数学IEレポート1

J4-210447 川村朋広

2023 年 1 月 23 日

問1

(a)

$y' = (x+1)^2(y+1)$

【解答】

$y \neq -1$のときを考え、両辺を$y+1$で割ると、

$$\frac{y'}{y+1} = (x+1)^2$$

両辺を積分すると

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int (x+1)^2 dx$$

$$\begin{aligned} \log|y+1| &= \frac{1}{3}(x+1)^3 + C_1 \\ &= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + C_2 \end{aligned}$$

ただし、C_1とC_2は実定数である。したがって実定数Aを用いて、

$$y = Ae^{\frac{1}{3}x^3+x^2+x} - 1$$

尚、$y = -1$も解であるが上記の一般解に含まれる。

(b)

$y' + 2y = \mathrm{cos}x$

【解答】

まず、特殊解を求める

特殊解y_0を

$$y_0 = \alpha\mathrm{sin}x + \beta\mathrm{cos}x$$

と仮定する。この時、代入して整理すると、

$$(\alpha+2\beta)\mathrm{cos}x+(2\alpha-\beta)\mathrm{sin}x=\mathrm{cos}x$$

したがって、

$$\begin{cases}\alpha+2\beta=1\\2\alpha-\beta=0\end{cases}$$

これを解くと、$(\alpha,\beta)=(\frac{1}{5},\frac{2}{5})$が得られるので

$$y_0=\frac{\mathrm{sin}x+2\mathrm{cos}x}{5}$$

次に、微分方程式

$$y'+2y=0$$

の一般解を求める。$y\neq0$として、両辺をyで割ると

$$\frac{dy}{y}=-2$$

両辺を積分して、

$$\int\frac{dy}{y}=-2\int dx$$

積分定数Cおよび実定数Aを用いて、

$$\log|y|=-2x+C$$
$$y=Ae^{-2x}$$

これは$y=0$の場合も含む。以上より、一般解yは

$$y(x)=Ae^{-2x}+\frac{\mathrm{sin}x+2\mathrm{cos}x}{5}$$

(c)

$$4y''+12y'+9y=0$$

【解答】
$y=e^{\lambda x}$が解に含まれるとする。この時、与式に代入して整理すると

$$e^{\lambda x}(4\lambda^2+12\lambda+9)=0$$
$$e^{\lambda x}(2\lambda+3)^2=0$$
$$\lambda=-\frac{3}{2}$$

したがって、一般解yは実数C_1とC_2を用いて

$$y(x)=C_1e^{-\frac{3}{2}x}+C_2xe^{-\frac{3}{2}x}$$

である

(d)

$y'' - 2y' + 5y = 2\cos^2 x$

【解答】

まず、微分方程式

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \tag{1}$$

の解を考える。解の形が$e^{\lambda x}$で与えられるとすると

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$$

となるから、

$$\lambda = 1 + 2i, 1 - 2i$$

今、

$$\begin{aligned} y_1(x) &= e^x \cos 2x \\ y_2(x) &= e^x \sin 2x \end{aligned}$$

と置くと、これらは(1)の解である。特殊解を

$$y_0(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$$

と置くと、一般解は実数D_1, D_2を用いて

$$y(x) = D_1 y_1(x) + D_2 y_2(x) + y_0(x)$$

と表される。なお、c_1とc_2については以下のように求まる。

$$\begin{aligned} y_1' &= e^x(\cos 2x - 2\sin 2x) \\ y_2' &= e^x(\sin 2x + 2\cos 2x) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} &= e^{2x}\{\cos 2x(\sin 2x + 2\cos 2x) - \sin 2x(\cos 2x - 2\sin 2x)\} \\ &= 2e^{2x}(\cos^2 2x + \sin^2 2x) \\ &= 2e^{2x} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} c_1' &= -\frac{y_2(2\cos^2 x)}{2e^{2x}} = -e^{-x}\sin 2x \cos^2 x \\ c_2' &= \frac{y_1(2\cos^2 x)}{2e^{2x}} = e^{-x}\cos 2x \cos^2 x \end{aligned}$$

これより、

$$
\begin{aligned}
c_1(x) &= \int -e^{-x}\sin 2x\cos^2 x dx \\
&= \int -e^{-x}\sin 2x\frac{1+\cos 2x}{2}dx \\
&= -\frac{1}{2}\int e^{-x}\sin 2x dx - \frac{1}{4}\int e^{-x}\sin 4x dx \\
&= -\frac{1}{2}\frac{e^{-x}}{5}(-\sin 2x - 2\cos 2x) - \frac{1}{4}\frac{e^{-x}}{17}(-\sin 4x - 4\cos 4x) + D_3 \\
&= \frac{e^{-x}}{4}\{\frac{2}{5}(\sin 2x + 2\cos 2x) + \frac{1}{17}(\sin 4x + 4\cos 4x)\} + D_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_2(x) &= \int e^{-x}\cos 2x\cos^2 x dx \\
&= \int e^{-x}\cos 2x\frac{1+\cos 2x}{2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x dx + \frac{1}{4}\int e^{-x}\cos 4x dx + \frac{1}{4}\int e^{-x}dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{e^{-x}}{5}(2\sin 2x - \cos 2x) + \frac{1}{4}\frac{e^{-x}}{17}(4\sin 4x - \cos 4x) - \frac{1}{4}e^{-x} + D_4 \\
&= \frac{e^{-x}}{4}\{\frac{2}{5}(2\sin 2x - \cos 2x) + \frac{1}{17}(4\sin 4x - \cos 4x) - 1\} + D_4
\end{aligned}
$$

なお、D_3, D_4は実定数である、よって

$$
y_0(x) = \frac{1}{5} - \frac{1}{17}\cos 2x - \frac{9}{34}\sin 2x
$$

したがって、一般解は

$$
y(x) = D_1 e^x\cos 2x + D_2 e^x\sin 2x - \frac{1}{17}\cos 2x - \frac{9}{34}\sin 2x + \frac{1}{5}
$$

(e)

$(\frac{1}{2} - \frac{1}{y}) + \frac{x}{y^2}y' = 0$

【解答】

$x \neq 0$かつ$y \neq 0$かつ$y \neq 2$の時、式変形すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{dx}{x} + \frac{2dy}{y^2 - 2y} = 0 \\
&\int \frac{dx}{x} + \int (\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y})dy = C \\
&\log|x| + \log\left|\frac{y-2}{y}\right| = C \\
&\frac{y-2}{y} = Ae^{-x}
\end{aligned}
$$

となる。なおC及びAは実定数である。

$$y(x) = \frac{2}{1 - Ae^{-x}}$$

が一般解となる。なお$y = 2$もそれに含まれる。

(f)

$$\begin{cases} y_1' - 2y_2' + 4y_2 = 0 \\ 3y_1' - 2y_2' - 4y_1 = 0 \end{cases}$$

【解答】

連立微分方程式を行列で書き直すと

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

となる。この連立微分方程式の解が

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

であると仮定すると、(4)を(3)に代入して整理すると

$$\lambda \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

これが$\phi_1 \neq 0$かつ$\phi_2 \neq 0$を満たす解を持つとき、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 4) \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって$\lambda = 1$または4である

$\lambda = 1$のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となり、これを満たす固有ベクトルの一つは $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ である

$\lambda = 4$のとき

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となり、固有ベクトルの一つは$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$である

以上より、一般解は実定数C_1, C_2を用いて

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される

補題

$(a, b) \neq (0, 0)$のとき

$$\int e^{ax} \mathrm{sin} bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\mathrm{sin} bx - b\mathrm{cos} bx) + C_1$$
$$\int e^{ax} \mathrm{cos} bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(b\mathrm{sin} bx + a\mathrm{cos} bx) + C_2$$

【証明】

$$\begin{aligned} I &= \frac{d}{dx}(e^{ax} \mathrm{sin} bx) \\ &= e^{ax}(a\mathrm{sin} bx + b\mathrm{cos} bx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{d}{dx}(e^{ax} \mathrm{cos} bx) \\ &= e^{ax}(a\mathrm{cos} bx - b\mathrm{sin} bx) \end{aligned}$$

とそれぞれおく。つまり

$$\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ax} \mathrm{sin} bx \\ e^{ax} \mathrm{cos} bx \end{pmatrix}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e^{ax} \mathrm{sin} bx \\ e^{ax} \mathrm{cos} bx \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} aI - bJ \\ bI + aJ \end{pmatrix} \\ &= \frac{d}{dx} \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a\mathrm{sin} bx - b\mathrm{cos} bx \\ a\mathrm{cos} bx + b\mathrm{sin} bx \end{pmatrix} \end{aligned}$$

両辺をxで積分すると目的の式が導出される

問2

(a)

講義で取り上げたエルミートの微分方程式・多項式について調べ，自由に記述せよ

エルミート微分方程式とは$m \in \mathbb{Z}$として

$$(\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + 2m)H_m(x) = 0$$

の形をした微分方程式のことをさす
この微分方程式の級数解$H_m(x)$をエルミート多項式といい

$$H_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

とあらわされる。
微分方程式に代入して整理すると

$$\sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + 2ma_n]x^n = 0$$

各項が0であることより、以下のような漸化式が導かれる

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (2n-2m)a_n = 0$$
$$a_{n+2} = \frac{2n-2m}{(n+2)(n+1)}a_n$$

a_0とa_1が決まっていれば$\forall n \in \mathbb{N}$に対して、a_nがきまる。実際に求めてみると、

$$H_m(x) = m!\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^n}{n!(m-2n)!}(2x)^{m-2n}$$

となる。
【ほかの性質】
重み関数e^{-x^2}として直交性を持つ

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}2^n n!\delta_{i,j}$$

ロドリゲスの公式

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2}\frac{d^m}{dx^m}e^{-x^2}$$

母関数について

$$e^{-y^2+2xy} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x)\frac{y^m}{m!}$$

周回積分であらわされる

$$H_m(x) = \oint_C \frac{e^{-z^2+2xz}}{z^{m+1}}dz$$

(b)

常微分方程式の数値計算法について調べ，自由に記述せよ

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$
$$y(x_0) = y_0$$

について考える。数値計算法の方法論はオイラー法とルンゲクッタ型方式がある。
【オイラー法】
初期値x_0からはじめて、刻み幅をhとして、$x_1 = x_0 + h, x_2 = x_1 + h, ...$における$y(x)$の値を順次求めていく。
今、曲線の傾きが$f(x,y)$であることがわかるので、$i \in \mathbb{N}$に対して

$$y(x_i) = y(x_{i-1}) + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

と近似できる。こうして、再帰関数をもちいてプログラムを組むと微分方程式をコンピューター上で解くことができる。なお、誤差をできるだけ小さくするためにhは限りなく0に近い値を用いる必要がある。このように$x = x_i$の右側で近似し、前のデータから次のデータを求めるオイラー法のことを特に、前進差分という。一方、$x = x_{0i}$よりも左側で近似すると

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hf(x_{i+1}, y_{i+1})$$

とあらわすことができる。このとき、後($i+1$のとき)の値から、前の値(iのとき)の値が求まる。これを後退差分という。
しかし、理論的には誤差が小さくなるオイラー法だが、実際は

- 刻み幅を小さくすることで計算量がふえる
- 刻み幅が小さくなると、丸め誤差が増える
- 計算回数が増えると、誤差の累積が多くなる

といった問題点がある。
【ルンゲクッタ型方式】
上記のオイラー法における欠点を補っているのが、ここで紹介するルンゲクッタ法である
テーラー展開の2次項までで近似すると

$$\begin{aligned} y(x+h) &\approx y(x) + h\frac{dy}{dx} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2}{dx^2} \\ &= y(x) + hf(x,y) + \frac{h^2}{2}\frac{df(x,y)}{dx} \end{aligned}$$

ここで、刻み幅をkhとする

$$\begin{aligned} \frac{df(x,y)}{dx} &\approx \frac{f(x+kh, y(x+kh)) - f(x,y)}{kh} \\ &\approx \frac{f(x+kh, y(x) + khf(x,y)) - f(x,y)}{kh} \end{aligned}$$

と書ける。
$k = 1$の時、ホイン法と呼ばれていて、

$$y(x+h) = y(x) + \frac{h}{2}f(x,y) + \frac{h}{2}f(x+h, y(x) + hf(x,y))$$

とあらわされる。

$k = \frac{1}{2}$の時は、修正オイラー法と呼ばれており

$$y(x+h) = y(x) + hf(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{h}{2}f(x,y))$$

と表される。

参考文献

- 東京大学工学部精密工学科「常微分方程式の数値解法」
- 永宮健夫「微分方程式論」