用いた．ここでは定理 4.4 の証明を考えていく．

定理の証明に入る前にいくつか準備をしていく．

正規直交基 $\{r_S : S\subset\{1,2,\cdots,n\}\}$，$1\leq n$ に対して，

$$r_i(\omega)=\sqrt{\frac{1-p}{p}}\omega(i)-\sqrt{\frac{p}{1-p}}(1-\omega(i))$$

とおく．

このとき，

$$\begin{aligned}
E_p(r_i) &= \int r_i dP \\
&= \int_{\{\omega(i)=1\}} r_i dP+\int_{\{\omega(i)=0\}} r_i dP \\
&= \sqrt{\frac{1-p}{p}}\int_{\{\omega(i)=1\}} dP-\sqrt{\frac{p}{1-p}}\int_{\{\omega(i)=0\}} dP \\
&= p\sqrt{\frac{1-p}{p}}-(1-p)\sqrt{\frac{p}{1-p}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

また，同様にして $E_p({r_i}^2)=1$ も示すことができる．これより，

$$E_p(r_i)=0,\ E_p({r_i}^2)=1$$

であることがわかる．$S \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ のとき

$$r_S(\omega) = \prod_{j \in S} r_j(\omega)\ ,\ r_\emptyset = 1$$

と定めると，$\{r_S(\omega) : S \subset \{1, 2, \cdots, n\}\}$ は $L^2(P_p)$ の正規直交基となる．

$\{r_S : S \subset \{1, 2, \cdots, n\}\}$ は $L_2(P_p)$ の正規直交基であるか調べよう．

正規直交基であることを示すために次の二つのことを示す．

1. 大きさが 1

   $||r_S||_2^2$ を計算する．

$$\begin{aligned}||r_S||_2^2 &= \int |\prod_{j \in S} r_j(\omega)|^2 dP \\ &= \prod_{j \in S} \int r_j(\omega)^2 dP \\ &= \prod_{j \in S} 1\ =\ 1\end{aligned}$$

   よって大きさ 1

2. 互いに直交すること

$$\begin{aligned}||r_S \times r_{S'}|| &= \int |r_S \times r_{S'}| dP \\ &= \int \prod_{j \in S} r_j \times \prod_{j \in S'} r_j dP \\ &= \int \Big(r_{S \cap S'}\Big)^2 dP \times \int r_{S \setminus (S \cap S')} dP \times \int r_{S' \setminus (S \cap S')} dP \\ &= 1 \times 0 \times 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

よって互いに直交する．

これより $\{r_S : S \subset \{\ 1, 2, \cdots, n\}\}$ は $L_2(P_p)$ の正規直交基である．

そして，$g = \sum_S a_S r_S$ に対して $a_\emptyset = \int_{\Omega_n} g(\omega) P_p(d\omega) = 0$ のとき (つまり，$E_p(g) = 0$ のとき)

$$M(g)^2 = \sum_{S \subset \{1, 2, \cdots, n\}} \frac{{a_S}^2}{|S|} \tag{4.2.1}$$

とおく．

また，ここで

$$U_i r_j = \delta_{i,j} r_i$$

が成り立つ．

なぜなら，

$$U_i r_j(\omega) = \Big[(1-p)\omega(i) + p(1-\omega(i))\Big]\Big[r_j(\omega) - r_j(\omega^i)\Big]$$
$$r_j(\omega) - r_j(\omega^i) = \sqrt{\frac{1-p}{p}}\Big(\omega(j) - \omega^i(j)\Big) - \sqrt{\frac{p}{1-p}}\Big(\omega^i(j) - \omega(j)\Big)$$

なので，$U_i r_j$ を場合を分けて計算すると

(i) $j=i$ のとき

$$
\begin{aligned}
U_i r_i(\omega) &= \Big[(1-p)\omega(i)+p(1-\omega(i))\Big]\Big[r_i(\omega)-r_i(\omega^i)\Big] \\
&= \Big[(1-p)\omega(i)+p(1-\omega(i))\Big]\Big[\sqrt{\frac{1-p}{p}}\Big(2\omega(i)-1\Big)-\sqrt{\frac{p}{1-p}}\Big(1-2\omega(i)\Big)\Big] \\
&= \Big[(1-p)\omega(i)+p(1-\omega(i))\Big]\Big(2\omega(i)-1\Big)\Big(\sqrt{\frac{1-p}{p}}+\sqrt{\frac{p}{1-p}}\Big)
\end{aligned}
$$

$\omega(i)=1$ のとき

$$
U_i r_i(\omega)=\sqrt{\frac{1-p}{p}}=\sqrt{\frac{1-p}{p}}\omega(i)-\sqrt{\frac{p}{1-p}}(1-\omega(i))=r_i(\omega)
$$

$\omega(i)=0$ のとき

$$
U_i r_i(\omega)=-\sqrt{\frac{p}{1-p}}=\sqrt{\frac{1-p}{p}}\omega(i)-\sqrt{\frac{p}{1-p}}(1-\omega(i))=r_i(\omega)
$$

ゆえに，$U_i r_i(\omega)=r_i(\omega)$

(ii) $j\neq i$ のとき

$$
\begin{aligned}
U_i r_j(\omega) &= \Big[(1-p)\omega(i)+p(1-\omega(i))\Big]\Big[r_j(\omega)-r_j(\omega^i)\Big] \\
&= \Big[(1-p)\omega(i)+p(1-\omega(i))\Big]\Big[\sqrt{\frac{1-p}{p}}\Big(\omega(j)-\omega^i(j)\Big)-\sqrt{\frac{p}{1-p}}\Big(\omega^i(j)-\omega(j)\Big)\Big] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

以上より，$U_i r_j=\delta_{i,j}r_i$.

このことに注意すると，

$$
U_i r_S=\begin{cases} r_S, & i\in S \text{ のとき} \\ 0, & i\notin S \text{ のとき} \end{cases}
$$

が成り立つ.

$U_i g = \sum_{i \in S} a_S r_S$ そして，$M(U_i g)^2 = \sum_{i \in S} \dfrac{{a_S}^2}{|S|}$ となり，これより

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} M(U_i g)^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{S \ni i} \frac{{a_S}^2}{|S|} \\
&= \sum_{S} \sum_{i \in S} \frac{{a_S}^2}{|S|} \\
&= \sum_{S} \frac{{a_S}^2}{|S|} \sum_{i \in S} 1 \\
&= \sum_{S} \frac{{a_S}^2}{|S|} \cdot S \\
&= \sum_{S} {a_S}^2 \\
&= \sum_{S} {a_S}^2 \cdot \int {r_S}^2 dP \ (\because \int {r_S}^2 dP = 1 \text{ より}) \\
&= \int \left(\sum a_S r_S \right)^2 dP = ||g||_2^2 \qquad (4.2.2)
\end{aligned}$$

を得る．

補題 4.5　$q \geq 2$ としておく．$\lambda = P_{1/2}$ と略記し，$S \subset \{1, \ldots, n\}$ に対して

$$w_S(\omega) = \prod_{i \in S} (2\omega(i) - 1), \quad w_\phi = 1 \qquad (4.2.3)$$

とおくと，これは $L_2(\lambda)$ の正規直交基だが,

$$|| \sum_{|S|=k} b_S w_S ||_{L_p(\lambda)} \leq (q-1)^{k/2} \sqrt{\sum_{|S|=k} b_S^2} \qquad (4.2.4)$$

が $1 \leq k \leq n$ で成り立つ．

本論文では補題 4.5 は認めてこれを使って定理 4.4 を証明していく．

まず，次の補題を示す．

補題 4.6　$q \geq 2, \theta = 1/\sqrt{p(1-p)}$ のとき，任意の $1 \geq k \geq n$ と任意の実数列 $\{a_S; S \subset \{1, 2, \ldots, n\}, |S| = k\}$ に対して，

$$|| \sum_{|S|=k} a_S r_S ||_q \leq (q-1)^{k/2\ \theta^k} (\sum_{|S|=k} {a_S}^2)^{1/2} \qquad (4.2.5)$$

《証明》

$G = \Omega_n \times \Omega_n$ 上で確率測度 $P_p \times P_p$ を考え，$H = G \times \Omega_n$ で，$P_p \times P_p \times \lambda$ を考える．$S \subset \{1, 2, \cdots, n\}$ に対して G 上の関数 g_S と H 上の関数 h_S を，

$$g_S(\omega, \eta) = \prod_{j \in S} \Big\{ r_j(\omega) - r_j(\eta) \Big\}$$

$$h_S(\omega, \eta, \zeta) = \prod_{j \in S} \Big\{ r_j(\omega) - r_j(\eta) \Big\} w_j(\zeta)$$

とかく．関数 h_S で ζ を固定して，G の関数とみたものを $g_{S,\zeta}$ とかく．つまり

$$g_{S,\zeta}(\omega, \eta) = h_S(\omega, \eta, \zeta)$$

とする．

最初に，$b_S = a_S g_S(\omega, \eta)$ として，補題 4.5 を使うことで，

$$
\begin{aligned}
(\text{補題 4.5 の左辺}) &= \Big\| \sum_{|S|=k} b_S w_S \Big\|_{L_q(\lambda)} \\
&= \Big\| \sum_{|S|=k} a_S g_S(\omega, \eta) \cdot w_S \Big\|_{L_q(\lambda)} \\
&= \Big(\int_{\Omega_n} | \sum_{|S|=k} a_S g_S(\omega, \eta) \cdot w_S(\zeta) |^q \cdot \lambda(d\zeta) \Big)^{\dfrac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

また，

$$
\begin{aligned}
(\text{補題 4.5 の右辺}) &= (q-1)^{\frac{k}{2}} \sqrt{\sum_{|S|=k} {b_S}^2} \\
&= (q-1)^{\frac{k}{2}} \sqrt{\sum_{|S|=k} {a_S}^2 {g_S}^2(\omega, \eta)}
\end{aligned}
$$

そして，両辺を 2 乗することで次の不等式を得る．

$$
\int_{\Omega_n} \Big| \sum_{|S|=k} a_S g_S(\omega, \eta) \cdot w_S(\zeta) \Big|^q \cdot \lambda(d\zeta) \leq (q-1)^{\frac{qk}{2}} \cdot \Big(\sum_{|S|=k} {a_S}^2 {g_S}^2(\omega, \eta) \Big)^{\frac{q}{2}}. \tag{4.2.6}
$$

ここで，

$$
|r_j(\omega) - r_j(\eta)| \leq \theta
$$

に注意すると，

$$
{g_S}^2(\omega, \eta) \leq \theta^{2k}
$$

を得る．

なぜなら，
$\theta = \dfrac{1}{\sqrt{p(1-p)}}$ であるから，

$$
\begin{aligned}
r_j(\omega) - r_j(\eta) &= \sqrt{\frac{1-p}{p}}\omega(j) - \sqrt{\frac{p}{1-p}}(1-\omega(j)) - \Big\{ \sqrt{\frac{1-p}{p}}\eta(j) - \sqrt{\frac{p}{1-p}}(1-\eta(j)) \Big\} \\
&= \frac{\omega(j) - p}{\sqrt{p(1-p)}} - \frac{\eta(j) - p}{\sqrt{p(1-p)}} \\
&= \frac{\omega(j) - \eta(j)}{\sqrt{p(1-p)}}.
\end{aligned}
$$

ゆえに，

$$
\Big| r_j(\omega) - r_j(\eta) \Big| = \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} |\omega(j) - \eta(j)| \leq \theta
$$

であり，また

$|r_j(\omega) - r_j(\eta)| \leq \theta$ より

$$
\begin{aligned}
g_S(\omega, \eta) &= \prod_{j \in S} \Big\{ r_j(\omega) - r_j(\eta) \Big\} \leq \prod_{j \in S} \theta = \theta^k, \\
{g_S}^2(\omega, \eta) &\leq (\pi_{j \in S} \theta)^2 = \theta^2
\end{aligned}
$$

であるからである．これを (4.2.6) に代入して，

$$\int_{\Omega_n}\Big|\sum_{|S|=k} a_S\cdot g_S(\omega,\eta)\cdot w_S(\zeta)\Big|^q\cdot P_{\frac{1}{2}}(d\zeta)\le\theta^{qk}\cdot(q-1)^{\dfrac{kq}{2}}\cdot\Big(\sum_{|S|=k}{a_S}^2\Big)$$

そして ω,η について，両辺を $P_p\times P_p$ で積分すると

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_{\Omega_n\times\Omega_n}\int_{\Omega_n}|\sum_{|S|=k} a_S\cdot g_S(\omega,\eta)\cdot w_S(\zeta)|^q P_{\frac{1}{2}}(d\zeta)\cdot P_p(d\omega)\cdot P_p(d\eta)\\
&= \int_{\Omega_n\times\Omega_n\times\Omega_n}|\sum_{|S|=k} a_S\cdot g_S(\omega,\eta)\cdot w_S(\zeta)|^q P_{\frac{1}{2}}(d\zeta)\cdot P_p(d\omega)\cdot P_p(d\eta)\\
&= \Big|\Big|\sum_{|S|=k} a_S\cdot g_S(\omega,\eta)\cdot w_S(\zeta)\Big|\Big|^q_{L_p(\lambda\times P_p\times P_p)}\\
&= \Big|\Big|\sum_{|S|=k} a_S\cdot h_S\Big|\Big|^q_{L_p(P_p\times P_p\times\lambda)}\\
(\text{右辺}) &= \int_{\Omega_n\times\Omega_n}\theta^{kq}\cdot(q-1)^{\frac{kq}{2}}\cdot\big(\sum_{|S|=k}{a_S}^2\big)^{\frac{q}{2}}P_p(d\omega)\cdot P_p(d\eta)\\
&= \theta^{kq}\cdot(q-1)^{\frac{kq}{2}}\cdot\big(\sum_{|S|=k}{a_S}^2\big)^{\frac{q}{2}}\int_{\Omega_n\times\Omega_n}P_p(d\omega)\cdot P_p(d\eta)\\
&= \theta^{kq}\cdot(q-1)^{\frac{kq}{2}}\cdot\big(\sum_{|S|=k}{a_S}^2\big)^{\frac{q}{2}}
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\Big|\Big|\sum_{|S|=k} a_S\cdot h_S\Big|\Big|^q_{L_p(P_p\times P_p\times\lambda)}\le\theta^{kq}\cdot(q-1)^{\frac{kq}{2}}\cdot\big(\sum_{|S|=k}{a_S}^2\big)^{\frac{q}{2}}\tag{4.2.7}$$

を得る．

今，ω,η,ζ に対して

$$\begin{aligned}
U &= \{j;\omega(j)=\eta(j)\}\\
V_+ &= V_+(\zeta)=\{j;\omega(j)-\eta(j)=w_j(\zeta)\}\\
V_- &= V_-(\zeta)=\{j;\omega(j)-\eta(j)=-w_j(\zeta)\}
\end{aligned}$$

と書くと，

$$U\cup V_+\cup V_-=\{1,2,\ldots,n\}$$

で，これらは互いに素なので $h_S=\pi_{j\in S}\{r_j(\omega)-r_j(\eta)\}\cdot w_j(\zeta)$ に注意して

$$\begin{aligned}
\sum_{|S|=k} a_S h_S &= \sum_{|S|=k,S\subset U} a_S h_S+\sum_{|S|=k,s\subset V_+\cup V_-} a_S h_S\\
&= \sum_{|S|=k,S\subset U} a_S\cdot\prod_{j\in S}\{r_j(\omega)-r_j(\eta)\}\cdot w_j(\zeta)+\sum_{|S|=k,S\subset V_+\cup V_-} a_S\cdot\prod_{j\in S}\{r_j(\omega)-r_j(\eta)\}\cdot w_j(\zeta)\\
&= 0+\sum_{|S|=k,S\subset V_+\cup V_-} a_S\cdot\prod_{j\in S}\{r_j(\omega)-r_j(\eta)\}\cdot w_j(\zeta)\\
&= \sum_{|S|=k,S\subset V_+\cup V_-} a_S\cdot\prod_{j\in S}\{r_j(\omega)-r_j(\eta)\}\cdot w_j(\zeta).
\end{aligned}$$

次に，$j \in S$ について場合分けをし $\{r_j(\omega) - r_j(\eta)\} \cdot w_j(\zeta)$ を実際に計算してみる．

$$\{r_j(\omega) - r_j(\eta)\} \cdot w_j(\zeta) = \frac{\omega(j) - \eta(j)}{\sqrt{p(1-p)}} \cdot (2\zeta(j) - 1) = \theta \cdot (\omega(j) - \eta(j)) \cdot (2\zeta(j) - 1)$$

なので，

(i) $j \in V_+$ のとき

$$\omega(j) - \eta(j) = w_j(\zeta) = 2\zeta(j) - 1$$

である．

これを満たす $\big(\omega(j), \eta(j), \zeta(j)\big)$ の組とそのときの，$\{r_j(\omega) - r_j(\eta)\} \cdot w_j(\zeta)$ の値は以下のとおり．

$(\omega(j), \eta(j), \zeta(j)) = (1, 0, 1)$ このとき，$\{r_j(\omega) - r_j(\eta)\} \cdot w_j(\zeta) = \theta$

$(\omega(j), \eta(j), \zeta(j)) = (0, 1, 0)$ このとき，$\{r_j(\omega) - r_j(\eta)\} \cdot w_j(\zeta) = \theta$

(ii) $j \in V_-$ のとき

$$\omega(j) - \eta(j) = -w_j(\zeta) = -2\zeta(j) + 1$$

である．

これを満たす $\big(\omega(j), \eta(j), \zeta(j)\big)$ の組とそのときの，$\{r_j(\omega) - r_j(\eta)\} \cdot w_j(\zeta)$ の値は以下のとおり．

$(\omega(j), \eta(j), \zeta(j)) = (1, 0, 0)$ このとき，$\{r_j(\omega) - r_j(\eta)\} \cdot w_j(\zeta) = -\theta$

$(\omega(j), \eta(j), \zeta(j)) = (0, 1, 1)$ このとき，$\{r_j(\omega) - r_j(\eta)\} \cdot w_j(\zeta) = -\theta$

(i)(ii) より，

$$h_S = \pi_{j \in S}\{r_j(\omega) - r_j(\eta)\} \cdot w_j(\zeta) = \theta^k \cdot (-1)^{|S \cap V_-|}$$

以上より

$$\sum_{|S|=k} a_S h_S = \sum_{|S|=k, S \subset V_+ \cup V_-} a_S \cdot \theta^k \cdot (-1)^{|S \cap V_-|}$$

両辺の絶対値の q 乗を ω, η について $P_p \times P_p$ で積分する．

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \int_{\Omega_n \times \Omega_n} \Big| \sum_{|S|=k} a_S \cdot h_S(\omega, \eta, \zeta) \Big|^q P_p(d\omega) P_p(d\eta) \\
&= \Big\| \sum_{|S|=k} a_S \cdot g_{S,\zeta} \Big\|^q_{L_q(P_p \times P_p)}, \\
(\text{右辺}) &= \int_{\Omega_n \times \Omega_n} \Big| \sum_{|S|=k, s \subset V_+ \cup V_-} a_S \cdot (-1)^{|S \cap V_-|} \cdot \theta^k \Big|^q P_p(d\omega) P_p(d\eta) \\
&= \int_{\Omega_n \times \Omega_n} \Big| \sum_{|S|=k, s \subset V_+ \cup V_-} a_S \cdot (-1)^{|S \cap V_-|} \Big|^q \cdot \theta^{kq} \cdot P_p(d\omega) P_p(d\eta) \\
&= \sum_{U \subset \{1,\dots,n\}} \sum_{V_- \subset \{1,\dots,n\} \setminus U} \Big| \sum_{|S|=k, S \subset V_+ \cup V_-} a_S (-1)^{|S \cap V_-|} \Big|^q \theta^{kq} \times \big(p^2 + (1-p)^2\big)^{|U|} \times \big(p(1-p) + (1-p)p\big)^{n-|U|}.
\end{aligned}$$

ゆえに，

$$(4.2.8)\qquad \Big\|\sum_{|S|=k} a_S\cdot g_{S,\zeta}\Big\|^q_{L_q(P_p\times P_p)} = \sum_{U\subset\{1,\dots,n\}}\ \sum_{V_-\subset\{1,\dots,n\}\setminus U}\Big|\sum_{|S|=k, S\subset V_+\cup V_-} a_S(-1)^{|S\cap V_-|}\Big|^q\theta^{kq} \times\big(p^2+(1-p)^2\big)^{|U|}\times\big(p(1-p)+(1-p)p\big)^{n-|U|}$$

を得る．このことから，(4.2.8) の左辺が ζ によらないということがわかる．したがって ζ を固定する．

$$\Big\|\sum_{|S|=k} a_S\cdot g_{S,\zeta}\Big\|^q_{L_q(P_p\times P_p)} = \Big\|\sum_{|S|=k} a_S\cdot h_S(\omega,\eta,\zeta)\Big\|^q_{L_q(P_p\times P_p)}$$

であることに注意して，(4.2.8) の左辺を ζ について $\lambda(=P_{\frac{1}{2}})$ で積分すると

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_n}\Big\|\sum_{|S|=k} a_S\cdot h_S(\omega,\eta,\zeta)\Big\|^q_{L_q(P_p\times P_p)} P_{\frac{1}{2}}(d\zeta) &= \int_{\Omega_n}\int_{\Omega_n\times\Omega_n}\Big|\sum_{|S|=k} a_S\cdot h_S(\omega,\eta,\zeta)\Big|^q\cdot P_p(d\omega)\cdot P_p(d\eta)\cdot P_{\frac{1}{2}}(d\zeta)\\
&= \int_{\Omega_n\times\Omega_n}\Big|\sum_{|S|=k} a_S\cdot g_S(\omega,\eta)\Big|^q\cdot P_p(d\omega)\cdot P_p(d\eta)\cdot\int_{\Omega_n} P_{\frac{1}{2}}(d\zeta)\\
&= \int_{\Omega_n\times\Omega_n}\Big|\sum_{|S|=k} a_S\cdot g_S(\omega,\eta)\Big|^q\cdot P_p(d\omega)\cdot P_p(d\eta)\\
&= \Big\|\sum_{|S|=k} a_S\cdot g_S(\omega,\eta)\Big\|^q_{L_q(P_p\times P_p)}
\end{aligned}$$

また，上の等式の左辺は次のように変形することができる．

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_n}\Big\|\sum_{|S|=k} a_S\cdot h_S(\omega,\eta,\zeta)\Big\|^q_{L_q(P_p\times P_p)} P_{\frac{1}{2}}(d\zeta) &= \int_{\Omega_n}\int_{\Omega_n\times\Omega_n}\Big|\sum_{|S|=k} a_S\cdot h_S(\omega,\eta,\zeta)\Big|^q\cdot P_p(d\omega)\cdot P_p(d\eta)\cdot P_{\frac{1}{2}}(d\zeta)\\
&= \Big\|\sum_{|S|=k} a_S h_S(\omega,\eta,\zeta)\Big\|^q_{L_q(P_p\times P_p\times\lambda)}
\end{aligned}$$

よって，

$$\Big\|\sum_{|S|=k} a_S h_S(\omega,\eta,\zeta)\Big\|^q_{L_q(P_p\times P_p\times\lambda)} = \Big\|\sum_{|S|=k} a_S\cdot g_S(\omega,\eta)\Big\|^q_{L_q(P_p\times P_p)}$$

がわかる．ゆえに，(4.2.7) から

$$\Big\|\sum_{|S|=k} a_S\cdot g_S(\omega,\eta)\Big\|^q_{L_q(P_p\times P_p)} \le \theta^{kq}\cdot(q-1)^{\frac{kq}{2}}\cdot\Big(\sum_{|S|=k} {a_S}^2\Big)^{\frac{q}{2}}$$

がわかり，上の等式の両辺は正なので q 乗をとると

$$\Big\|\sum_{|S|=k} a_S\cdot g_S(\omega,\eta)\Big\|_{L_q(P_p\times P_p)} \le \theta^{k}\cdot(q-1)^{\frac{k}{2}}\cdot\Big(\sum_{|S|=k} {a_S}^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

までわかる．最後は，

$$
\begin{aligned}
\sum_{|S|=k} a_S r_S(\omega) &= \sum_{|S|=k} a_S \cdot \prod_{j\in S} r_j(\omega) \\
&= \sum_{|S|=k} a_S \cdot \prod_{j\in S}\Big(r_j(\omega) - \int_{\Omega_n} r_j(\eta)P_p(d\eta)\Big) \quad (\because\ E_p(r_j)=0 \text{ より })\\
&= \sum_{|S|=k} a_S \cdot \prod_{j\in S}\Big(\int_{\Omega_n}\{r_j(\omega)-r_j(\eta)\}P_p(d\eta)\Big)\\
&= \sum_{|S|=k} a_S \int_{\Omega_n} \Pi_{j\in S}\{r_j(\omega)-r_j(\eta)\}P_p(d\eta)\\
&= \sum_{|S|=k} a_S \int_{\Omega_n} g_S(\omega,\eta)P_p(d\eta)\\
&= \int_{\Omega_n}\sum_{|S|=k} a_S g_S(\omega,\eta)P_p(d\eta)
\end{aligned}
$$

であることから，イェンゼンの不等式により

$$
\begin{aligned}
\Big|\Big|\sum_{|S|=k} a_S r_S\Big|\Big|_{L_q(P_p)}^q &= \Big|\Big|\int_{\Omega_n}\sum_{|S|=k} a_S g_S(\omega,\eta)P_p(d\eta)\Big|\Big|_{L_q(P_p)}^q\\
&= \int_{\Omega_n}\Big|\int_{\Omega_n}\sum_{|S|=k} a_S g_S(\omega,\eta)P_p(d\eta)\Big|^q P_p(d\omega)\\
&\leq \int_{\Omega_n\times\Omega_n}\Big|\sum_{|S|=k} a_S g_S(\omega,\eta)\Big|^q P_p(d\omega)P_p(d\eta)\\
&= \Big|\Big|\sum_{|S|=k} a_S g_S\Big|\Big|_{L_q(P_p\times P_p)}^q
\end{aligned}
$$

であるので，

$$
\begin{aligned}
&\Big|\Big|\sum_{|S|=k} a_S r_S\Big|\Big|_{L_q(P_p)}^q \leq \Big|\Big|\sum_{|S|=k} a_S g_S\Big|\Big|_{L_q(P_p\times P_p)}^q\\
\Longleftrightarrow &\Big|\Big|\sum_{|S|=k} a_S r_S\Big|\Big|_{L_q(P_p)} \leq \Big|\Big|\sum_{|S|=k} a_S g_S\Big|\Big|_{L_q(P_p\times P_p)}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \leq \theta^k\cdot(q-1)^{\frac{k}{2}}\cdot\Big(\sum_{|S|=k} {a_S}^2\Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

よって補題 4.6 は示された．

系 4.7 g を Ω_n 上の関数として，$\{a_S\}$ を

$$a_S = \int_{\Omega_n} r_S(\omega)g(\omega)P_p(d\omega)$$

と定めると，

$$\sum_{|S|=k} a_S^2 \leq (q-1)^k\theta^{2k}||g||_{q'}^2. \tag{4.2.9}$$

ただし，q' は $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ を満たす．

《証明》

a_S の定義から

$$\begin{aligned}\sum_{|S|=k} {a_S}^2 &= \sum_{|S|=k} \Big(\int_{\Omega_n} r_S(\omega) g(\omega) P_p(d\omega) \Big) \cdot a_S \\ &= \int_{\Omega_n} \sum_{|S|=k} a_S r_S(\omega) g(\omega) P_p(d\omega) \\ &= \int_{\Omega_n} \cdot g(\omega) \cdot \Big(\sum_{|S|=k} a_S r_S(\omega) \Big) P_p(d\omega)\end{aligned}$$

右辺にヘルダーの不等式を使うと，

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_n} g(\omega) \Big(\sum_{|S|=k} a_S r_S(\omega) \Big) P_p(d\omega) &= \Big|\Big| g(\omega) \Big(\sum_{|S|=k} a_S r_S(\omega) \Big|\Big|_1 \\ &\le \Big|\Big| g(\omega) \Big|\Big|_{q'} \Big|\Big| \sum_{|S|=k} a_S r_S(\omega) \Big|\Big|_q\end{aligned}$$

さらに，この式の右辺は補題 4.6 により，

$$\Big|\Big| g(\omega) \Big|\Big|_{q'} \Big|\Big| \sum_{|S|=k} a_S r_S(\omega) \Big|\Big|_q \le \Big|\Big| g(\omega) \Big|\Big|_{q'} \cdot (q-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \theta^k \cdot \Big(\sum_{|S|=k} {a_S}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

以上より

$$\sum_{|S|=k} {a_S}^2 \le \Big|\Big| g(\omega) \Big|\Big|_{q'} \cdot (q-1)^{\frac{k}{2}} \cdot \theta^k \cdot \Big(\sum_{|S|=k} {a_S}^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

両辺を 2 乗して，$\sum_{|S|=k} {a_S}^2$ で割ると

$$\begin{aligned}&\Big(\sum_{|S|=k} {a_S}^2 \Big)^2 \le \Big|\Big| g(\omega) \Big|\Big|_{q'}^2 \cdot (q-1)^k \cdot \theta^{2k} \cdot \Big(\sum_{|S|=k} {a_S}^2 \Big) \\ \Longleftrightarrow &\sum_{|S|=k} {a_S}^2 \le \Big|\Big| g(\omega) \Big|\Big|_{q'}^2 \cdot (q-1)^k \cdot \theta^{2k}\end{aligned}$$

よって系 4.7 は示された．

4.2.1　sharp threshold theorem の証明:定理 4.4 の証明

補題 4.8　ある定数 $K > 0$ が n, p に依存せず存在して，任意の Ω_n 上の関数 f で $E_p(f) = 0$ を満たすものについて，

$$M(f)^2 \leq K \log \frac{2}{p(1-p)} \frac{||f||_2^2}{\log(e||f||_2/||f||_1)}. \tag{4.2.10}$$

《証明》

$f = \sum a_S r_S$ と書くと，仮定から $a_\emptyset = 0$ で $M(f)^2$ の定義 (4.2.1) から

$$M(f)^2 = \sum_{S \subset \{1,\cdots,n\}} \frac{{a_S}^2}{|S|}$$

(i) $1 \leq m \leq n$ のとき，系 4.7 より

$$\begin{aligned}
M(f)^2 &= \sum_{S \subset \{1,\cdots,n\}} \frac{{a_S}^2}{|S|} \\
&\leq \sum_{1 \leq |S| \leq m} \frac{{a_S}^2}{|S|} + \frac{1}{m+1} \sum_{|S|>m} {a_S}^2 \\
&\leq \sum_{1 \leq |S| \leq m} \frac{{a_S}^2}{|S|} + \frac{1}{m+1} ||f||_2^2 \\
&\leq 2 \cdot \frac{(2\theta^2)^m}{m} \cdot ||f||_{\frac{3}{2}}^2 + \frac{1}{m+1} ||f||_2^2 \\
&\leq \frac{1}{m+1} \Big(4 \cdot (2\theta^2)^m ||f||_{\frac{3}{2}}^2 + ||f||_2^2 \Big)
\end{aligned}$$

を得る．

(ii) $m \geq n$ のとき，系 4.7 より

$$\begin{aligned}
M(f)^2 &= \sum_{S \subset \{1,\cdots,n\}} \frac{{a_S}^2}{|S|} \\
&\leq \sum_{1 \leq |S| \leq n} \frac{{a_S}^2}{|S|} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{|S|=k} \frac{{a_S}^2}{|S|} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot \sum_{|S|=k} {a_S}^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot (2\theta^2)^k \cdot ||f||_{\frac{3}{2}}^2 \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} \cdot (2\theta^2)^k \cdot ||f||_{\frac{3}{2}}^2 + \frac{1}{m+1} ||f||_2^2 \\
&\leq 2 \cdot \frac{(2\theta^2)^m}{m} \cdot ||f||_{\frac{3}{2}}^2 + \frac{1}{m+1} ||f||_2^2 \\
&\leq \frac{1}{m+1} \Big(4 \cdot (2\theta^2)^m ||f||_{\frac{3}{2}}^2 + ||f||_2^2 \Big)
\end{aligned}$$

を得る．

ここで，特に $m = \max\{n \geq 0 : (2\theta^2)^m \cdot ||f||_{\frac{3}{2}}^2 \leq ||f||_2^2\}$ とおくと

$$m + 1 > \frac{2\log\big(||f||_2/||f||_{\frac{3}{2}}\big)}{\log 2\theta^2}$$

であり，一方で自明に $m+1 \geq 1 \geq \frac{2}{\log 2\theta^2}$ が成り立つので

$$\begin{aligned} m + 1 &\geq \frac{1}{2}\left[\frac{2\log(||f||_2/||f||_{\frac{3}{2}})}{\log 2\theta^2} + \frac{2}{\log 2\theta^2}\right] \\ &= \frac{\log\Big(e||f||_2/||f||_{\frac{3}{2}}\Big)}{\log 2\theta^2} \end{aligned}$$

これより，

$$M(f)^2 \leq \frac{K\ \big(\log 2\theta^2\big)\ ||f||_2^2}{\log\Big(e\,||f||_2\,/\,||f||_{\frac{3}{2}}\Big)} \tag{4.2.11}$$

となる．最後に右辺分母の $||f||_{\frac{3}{2}}$ を次の補題を使って評価する．

補題 4.9

$$\frac{||f||_2}{||f||_1} \leq \left(\frac{||f||_2}{||f||_{3/2}}\right)^3. \tag{4.2.12}$$

《証明》

証明すべき式は

$$||f||_{\frac{3}{2}}^3 \leq ||f||_1 \cdot ||f||_2^2$$

と同値である．

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) = ||f||_{\frac{3}{2}}^3 &= \left(\int_{\Omega_n} f^{\frac{3}{2}} P_p(d\omega)\right)^{\frac{2}{3}\times 3} \\ &= \left(\int_{\Omega_n} f^{\frac{3}{2}} P_p(d\omega)\right)^2 \\ &= ||f^{\frac{3}{2}}||_1^2 \end{aligned}$$

ここで，ヘルダーの不等式より

$$||f^{\frac{3}{2}}||_1 = ||f \cdot f^{\frac{1}{2}}||_1 \leq ||f||_2 \cdot ||f^{\frac{1}{2}}||_2$$

であることから，両辺を 2 乗して

$$||f^{\frac{3}{2}}||_1^2 \leq ||f||_2^2 \cdot ||f^{\frac{1}{2}}||_2^2$$

を得る．ここで上の不等式の (左辺) $= ||f||_{\frac{3}{2}}^3$ であることに注意．また，

$$||f^{\frac{1}{2}}||_2^2 = \left(\int_{\Omega_n} f^{\frac{1}{2}\times 2} \cdot P_p(d\omega)\right)^{\frac{1}{2}\times 2} = \int_{\Omega_n} f P_p(d\omega) = ||f||_1$$

なので，

$$||f||_{\frac{3}{2}}^3 \leq ||f||_2^2 \cdot ||f||_1$$

よって補題は証明された．

これを (4.2.11) に使うと

$$
\begin{aligned}
M(f)^2 &\le K\log\frac{2}{p(1-p)}\cdot\frac{||f||_2^2}{\log\left(e\cdot||f||_2/||f||_{\frac{3}{2}}\right)} \\
&\le K\log\frac{2}{p(1-p)}\cdot\frac{||f||_2^2}{\log\left(e\cdot||f||_2/||f||_1\right)}
\end{aligned}
$$

よって，(4.2.10) が得られる．

以上より補題 4.8 の証明終了．

最後に，補題 4.8 から定理 4.4 の証明は，f に (4.2.2) を用いて $U_i f$ に (4.2.10) を使う．つまり，(4.2.2) より

$$
||f||_2^2=\sum_{i=1}^{n}M(U_i f)^2
$$

であることに注意して，$f=U_i f$ とすると，(4.2.10) から，

$$
M(U_i f)^2\le K\log\frac{2}{p(1-p)}\cdot\frac{||U_i f||_2^2}{\log(e||U_i f||_2/||U_i f||_1)}.
$$

i を n まで和をとると，

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}M(U_i f)^2 &\le \sum_{i=1}^{n}K\log\frac{2}{p(1-p)}\cdot\frac{||U_i f||_2^2}{\log(e||U_i f||_2/||U_i f||_1)} \\
\Longleftrightarrow ||f||_2^2 &\le K\log\frac{2}{p(1-p)}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{||U_i f||_2^2}{\log(e||U_i f||_2/||U_i f||_1)}
\end{aligned}
$$

以上より，定理 4.4 が証明された．

4.3 横断確率の変化

$Q_n=[0,n]\times[0,n]$($\mathbf{Z^2}$ の正方形) とし，

$$
H(Q_n)=\{Q_n\text{を左右に横断する開路がある }\}
$$

とおく．Q_n の代わりに長方形 R に対して $H(R)$ で同じように R を横断する開路がある事象を表すとする．

同様に，

$$
V(Q_n)=\{Q_n\text{を上下に横断する開路がある }\}
$$

とかく．Q_n の対称性から明らかなように

$$
P_p\left(H(Q_n)\right)=P_p\left(V(Q_n)\right)
$$

である．

$H(Q_n)$ は単調増加な事象だから，sharp threshold theorem が成り立っている．そこで，系 4.3 によりある定数 $K'>0$ に対して $p_1<p_2$ ならば (4.1.4) が成り立つ．つまり

$$
P_{p_1}\left(H(Q_n)\right)\left(1-P_{p_2}(H(Q_n))\right)\le(\varepsilon')^{(p_2-p_1)^{K'}}
$$

という式を得る．ここで

$$\varepsilon' = \sup_{0 \le p \le 1} \sup_{e=\{x,y\} \subset Q_n} P_p(H(Q_n) \cap \Delta_e H(Q_n))$$

である．

次章で詳しく説明するが，$n \to \infty$ のときこの ε' は 0 に近づく．

このことを使うと (4.1.4) から

$$P_{p_1}(H(Q_n)) \to 0 \quad \text{または} \quad P_{p_2}(H(Q_n)) \to 1 \tag{4.3.1}$$

となることがわかる．

$H(Q_n)$ が単調増加なので，$P_p(H(Q_n))$ は p について単調非減少なので

$$p_0 = \inf\bigl\{p \in [0,1]\,;\, \lim_{n\to\infty} P_p(H(Q_n)) = 1\bigr\}$$

とおくと，$p < p_0$ のとき $P_p(H(Q_n)) \to 0$ となる．なぜなら，$p < p_2 < p_0$ となる p_2 をとると ($p_2 < p_0$ なので)$P_{p_2}(H(Q_n)) \nrightarrow 1$ なので (4.5) より $P_p(H(Q_n)) \to 0$ でなくてはならない．

同様にして，$p > p_0$ のときは，$P_p(H(Q_n)) \to 1$ でなくてはならない．

したがって横断確率 $P_p(H(Q_n))$ は上の p_0 を境にして $n \to \infty$ のとき 0 か 1 に近づく．

5　横断確率と RSW 定理

5.1　RSW 定理

一番下の横断確率 (the lowest open crossing) について

R を長方形とし，路 $\gamma(\subset R)$ は R の左辺と右辺をつないでいる self-avoiding な路とする．このとき，$R\setminus\gamma$ には次の 2 つの連結成分 $R_+(\gamma)$ と $R_-(\gamma)$ が現れる．

$$R_+(\gamma)=\left\{\begin{matrix} x\in R\ : & x\text{ と }R\text{ の上辺を結ぶ路}\gamma_1\subset R\text{ を} \\ & \gamma\text{と}\gamma_1\text{が交わらないようにできる}\end{matrix}\right\}$$
$$R_-(\gamma)=\left\{\begin{matrix} x\in R\ : & x\text{ と }R\text{ の下辺を結ぶ路}\gamma_2\subset R\text{ を} \\ & \gamma\text{と}\gamma_2\text{が交わらないようにできる}\end{matrix}\right\}$$

さて，このとき γ が R の一番下の横断開路 (the lowest open crossing) であるとは，γ は開路であり $R_-(\gamma)$ には R の左辺と右辺を結ぶ開路がないときにいう．同様にして，R の一番左の縦断開路 (the leftest vertical crossing) も定義できる．

補題 5.1　$n<m\le 2n$ に対して $Q=[0,n]^2\subset R=[0,m]\times[0,2n]$ と置く．事象 B を次のように定める．

$$B=\{Q\text{ を縦断する開路}\gamma\text{があり},\gamma\text{は }R\text{ の中で }R\text{ の右辺と開路で結ばれる }\}$$

このとき

$$P_p(B)\ge\frac{1}{2}P_p(V(Q))P_p(H(R)) \tag{5.1.1}$$

が成立する．

《証明》

$\omega\in V(Q)$ のとき，一番左の Q の縦断開路 $\gamma(\omega)$ をとる．Q の上辺と下辺を結ぶ任意の self-avoiding な路 γ_1 に対して

$$\{\omega\in\Omega:\gamma(\omega)=\gamma_1\}$$

は γ_1 および，それより左側にある Q 内のボンドたちの状態だけで決まる．

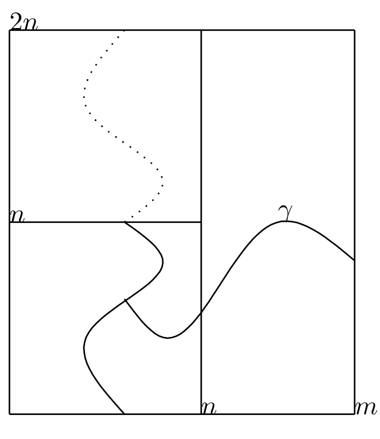
γ_1 を $\{(x^1,x^2);x^2=n\}$ という直線に関して対称に移動した図形を γ_2 とかくとき，$\gamma_1\cup\gamma_2\subset R$ は R の上辺と下辺を結ぶ self-avoiding な路となる．R' を $\gamma_1\cap\gamma_2$ の右側の R の部分と書く．

$$\begin{aligned} H(R')=&\{\gamma_1\text{は }R'\text{内で }R\text{ の右辺と開路で結ばれる }\}\\ &\cap\{\gamma_2\text{は }R'\text{内で }R\text{ の右辺と開路で結ばれる }\}\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

であり，右辺の 2 つの事象は互いに素ではないので確率をとると

$$\begin{aligned} P_p(H(R'))\le& P_p(\gamma_1\text{は }R'\text{内で }R\text{ の右辺と開路で結ばれる})\\ &+P_p(\gamma_2\text{は }R'\text{内で }R\text{ の右辺と開路で結ばれる})\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

とできる．そして対称性により，この 2 つの事象の確率は等しいので以下の式を得る．



Q は左下の $n\times n$ 正方形で，
R は大きな $m\times 2n$ 長方形．

$$P_p(\gamma_1\text{は }R'\text{内で }R\text{ の右辺と開路で結ばれる})\ge\frac{1}{2}P_p(H(R')) \tag{5.1.4}$$

また，$H(R') \supset H(R)$ なので右辺は $\frac{1}{2}P_p(H(R))$ 以上である．

一方，独立性により左辺は

$$P_p(\gamma_1 \text{は } R'\text{内で } R \text{ の右辺と開路で結ばれる } | \gamma(\omega) = \gamma_1)$$

に等しい．

したがって，両辺に $P_p(\gamma(\omega) = \gamma_1)$ をかけて，Q を縦断する self-avoiding な路 γ_1 について和をとると

$$P_p(B) \geq \frac{1}{2}P_p(H(R))P_p(V(Q))$$

となる．

定理 5.2 (RSW 定理) $k > 1$ を自然数とする．$R_{kn,2n} = [0, kn] \times [0, 2n]$ と書く．任意の $0 < \delta < 1$ と $p \in [0, 1]$ に対して $\delta_k = \delta_k(\delta) > 0$ がとれて，

(5.1.5) $$P_p(H(Q_n)) \geq \delta \ \ \forall n \geq 1 \Longrightarrow P_p(H(R_{kn,2n})) \geq \delta_k \ \ \forall n \geq 1.$$

《証明》

$Q = Q_n$，$R = R_{2n,2n} = Q_{2n}$ として補題 5.1 を使うことができ，このとき

$$\begin{aligned}
P_p(B) &\geq \frac{1}{2}P_p(V(Q)) \cdot P_p(H(R)) \\
&= \frac{1}{2}P_p(V(Q_n)) \cdot P_p(H(Q_{2n})) \\
&\geq \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot \delta \ \ (\text{対称性から，} P_p(H(Q_n)) = P_p(V(Q_n)) \geq \delta) \\
&= \frac{1}{2}\delta^2
\end{aligned}$$

となる．

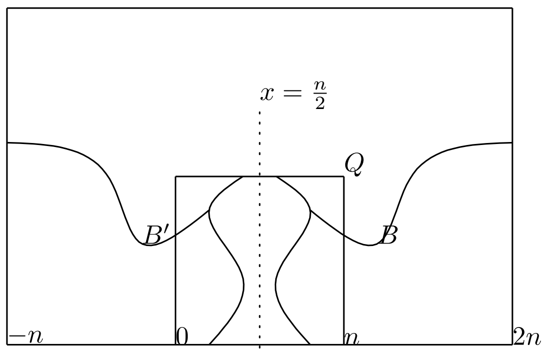
これより，B' として B を $x' = \frac{n}{2}$ に関して折り返した事象とすると対称性と Harris-FKG 不等式により

$$\begin{aligned}
P_p(B \cap B' \cap H(Q)) &\geq P_p(B) \cdot P_p(B') \cdot P_p(H(Q)) \\
&\geq \frac{1}{2}\delta^2 \cdot \frac{1}{2}\delta^2 \cdot \delta \\
&= \frac{1}{4}\delta^5
\end{aligned}$$

となるが，左辺の事象では $[-n, 2n] \times [0, 2n]$ で横断する開路が見つかる．平行移動不変性からこれは

$$P_p(B \cap B' \cap H(Q)) = P_p(H(R_{3n,2n})) \geq \frac{1}{4}\delta^5$$

を表していて，この右辺が δ_3 となる．



事象 B と B' は $H(Q)$ が起こると $[-n, 2n] \times [0, 2n]$ 内に横断開路が現れる．

一般の $k \geq 4$ については，Harris-FKG 不等式と

$$H(R_{kn,2n}) \ \supset \ H(R_{(k-1)n,2n}) \ \cap \ V([(k-3)n, (k-1)n] \times [0, 2n]) \ \cap \ H([(k-3)n, kn] \times [0, 2n])$$

であることから，

$$\begin{aligned} P_p(H(R_{kn,2n})) &\geq P_p(H(R_{(k-1)n,2n}))\cdot P_p(V([(k-3)n,(k-1)n]\times[0,2n]))\cdot P_p(H([(k-3)n,kn]\times[0,2n])) \\ &\geq \delta_{k-1}\cdot P_p(V(Q_{2n}))\cdot P_p(H(R_{3n,2n})) \\ &\geq \delta_{k-1}\cdot\delta\cdot\frac{1}{4}\delta^5 \\ &= \frac{1}{4}\delta^6\cdot\delta_{k-1} \end{aligned}$$

よって，$\delta_k = \frac{1}{4}\delta^6\cdot\delta_{k-1}$ $(k\geq 4)$ とおくと

$$\begin{aligned} \delta_k &= \frac{1}{4}\delta^6\cdot\delta_{k-1} \\ &= \left(\frac{1}{4}\delta^6\right)^{k-3}\cdot\delta_3 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k-3}\cdot\left(\delta^6\right)^{k-3}\cdot\frac{1}{4}\delta^5 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}\cdot\delta^{6k-13} \end{aligned}$$

ゆえに，

$$\delta_k = \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}\cdot\delta^{6k-13}\quad(k\geq 3).$$

以上より

$$P_p(H(R_{kn,2n}))\geq\delta_k\ =\ \left(\frac{1}{4}\right)^{k-2}\cdot\delta^{6k-13}\quad(k\geq 3)$$

5.2　$p_0 = 1/2$ の証明

まず，p_0 の定義を思い出そう．

$$p_0 = \inf\{p \in [0,1]\,;\, \lim_{n\to\infty} P_p(H(Q_n)) = 1\}$$

であった．いま，$\mathbf{E^2}$ から任意に辺 (ボンド)b を一つとってくる．この辺と中点を共有し，b と直交する長さ 1 の線分を b^* とかく．b^* は x^1-軸か，x^2-軸に平行でその両端は裏格子 $\mathbf{Z^{2*}} = \mathbf{Z^2} + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の点となっている．

このとき，それぞれの b^* の状態を対応する b の状態と同じとする．すると次のようなことが分かる．

$$\{[0,n+1]\times[0,n] \text{ を横断する開路がある }\} = \{\text{ 裏格子 } \mathbf{Z^{2*}} \text{で } [\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}]\times[-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}] \text{ を縦断する閉路がある }\}^c$$

よって，独立性と縦横の入れ替えに関する対称性から

$$P_p(b^* \text{は閉じている}) = 1 - p$$

を使うと

$$P_p(H([0,n+1]\times[0,n])) = 1 - P_{1-p}(H([0,n+1]\times[0,n]))$$

がわかる．ここで，$p = \frac{1}{2}$ とすると左辺の値は

$$\begin{aligned} &P_{\frac{1}{2}}(H([0,n+1]\times[0,n])) = 1 - P_{\frac{1}{2}}(H([0,n+1]\times[0,n])) \\ \Leftrightarrow\ &P_{\frac{1}{2}}(H([0,n+1]\times[0,n])) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であることがわかる．

また，$H(Q_n) \supset H([0,n+1]\times[0,n])$ だから

$$P_p(H(Q_n)) \geq P_p(H([0,n+1]\times[0,n])$$

となり，$p = \frac{1}{2}$ とすると，

$$P_{\frac{1}{2}}(H(Q_n)) \geq P_{\frac{1}{2}}(H([0,n+1]\times[0,n]) = \frac{1}{2}$$

がわかる．

したがって，(4.3.1) が正しければ，$P_{\frac{1}{2}}(H(Q_n)) \nrightarrow 0$ なので $p_0 \leq \frac{1}{2}$ であるが，$n \geq 3$ なら裏格子で $R^* = [\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}]\times[-\frac{1}{2}, 2n-\frac{5}{2}]$ を縦断する閉路があると $H(Q_n)$ は起こらない．

対称性によりこれは

$$P_{\frac{1}{2}}(H(Q_n)) \leq 1 - P_{\frac{1}{2}}(H(R_{2(n-1),n-1}))$$

を表すが, RSW 定理により $n-1$ が偶数のとき, 右辺は $1-\delta_4 < 1$ になり $P_{\frac{1}{2}}(H(Q_n)) < 1$ つまり, $P_{\frac{1}{2}}(H(Q_n)) \nrightarrow 1$ なので $\frac{1}{2} \leq p_0$ でなければいけない．

したがって，$p_0 = \frac{1}{2}$

ただし，(4.3.1) が成り立つためには系 4.3 の

$$\varepsilon' = \sup_{0\leq p\leq 1}\ \sup_{1\leq i\leq n} P_p(A_i)$$

が，$n \to \infty$ のとき 0 に近づくことを示しておかなければいけない．

補題 5.3　$S(n) = [-n, n]^2, \partial S(n) = \{(x^1, x^2) \in \mathbf{Z^2}; \max\{|x^1|, |x^2|\} = n\}$ とする．このとき，ある $C > 0$ と $c > 0$ に対して $n \geq 1$ ならば

$$P_{1/2}(\text{原点と}\partial S(n)\text{ を結ぶ開路がある}) \leq Cn^{-c} \tag{5.2.1}$$

となる．

《証明》

$$A_k = S(2^k) \setminus S(2^{k-1}) = [-2^k, 2^k]^2 - [-2^{k-1}, 2^{k-1}]^2$$

とおくとき，A_k の中に裏格子の閉路 $\gamma^* = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ で $v_1 = v_m$ を満たすものがあったとする．

さらに，この γ^* は原点を囲んでいるものとすると，必然的に $S(2^{k-1})$ を囲んでいる．したがってこのときこの閉路は，$S(2^{k-1})$ と $\partial S(2^k)$ が開路で結ばれることを妨げている．

このような閉路 γ^* は裏格子の長方形

$$R_k = \left[-2^k - \frac{1}{2},\, s^k + \frac{1}{2}\right] \times \left[2^{k-1} + \frac{1}{2},\, 2^k - \frac{1}{2}\right]$$

とし，この閉路が横断する事象 $H(R_k)$ を原点に関して 90 度ずつ回転させた事象をそれぞれ，D_1, D_2, D_3 と書くと (閉路 γ^* は)$H(R_k) \cap D_1 \cap D_2 \cap D_3$ で必ず見つかる．

したがって，Harris-FKG 不等式と RSW 定理により，ある定数 $0 < c_1 = c_1(k) < 1$ を選んで

$$\begin{aligned}
P_{\frac{1}{2}}(A_k\text{内に裏格子の閉路}\gamma^*\text{があり}, \gamma^*\text{は原点を囲む}) &= P_{\frac{1}{2}}(H(R_k) \cap D_1 \cap D_2 \cap D_3) \\
&\geq P_{\frac{1}{2}}(H(R_k)) \cdot P_{\frac{1}{2}}(D_1) \cdot P_{\frac{1}{2}}(D_2) \cdot P_{\frac{1}{2}}(D_3) \\
&\geq {c_1}^4
\end{aligned}$$

とできる．

この式の左辺に出てくる事象を ${G_k}^*$ と書くと

$$\{\text{ 原点と}\partial S(2^k)\text{ を結ぶ開路がある }\} \subset \sum_{j=2}^{k} ({G_j}^*)^c$$

だから独立性により

$$P_{\frac{1}{2}}(\text{原点と}\partial S(2^k)\text{ を結ぶ開路がある}) \leq (1 - {c_1}^4)^{k-1}$$

これは補題の主張を証明している．

系 5.4

$$\theta\Big(\frac{1}{2}\Big) = 0 \tag{5.2.2}$$

したがって $p_c \geq 1/2$ である．

《証明》

$$\theta(p) = \lim_{k \to \infty} P_p(\text{原点と}\partial S(2^k)\text{ を結ぶ開路がある})$$

より，

$$\theta\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{k \to \infty} P_{\frac{1}{2}}(\text{原点と}\partial S(2^k)\text{ を結ぶ開路がある})$$

となり，補題 5.3 より右辺は 0 近づく．

系 5.5

$$\varepsilon' = \sup_{0\le p\le 1} \sup_{b=\{x,y\}\subset Q_n} P_p(H(Q_n)\cap \Delta_b H(Q_n)) \tag{5.2.3}$$

とおくとき，

$$\varepsilon' \le 2P_{\frac{1}{2}}\left(原点と\partial S\left(\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor\right)を結ぶ開路がある\right) \tag{5.2.4}$$

が成り立つ．ただし，$u>0$ に対して

$$\lfloor u\rfloor = \max\{k; k\ は整数で,\ k\le u\} \tag{5.2.5}$$

とする．したがって特に $n\to\infty$ のとき，補題 5.3 により $\varepsilon'\to 0$ である．

《証明》

$b=\{x,y\}\in \mathbf{E^2}$ が $b\subset Q_n$ とする．$b^*=\{x^*,y^*\}$ を b と直交する $\mathbf{Z^{2*}}$ のボンドとする．

b が pivotal のとき，つまり $\omega\in\Delta_b H(Q_n)$ ならば次の二つのことが成り立っている．

- b が開いていると Q_n を横断する開路がある．
- b が閉じていると b^* も閉じており，これにより Q_n を縦断する裏格子の閉路ができて，Q_n を横断する開路は現れない．

したがって，このとき ω では Q_n と

$$Q_n{}^* := \left[\frac{1}{2}, n-\frac{1}{2}\right]\times\left[-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right]$$

において次の二つのことが同時に起きる．ただし $b=\{x,y\}$，$b^*=\{x^*,y^*\}$ と書く．

- Q_n 内に二つの交わらない開路 γ_1 と γ_2 が存在し，γ_1 は Q_n の左辺と $\{x,y\}$ を結び，γ_2 は Q_n の右辺と $\{x,y\}$ を結ぶ．($\gamma_1\cup\gamma_2$ は b を含んでいない事に注意)
- $Q_n{}^*$ 内に二つの交わらない開路 ξ_1 と ξ_2 が存在し，ξ_1 は $Q_n{}^*$ の上辺と $\{x^*,y^*\}$ を結び，ξ_2 は $Q_n{}^*$ の下辺と $\{x^*,y^*\}$ を結ぶ．($\xi_1\cup\xi_2$ は b^* を含んでいない事に注意)

裏格子のボンドの状態の決め方から，$\gamma_1\cup\gamma_2$ と $\xi_1\cup\xi_2$ が交差することはない．

b と Q_n の左辺または右辺までの距離のうち大きい方は $\frac{n}{2}$ 以上であり，b^* と $Q_n{}^*$ の上辺または下辺までの距離のうち大きい方も $\frac{n}{2}$ 以上はある．

したがって，少なくとも $\omega\in\Delta_b H(Q_n)$ のとき b から距離 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ にある場合

$$\Gamma = \partial\left(\left[-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + x, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + x\right]\times\left[-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + y, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + y\right]\right)$$

と b を結ぶ開路があり，同時に b^* から距離 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ にある場合

$$\Gamma^* = \partial\left(\left[-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + x^*, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + x^*\right]\times\left[-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + y^*, \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor + y^*\right]\right)$$

と b^* を結ぶ裏格子の閉路も存在している．

したがって，

$$\omega\in\Delta_b H(Q_n) \Rightarrow \omega\in\{x^*,y^*\}\ と\partial\Gamma^*を結ぶ裏格子の閉路がある$$

なので，$p \geq \frac{1}{2}$ のときは $1-p \leq \frac{1}{2}$ であることに注意して

$$\begin{aligned}
P_p(\Delta_b H(Q_n)) &\leq P_p(\{x^*, y^*\} \text{と} \partial\Gamma^* \text{を結ぶ裏格子の閉路がある}) \\
&\leq P_p\left(\text{原点と} \partial S\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \text{を結ぶ裏格子の閉路がある}\right) \\
&\leq 2P_p\left(\text{原点と} \partial S\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \text{を結ぶ裏格子の閉路がある}\right) \\
&\leq 2P_{\frac{1}{2}}\left(\text{原点と} \partial S\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \text{を結ぶ裏格子の閉路がある}\right)
\end{aligned}$$

この式は「開路」と「閉路」の状態の入れ替えで $P_{\frac{1}{2}}$ が変わらないことから，右辺の最終式は，

$$2P_{\frac{1}{2}}\left(\text{原点と} \partial S\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \text{を結ぶ開路がある}\right)$$

と等しい．

一方，$p < \frac{1}{2}$ のときは単調性から，$\omega \in \Delta_b H(Q_n) \Rightarrow \omega \in (\{x, y\} \leftrightarrow \Gamma)$ に注意すると

$$\begin{aligned}
P_p\left(\Delta_b H(Q_n)\right) &\leq P_p(\{x, y\} \leftrightarrow \Gamma) \\
&\leq P_{\frac{1}{2}}\left(\text{原点と} \partial S\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \text{を結ぶ開路がある}\right) \\
&\leq 2P_{\frac{1}{2}}\left(\text{原点と} \partial S\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \text{を結ぶ開路がある}\right)
\end{aligned}$$

となる．

以上より，

$$P_p\left(\Delta_b H(Q_n)\right) \leq 2P_{\frac{1}{2}}\left(\text{原点と} \partial S\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \text{を結ぶ開路がある}\right)$$

また，

$$P_p(H(Q_n) \cap \Delta_b H(Q_n)) \ \leq \ P_p(\Delta_b H(Q_n))$$

であることから

$$P_p(H(Q_n) \cap \Delta_b H(Q_n)) \ \leq \ 2P_{\frac{1}{2}}\left(\text{原点と} \partial S\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \text{を結ぶ開路がある}\right)$$

である．これと，$\varepsilon' = \sup\limits_{0 \leq p \leq 1} \sup\limits_{b=\{x,y\} \subset Q_n} P_p(H(Q_n) \cap \Delta_b H(Q_n))$ であることから

$$\varepsilon' \ \leq \ 2P_{\frac{1}{2}}\left(\text{原点と} \partial S\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \text{を結ぶ開路がある}\right)$$

となる．よって証明終了．

特に，$n \to \infty$ のとき補題 5.3 より $P_{\frac{1}{2}}\left(\text{原点と} \partial S\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right) \text{を結ぶ開路がある}\right) \to 0$ なので，$\varepsilon' \to 0$ となる．

このことから系 4.3 の ε' が $n \to \infty$ のとき 0 に近づくことがわかり，(4.3.1) がきちんと成り立つことがわかる．以上より，$p_0 = \frac{1}{2}$ の証明が終了する．

5.3 $p_c = 1/2$ の証明

補題 5.6 λ が $0 < \lambda < 1/25$ を満たすとき，以下が成立する．

ある $n \geq 1$ と，$0 < \theta < 1$ に対して

$$P_p(H(R_{2n,n})) \geq 1 - \lambda\theta \tag{5.3.1}$$

が成り立っていると，任意の $k \geq 1$ に対して

$$P_p(H(R_{2^k n,2^{k-1}n})) \geq 1 - \lambda\theta^{2^{k-1}} \tag{5.3.2}$$

が成り立つ．

《証明》

帰納法によるが，本質的には (5.3.1) から

$$P_p(H(R_{4n,2n})) \geq 1 - \lambda \cdot \theta^2$$

が言えればよい．

長方形 R_0，R_1，R_2 と正方形 Q_A，Q_B をそれぞれ

$$\begin{gathered} R_j = R_{2n,n} + (jn, 0) \ , \ j = 0, 1, 2 \\ Q_A = Q_n + (n, 0) \ , \ Q_B = Q_n + (2n, 0) \end{gathered}$$

とおくと

$$H(R_0) \cap V(Q_A) \cap H(R_1) \cap V(Q_B) \cap H(R_2) \ \subset \ H(R_{4n,n})$$

となる．これより，Harris-FKG 不等式を使うと

$$\begin{aligned} P_p(H(R_{4n,n})) &\geq P_p(H(R_0)) \cdot P_p(V(Q_A)) \cdot P_p(H(R_1)) \cdot P_p(V(Q_B)) \cdot P_p(H(R_2)) \\ &= P_p(H(R_{2n,n})) \cdot P_p(V(Q_n)) \cdot P_p(H(R_{2n,n})) \cdot P_p(V(Q_n)) \cdot P_p(H(R_{2n,n})) \\ &= P_p(H(R_{2n,n}))^3 \cdot P_p(H(Q_n))^2 \\ &\geq P_p(H(R_{2n,n}))^3 \cdot P_p(H(R_{2n,n}))^2 \\ &= P_p(H(R_{2n,n}))^5 \\ &\geq (1 - \lambda\theta)^5 \\ &\geq 1 - 5\lambda\theta \end{aligned}$$

ここで，

$$R_{4n,2n} = T_1 \cup T_2$$

とおく．

ただし，$T_1 = R_{4n,n}$, $T_2 = R_{4n,n} + (0, n)$ とすると，$T_1 \cap T_2 = \emptyset$ だから独立性により

$$\begin{aligned} P_p(H(R_{4n,2n})) &\geq P_p(H(T_1) \cup H(T_2)) \\ &= 1 - P_p(H(R_{4n,n})^c)^2 \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} 1 - P_p(H(R_{4n,2n})) &= P_p(H(R_{4n,n})^c) \\ \Leftrightarrow P_p(H(R_{4n,n})) &= 1 - P_p(H(R_{4n,n})^c) \\ &\geq 1 - 5\lambda\theta \end{aligned}$$

ゆえに

$$P_p(H(R_{4n,n})^c) \leq 5\lambda\theta$$

つまり

$$1-(P_p(H(R_{4n,n})^c))^2 \geq 1-(5\lambda\theta)^2$$

であるから，以上より $0<\lambda<\frac{1}{25}$ に注意して

$$P_p(H(R_{4n,2n})) \geq 1-(5\lambda\theta)^2 = 1-25\lambda^2\theta^2 \geq 1-\lambda\theta^2$$

よって，帰納的に補題が示される．

定理 5.7

$$p_c = \frac{1}{2}. \tag{5.3.3}$$

つまり，平面の正方格子 $\mathbf{Z}^2$ のパーコレーションにおいて，臨界確率は 1/2 である．

《証明》

系 5.4 ですでに $p_c \geq \frac{1}{2}$ はわかっているので，$p_c \leq \frac{1}{2}$ を言えばよい．

つまり，$p>\frac{1}{2}$ のとき $\theta(p)>0$ を示せばよい．そのとき p_c はその定義から少なくとも $\frac{1}{2}$ 以下になる．

前章の初めに述べたように，$P_{\frac{1}{2}}(H(Q_n)) \geq \frac{1}{2}$ であるので，RSW 定理により

$$P_{\frac{1}{2}}(H(R_{4n,2n})) \geq \delta_4 > 0$$

が任意の $n \geq 1$ で成り立つ．

$\frac{1}{2}<p'<p$ となるように p' をとると sharp threshold theorem により前節と同様な議論をすると，やはり

$$P_p(H(R_{4n,2n})) \to 1$$

でなければならない．

したがって，補題 5.6 により n, λ をうまく選んで $k \geq 1$ ならば

$$P_p(H(R_{2^k n, 2^{k-1} n})) \geq 1-\lambda\theta^{2^{k-1}}$$

となるようにできる．

このとき対称性から

$$P_p(V(R_{2^{k-1} n, 2^k n})) \geq 1-\lambda\theta^{2^{k-1}}$$

も成り立つ．事象 B_k を

$$B_{2k-1} = H(R_{2^{2k-1}n, 2^{2k-2}n}),\ B_{2k} = V(R_{2^{2k-1}n, 2^{2k}n})$$

とおくと，$\bigcap_{k\geq 1} B_k$ では，Q_n から出発する無限に伸びる開路がある．

このときさらに，Q_n 内のすべてのボンドの状態を強制的に開けば，原点を含む無限サイズの開クラスターが現れる．

したがって，

$$\bigcap_{b\subset Q_n}\{\omega(b)=1\} \cap \bigcap_{k\geq 1}^{\infty} B_k \Rightarrow \{||C_O||=\infty\}$$

より

$$\bigcap_{b\subset Q_n}\{\omega(b)=1\}\cap\bigcap_{k\geq 1}^{\infty}B_k\subset\{||C_O||=\infty\}$$

だから，Harris-FKG 不等式より

$$\begin{aligned}\theta(p)&\geq P_p\left(\bigcap_{b\subset Q_n}\{\omega(b)=1\}\cap\bigcap_{k\geq 1}^{\infty}B_k\right)\\&\geq p^{c_1n^2}\cdot\prod_{j=1}^{\infty}(1-\lambda\theta^{2k})>0\end{aligned}$$

ここで，c_1n^2 は Q_n に含まれるボンドの総数を上から評価したものであり，c_1 はある正の定数である．

以上より，$p>\frac{1}{2}$ のとき $\theta(p)>0$ がわかる．

よって，証明終了．

$p<p_c=\frac{1}{2}$ における連結性確率の指数的減少について

$p<p_c$ とする．このとき sharp threshold theorem により，$n\to\infty$ のとき $P_p(H(Q_n))$ は 0 に近づく．

裏格子を考えると，これは $P_{1-p}(V(Q_n))\to 1$ を意味している (閉路が縦断する確率が 1).

RSW 定理と sharp threshold theorem によりこのとき

$$P_{1-p}(H(R_{2n,n}))\to 1$$

となるが，補題 5.6 により，$n\geq 1$, $0<\lambda<\frac{1}{25}$, $0<\theta<1$ を選んで

$$P_p\left[R_{2^kn,2^{k-1}n}\text{を横断する開路がある}\right]\geq 1-\lambda\theta^{2^{k-1}}$$

補題 5.3 の証明の議論と同様にして，Harris-FKG 不等式により

$$\begin{aligned}P_p\left[S(2^kn)\text{ 内に原点を囲む裏格子の閉路 }\gamma^*=\{x_1^*,\ldots,x_m^*\}\text{ で，}x_1^*=x_m^*\text{となるものがある}\right]&\geq(1-\lambda\theta^{2^{k-1}})^4\\&\geq 1-4\lambda\theta^{2^{k-1}}\end{aligned}$$

となる．これは

$$P_p(O\leftrightarrow\partial S(2^kn))\leq 4\lambda\theta^{2^{k-1}} \tag{5.3.4}$$

を意味するが，$\alpha=-\frac{1}{n}\log\theta\ (>0)$ と書くことにより，右辺は $4\lambda e^{-\alpha(2^k-1)n}$ と書くことができ，指数的に減少する．

定理 5.8 $p<p_c$ のとき，定数 $K>0$, $c>0$ が存在して，任意の $x\in\mathbf{Z^2}$ に対して，

$$\tau_p(0,x)\leq Ke^{-c|x|} \tag{5.3.5}$$

が成り立つ．

《証明》

$|x|$ が十分大きいときに示しておけばよい．

n を (5.3.4) が任意の $k \geq 1$ で成り立つように決める．

$$2^k \cdot n < |x| \leq 2^{k+1} \cdot n$$

となる k に対して，

$$\{\mathrm{O} \leftrightarrow x\} \subset \{\mathrm{O} \leftrightarrow \partial S(2^{k-1}n)\} \cap \{x \leftrightarrow \partial(S(2^{k-1}n)+x)\}$$

であるので，独立性と (5.3.4) から

$$\begin{aligned}
P_p(\mathrm{O} \leftrightarrow x) &\leq P_p(\mathrm{O} \leftrightarrow \partial S(2^{k-1}n)) \cdot P_p(x \leftrightarrow \partial(S(2^{k-1}n)+x)) \\
\Leftrightarrow \tau_p(0,x) &\leq P_p(\mathrm{O} \leftrightarrow \partial S(2^{k-1}n))^2 \\
&\leq (4\lambda\theta^{2^{k-1}})^2 \\
&= (4\lambda e^{-\alpha 2^{k-1} n})^2 \\
&= (4\lambda)^2 \cdot e^{-\alpha 2^k n}
\end{aligned}$$

x の条件から，$c = \frac{\alpha}{2}$ で定理が成り立つ．

系 5.9

(5.3.6) $$p_c = \sup\{p \in [0,1]; E_p(|C_0|) < \infty\}.$$

《証明》

$$|C_{\mathrm{O}}(\omega)| = \sum_{x \in \mathbf{Z}^2} 1_{\{\mathrm{O} \leftrightarrow x\}}(\omega)$$

と書けるので，

$$\begin{aligned}
E_p(|C_{\mathrm{O}}(\omega)| &= \sum_{x \in \mathbf{Z}^2} E_p\left(1_{\{\mathrm{O} \leftrightarrow x\}}(\omega)\right) \\
&= \sum_{x \in \mathbf{Z}^2} \tau_p(0,x)
\end{aligned}$$

となり，右辺は $p < p_c$ のとき定理 5.8 により有限になる．

一方，$\infty \cdot 0 = 0$ と理解することにより

$$|C_{\mathrm{O}}(\omega)| \geq \infty \cdot 1_{\{|C_{\mathrm{O}}|=\infty\}}$$

だから，$p > p_c$ ならば

$$\begin{aligned}
E_p(|C_{\mathrm{O}}(\omega)|) &\geq \infty \cdot E_p(1_{\{|C_{\mathrm{O}}|=\infty\}}) \\
&= \infty \cdot P_p(|C_{\mathrm{O}}| = \infty) \\
&= \infty \cdot \theta(p) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{aligned}
p < p_c \quad &\text{ならば} \quad E_p(|C_{\mathrm{O}}(\omega)|) < \infty \\
p > p_c \quad &\text{ならば} \quad E_p(|C_{\mathrm{O}}(\omega)|) = \infty
\end{aligned}$$

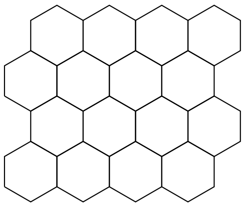
これは臨界確率 p_c と p_T との一意性を表す．

5.4 代表的な格子の臨界確率について

正方格子が全てではない．2 次元系でみると，三角格子，蜂の巣格子，かごめ格子その他の格子も存在し，3 次元系では単純立方格子，体心立方格子 (BCC)，面心立方格子 (FCC)，ダイアモンド格子などが存在する．ここでは，これらの格子およびその臨界確率の値について紹介する．この際，臨界確率の値についてはスタウファー& アハロニー [7] や，小田垣 [2][3] を参考にした．

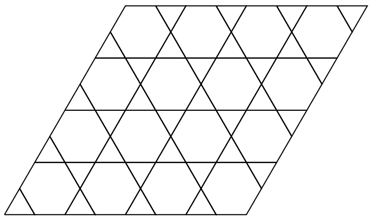
5.4.1 蜂の巣格子

蜂の巣格子は，一つの格子が正六角形である．臨界確率の値は $1 - 2\sin(\pi/18)$ の厳密解が知られている．



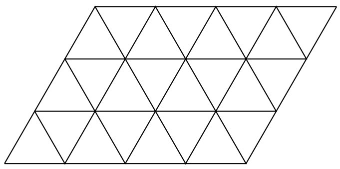
5.4.2 かごめ格子

かごめ格子は文字通り，かごの目の結び目の作る格子である．臨界確率の値はコンピューターを用いたシミュレーションにおいて約 0.449 と求められている．



5.4.3 三角格子

三角格子は，同じ大きさのボールを最も密になるように平面に規則正しく並べたときに，ボールの中心が作る格子である．臨界確率の値は $2\sin(\pi/18)$ の厳密解が知られている．

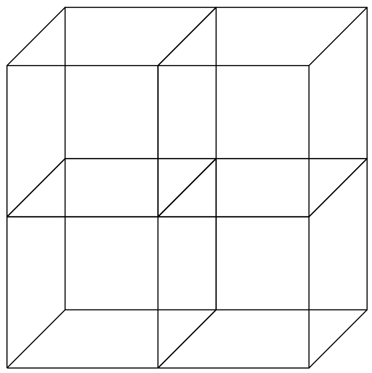


これらの他に，平面上において，ペンローズ格子の臨界確率の値がコンピューターを用いたシミュレーションにおいて約 0.477 と計算されている．

5.4.4 単純立方格子

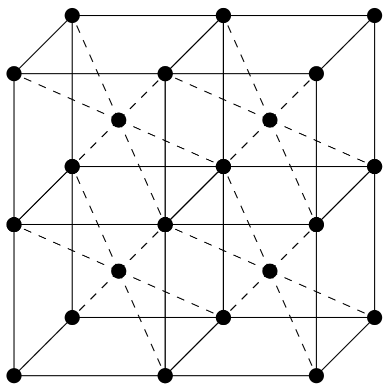
単純立方格子は，立方体の各頂点に格子点が配列された格子である．臨界確率の値はコンピューターを用いた

シミュレーションにおいて約 0.248813 と計算されている．



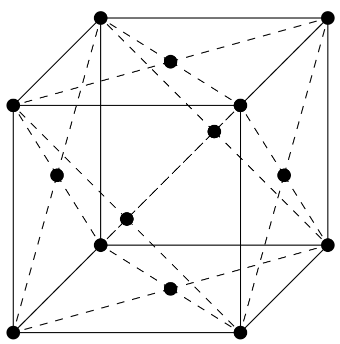
5.4.5　体心立方格子 (BCC)

体心立方格子は，立方体の各頂点と立方体の中心に格子点が配列された格子である．臨界確率の値はコンピューターを用いたシミュレーションにおいて約 0.180287 と計算されている．



5.4.6　面心立方格子 (FCC)

面心立方格子は，立方体の各頂点と，各面の中心に格子点があるような格子である．臨界確率の値はコンピューターを用いたシミュレーションにおいて約 0.120163 と計算されている．



これらのほかに，**ダイアモンド格子**の臨界確率の値が約 0.3893 とコンピューターを用いたシミュレーションにおいて計算されている．

以上をまとめると次の表のようになる．ただし，e は厳密解を表す．

格子	臨界確率
蜂の巣格子	$1-2\sin(\pi/18)^e$
正方格子	$1/2^e$
かごめ格子	0.449
三角格子	$2\sin(\pi/18)^e$
ペンローズ格子	0.477
ダイアモンド格子	0.3893
単純立方格子	0.248813
BCC	0.180287
FCC	0.120163

表を見てもわかるように，臨界確率 p_c の正確な値が求められている格子は少ない．

6　無限クラスターの一意性

Harris-FKG 不等式のところで述べたように，無限開クラスターの個数がたかだか一つしかないことを Burton-Keane に従って証明する．

6.1　Newman-Schulman の議論

最初に，無限開クラスターの数は 0，1，∞ のいずれかであるという Newman-Schuman の議論を紹介する．無限開クラスターの総数を N_∞ で表す．N_∞ は 0 以上の整数または $+\infty$ のどれかの値をとる．

まず，定理 3.15 で示した P_p のエルゴード性により，任意の自然数 k に対して，事象 $\{N_\infty = k\}$ の確率は 0 または 1 となる．

補題 6.1

(6.1.1)
$$P_p(N_\infty = 2) = 0.$$

《証明》

背理法で示す．

上の補題が正しくないとすると，エルゴード性から

(6.1.2)
$$P_p(N_\infty = 2) = 1$$

となる．このとき，二つの無限開クラスターはどこかから始まっているので，n を十分大きくとると

$$P_p(\text{二つの無限開クラスターは，どちらも } S(n) \text{ と交わる}) \geq \frac{1}{2}$$

とできる．

$S(n)$ の外だけ見ると

$$P_p(\partial S(n) \text{ から無限に伸びる二つの交わらない開クラスターがある}) \geq \frac{1}{2}$$

とできる．

$$B = \{\partial S(n) \text{ から無限に伸びる二つの交わらない開クラスターがある }\}$$

とすると，B は $S(n)$ より外にあるボンドたちの事象なので，その独立性から

$$P_p\left(B \cap \bigcap_{b \subset S(n)} \{\omega(b) = 1\}\right) = P_p(B) \cdot P_p\left(\bigcap_{b \subset S(n)} \{\omega(b) = 1\}\right) > 0$$

がわかるが，左辺の事象が起こると $N_\infty = 1$ なので $P_P(N_\infty = 1) > 0$ となり，これは (6.1.2) と矛盾する．

よって補題が示された．

系 6.2　任意の $p \in [0, 1]$ に対して

(6.1.3)
$$P_p(N_\infty \in \{0, 1, \infty\}) = 1.$$

《証明》

補題 6.1 と同じ議論により

$$P_p(N_\infty = k+1) > 0 \ \Rightarrow \ P_p(N_\infty = 2) > 0$$

を示すことができる．したがって $k \geq 1$ のとき補題 6.1 の対偶をとることで，$P_p(N_\infty = k+1) = 0$ を得る．

6.2　$N_\infty \leq 1$ $a.\ s.$ であること

定義 6.3　点 x が遭遇点 (encouter　point) であるとは，x から伸びるちょうど 3 つの $\mathbf{Z}^2$ の開クラスタがあるときにいう．

補題 6.4　$P_p(N_\infty = \infty) = 1$ ならば，

$$P_p(\text{原点は遭遇点である}) > 0.$$

《証明》

補題 6.1 と同じように議論する．$P_p(N_\infty = \infty) = 1$ ならば，$n \geq 1$ を十分大きくとることにより

$$P_p(\partial S(n)\text{ から伸びる互いに交わらない開クラスターが 3 個以上ある}) \geq \frac{1}{2} \tag{6.2.1}$$

とできる．

$S(n)$ 上の点で，$S(n)$ の外側にある開クラスターに含まれる点の集合を $H(\omega)$ と書き，$H(\omega)$ の中から適当に 3 点を選び $S(n)$ の内側のボンドの状態をうまく指定することにより，$S(n)$ 上の 3 点のみが原点と $S(n)$ の内側の開いた路で結ばれるようにできるため，原点が遭遇点になるようにできる．

今，$S(n)$ に含まれるボンドの総数を $c(n)$ と書くとき，

$$P_p(\text{原点は遭遇点}) \geq \sum_{H \subset S(n)} \min\{p, 1-p\}^{c(n)} \cdot P_p(B(H;n)).$$

ただし，$B(H;n)$ は (6.2.1) の左辺に出てくる $\partial S(n)$ から互いに交わらない開クラスターに含まれる点の集合のうち，$H(\omega) = H$ となるものの集合とする．

したがって，

$$P_p(\text{原点は遭遇点}) \geq \min\{p, 1-p\}^{c(n)} \cdot \frac{1}{2} > 0$$

よって，証明終了．

定理 6.5

$$P_p(N_\infty = \infty) = 0$$

つまり無限開クラスターは確率 1 でたかだか一つしかない．

《証明》

$S(n)$ に含まれる遭遇点の個数を $Enc(S(n))$ と書くと

$$Enc(S(n)) = \sum_{x \in S(n)} 1_{\{x\ \text{は遭遇点}\ \}}$$

と書けるので，エルゴード定理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Enc(S(n))}{(2n)^d} \;=\; P_p(\text{原点は遭遇点}) \tag{6.2.2}$$

が $a.s.$ で成り立つ．

n が大きいとき，$S(n)$ の中に遭遇点は n^d のオーダーの個数存在している．

$x \in S(n)$ を一つとり，x は遭遇点とする．このとき，x から $\partial S(n)$ につながる開路が，$C_x \setminus \{x\}$ の 3 つの異なる連結成分の中にそれぞれ存在し，これらの開路と $\partial S(n)$ との交点を u_1, u_2, u_3 と書く．

もう一つ $y \in S(n)$ を x と異なる遭遇点とする．

y が x と $S(n)$ 内で開路で結ばれているときには，y は $C_x \setminus \{x\}$ の 3 つの無限連結成分のどれかに属する．(図)

今，y が u_1 と同じ連結成分に属するとすると，y から u_1, u_2 につながる開路は交わらないようにとれるが，u_3 につながる路はこの二つの開路のうちどちらかとは x を共有してしまう．

y は遭遇点であるから y 以外にこれらの路と交わらない開路が y と $\partial S(n)$ を結ぶように存在する．この新たな開路と $\partial S(n)$ の交点を u_4 と書く．

y が $S(n)$ で x と開路で結ばれていなければ，y から無限に伸びる 3 本の開路は $\partial S(n)$ と新たに 3 つの点で交わる．

$$Z_n = ||\{x \in \partial S(n) : x \text{ は } S(n) \text{ 内で遭遇点と開路で結ばれる }\}||$$

とすると，上で言ったことは

$$Z_n \geq Enc(S(n))$$

を意味している．したがって

$$2d \cdot (4n)^{d-1} \geq Z_n \geq Enc(S(n))$$

となるが，n が大きいと (6.2.2) より，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{Enc(S(n))}{(2n)^d} = P_p(\text{原点は遭遇点}) \\
&\qquad\qquad\iff \left|\frac{Enc(S(n))}{(2n)^d} - P_p(\text{原点は遭遇点})\right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

であるから整理すると

$$(2n)^d\Big(P_p(\text{原点は遭遇点}) - \varepsilon\Big) \;<\; Enc(S(n)) < (2n)^d\Big(P_p(\text{原点は遭遇点}) + \varepsilon\Big)$$

左の不等式に着目して

$$Enc(S(n)) \;>\; 2^d P_p(\text{原点は遭遇点}) n^d - (2n)^d \varepsilon$$

最後に $\varepsilon \to 0$, $C = 2^d P_p(\text{原点は遭遇点})$ とおくと

$$Enc(S(n)) \;\geq\; C \cdot n^d$$

これは，$2d(4n)^{d-1} \geq Enc(S(n))$ に矛盾する．

さて，これで無限開クラスターの一意性が言えたので連結性関数の $p > p_c$ のときの挙動がわかる．

系 6.6　$p > p_c$ のとき，

(6.2.3)
$$\tau_p(x,y) \le \theta(p)^2$$

したがって，補題の $\psi(p)$ は，$p > p_c$ のとき 0 になる．

《証明》

$p > p_c$ なので
$$I_\infty = \{\text{ ある } x \text{ で } |C_x| = \infty\}$$

とおくと，$p > p_c$ より
$$P_p(I_\infty) \ \ge\ P_p(|C_{\mathrm{O}}| = \infty) = \theta(p)\ > 0$$

であるが，明らかに I_∞ は平行移動不変な事象なのでエルゴード性から
$$P_p(I_\infty) = 1$$

したがって，確率 1 で無限開クラスターがあるが無限開クラスターの個数はただ 1 つなので，
$$U_\infty = \{\text{ 無限開クラスターは一つしかない }\}$$

であることを思い出すと
$$P_p(U_\infty) = 1$$

となる．補題 3.16 により
$$\begin{aligned}
\tau_p(x,y) &\ge\ P_p(U_\infty \cap \{|C_{\mathrm{O}}| = \infty\})^2 \\
&=\ P_p(|C_{\mathrm{O}}| = \infty)^2 \\
&=\ \theta(p)^2
\end{aligned}$$

また，このとき補題 3.14 より
$$\begin{aligned}
-\psi_p(a) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\log \tau_p(0,na)}{n|a|} \\
&\ge \lim_{n\to\infty} \frac{2\log\theta(p)}{n|a|} \\
\Leftrightarrow \psi_p(a) &\le -\lim_{n\to\infty} \frac{2\log\theta(p)}{n|a|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

よって，$\psi_p(a) = 0$ を得る．

7　マルコフ連鎖

ここからは，ツリー上における臨界確率 p_c と p_T の一意性について考える．ツリーを考える上でマルコフ連鎖のゴルトン-ワトソン分枝過程について考える．そのため，まずマルコフ連鎖の基本的な性質および定理をおさえておく．

7.1　状態の分類

定義 7.1　マルコフ過程とは，未来が現在の身に依存する確率過程である．正確に述べると，確率過程 X_n がマルコフ的であるとは，$\mathcal{S}$ の任意の状態 $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_n$ と，任意の整数値 $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n$ に対して，

$$P(X_n = x_n | X_{n_1} = x_1, X_{n_2} = x_2, \ldots, X_{n_k} = x_k) = P(X_n = x_n | X_{n_k} = x_k) \tag{7.1.1}$$

が成立することである．また，状態 i から 1 ステップで状態 j に移る推移確率を次式で定義する．

すべての $i, j \in \mathcal{S}$ およびすべての $n \geq 0$ に対して，

$$p(i, j) = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \tag{7.1.2}$$

命題 7.2　任意の正の整数 $r \leq n$ に対して，

$$p_n(i, j) = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_r(i, k) p_{n-r}(k, j) \tag{7.1.3}$$

が成立する．

《証明》

$r \leq n$ のとき，以下の等式が成り立つ．

$$\{X_n = j\} = \bigcup_{k \in \mathcal{S}} \{X_n = j; X_r = k\}.$$

そして，和集合の各事象は互いに排反であるので，

$$p_n(i, j) = P(X_n = j | X_0 = i) = \sum_{k \in \mathcal{S}} P(X_n = j; X_r = k | X_0 = i)$$

となる．最後の項は，

$$\sum_{k \in \mathcal{S}} P(X_n = j | X_r = k; X_0 = i) P(X_r = k | X_0 = i)$$

に等しい．しかし，マルコフ性によりこれは

$$\sum_{k \in \mathcal{S}} P(X_n = j | X_r = k) P(X_r = k | X_0 = i) = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_r(i, k) p_{n-r}(k, j)$$

と等しくなる．以上より

$$p_n(i, j) = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_r(i, k) p_{n-r}(k, j)$$

が成り立つ．

定義 7.3 状態空間 $\mathcal{S}$ の各状態 i に対して，マルコフ連鎖がはじめて状態 i に到達する (ランダムな) 時刻を確率変数 T_i と定義する．すなわち，

$$T_i = \inf\{n \geq 1 : X_n = i\}.$$

ここで，もし下限が存在しないなら，$T_i = \infty$ とする．

定義 7.4 状態 i が**再帰的** (recurrent) であるとは，$P(T_i < \infty | X_0 = i) = 1$ であるときにいう．また，再帰的でない状態を**非再帰的** (nonrecurrent) という．

定理 7.5 状態 $i \in \mathcal{S}$ が再帰的であるための必要十分条件は，

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i) = \infty \tag{7.1.4}$$

である．

《証明》

時刻 $n \geq 1$ で状態 i にはじめて戻ってくる確率を

$$f_n(i) = P(T_i = n | X_0 = i)$$

で定義する．また，

$$\bigcup_{n \geq 0} \{T_i = n\} = \{T_i < \infty\}$$

が成り立つことに注意．したがって，

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(i) = P(T_i < \infty | X_0 = i) \leq 1$$

を得る．ゆえに，状態 i が再帰的であることと $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(i) = 1$ であることとは同値である．定理を証明するために，いくつか準備をする．

まず，T_i が n 以下となるとき，このマルコフ連鎖が時刻 $n \geq 1$ で状態 i に到達する事象は，

$$\{X_n = i\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{X_n = i; T_i = k\}$$

と書ける．ただし，右辺の各事象は排反であるので，

$$P(X_n = i | X_0 = i) = p_n(i,i) = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = i; T_i = k | X_0 = i)$$

となる．しかし，

$$\begin{aligned} P(X_n = i; T_i = k | X_0 = i) &= P(X_n = i | T_i = k; X_0 = i) \cdot P(T_i = k | X_0 = i) \\ &= p_{n-k}(i,i) f_k(i) \end{aligned}$$

であるので，

$$p_n(i,i) = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(i,i) f_k(i) \quad (n \geq 1) \tag{7.1.5}$$

が成立する．ただし，$f_0(i)=0$ とする．次に，$p_n(i,i)$，$f_n(i)$ に対する母関数をそれぞれ以下のように定義する．

$$P_{ii}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(i,i)s^n\ ,\ F_i(s)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(i)s^n\quad(|s|<1).$$

この 2 つの母関数について絶対収束する級数の積に関する性質により，

$$\begin{aligned}F_i(s)P_{ii}(s)&=\sum_{n=0}^{\infty}p_n(i,i)s^n\times\sum_{n=0}^{\infty}f_n(i)s^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}f_k(i)p_{n-k}(i,i)s^n\end{aligned}$$

を得る．ここで，$n\geq 1$ に対して (7.1.5) 式と $f_0(i)=0$ を用いると，

$$\begin{aligned}F_i(s)P_{ii}(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}p_n(i,i)s^n\\&=P_{ii}(s)-p_0(i,i)\\&=P_{ii}(s)-1\end{aligned}$$

が得られる．したがって，

$$P_{ii}(s)=\frac{1}{1-F_i(s)}\quad(|s|<1)\tag{7.1.6}$$

が求まる．次に定理の証明に必要な補題を用意する．

補題 7.6　すべての $k\geq 0$ に対して，$a_k\geq 0$ を仮定すると，

$$\lim_{s\to 1-}\sum_{k=0}^{\infty}a_ks^k=\sum_{k=0}^{\infty}a_k$$

が成り立つ．ただし，両辺は同時に無限大になるかもしれない．

《証明》

まず，$f_n(s)$ を以下のように定義する．

$$f_n(s)=\sum_{k=0}^{n}a_ks^k,\ s\in(0,1).$$

上式について，もし $s_1<s_2$ ならば，$f_n(s_1)\leq f_n(s_2)$．また，もし $n<p$ ならば，$f_n(s)\leq f_p(s)$．すなわち，$f_n(s)$ は n および s に関して単調増加関数となっている．この単調性を利用し，上限の交換が可能となることに注意すると，

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 1-}\sum_{k=0}^{\infty}a_ks^k&=\sup_{s\in(0,1)}\sup_n f_n(s)\\&=\sup_n\sup_{s\in(0,1)}f_n(s)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\end{aligned}$$

が得られる．これで，補題 7.6 の証明は終わる．

さて，これで定理を証明する準備ができた．状態 i が再帰的であると仮定すると，補題 7.6 により

$$\lim_{s\to 1-}F_i(s)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(i)=1$$

が得られる．すると，(7.1.6) 式を用いると，

$$\lim_{s\to 1-} P_{ii}(s) = \infty$$

が成り立つ．補題 7.6 を再度用いると，

$$\lim_{s\to 1-} P_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i) = \infty$$

が得られる．このことより，状態 i が再帰的なとき上式の級数が無限大に発散することがわかった．

逆に，状態 i が再帰的であると仮定する．補題 7.6 を用いると次式となる．

$$\lim_{s\to 1-} F_i(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(i) < 1.$$

さらに，(7.1.6) 式から，

$$\lim_{s\to 1-} P_{ii}(s) < \infty$$

となる．しかし，補題 7.6 よりこの不等式は，$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(i,i) < \infty$ と同値であることがわかる．

以上より証明終了．

定理 7.7 (i) もし状態 j が非再帰的であるならば，任意の状態 $i \in \mathcal{S}$ に対して，

$$P(N(j) < \infty | X_0 = i) = 1$$

が成り立つ．さらに，

$$E(N(j)|X_0 = i) < \infty$$

が成立する．

(ii) また，状態 j が再帰的であるならば，

$$P(N(j) = \infty | X_0 = j) = 1$$

が成り立つ．

ただし，$N(j)$ を状態 j を訪れるランダムな回数とし，

$$N(j) = \sum_{n\geq 1} 1_j(X_n)$$

と表す．1_j は指示関数であり，$1_j(i) = 1$ $(i = j)$，$1_j(i) = 0$ $(i \neq j)$ と定義される．

《証明》

まず，ρ_{ij} を

$$\rho_{ij} = P(T_j < \infty | X_0 = i)$$

で定義する．事象 $\{N(j) \geq 1\}$ と $\{T_j < \infty\}$ は一致することに注意すると，

$$\rho_{ij} = P(T_j < \infty | X_0 = i) = P(N(j) \geq 1 | X_0 = i)$$

が成り立つ．また，

$$\{N(j) \geq 2\} = \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{m\geq 1} \{T_j = n; 2\ \text{回目に状態}\ j\ \text{に到達する時刻が}\ n+m\ \text{である}\ \}$$

が成立する．ここで，マルコフ性を考慮すると，

$$
\begin{aligned}
P(N(j) \geq 2|X_0 = i) &= \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 1} P(T_j = n|X_0 = i)P(T_j = m|X_0 = j) \\
&= \rho_{ij}\rho_{jj}
\end{aligned}
$$

が得られる．帰納法により

$$
P(N(j) \geq m|X_0 = i) = \rho_{ij}{\rho_{jj}}^{m-1} \tag{7.1.7}
$$

が成り立つ．さらに，$\{N(j) \geq m+1\} \supset \{N(j) \geq m\}$ から，事象列 $\{N(j) \geq m\}$ は単調減少する．したがって，命題 2.17 より，

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} P(N(j) \geq m|X_0 = i) &= P(\bigcup_{m\geq 1}\{N(j) \geq m\}|X_0 = i) \\
&= P(N(j) = \infty|X_0 = i)
\end{aligned}
$$

が得られる．もし，状態 j が非再帰的であるなら，定義により $\rho_{jj} < 1$ となるので，(7.1.7) 式で m を無限大にすると

$$
P(N(j) = \infty|X_0 = i) = 0
$$

が成立する．また，X が非負の整数値をとる確率変数ならば，

$$
E(X) = \sum_{k\geq 1} P(X \geq k)
$$

となることに注意して，以下の式が成り立つ．

$$
E(N(j)|X_0 = i) = \sum_{m\geq 1} P(N(j) \geq m|X_0 = i).
$$

この式で再び (7.1.7) を用いると，

$$
E(N(j)|X_0 = i) = \frac{\rho_{ij}}{1-\rho_{jj}} < \infty
$$

が成立する．以上より定理の (i) の証明が終わる．

(ii) では，状態 j が再帰的であると仮定する．(7.1.7) 式より

$$
P(N(j) \geq m|X_0 = j) = 1
$$

が得られる．ここで，m を無限大にすると，定理の (ii) の証明は終わる．

8　ゴルトン-ワトソン分枝過程

8.1　ゴルトン-ワトソン分枝過程

この過程は Bienayme と Galton and Watson によって別々に導入されたもので，家系の存続をモデル化したものである．第 0 世代と呼ばれる男子の初期集合は，第 1 世代と呼ばれる男子の子どもを持つ．その子どもたちは第 2 世代と呼ばれる．その後同じように第 n 世代へと続いていく．第 n 世代の男子の数を Z_n $(n \geq 0)$ としよう．このモデルはこれまでにいくつかの生物学の問題および，物理学の問題でも用いられてきた．まず，ゴルトン-ワトソン過程 Z_n の数学的な定義を与える．対象を一般化して粒子と呼ぶことにする．Z_n の状態空間 $\mathcal{S}$ は非負の整数値をとる集合である．各粒子が次世代に Y 個の粒子を生じさせるものと仮定する．ただし，Y は非負の整数値をとる確率変数でその分布は $(p_k)_{k\geq 0}$ で与えられる．式で表すと

$$P(Y=k)=p_k \quad (k=0,1,\dots)$$

のようになる．さらに，各世代の各粒子の子孫の数は分布 $(p_k)_{k\geq 0}$ によって独立に与えられると仮定する．これらの仮定により，Z_n はマルコフ過程になることは明らかである．すなわち，Z_{n+1} の分布を得るためには，$(Z_k)_{k\leq n}$ で必要な情報は Z_n だけで十分だということである．特に，1 ステップ推移確率は，

$$p(i,j)=P(Z_{n+1}=j|Z_n=i)=P(\sum_{k=1}^{i} Y_k=j) \quad (i\geq 1, j\geq 0)$$

によって与えられる．ただし，$(Y_k)_{1\leq k\leq i}$ は確率分布 (p_k) に従う独立同分布の確率変数列とする．また，子孫分布 (p_k) に対して，第 n 次モーメント（期待値）が存在すると仮定する．すなわち次式を満たすような有限の値 m が存在するということである．

$$\sum_{k=0}^{\infty} kp_k = m$$

ここで，q を 1 粒子から出発したゴルトン-ワトソン過程が消滅してしまう確率としよう．つまり $q=P(\text{消滅}|Z_0=1)$ である．また，第 r 世代の子孫の数を決定すると

$$\begin{aligned}
P(\text{消滅}|Z_0=1) &= P(Z_n=0|Z_0=1)\\
&= \sum_{j\geq 0} P(Z_n=0, Z_r=j|Z_0=1)\\
&= \sum_{j\geq 0} P(Z_n=0|Z_r=j, Z_0=1)P(Z_r=j|Z_0=1)\\
&= \sum_{j\geq 0} P(Z_n=0|Y=j)P(Y=j)\\
&= \sum_{j\geq 0} P(\text{消滅}|Y=j)P(Y=j)
\end{aligned}$$

ここで，$Y=j$ の条件のもとでの消滅はこの過程の j 個の子孫の各粒子が消滅することを意味する．したがってマルコフ性によりこれら j 個の各粒子の消滅確率はいずれも q である．さらに，これら j 個の過程は独立である．したがって，$P(\text{消滅}|Y=j)=q^j$ となる．よって q は次式の解となる．

(8.1.1) $$q=\sum_{j\geq 0} p_j q^j.$$

また，$q = 1$ のとき，

$$\sum_{j \geq 0} p_j = 1$$

より，この方程式 (8.1.1) を満たすので $q = 1$ は (8.1.1) の解である．

次に，子孫分布の母関数を導入する．

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \quad (|s| \leq 1)$$

定理 8.1 $p_0 + p_1 < 1$ と仮定する．ゴルトン-ワトソン分枝過程は，以下を満たしている．

$$m \leq 1 \text{ ならば，} P(\text{任意の } n \geq 0 \text{ に対して，} Z_n \geq 1 | Z_0 = 1) = 0$$
$$m > 1 \text{ ならば，} P(\text{任意の } n \geq 0 \text{ に対して，} Z_n \geq 1 | Z_0 = 1) = 1 - q > 0$$

さらに，消滅確率 q は，$m > 1$ のとき，方程式 $f(s) = s$ の $[0, 1)$ での唯一の解である．

ゴルトン-ワトソン過程は $m < 1$ か $m = 1$ か $m > 1$ によって，それぞれ劣臨界的 (subcritical)，臨界的 (critical)，優臨界的 (supercritical) と呼ばれる．ゴルトン-ワトソン過程が永久に生き残りえることと，$m > 1$ とは同値である．したがって，生き残り続けることを特徴づける唯一のパラメータは子孫分布の期待値 m であることが分かる．もちろん，永久に存続する確率，すなわち存続確率 $1 - q$ は分布 $(p_k)_{k \geq 0}$ の母関数から得られる．

8.2 定理 8.1 の証明

定理 8.1 を証明する前に，ゴルトン-ワトソン過程に関するいくつかの性質を示す必要がある．まず，母関数 f から帰納的に f_n を，$f_1 = f$ そして任意の $n \geq 1$ に対して $f_{n+1} = f \circ f_n$ と定義する．

命題 8.2 $n \geq 1$ に対して，$Z_0 = 1$ という条件のもとでの Z_n の母関数は f_n である．

《証明》

帰納法で示す．

g_n を $Z_0 = 1$ のもとでの Z_n の母関数とすると $g_n(s) = E(s^{Z_n} | Z_0 = 1)$

(i) $n = 1$ のとき

$$g_1(s) = E(s^{Z_1} | Z_0 = 1) = E(s^{\sum_{i=1}^{1} Y_i}) = E(s^{Y_i}) = f_1(s)$$

が成り立つ．

(ii) $g_n(s) = f_n(s)$ が成り立つと仮定する．

まず，はじめに $Z_n = k$ で条件を付けると，Z_{n+1} の分布は $\sum_{i=1}^{k} Y_i$ の分布と同じである．ただし，Y_i は分布 $(p_k)_{k \geq 0}$ に従う独立同分布の確率変数である．

ゆえに，

$$\begin{aligned} E(s^{Z_{n+1}} | Z_n = k) &= E(s^{\sum_{i=1}^{k} Y_i}) \\ &= E(s^{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k}) \\ &= \prod_{i=1}^{k} E(s^{Y_i}) \\ &= f(s)^k \end{aligned}$$

よって，

$$
\begin{aligned}
g_{n+1}(s) &= E\left(s^{Z_{n+1}}|Z_0=1\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} E\left(s^{Z_{n+1}}, 1_{\{Z_n=k\}}|Z_0=1\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} P\left(Z_{n+1}=j, Z_n=k|Z_0=1\right)\cdot s^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{P(Z_{n+1}=j, Z_n=k, Z_0=1)}{P(Z_0=1)}\cdot s^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{P(Z_{n+1}=j, Z_n=k, Z_0=1)}{P(Z_n=k, Z_0=1)}\cdot \frac{P(Z_n=k, Z_0=1)}{P(Z_0=1)}\cdot s^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} P(Z_{n+1}=j|Z_n=k)P(Z_n=k|Z_0=1)\cdot s^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n=k|Z_0=1)\sum_{j=0}^{\infty} P(Z_{n+1}=j|Z_n=k)\cdot s^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n=k|Z_0=1)\cdot E(s^{Z_{n+1}}|Z_n=k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n=k|Z_0=1)\cdot f(s)^k \\
&= g_n\left(f(s)\right).
\end{aligned}
$$

仮定より

$$g_n(f(s)) = f_n(f(s)) = f_{n+1}(s)$$

より，すべての n について成り立つ.

命題 8.3

$$E(Z_n|Z_0=1) = m^n \quad (n \geq 0)$$

が成立している.

《証明》

まず，明らかに次の式が成り立つ.

$$E(Z_n|Z_0=1) = \sum_{k\geq 1} E(Z_n|Z_{n-1}=k)P(Z_{n-1}=k|Z_0=1)$$

また，$m = E(Y) = E(Z_1|Z_0=1)$ であることと，$\{Y_i\}$ は独立で Y と同分布であることに注意すると，任意の $k \geq 1$ に対して

$$
\begin{aligned}
E(Z_n|Z_{n-1}=k) &= E\left(\sum_{i=1}^{k} Y_i\right) \\
&= E(Y_1+Y_2+\cdots+Y_k) \\
&= km
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

したがって，

$$
\begin{aligned}
E(Z_n|Z_0=1) &= \sum_{k\geq 1} E(Z_n|Z_{n-1}=k)P(Z_{n-1}=k|Z_0=1) \\
&= \sum_{k\geq 1} kmP(Z_{n-1}=k|Z_0=1) \\
&= m\sum_{k\geq 1} kP(Z_{n-1}=k|Z_0=1) \\
&= mE(Z_{n-1}|Z_0=1)
\end{aligned}
$$

これを繰り返せば

$$
\begin{aligned}
E(Z_n|Z_0=1) &= m^{n-1}\cdot E(Z_1|Z_0=1) \\
&= m^{n-1}\cdot E_1(Z_1) \\
&= m^n
\end{aligned}
$$

これで定理 8.1 を証明する準備ができた．

《定理 8.1 の証明》

まず $m<1$ の場合を考える．

任意の非負の整数値をとる確率変数 X の期待値に関して

$$E(X)=\sum_{k\geq 0} kP(X=k) \geq \sum_{k\geq 1} P(X=k)=P(X\geq 1)$$

の不等式が得られる．この不等式と命題 8.3 を用いると

$$P(Z_n\geq 1|Z_0=1)=E(Z_n|Z_0=1)=m^n$$

が成立する．

ここで，n を大きくすると $m<1$ より

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n\geq 1|Z_0=1)=0 \tag{8.2.1}$$

が得られる．また，事象列 $\{Z_n\geq 1\}$ は単調に減少する．

したがって

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(Z_n\geq 1|Z_0=1) &= P\left(\bigcap_{n\geq 0}\{Z_n\geq 1\}|Z_0=1\right) \\
&= P(\text{任意の } n\geq 0 \text{ に対して } Z_n\geq 1|Z_0=1).
\end{aligned}
$$

ゆえに，$m<1$ のとき (8.2.1) より，

$$P(\text{任意の } n\geq 0 \text{ に対して } Z_n\geq 1|Z_0=1)=0$$

が成り立つ．

次に，$m=1$，$m>1$ の場合について

$Z_0=1$ の条件のもとでの Z_n の母関数は f_n であったので

$$P(Z_n=0|Z_0=1)=f_n(0)$$

そして，事象 $\{Z_n = 0\}$ は n に関して増加しているので

$$\lim_{n\to\infty} P(Z_n = 0|Z_0 = 1) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = P\left(\bigcup_{n\geq 0}\{Z_n = 0\}|Z_0 = 1\right)$$

が得られる．

ここで，

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n\to\infty} f_n(0) \\ &= P\left(\bigcup_{n\geq 0}\{Z_n = 0\}|Z_0 = 1\right) \\ &= P(\text{ある } n \geq 0 \text{ に対して } Z_n = 0|Z_0 = 1) \end{aligned}$$

で定義する．$f_{n+1}(0) = f(f_n(0))$ であるので n を大きくすると f の連続性により

$$f(q) = q$$

$m = 1$ の場合

$$\begin{aligned} f'(s) &= \sum_{k\geq 1} k \cdot p_k s^{k-1} \\ &< \sum_{k\geq 1} k \cdot p_k \\ &= m = 1 \quad (0 < s < 1) \end{aligned}$$

が得られる．$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k$ は $[s, 1]$ で連続，$(s, 1)$ で微分可能であるから平均値の定理により

$$\frac{f(1) - f(s)}{1 - s} = f'(c) \quad \text{となる } c \ (s < c < 1) \text{ が存在する}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} f(1) - f(s) &= f'(c)(1 - s) \\ &< 1 - s \\ \Leftrightarrow 1 - f(s) &< 1 - s \\ \Leftrightarrow f(s) &> s \quad (s < 1) \end{aligned}$$

を得る．

ゆえに，$f(s) = s$ を満たす解は閉区間 $[0, 1]$ では $s = 1$ のみとなる．したがって $q = 1$ となる．

次に $m > 1$ の場合

$f'(1) = m > 1$ で f' の連続性から，もし $1 - \eta < s < 1$ ならば $1 < f'(s) < f'(1) = m$ となるような η が存在する．したがって平均値の定理により

$$\frac{f(1) - f(s)}{1 - s} = f'(c) \quad \text{となる } c \ (s < c < 1) \text{ が存在する}$$

ゆえに

$$\begin{aligned} f(1) - f(s) &= f'(c)(1 - s) \\ &> 1 - s \\ \Leftrightarrow 1 - f(s) &> 1 - s \\ \Leftrightarrow f(s) &< s \quad (s < 1) \end{aligned}$$

を得る．

ところで，$s=0$ で $f(0)=p_0\geq 0$ となるので中間値の定理により $f(s)=s$ を満たす解は半開区間 $[0,1)$ で少なくとも 1 つ存在する．この解を s_1 とする．($f(s_1)=s_1$ を満たす)

ここでこの解は半開区間 $[0,1)$ で一意的に決まることを背理法により示す．

そのために，半開区間 $[0,1)$ で s_1 とは異なる解 t_1 が存在すると仮定する．ところで，$f(1)=1$ であるので平均値の定理により，開区間 $(0,1)$ で

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=1$$

を満たす解 $\xi_1,\xi_2(\xi_1\neq\xi_2)$ が存在する．（グラフの挿入）

一方，$p_0+p_1<1$ より開区間 $(0,1)$ 内の任意の s について

$$f''(s)=\sum_{k\geq 2}k(k-1)p_k s^{k-2}>0$$

となるので，$f'(s)$ は $0<s<1$ で狭義単調増加となるが，これは上の $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=1$ に矛盾する．

ゆえに，$f(s)=s$ の解は $q=s_1$ か $q=1$ の 2 つしかない．さらに，背理法を用いるために $q=1$ とすると

$$1=q=\lim_{n\to\infty}f_n(0)$$

であった．このことより，n が十分大きくなると $f_n(0)>1-\eta$ が成り立つ．

ゆえに，

$$1-\eta<s<1 \text{ なら，} f(s)<s \text{ より } f(f_n(0))<f_n(0)$$

が導かれる．しかしこれ，$f(f_n(0))=f_{n+1}(0)<f_n(0)$ は，$f_n(0)$ が n に関して単調増加であることに反する．よって $q=s_1$．

そして，$q=s_1<1$ なので $0<q<1$

ゆえに，

$$\begin{aligned}P(\text{任意の } n\geq 0, Z_n\geq 1|Z_0=1)&=1-P(\text{ある } n\geq 0, Z_n=0|Z_0=1)\\&=1-q\\&>0.\end{aligned}$$

よって示された．

さて，次にゴルトン-ワトソン過程は 0 にいくか無限大にいくかのいずれかであることを示そう．

系 8.4 $p_0+p_1<1$ と仮定する．ゴルトン-ワトソン過程 Z_n のすべての状態 $k\geq 1$ は非再帰的である．さらに

$$P(\lim_{n\to\infty}Z_n=0)=q$$
$$P(\lim_{n\to\infty}Z_n=\infty)=1-q$$

が成り立つ．

《証明》

$p_0=0$ とする．

このとき，粒子の数は第 1 世代から次の世代へ移るにつれて増加するだけである．したがって，任意の $k\geq 1$ に対して

$$p_n(k,k)=\{(p_1)^k\}^n$$

が成り立つ．いま $q_1 < 1$ なので
$$\lim_{n\to\infty} p_n(k,k) < \infty.$$
ゆえに，任意の $k \geq 1$ に対して非再帰的である．

次に，$p_0 > 0$ とする．

このとき，ある状態 $k \geq 1$ に対して状態 k にはじめて戻ってくる時刻を
$$T_k = \inf\{n \geq 1 : Z_n = k\}$$
で定義する．

もし第 1 世代に粒子が存在しなければ状態 k には戻れないので
$$P(T_k < \infty | Z_0 = k) \leq 1 - {p_0}^k < 1$$
定義によりこれは非再帰的を表す．

次に，事象 $A = \{n$ が無限大になっても，Z_nは無限大にならない $\}$ について

この事象 $A \ni \omega$ 上では $Z_n(\omega)$ が無限回，集合 $\{0, 1, \ldots, N(\omega)\}$ を訪れるような整数 $N(\omega)$ が存在する．Z_n は非再帰的なので定理 7.7 より Z_n がどの状態 $k \geq 1$ にも有限回だけ確率 1 で戻ってくることが分かる．

ゆえに，これが可能なのは Z_n が A 上で 0 に収束するときに限る．このことは，A が起こって Z_n が 0 に収束するか，A が起こらないで Z_n が無限大になるかのいずれかを示す．

したがって，Z_n が確率 q で 0 に収束するので，Z_n が確率 $1 - q$ で無限大になる．

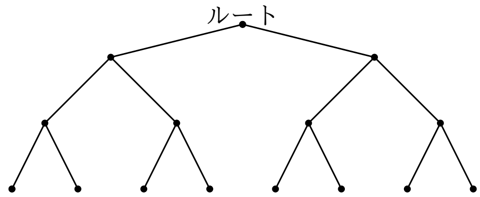
9　ツリー上における臨界確率の一意性

第 5 章において，$\mathbf{Z^2}$ 上の臨界確率 p_c と p_T の一意性を示すことができた．この章では臨界確率の一意性がツリー上において成り立つこと，およびそのときの臨界確率の値を示す．ツリーには $\mathbf{Z^2}$ にはない性質がある．それはツリー上においてループが存在しないということである．つまり，ある点 x からスタートしてある点 x に戻る開路は，ツリーの性質上同じ点を 2 度通過しなければならないので，ループは存在しない．

また，ツリー上におけるパーコレーションは前章の分子過程に帰着することが知られている．

9.1　ツリーについて

はじめに，2 分ツリーを例にとってツリーの説明をする．



まず，ルートと呼ばれる特別な点が存在する．ルートには 2 人の子どもがいて，またその 2 人の子どもにはそれぞれ 2 人の子どもがいるという状況が以下同様に続いていく．つまり，ルートは第 0 世代，その子どもは第 1 世代，$\cdots$ と続く．第 k 世代では 2^k 個の点が存在する．ルートには 2 個の最近接点が存在し，他のすべての点には 3 個の最近接点が存在する．したがって各点から出発するボンドは (ルートを除いて)3 個存在する．

次に，これをもとに n 分ツリーについて説明する．まず，同様にルートと呼ばれる特別な点が存在する．ルートには n 人の子どもがいて，またその n 人の子どもにはそれぞれ n 人の子どもがいる．という状況が以下同様に続いていく．一般に第 k 世代では n^k 個の点が存在する．ルートには n 個の最近接点が存在し，他のすべての点には $n+1$ 個の最近接点が存在する．したがって各点から出発するボンドは (ルートを除いて)n 個存在する．

ここで，$p \in [0,1]$ とする．各ボンドはすべて他のボンドとは独立に，確率 p で開き確率 $1-p$ で閉じているとする．そして C をツリー上のオープンパスでルートにつながっている点の集合とする．言い換えれば，C はルートを含む開クラスターである．

9.2　n 分ツリーでの臨界確率の一意性

2 分ツリー，3 分ツリーを考えた後，n 分ツリーの場合，そして分岐の数が各世代において変数 x $(2 \leq x \leq n)$ である場合について臨界確率の一意性およびその時の値を考える．

9.2.1　2 分ツリーの場合

まず，はじめにいくつか記号を決める．

Z_n をオープンパスでルートにつながっている第 n 世代の個体の数とし，$Z_0 = 1$(ルートの個数) とする．

ある親が与えられると，開いたボンドでその親につながっている子どもの数 Y は，2 項分布 $B(2,p)$ に従う確率

変数となる．すなわち次のように表せる．

$$P(Y=k)= {}_2C_k\, p^k(1-p)^{2-k} \quad (k=0,1,2)$$

また，$n \geq 1$ に対して Z_n は

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} Y_i$$

と書ける．ただし，Y_i は $B(2,p)$ に従う独立同分布な確率変数とする．したがって Z_n はゴルトン-ワトソン分枝過程となる．また，Z_n と C との関係は

$$|C| = \sum_{n\geq 0} Z_n$$

で与えられる．これより，

$$\theta(p) = P(|C|=\infty) = P(\text{ すべての } n \geq 1 \text{ に対して，} Z_n \geq 1)$$

が導かれる．また定理 8.1 により

$$\theta(p) = P(\text{ すべての } n \geq 1 \text{ に対して，} Z_n \geq 1) > 0$$

と $E(Y) = 2p > 1$ とは同値であることが分かる．

したがって，2 分ツリー上のパーコレーションに対する臨界確率 $p_c = \frac{1}{2}$ となる．

次に臨界確率 p_T について．$p_T = \inf\{p \in [0,1]; E_p(|C|) = \infty\}$ であったので $E(|C|)$ について考える．命題 8.3 より

$$\begin{aligned} E(|C|) &= E\left(\sum_{n\geq 0} Z_n\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} E(Z_n) \\ &= \sum_{n\geq 0} (2p)^n. \end{aligned}$$

この $E(|C|)$ の値と p_T の定義から，$p_T = \frac{1}{2}$ であることがわかる．

つまり，2 分ツリーにおいて臨界確率 p_c と p_T の一意性が示され，その値は $p_c = p_T = \frac{1}{2}$ である．

9.2.2　3 分ツリーの場合

2 分ツリーの場合と同様に考えると次の定理を得る．

定理 9.1　3 分ツリーにおける臨界確率 p_c と p_T は一致し，その値は $\frac{1}{3}$ である．

《証明》

2 分ツリーのときと同様に，Z_n をオープンパスでルートにつながっている第 n 世代の個体の数とし，$Z_0 = 1$(ルートの個数) とする．

ある親が与えられると，開いたボンドでその親につながっている子どもの数 Y は，2 項分布 $B(3,p)$ に従う確率変数となり，

$$P(Y=k)= {}_3C_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{3-k} \quad (k=0,1,2,3)$$

と表せる．

また，$n \geq 1$ に対して Z_n は

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} Y_i$$

と書ける．ただし，Y_i は $B(3,p)$ に従う独立同分布な確率変数とする．したがって Z_n はゴルトン-ワトソン分枝過程となる．Z_n と C との関係は

$$|C| = \sum_{n \geq 0} Z_n$$

で与えられる．

このとき，2 分ツリーのときと同様にして $\theta(p)$ の定義と，定理 8.1 により，

$$\begin{aligned}
\theta(p) &= P(|C| = \infty) \\
&= P(\sum_{n \geq 0} Z_n = \infty) \\
&= P(\text{すべての } n \geq 1 \text{ に対して，} Z_n \geq 1) > 0 \\
\Leftrightarrow E(Y) &= 3p > 1
\end{aligned}$$

よって 3 分ツリーの上のパーコレーションに対する臨界確率は $p_c = \frac{1}{3}$ となる．2 分ツリーのときと同様に臨界確率 p_T について考えると，

$$\begin{aligned}
E(|C|) &= E\left(\sum_{n \geq 0} Z_n\right) \\
&= \sum_{n \geq 0} E(Z_n) \\
&= \sum_{n \geq 0} (3p)^n
\end{aligned}$$

この $E(|C|)$ の値と p_T の定義から，$p_T = \frac{1}{3}$ であることがわかる．

つまり，3 分ツリーにおいて臨界確率 p_c と p_T の一意性が示され，その値は $p_c = p_T = \frac{1}{3}$ である．

9.2.3 n 分ツリーの場合

n 分ツリーのとき，次の定理が成立する．

定理 9.2 n 分木において，臨界確率 p_c と p_T は一致し，その値は $\frac{1}{n}$ である．

《証明》

文字が混同するため，m 分ツリーとして考える．Z_n をオープンパスでルートにつながっている第 n 世代の個体の数とし，$Z_0 = 1$(ルートの個数) とする．

ある親が与えられると，開いたボンドでその親につながっている子どもの数 Y は，2 項分布 $B(m,p)$ に従う確率変数となり，

$$P(Y = k) = {}_mC_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{m-k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

と表せる．

また，$n \geq 1$ に対して Z_n は

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} Y_i$$

と書ける．ただし，Y_i は $B(m,p)$ に従う独立同分布な確率変数とする．したがって Z_n はゴルトン-ワトソン分枝過程となる．Z_n と C との関係は

$$|C| = \sum_{n\geq 0} Z_n$$

で与えられる．

このとき，$\theta(p)$ の定義と，定理 8.1 により，

$$\begin{aligned}\theta(p) &= P(|C| = \infty)\\ &= P(\sum_{n\geq 0} Z_n = \infty)\\ &= P(\text{ すべての } n \geq 1 \text{ に対して，} Z_n \geq 1) > 0\\ \Leftrightarrow E(Y) &= mp > 1\end{aligned}$$

よって m 分ツリーの上のパーコレーションに対する臨界確率は $p_c = \frac{1}{m}$ となる．臨界確率 p_T について考えると，

$$\begin{aligned}E(|C|) &= E\left(\sum_{n\geq 0} Z_n\right)\\ &= \sum_{n\geq 0} E(Z_n)\\ &= \sum_{n\geq 0} (mp)^n\end{aligned}$$

この $E(|C|)$ の値と p_T の定義から，$p_T = \frac{1}{m}$ であることがわかる．

つまり，m 分ツリーにおいて臨界確率 p_c と p_T の一意性が示され，その値は $p_c = p_T = \frac{1}{m}$ である．

9.2.4 各世代における分岐の数が変数 x $(2 \leq x \leq n)$ の場合

ツリー上の各世代における分岐の数がそれぞれ 2 から n のいずれかの値をとる場合について考える．このとき次の定理が成り立つ．

定理 9.3 ある i 世代の分岐の数を x_i $(2 \leq x_i \leq n)$ とする．この x_i 分ツリーにおいて，臨界確率 p_c と p_T は一致し，その値は $\sup_i \dfrac{1}{x_i}$ である．

《証明》

ルートを $Z_0 = 1$ とし，ある i 世代の分木の数を x_i とする．第 n 世代の全サイト数は

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \quad \text{ただし } 2 \leq x_i \leq n$$

ある i 世代において，両親が与えられたとき，開いたボンドでその両親につながっている子どもの数 Y は二項分布 $B(x_i, p)$ に従う確率変数となる．すなわち

$$P(Y_i = k) = {}_{x_i}C_k \cdot p^k \cdot (1-p)^{x_i - k} \quad (k = 0, 1, \ldots, x_i)$$

Z_n をオープンパスでルートにつながっている第 n 世代の個体の数とする．このとき，$n \geq 1$ に対して

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} Y_i$$

とかける．ただし，Y_i は二項分布 $B(x_i, p)$ に従う．したがって Z_n はゴルトン-ワトソン過程となる．また，Z_n と C との関係は

$$|C| = \sum_{n \geq 0} Z_n$$

で与えられる．これより，

$$\theta(p) = P(|C| = \infty) = P(\text{ すべての } n \geq 1 \text{ に対して，} Z_n \geq 1)$$

が導かれ，定理 8.1 により

$$\theta(p) = P(\text{ すべての } n \geq 1 \text{ に対して，} Z_n \geq 1) > 0$$

と $E(Y) = x_i p > 1$ とは同値であることが分かる．

したがって，p_c の定義からある i 世代における分岐数が変数 x $(2 \leq x \leq n)$ であるようなツリー上の臨界確率は $p_c = \sup_i \frac{1}{x_i}$ となる．

次に臨界確率 p_T について考える．

$$\begin{aligned} E(|C|) &= E\left(\sum_{n \geq 0} Z_n\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} E(Z_n) \\ &= \sum_{n \geq 0} (x_i p)^n \end{aligned}$$

この $E(|C|)$ の値と p_T の定義から，$p_T = \sup_i \frac{1}{x_i}$ がわかる．

つまり，x 分ツリーにおける臨界確率 p_c と p_T の一意性が示され，その値は $p_c = p_T = \sup_i \frac{1}{x_i}$ である．

以上より，ツリー上において臨界確率 p_c と p_T の一意性が示される．これらの結果から，分岐の数が多くなればなるほどツリーにおいて臨界確率の値は小さくなる．つまり，分岐の数が多くなればなるほど無限に広がりやすいことがわかる．

参考文献

[1] 梅垣壽春，大矢雅則，塚田真，『測度・積分・確率』，共立出版株式会社，1987

[2] 小田垣孝，『つながりの科学』，裳華房，2000

[3] 小田垣孝，『パーコレーションの科学』，裳華房，2002

[4] 折原明夫，『測度と積分』，裳華房，1997

[5] 掛下伸一，『統計基礎　確率論』，サイエンス社，1979

[6] 志賀徳造，『ルベーグ積分から確率論』，共立出版株式会社，2000

[7] スタウファー，アハロニー，訳 小田垣孝，『パーコレーションの基本原理』，吉岡書店，2001

[8] 樋口保成，『パーコレーション　ちょっと変わった確率論入門』，遊星社，2011

[9] 樋口保成，『パーコレーション理論講義』，サイエンス社，2014

[10] R．B．シナジ，訳 今野紀雄，林俊一，『マルコフ連鎖から格子確率モデルへ』，丸善出版，2012