

# 数学IEレポート1

J4-210447 川村朋広

2023 年 1 月 15 日

## 問1

(a)

$$y' = (x+1)^2(y+1)$$

【解答】

$y \neq -1$ のときを考え、両辺を $y+1$ で割ると、

$$\frac{y'}{y+1} = (x+1)^2$$

両辺を積分すると

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int (x+1)^2 dx$$

$$\begin{aligned} \log|y+1| &= \frac{1}{3}(x+1)^3 + C_1 \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C_2 \end{aligned}$$

ただし、 $C_1$ と $C_2$ は実定数である。したがって実定数 $A$ を用いて、

$$y = Ae^{\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x} - 1$$

尚、 $y = -1$ も解であるが上記の一般解に含まれる。

(b)

$$y' + 2y = \cos x$$

【解答】

まず、特殊解を求める

特殊解 $y_0$ を

$$y_0 = \alpha \sin x + \beta \cos x$$

と仮定する。この時、代入して整理すると、

$$(\alpha + 2\beta)\cos x + (2\alpha - \beta)\sin x = \cos x$$

したがって、

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 2\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

これを解くと、 $(\alpha, \beta) = (\frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ が得られるので

$$y_0 = \frac{\sin x + 2\cos x}{5}$$

次に、微分方程式

$$y' + 2y = 0$$

の一般解を求める。 $y \neq 0$ として、両辺を $y$ で割ると

$$\frac{dy}{y} = -2$$

両辺を積分して、

$$\int \frac{dy}{y} = -2 \int dx$$

積分定数 $C$ および実定数 $A$ を用いて、

$$\log|y| = -2x + C$$

$$y = Ae^{-2x}$$

これは $y = 0$ の場合も含む。以上より、一般解 $y$ は

$$y(x) = Ae^{-2x} + \frac{\sin x + 2\cos x}{5}$$

(c)

$$4y'' + 12y' + 9y = 0$$

【解答】

$y = e^{\lambda x}$ が解に含まれるとする。この時、与式に代入して整理すると

$$e^{\lambda x}(4\lambda^2 + 12\lambda + 9) = 0$$

$$e^{\lambda x}(2\lambda + 3)^2 = 0$$

$$\lambda = -\frac{3}{2}$$

したがって、一般解 $y$ は実数 $C_1$ と $C_2$ を用いて

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{3}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{3}{2}x}$$

である

(d)

$$y'' - 2y' + 5y = 2\cos^2 x$$

【解答】

まず、微分方程式

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \tag{1}$$

の解を考える。解の形が $e^{\lambda x}$ で与えられるとすると

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$$

となるから、

$$\lambda = 1 + 2i, 1 - 2i$$

今、

$$y_1(x) = e^x \cos 2x$$

$$y_2(x) = e^x \sin 2x$$

と置くと、これらは(1)の解である。特殊解を

$$y_0(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

と置くと、一般解は実数 $D_1, D_2$ を用いて

$$y(x) = D_1 y_1(x) + D_2 y_2(x) + y_0(x)$$

と表される。なお、 $c_1$ と $c_2$ については以下のように求まる。

$$y'_1 = e^x(\cos 2x - 2\sin 2x)$$

$$y'_2 = e^x(\sin 2x + 2\cos 2x)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} &= e^{2x} \{ \cos 2x(\sin 2x + 2\cos 2x) - \sin 2x(\cos 2x - 2\sin 2x) \} \\ &= 2e^{2x}(\cos^2 2x + \sin^2 2x) \\ &= 2e^{2x} \end{aligned}$$

である。よって、

$$c'_1 = -\frac{y_2(2\cos^2 x)}{2e^{2x}} = -e^{-x} \sin 2x \cos^2 x$$

$$c'_2 = \frac{y_1(2\cos^2 x)}{2e^{2x}} = e^{-x} \cos 2x \cos^2 x$$

これより、

$$\begin{aligned}
 c_1(x) &= \int -e^{-x} \sin 2x \cos^2 x dx \\
 &= \int -e^{-x} \sin 2x \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int e^{-x} \sin 2x dx - \frac{1}{4} \int e^{-x} \sin 4x dx \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{e^{-x}}{5} (-\sin 2x - 2\cos 2x) - \frac{1}{4} \frac{e^{-x}}{17} (-\sin 4x - 4\cos 4x) + D_3 \\
 &= \frac{e^{-x}}{4} \left\{ \frac{2}{5} (\sin 2x + 2\cos 2x) + \frac{1}{17} (\sin 4x + 4\cos 4x) \right\} + D_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_2(x) &= \int e^{-x} \cos 2x \cos^2 x dx \\
 &= \int e^{-x} \cos 2x \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int e^{-x} \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int e^{-x} \cos 4x dx + \frac{1}{4} \int e^{-x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{e^{-x}}{5} (2\sin 2x - \cos 2x) + \frac{1}{4} \frac{e^{-x}}{17} (4\sin 4x - \cos 4x) - \frac{1}{4} e^{-x} + D_4 \\
 &= \frac{e^{-x}}{4} \left\{ \frac{2}{5} (2\sin 2x - \cos 2x) + \frac{1}{17} (4\sin 4x - \cos 4x) - 1 \right\} + D_4
 \end{aligned}$$

なお、 $D_3, D_4$ は実定数である、よって

$$y_0(x) = \frac{1}{5} - \frac{1}{17} \cos 2x - \frac{9}{34} \sin 2x$$

したがって、一般解は

$$y(x) = D_1 e^x \cos 2x + D_2 e^x \sin 2x - \frac{1}{17} \cos 2x - \frac{9}{34} \sin 2x + \frac{1}{5}$$

(e)

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{y}\right) + \frac{x}{y^2} y' = 0$$

【解答】

$x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ かつ $y \neq 2$ の時、式変形すると

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{x} + \frac{2dy}{y^2 - 2y} &= 0 \\
 \int \frac{dx}{x} + \int \left( \frac{1}{y-2} - \frac{1}{y} \right) dy &= C \\
 \log|x| + \log \left| \frac{y-2}{y} \right| &= C \\
 \frac{y-2}{y} &= A e^{-x}
 \end{aligned}$$

となる。なおC及びAは実定数である。

$$y(x) = \frac{2}{1 - Ae^{-x}}$$

が一般解となる。なお $y = 2$ もそれに含まれる。

(f)

$$\begin{cases} y_1' - 2y_2' + 4y_2 = 0 \\ 3y_1' - 2y_2' - 4y_1 = 0 \end{cases}$$

【解答】

連立微分方程式を行列で書き直すと

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

となる。この連立微分方程式の解が

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

であると仮定すると、(4)を(3)に代入して整理すると

$$\lambda \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

これが $\phi_1 \neq 0$ かつ $\phi_2 \neq 0$ を満たす解を持つとき、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} &= (2 - \lambda)(3 - \lambda) - 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって $\lambda = 1$ または $4$ である

$\lambda = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となり、これを満たす固有ベクトルの一つは  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  である

$\lambda = 4$ のとき

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となり、固有ベクトルの一つは  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  である

以上より、一般解は実定数  $C_1, C_2$  を用いて

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される

補題

$(a, b) \neq (0, 0)$  のとき

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C_1$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx) + C_2$$

【証明】

$$\begin{aligned} I &= \frac{d}{dx} (e^{ax} \sin bx) \\ &= e^{ax} (a \sin bx + b \cos bx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{d}{dx} (e^{ax} \cos bx) \\ &= e^{ax} (a \cos bx - b \sin bx) \end{aligned}$$

とそれぞれおく。つまり

$$\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ax} \sin bx \\ e^{ax} \cos bx \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^{ax} \sin bx \\ e^{ax} \cos bx \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} aI - bJ \\ bI + aJ \end{pmatrix} \\ &= \frac{d}{dx} \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \sin bx - b \cos bx \\ a \cos bx + b \sin bx \end{pmatrix} \end{aligned}$$

両辺を  $x$  で積分すると目的の式が導出される

## 問2

(a)

講義で取り上げたエルミートの微分方程式・多項式について調べ、自由に記述せよ

エルミート微分方程式とは  $m \in \mathbb{Z}$  として

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2m\right)H_m(x) = 0$$

の形をした微分方程式のことをさす

この微分方程式の級数解  $H_m(x)$  をエルミート多項式といい

$$H_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

とあらわされる。

微分方程式に代入して整理すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + 2ma_n]x^n = 0$$

各項が0であることより、以下のような漸化式が導かれる

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n-2m)a_n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{2n-2m}{(n+2)(n+1)}a_n$$

$a_0$  と  $a_1$  が決まっていれば  $\forall n \in \mathbb{N}$  に対して、 $a_n$  がきまる。実際に求めてみると、

$$H_m(x) = m! \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^n}{n!(m-2n)!} (2x)^{m-2n}$$

となる。

【ほかの性質】

重み関数  $e^{-x^2}$  として直交性を持つ

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}2^n n! \delta_{m,n}$$

ロドリゲスの公式

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2}$$

母関数について

$$e^{-y^2+2xy} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x) \frac{y^m}{m!}$$

周回積分であらわされる

$$H_m(x) = \oint_C \frac{e^{-z^2+2xz}}{z^{m+1}} dz$$

(b)

常微分方程式の数値計算法について調べ、自由に記述せよ

微分方程式

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

について考える。数値計算法の方法論はオイラー法とルンゲクッタ型方式がある。

【オイラー法】

初期値 $x_0$ からはじめて、刻み幅を $h$ として、 $x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, \dots$ における $y(x)$ の値を順次求めていく。今、曲線の傾きが $f(x, y)$ であることがわかるので、 $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$y(x_i) = y(x_{i-1}) + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

と近似できる。こうして、再帰関数を持ちいてプログラムを組むと微分方程式をコンピュータ上で解くことができる。なお、誤差をできるだけ小さくするために $h$ は限りなく0に近い値を用いる必要がある。このように $x = x_i$ の右側で近似し、前のデータから次のデータを求めるオイラー法のことを特に、前進差分という。一方、 $x = x_{0i}$ よりも左側で近似すると

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

とあらわすことができる。このとき、後( $i+1$ のとき)の値から、前の値( $i$ のとき)の値が求まる。これを後退差分という。

しかし、理論的には誤差が小さくなるオイラー法だが、実際は

- 刻み幅を小さくすることで計算量がふえる
- 刻み幅が小さくなると、丸め誤差が増える
- 計算回数が増えると、誤差の累積が多くなる

といった問題点がある。

【ルンゲクッタ型方式】

上記のオイラー法における欠点を補っているのが、ここで紹介するルンゲクッタ法である。テーラー展開の2次項までで近似すると

$$\begin{aligned}y(x+h) &\approx y(x) + h \frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} \\ &= y(x) + hf(x, y) + \frac{h^2}{2} \frac{df(x, y)}{dx}\end{aligned}$$

ここで、刻み幅を $kh$ とする

$$\begin{aligned}\frac{df(x, y)}{dx} &\approx \frac{f(x+kh, y(x+kh)) - f(x, y)}{kh} \\ &\approx \frac{f(x+kh, y(x) + khf(x, y)) - f(x, y)}{kh}\end{aligned}$$

と書ける。

$k=1$ の時、ホイン法と呼ばれていて、

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}f(x, y) + \frac{h}{2}f(x+h, y(x) + hf(x, y))$$

とあらわされる。



$k = \frac{1}{2}$ の時は、修正オイラー法と呼ばれており

$$y(x+h) = y(x) + hf(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{h}{2}f(x, y))$$

と表される。

## 参考文献

- 東京大学工学部精密工学科「常微分方程式の数値解法」
- 永宮健夫「微分方程式論」