数学IEレポート2

J4-210447 川村朋広

2023 年 1 月 24 日

問1

(a)

2次元平面上の放物線$\boldsymbol{r} = (t, t^2)$について、原点から$t = a$までの距離を求めよ。

【解答】

求める長さを$L(a)$とおくと、

$$\begin{aligned} L(a) &= \int_0^a \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} dt \\ &= \int_0^a \sqrt{1 + \frac{dt^2}{dt}} dt \\ &= \int_0^a \sqrt{1+2t} dt \\ &= \left[\frac{1}{3} (1+2t)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3} \left\{ (1+2a)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\} \end{aligned}$$

と求められる。

(b)

$\boldsymbol{p}$は定ベクトル、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$、$r = |\boldsymbol{r}|$とし、3次元空間上のスカラー場

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3}$$

の勾配が、次式で与えられることを示せ。

$$\mathrm{grad}\phi = \frac{r^2 \boldsymbol{p} - 3(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}) \boldsymbol{r}}{r^5}$$

【証明】

$\boldsymbol{p}$の各成分を(p_x, p_y, p_z)とする。 $\phi(r)$をxで微分した時を考える。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\boldsymbol{p}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} - \frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}2x(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{(x^2+y^2+z^2)^3} \\
&= \frac{r^3 p_x - 3r(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})x}{r^6} \\
&= \frac{r^2 p_x - 3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})x}{r^5}
\end{aligned}
$$

となる。y、zについても同様に微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{r^2 p_y - 3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})y}{r^5} \\
\frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{r^2 p_z - 3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})z}{r^5}
\end{aligned}
$$

が得られるので、題意の数式は示された。

(c)

3次元空間上の2つのベクトル場$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$、$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})$について以下の恒等式を示せ。

$$\mathrm{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = -(\mathrm{div}\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} + (\mathrm{div}\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}$$

【証明】

$\boldsymbol{a}$の各成分を(a_x, a_y, a_z)、$\boldsymbol{b}$の各成分を(b_x, b_y, b_z)とおく。

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

なので、x成分について

$$
\begin{aligned}
&[\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]_x \\
&= \frac{\partial}{\partial y}(a_x b_y - a_y b_x) - \frac{\partial}{\partial z}(a_z b_x - a_x b_z) \\
&= b_y\frac{\partial a_x}{\partial y} + a_x\frac{\partial b_y}{\partial y} - b_x\frac{\partial a_y}{\partial y} - a_y\frac{\partial b_x}{\partial y} - b_x\frac{\partial a_z}{\partial z} - a_z\frac{\partial b_x}{\partial z} + b_z\frac{\partial a_x}{\partial z} + a_x\frac{\partial b_z}{\partial z} \\
&= -\left(a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)b_x + \left(a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)a_x - \left(\frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)b_x + \left(\frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right)a_x \\
&= -\left(a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)b_x + \left(b_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial}{\partial y} + a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)a_x \\
&\quad - \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)b_x + \left(\frac{\partial b_x}{\partial x} + \frac{\partial b_y}{\partial y} + \frac{\partial b_z}{\partial z}\right)a_x \\
&= [-(\mathrm{div}\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} + (\mathrm{div}\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}]_x
\end{aligned}
$$

y、z成分おいても同様に示せる。

(d)

ベクトル場$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})=(y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$について、曲線$C$:$\boldsymbol{r}=(t^2,t^4,t^6)$に沿って$t=0$から$t=1$まで変化させた際の線積分

$$\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ

【解答】

ベクトル場$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$をパラメータ$t$を用いて表すと

$$\boldsymbol{a}(t)=(t^{26}, 2t^{24}, 3t^{22})$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 \boldsymbol{a}(t)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt\\ &= \int_0^1 (2+8+18)t^{27}dt\\ &= \int_0^1 28t^{27}dt\\ &= \left[t^{28}\right]_0^1\\ &= 1\end{aligned}$$

と求まる。

(e)

2次元平面のベクトル場$\boldsymbol{a}=(-\frac{y}{r^2},\frac{x}{r^2})\,[r=|\boldsymbol{r}|, \boldsymbol{r}=(x,y)]$について原点を中心とする半径$R$の円$C$に沿って一周した線積分

$$\oint_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$$

を、(1)直接求めるのと(2)グリーンの定理を用いるのでは結果が異なる。これを確かめ理由を考察せよ。

【解答】

$$\begin{aligned}x &= R\mathrm{cos}\theta\\ y &= R\mathrm{sin}\theta\end{aligned}$$

とおく。

(1)直接求める場合

この時、$r=R$とする

$$
\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{a}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{d\theta}d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{\sin\theta}{R} \\ \frac{\cos\theta}{R} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R\sin\theta \\ R\cos\theta \end{pmatrix} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

(2)グリーンの定理を用いる場合

円Cの内部の領域をDとおく。

$$
\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r} &= \oint_C \left(-\frac{y}{r^2}dx + \frac{x}{r^2}dy\right) \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{r^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{r^2}\right) dxdy \\
&= \iint_D \left(\frac{r^2-2x^2}{r^4} + \frac{r^2-2y^2}{r^4}\right) dxdy \\
&= \iint_D \left(\frac{2r^2-2(x^2+y^2)}{r^4}\right) dxdy \\
&= \iint_D \left(\frac{2r^2-2r^2}{r^4}\right) dxdy \\
&= 0
\end{aligned}
$$

上記の2つの手法で結果が異なるのは、原点$(0,0)\in D$において、被積分関数が連続でないからだといえる。

(f)

原点を中心とした、底面の半径1、高さ2の円柱に囲まれた領域をTとする。Tの境界Sに沿ったベクトル場$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})=(xy^2, x^2y, y^2)$の面積分

$$
\iint_S \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S}
$$

を考える。面積要素ベクトル$d\boldsymbol{S}$は外向きにとる。

(f-1)底面$(x^2+y^2\leq 1, z=-1)$での面積分をもとめよ。

(f-2)側面$(x^2+y^2=1, -1\leq z\leq 1)$での面積分を求めよ。

(f-3)3重積分

$$
\iiint_T (\mathrm{div}\boldsymbol{a})dv
$$

を求め、ガウスの定理が成り立つことを確認せよ。

【解答】

(f-1)

ベクトル$\boldsymbol{r}_1 = (x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, -1)$とおく。このとき

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}
$$

したがって、面積要素ベクトル$d\boldsymbol{S}$は

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{S} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial r} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial \theta} \right) dr d\theta \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} dr d\theta
\end{aligned}
$$

と求められる。向きを考慮すると、

$$
d\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} dr d\theta
$$

である。

$$
\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2 \leq 1, z=-1} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi} \begin{pmatrix} r^3(\cos\theta \sin^2\theta) \\ r^3(\cos^2\theta \sin\theta) \\ r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta \int_0^1 -r^3 dr \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta \int_0^1 -r^3 dr \\
&= -\frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

(f-2)

ベクトル$\boldsymbol{r}_2 = (x, y, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$とおく。このとき

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}
$$

となる。したがって、面積要素ベクトル$d\boldsymbol{S}$は

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{S} &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial z} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}_2}{\partial \theta} \right) dz d\theta \\
&= \begin{pmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} dz d\theta
\end{aligned}
$$

外向き正より、

$$d\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} dz d\theta$$

以上より、

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2=1,-1\leq z\leq 1} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_{-1\leq z\leq 1,0\leq\theta\leq 2\pi} \begin{pmatrix} \cos\theta\sin^2\theta \\ \cos^2\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} dz d\theta \\
&= 2\iint_{-1\leq z\leq 1,0\leq\theta\leq 2\pi} \cos^2\theta\sin^2\theta dz d\theta \\
&= \frac{1}{2}\iint_{-1\leq z\leq 1,0\leq\theta\leq 2\pi} \sin^2 2\theta dz d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\theta)d\theta\int_{-1}^{1} dz \\
&= \pi
\end{aligned}$$

(f-3)

$T = \{(r,\theta,z)|0\leq r\leq 1, 0\leq\theta\leq\pi, -1\leq z\leq 1\}$である。

$$\begin{aligned}
\iiint_T (\mathrm{div}\boldsymbol{a})dv &= \iiint_T \left(\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} + \frac{\partial(x^2y)}{\partial y} + \frac{\partial y^2}{\partial z}\right) dxdydz \\
&= \iiint_T (x^2+y^2)dxdydz \\
&= \iiint_T r^3 dr d\theta dz \\
&= \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^{1} dz \\
&= \pi
\end{aligned}$$

となる。円柱の側面をS_1、上面をS_2、底面をS_3とおくと、

$$\iint_{S_2} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S} = -\iint_{S_3} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{\pi}{4}$$

7 であることも踏まえると

$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{S} &= \iint_{S_1} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{S_2} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S} + \iint_{S_3} \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{S} \\
&= \iiint_T (\mathrm{div}\boldsymbol{a})dv \\
&= \pi
\end{aligned}$$

が成り立ち、ガウスの定理が成り立つことがわかる

問2

電磁気学における，マクスウェル方程式と電磁波の関係について調べ，ベクトル解析の知識を用いて記述せよ

電荷も電流もない、つまり$\boldsymbol{j}=\boldsymbol{0}, \rho=0$をみたす空間に時間的に変化する電場$\boldsymbol{E}$と磁場$\boldsymbol{B}$が存在するとする。Maxwell方程式は、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{div}\boldsymbol{E}=0\\
&\mathrm{div}\boldsymbol{B}=0\\
&\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\\
&\mathrm{rot}\boldsymbol{B}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

である。電場と磁場が空間的にxだけの関数であるとする。この時、各ベクトルの成分について次の式が成り立つ。

$$
0=\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x}=\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x}=-\frac{\partial B_z}{\partial t}
$$

$$
0=\frac{\partial E_x}{\partial t} \quad \frac{\partial B_z}{\partial x}=-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial E_z}{\partial t} \quad \frac{\partial E_y}{\partial x}=\epsilon_0\mu_0\frac{\partial B_z}{\partial t}
$$

E_xとB_xはともに定数より、$E_x=B_x=0$とする。このとき、y成分とz成分について、以下の式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}&=\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}\\
\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}&=\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

または、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}&=\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}\\
\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}&=\frac{1}{\epsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2}
\end{aligned}
$$

が得られる。このことから、電場と磁場は波の進行方向に垂直になっており、振動方向は互いに垂直であることがわかる。のこれらの式は波動方程式の形をしているのがわかるので、電磁波の進行速度cは

$$
c=\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}
$$

とあらわされるのがわかる。なお、ファラデーはこれが光の速度と一致しているという光伝播説を唱えた。

参考文献

- 「電磁波電磁気学」(EMANの物理学)