

機械力学振動課題

J4-210447 川村朋広

2023 年 12 月 25 日

1

x 軸を鉛直上向きを正にとる座標系で考える。重みの質量を $m(=10)$ とおくと、重みの運動方程式は

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -2kx - mg \\ \ddot{x} &= -\frac{2k}{m}\left(x + \frac{mg}{2k}\right) \end{aligned}$$

となる。したがって固有角振動数 ω は

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

とあらわせることより、固有振動数 f は

$$\begin{aligned} f &= \frac{\omega}{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k}{2m}} \\ &= 3.9[Hz] \end{aligned}$$

と求められる。

2

x 軸を鉛直上向きを正にとる。物体が x 変位した時の加速度計の変位を x_1 とおくと運動方程式は

$$m\ddot{x} = -k(x - x_1) - c(\dot{x} - \dot{x}_1) \quad (1)$$

とあらわせる。ここで $x_r = x - x_1$ とおくと方程式(1)は

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_r + c\dot{x}_r + kx_r &= -m\ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_r + 2\zeta\omega_n\dot{x}_r + \omega_n^2x_r &= -\ddot{x}_1 \end{aligned}$$

ただし、 $\omega_n \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ 、 $\zeta \equiv \frac{c}{2\sqrt{mk}}$ である。

ここで、 x_r を $z_r \in \mathbb{C}$ に、 x_1 を $z_1 \in \mathbb{C}$ に置き換えて、複素数範囲の微分方程式

$$\ddot{z}_r + 2\zeta\omega_n\dot{z}_r + \omega_n^2z_r = -\ddot{z}_1 \quad (2)$$

このとき j を虚数単位、 $A_r, A_1 \in \mathbb{C}$ として

$$z_r = A_r \exp(j\omega t)$$

$$z_1 = A_1 \exp(j\omega t)$$

と置いて、方程式(2)を整理すると、

$$A_r [\omega_n^2 - \omega^2 + j(2\zeta\omega_n\omega)] \exp(j\omega t) = A_1 \omega^2 \exp(j\omega t)$$

$$\frac{A_r}{A_1} = \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j(2\zeta\omega_n\omega)}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} \left| \frac{A_r}{A_1} \right|^2 &= \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j(2\zeta\omega_n\omega)} \frac{\omega^2}{\omega_n^2 - \omega^2 - j(2\zeta\omega_n\omega)} \\ &= \frac{\omega^4}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n^2\omega^2)^2} \end{aligned}$$

$\frac{1}{p} = \left| \frac{A_r}{A_1} \right|$ とおき、これを ζ に関してとくと

$$\zeta = \frac{\sqrt{\{(p-1)\omega^2 + \omega_n^2\} \{(p+1)\omega^2 - \omega_n^2\}}}{2\omega_n\omega}$$

となるから

$$c = \frac{\sqrt{mk \{(p-1)\omega^2 + \omega_n^2\} \{(p+1)\omega^2 - \omega_n^2\}}}{\omega_n\omega}$$

$p = 18/12 = 3/2$ 、 $\omega = 2\pi \times 5 = 10\pi$ 、 $\omega_n = \sqrt{750}$ より $c = 58.6 [kg^2/s^2]$ と求められる。