数学IEレポート2

J4-210447 川村朋広

2023 年 2 月 16 日

問1

(a)

汎関数

$$I[f] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+(f')^2}}{x} dx$$

の停留関数$f(x)$を固定端条件下で求めよ

【解答】

$$F(x,y,z) = \frac{\sqrt{1+z^2}}{x}$$

とおく。$F(x)$は第1,3変数に対して凸より、停留関数$f(x)$は、以下の条件をみたす。

$$\frac{d}{dx}\{F_z[f(x)]\} = F_y[f(x)]$$
$$f(x_0) = A \quad f(x_1) = B$$

ただし,$A, B \in \mathbb{R}$である。

$$F_z = \frac{z}{x\sqrt{1+z^2}}$$
$$F_y = 0$$

であることより第1式は以下のように変形できる。

$$\frac{d}{dx}\frac{f'}{x\sqrt{1+(f')^2}} = 0$$

$C' \in \mathbb{R}$を用いて、

$$\frac{f'}{x\sqrt{1+(f')^2}} = C'$$

とあらわされる。これをべつの$c \in \mathbb{R}$を用いて変形すると以下のようになる。

$$f'(x) = \frac{cx}{\sqrt{1-c^2x^2}}$$

これをとくと、$d \in \mathbb{R}$を用いて、

$$f(x) = -\frac{1}{c}(1 - c^2 x^2)^{\frac{1}{2}} + d$$

となる。境界条件の第2,3式より

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &= x_1^2 + \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{2(A-B)} + B \right)^2 \\ d &= \frac{x_1^2 - x_2^2}{2(A-B)} + A + B \end{aligned}$$

を満たすことがわかる。

(b)

汎関数

$$I[f] = \int_0^1 \left\{ (f')^2 + 2ff' + 4f^2 \right\} dx$$

に対し、

(b-1) 固定端条件下での停留関数$f(x)$に対する微分方程式を導き一般解を求めよ。

(b-2) 固定端条件$f(0) = 0, f(1) = 1$から停留関数を求めよ。

(b-3) 汎関数に代入し、その極値を求めよ。

【解答】

(b-1)

関数$F(x, y, z)$を$F(x, y, z) = 4y^2 + 2yz + z^2$と定める。

$$\begin{aligned} F_y &= 8y + 2z \\ F_z &= 2y + 2z \end{aligned}$$

より、停留関数fの満たす微分方程式は、

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(2f(x) + 2f'(x)\right) = 8f(x) + 2f'(x) \\ &2f' + 2f''(x) = 8f(x) + 2f'(x) \\ &f''(x) = 4f(x) \end{aligned}$$

となる。したがって一般解は$A, B \in \mathbb{R}$を用いて

$$f(x) = A\mathrm{sin}2x + B\mathrm{cos}2x$$

7 と表される。

(b-2)

固定端条件より$(A, B) = \left(0, \frac{1}{\mathrm{sin}2}\right)$であるから、

$$f(x) = \frac{\mathrm{sin}2x}{\mathrm{sin}2}$$

となる。

(b-3)

(b-2)より、

$$f'(x) = \frac{2\cos 2x}{\sin 2}$$

であるから、

$$\begin{aligned} I[f] &= \frac{1}{\sin^2 2}\int_0^1 \left(4\cos^2 2x + 4\cos 2x\sin 2x + 4\sin^2 2x\right)dx \\ &= \frac{4}{\sin^2 2}\int_0^1 \left(1 + \frac{\sin 4x}{2}\right)dx \\ &= \frac{(9-\cos 4)}{2\sin^2 2} \end{aligned}$$

と求まる。

(c)

講義で、2次元平面上のポテンシャル$V(x,y)$下での質点の運動について、極座標系においても2変数$r(t),\theta(t)$についての汎関数で定義された、作用Sに対するオイラーラグランジュ方程式から運動方程式を導き出せることを見た。

(c-1)Sの被積分関数L(ラグラジアン)が時間tによらないとき。以下の方程式がなりたつことを示せ。

$$\frac{d}{dt}\left(L - \dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0$$

(c-2)講義で扱ったLの表式を上式に代入し、エネルギー保存則を導け。

【解答】

(c-1)

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

より、ラグラジアンの時間微分は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{dr}{dt}\frac{\partial L}{\partial r} + \frac{d\dot{r}}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \frac{d\theta}{dt}\frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{d\dot{\theta}}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \\ &= \dot{r}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \ddot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\theta}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \ddot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \\ &= \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) + \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) \end{aligned}$$

以上より、

$$\frac{d}{dt}\left(L - \dot{r}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \dot{\theta}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0$$

が示された。

(c-2)

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V$$

とする。

$$\dot{x} = \dot{r}\mathrm{cos}\theta - r\dot{\theta}\mathrm{sin}\theta$$
$$\dot{y} = \dot{r}\mathrm{sin}\theta + r\dot{\theta}\mathrm{cos}\theta$$

となるから、Lを極座標系に書きかえると、

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V$$

となる。これを先ほど示した式に代入すると、以下の式が得られる。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V\right) = 0$$

つまり

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V = const$$

である。この式から、左辺の第1項が運動エネルギーで、第2項がポテンシャルエネルギーを表しており、その和が一定であることがわかる。これはエネルギー保存則を示している。