機械力学振動課題

J4-210447 川村朋広

2023 年 12 月 25 日

1

x軸を鉛直上向きを正にとる座標系で考える。重みの質量を$m(=10)$とおくと、重みの運動方程式は

$$m\ddot{x} = -2kx - mg$$
$$\ddot{x} = -\frac{2k}{m}\left(x + \frac{mg}{2k}\right)$$

となる。したがって固有角振動数ωは

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

とあらわせることより、固有振動数fは

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{2m}} \\ &= 3.9[Hz] \end{aligned}$$

と求められる。

2

x軸を鉛直上向きを正にとる。物体がx変位した時の加速度計の変位をx_1とおくと運動方程式は

$$m\ddot{x} = -k(x - x_1) - c(\dot{x} - \dot{x_1}) \tag{1}$$

とあらわせる。ここで$x_r = x - x_1$とおくと方程式(1)は

$$m\ddot{x_r} + c\dot{x_r} + kx_r = -m\ddot{x_1}$$
$$\ddot{x_r} + 2\zeta\omega_n\dot{x_r} + \omega_n^2 x_r = -\ddot{x_1}$$

ただし、$\omega_n \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$、$\zeta \equiv \frac{c}{2\sqrt{mk}}$である。
ここで、x_rを$z_r \in \mathbb{C}$に、x_1を$z_1 \in \mathbb{C}$に置き換えて、複素数範囲の微分方程式

$$\ddot{z_r} + 2\zeta\omega_n\dot{z_r} + \omega_n^2 z_r = -\ddot{z_1} \tag{2}$$

このときjを虚数単位、$A_r, A_1 \in \mathbb{C}$として

$$
\begin{aligned}
z_r &= A_r exp(j\omega t) \\
z_1 &= A_1 exp(j\omega t)
\end{aligned}
$$

と置いて、方程式(2)を整理すると、

$$
\begin{aligned}
&A_r \left[\omega_n^2 - \omega^2 + j(2\zeta\omega_n\omega)\right] exp(j\omega t) = A_1\omega^2 exp(j\omega t) \\
&\frac{A_r}{A_1} = \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j(2\zeta\omega_n\omega)}
\end{aligned}
$$

となる。これより、

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{A_r}{A_1}\right|^2 &= \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j(2\zeta\omega_n\omega)} \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 - j(2\zeta\omega_n\omega)} \\
&= \frac{\omega^4}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n^2\omega^2)^2}
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{p} = |\frac{A_r}{A_1}|$とおき、これを$\zeta$に関してとくと

$$
\zeta = \frac{\sqrt{\{(p-1)\omega^2 + \omega_n^2\}\{(p+1)\omega^2 - \omega_n^2\}}}{2\omega_n\omega}
$$

となるから

$$
c = \sqrt{mk\left\{(p-1)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 1\right\}\left\{p + 1 - \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2\right\}}
$$

$p = 18/12 = 3/2$、$\omega = 2\pi \times 5 = 10\pi$、$\omega_n = \sqrt{750}$より$c = 93[kg^2/s^2]$と求められる。