数学IB課題1

J4-210447 川村朋広

2023 年 11 月 22 日

1

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}\tilde{y_1}\\ \tilde{y_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{y_1}\\ \tilde{y_2}\end{pmatrix}$$

を$\tilde{y_1}$について変形すると、

$$\tilde{y_1}'' - (a+d)\tilde{y_1}' + (ad-bc)\tilde{y_1} = 0$$

となるから、固有値はλの二次方程式、

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$$

の2解である。2解をλ_1,λ_2とおくと、

$$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 = a+d\\ \lambda_1\lambda_2 = ad-bc\end{cases} \tag{1}$$

が成り立つ。ここで、$D = (a+d)^2 - 4(ad-bc)$とおき、Dの正負で場合分けする。

(a) $D > 0$のとき

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$である。

a-1) $a+d > 0$かつ$ad-bc > 0$のとき

λ_1とλ_2はともに正より、流れ図は総覧の(1)か(2)に対応する。

a-2) $a+d > 0$かつ$ad-bc = 0$のとき

λ_1とλ_2うち、片方が0でもう片方が正である。したがって、流れ図は総覧の(7)に対応する。

a-3) $a+d <= 0$かつ$ad-bc > 0$のとき

λ_1とλ_2はともに負より、流れ図は総覧の(3)か(4)に対応する。

a-4) $a+d < 0$かつ$ad-bc = 0$のとき

λ_1とλ_2のうち、片方が0でもう片方は負である。したがって、流れ図は総覧の(8)に対応する。

a-5) $ad-bc < 0$のとき

λ_1とλ_2のうち片方が正でもう片方が負である。したがって、流れ図は総覧の(5)か(6)に対応する。

(b) $D = 0$のとき

$\lambda_1 = \lambda_2$が成り立つ。よって、$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$とおける。

b-1) $a + d > 0$のとき

$\lambda_0 > 0$より、流れ図は総覧の(12)に対応する。

b-2) $a + d = 0$のとき

$\lambda_0 = 0$より、$\tilde{y_1} = const$かつ$\tilde{y_2} = const$である。したがって、対応する流れ図は総覧にない。

b-3) $a + d < 0$のとき

$\lambda_0 < 0$より、流れ図は総覧の(13)に対応する

(c) $D < 0$のとき

$\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$である。$\lambda_1$と$\lambda_2$は共役より、$Re\lambda_1 = Re\lambda_2 = \alpha$とおける。

c-1) $a + d > 0$のとき

$\alpha > 0$より、流れ図は総覧の(10)に対応する。

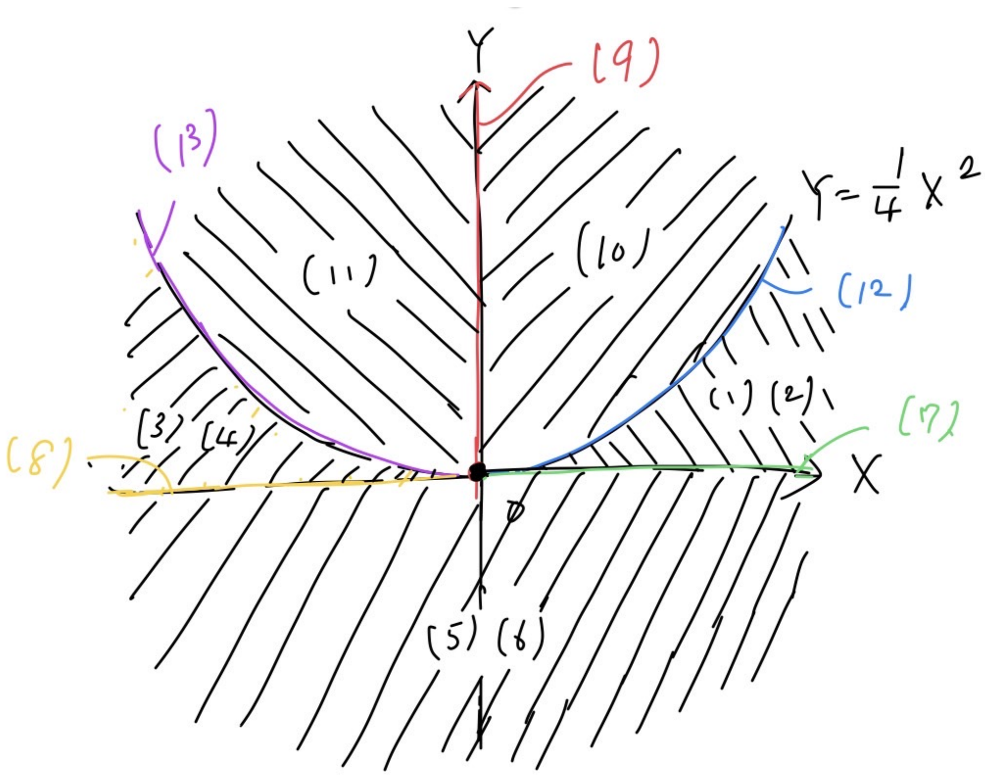
c-2) $a + d = 0$のとき

$\alpha = 0$より、流れ図は総覧の(9)に対応する。

c-3) $a + d < 0$のとき

$\alpha < 0$より、流れ図は総覧の(11)に対応する。

$a + d(= X)$の値を横軸に、$ad - bc(= Y)$の値を縦軸にとる。この平面において、領域と流れ図の対応は以下のようになる。



2

(a)案出した微分方程式

$$4xy'' + 10y' + y = 0$$

(b)一般解の導出過程 $x=0$は確定特異点より、級数解yは

$$\begin{aligned} y &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda+k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-1} x^{\lambda+k-1} \end{aligned}$$

とおける。(ただし、$a_{-1}=0$)

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda+k)x^{\lambda+k-1}$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda+k)(\lambda+k-1)x^{\lambda+k-2}$$

であることより、整理すると

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 4a_k(\lambda+k)(\lambda+k+\frac{3}{2}) + a_{k-1} \right\} x^{\lambda+k-1} = 0$$

となる。$k=0$とすると、$\lambda(\lambda+\frac{3}{2})=0$より、$\lambda=0,-\frac{3}{2}$である。
(b-1) $\lambda=0$のとき
a_kは漸化式

$$a_k = -\frac{1}{2k(2k+3)} a_{k-1}$$

をみたす。したがって、$a_0=a_{01}$とすると、

$$a_k = a_{01} \prod_{l=1}^{k} \left\{ -\frac{1}{2l(2l+3)} \right\}$$

よって、基本解は

$$y_1(x) = a_{01} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \prod_{l=1}^{k} -\frac{1}{2l(2l+3)} \right\} x^k + 1 \right]$$

(b-2) $\lambda=-\frac{3}{2}$のとき
a_kは漸化式

$$a_k = -\frac{1}{2k(2k-3)} a_{k-1}$$

をみたす。したがって、$a_0 = a_{02}$とすると、

$$a_k = a_{02} \prod_{l=1}^{k} \left\{ -\frac{1}{2l(2l-3)} \right\}$$

よって、基本解は

$$y_2(x) = a_{02} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \prod_{l=1}^{k} -\frac{1}{2l(2l-3)} \right\} x^{k-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} \right]$$

以上より、一般解yはy_1, y_2の線形結合

$$y(x) = C_1 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \prod_{l=1}^{k} -\frac{1}{2l(2l+3)} \right\} x^k + 1 \right] + C_2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \prod_{l=1}^{k} -\frac{1}{2l(2l-3)} \right\} x^{k-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} \right]$$

と書ける。

(c)案出した手がかり

確定特異点が0より、変形した時にy'とyの係数の分母がx、分子が$x = 0$で定義できる関数(簡単に言うと定数)になること。また、y''の係数となっている関数の係数はy'の係数を割り切らないこと。