1 大問2

1.1 (1)

In [1]:

```python
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
% matplotlib inline
```

1.1.1 問題設定

Aは1000次とした。

bは1000次で各値は0から100までのfloat型の乱数を作成した。

乱数はseedをとって各手法で固定し た。

また、許容誤差はtol = 1 x 10^-6 とし、全ての計算で停止条件は||Ax - b|| < tolで取った。

In [2]:

```python
# 次数の設定
degree = 1000

# x_k-1とx_kの差がtol未満なら収束したとみなす
tol = 1e-6

max_iter = 50000
```

In [3]:

```python
# A: 本レポートではtridiagonal_matrix(2), tridiagonal_matrix(20)を用いる
def tridiagonal_matrix(c, n = degree):
    A = np.zeros([n, n])
    for i in range(n):
        if i == 0:
            A[i,i] = c
            A[i, i+1] = -1
        elif i == n - 1:
            A[i, i - 1] = -1
            A[i, i] = c
        else:
            A[i, i - 1] = -1
            A[i, i] = c
            A[i, i + 1] = -1
    return A

# b
def constant_vector(n = degree):
    np.random.seed(23)  # 23は適当な数字
    return np.random.uniform(0.0, 100.0, [n, 1])
```

1.1.2 実装

逆行列は一度求めればその後掛け算するだけで使えるため、計算してしまっています

1.1.2.1 CG法

In [4]:

```python
def cg(A, b = constant_vector()):
    xs = np.array([b])

    r = b - np.dot(A, xs[0])
    p = r

    k = 0
    error = tol + 1

    while  error > tol:
        alpha = np.dot(r.T, p) / (p.T @ A @ p)
        xs = np.append(xs, [xs[k] + alpha * p], axis = 0)
        r = r - alpha * np.dot(A, p)
        beta = -1 * (r.T @ A @ p) / (p.T @ A @ p)
        p = r + beta * p
        k += 1
        error = np.linalg.norm(np.dot(A, xs[k]) - b)

    print("CG法はk={}で収束しました。".format(k))
    return xs
```

1.1.2.2 Gauss-Seidel法 (c = 2 で収束しなかったので、上限を設けました)

In [5]:

```python
def gs(A, b = constant_vector()):
    xs = np.array([b])

    LD_inv = np.linalg.inv(np.tril(A))
    U = np.triu(A, 1)

    H = -1 * np.dot(LD_inv, U)
    c = LD_inv @ b

    k = 0
    error = tol + 1

    while  error > tol:
        xs = np.append(xs, [np.dot(H, xs[k]) + c], axis = 0)
        k += 1
        error = np.linalg.norm(np.dot(A, xs[k]) - b)
        if k > max_iter:
            print("Gauss-Seidel法は{}回の反復では収束しませんでした。".format(k))
            return xs


    print("Gauss-Seidel法はk={}で収束しました。".format(k))
    return xs
```

1.1.2.3 SOR法

In [6]:
```python
def sor(A, b = constant_vector()):
    xs = np.array([b])

    D = np.diag(np.diag(A))
    L = np.tril(A, -1)
    U = A - L - D

    Mj = np.dot(np.linalg.inv(D), -(L + U))
    rho_Mj = max(abs(np.linalg.eigvals(Mj)))
    w = 2 / (1 + np.sqrt(1 - rho_Mj ** 2))

    T = np.linalg.inv(D + w * L)
    H = np.dot(T, -w * U + (1 - w) * D)
    c = np.dot(T, w * b)

    k = 0
    error = tol + 1

    while  error > tol:
        xs = np.append(xs, [np.dot(H, xs[k]) + c], axis = 0)
        k += 1
        error = np.linalg.norm(np.dot(A, xs[k]) - b)

    print("SOR法はk={}で収束しました。".format(k))
    return xs
```

1.1.2.4 Jacobi法

c = 2で全く収束しなかったので、反復回数に上限を設けています。

In [7]:
```python
def jacobi(A, b = constant_vector()):
    xs = np.array([b])

    D = np.diag(np.diag(A))
    LU = A - D
    D_inv = np.linalg.inv(D)

    H = -1 * np.dot(D_inv, LU)
    c = np.dot(D_inv, b)

    k = 0
    error = tol + 1

    while  error > tol:
        xs = np.append(xs, [np.dot(H, xs[k]) + c], axis = 0)
        k += 1
        error = np.linalg.norm(np.dot(A, xs[k]) - b)
        if k > max_iter:
            print("Jacobi法は{}回の反復では収束しませんでした。".format(k))
            return xs

    print("Jacobi法はk={}で収束しました。".format(k))
    return xs
```

1.1.3 検証

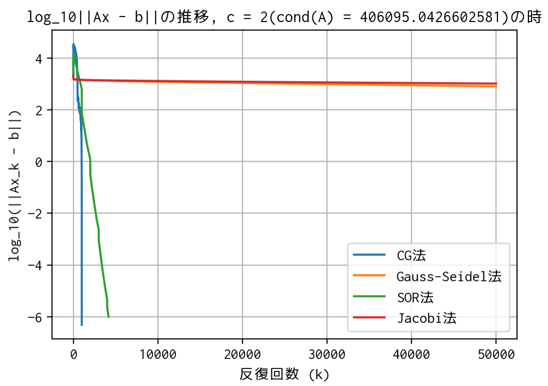
c = 2とc = 20で誤差ノルムの常用対数の推移を観察する

In [8]:
```python
def plot_errors_by_log(c):
    A = tridiagonal_matrix(c)

    error = lambda x: np.log10(np.linalg.norm(A @ x - constant_vector()))

    cg_error_transition = list(map(error, cg(A)))
    gs_error_transition = list(map(error, gs(A)))
    sor_error_transition = list(map(error, sor(A)))
    jacobi_error_transition = list(map(error, jacobi(A)))

    plt.plot(np.arange(len(cg_error_transition)), cg_error_transition, label='CG法')
    plt.plot(np.arange(len(gs_error_transition)), gs_error_transition, label='Gauss-Seidel法')
    plt.plot(np.arange(len(sor_error_transition)), sor_error_transition, label='SOR法')
    plt.plot(np.arange(len(jacobi_error_transition)), jacobi_error_transition, label='Jacobi法')

    plt.legend()
    plt.title("log_10||Ax - b||の推移, c = {}(cond(A) = {})の時".format(c, np.linalg.cond(A)))
    plt.xlabel('反復回数 (k)')
    plt.ylabel('log_10(||Ax_k - b||)')
    plt.grid()
    plt.show()
```

(i) c = 2 の時

In [9]:
```python
plot_errors_by_log(2)
```

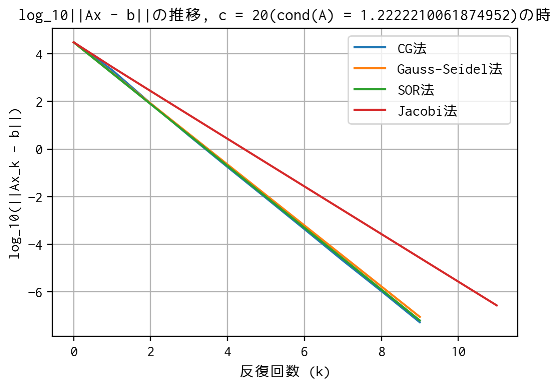
```
CG法はk=1000で収束しました。
Gauss-Seidel法は50001回の反復では収束しませんでした。
SOR法はk=4162で収束しました。
Jacobi法は50001回の反復では収束しませんでした。
```



(ii) c = 20 の時

In [10]:
```
plot_errors_by_log(20)
```

CG法はk=9で収束しました。
Gauss-Seidel法はk=9で収束しました。
SOR法はk=9で収束しました。
Jacobi法はk=11で収束しました。



1.2 (2) 考察

1.2.0.1 c = 2 と c = 20 の比較

In [11]:
```
print("c = 2の時の条件数: ", np.linalg.cond(tridiagonal_matrix(2)))
print("c = 20の時の条件数: ", np.linalg.cond(tridiagonal_matrix(20)))
```

c = 2の時の条件数: 406095.0426602581
c = 20の時の条件数: 1.2222210061874952

c =20 では全手法で急速に||Ax - b||が0に近づき、許容誤差を下回るまでに10回程度の反復で十分だったのに対し、c = 2で||Ax - b||が50000回の反復で許容誤差を下回ったのは、CG法とSOR法だけであった。

上のように、c = 2 と c = 20 とで条件数が約100万倍異なるが、この現象はこの条件数の差が大きく影響を及ぼしていると考えられる。

1.2.0.2 各手法の比較

CG法とSOR法ではc = 2でも20でも収束した。

しかし、Jacobi法とGS法では、c = 2で単調に解に近づいてはいるようだが、その収束速度は極めて遅く、50000回の反復では、あまり解に近づかなかった。

また、定常反復法において、行列のスペクトル半径を観察する

In [12]:
```
def max_eigenvalue(A):
    return np.sort(np.abs(np.linalg.eig(A)[0]))[-1]

def spectral_radiuses(c):
    A = tridiagonal_matrix(c)

    # GS
    LD_inv = np.linalg.inv(np.tril(A))
    U = np.triu(A, 1)
    print("Gauss-Seidel法のスペクトル半径は{}".format(max_eigenvalue(-1 * LD_inv @ U)))

    # SOR
    D = np.diag(np.diag(A))
    L = np.tril(A, -1)
    U = A - L - D

    Mj = np.dot(np.linalg.inv(D), -(L+U))
    rho_Mj = max(abs(np.linalg.eigvals(Mj)))
    w = 2/(1+np.sqrt(1-rho_Mj**2))
    T = np.linalg.inv(D+w*L)
    print("SOR法のスペクトル半径は{}".format(max_eigenvalue(np.dot(T, -w*U+(1-w)*D))))

    # jacobi
    D = np.diag(np.diag(A))
    LU = A - D
    D_inv = np.linalg.inv(D)
    print("Jacobi法のスペクトル半径は{}".format(max_eigenvalue(-1 * D_inv @ LU)))

```

c = 2

In [13]:
```
spectral_radiuses(2)
```

Gauss-Seidel法のスペクトル半径は0.9999901501375795
SOR法のスペクトル半径は0.9937427399987759
Jacobi法のスペクトル半径は0.9999950750566646

c = 20

In [14]:
```
spectral_radiuses(20)
```

Gauss-Seidel法のスペクトル半径は0.02009607880562554
SOR法のスペクトル半径は0.007596793131780399
Jacobi法のスペクトル半径は0.09999950750566644

いずれもスペクトル半径は1を下回っているので、収束条件を満たしている。

そのため、いずれの手法でも、解に近づいているようである。

ただ、やはりc=2のGS法とJacobi法では スペクトル半径が1に極めて近く、そのために収束が極めて遅かった。

しかし、スペクトル半径が1より小さいということは、答えに収束するということかもしれないので、(少なくとも誤差がなければ)50000回以上に反復させてみる。

ただし、上のアルゴリズムでは、あとでグラフを書くために、配列に適宜新しい解を追加していたが、それだと、反復回数が大きくなるにつれて処理速度がどんどん遅くなるので、少し改める。

In [15]:

```
def gs_ver2(A, b = constant_vector()):
    LD_inv = np.linalg.inv(np.tril(A))
    U = np.triu(A, 1)

    H = -1 * np.dot(LD_inv, U)
    c = np.dot(LD_inv, b)

    k = 0
    error = tol + 1
    x = b

    while error > tol:
        x = np.dot(H, x) + c
        error = np.linalg.norm(np.dot(A, x) - b)
        k += 1

    print("Gauss-Seidel法はk={}で、誤差ノルムが{}で収束しました。".format(k, error))
    return x
```

In [16]:

```
def jacobi_ver2(A, b = constant_vector()):
    D = np.diag(np.diag(A))
    LU = A - D
    D_inv = np.linalg.inv(D)

    H = -1 * np.dot(D_inv, LU)
    c = np.dot(D_inv, b)

    k = 0
    error = tol + 1
    x = b

    while error > tol:
        x = np.dot(H, x) + c
        error = np.linalg.norm(np.dot(A, x) - b)
        k += 1

    print("Jacobi法はk={}で、誤差ノルムが{}で収束しました。".format(k, error))
    return x
```

In [17]:

```
gs_ans = gs_ver2(tridiagonal_matrix(2))
jacobi_ans = jacobi_ver2(tridiagonal_matrix(2))
```

```
Gauss-Seidel法はk=2133409で、誤差ノルムが9.999545666620938e-07で収束しました。
Jacobi法はk=4267675で、誤差ノルムが9.999394932987578e-07で収束しました。
```

やはり、GS法もJacobi法もスペクトル半径が1よりも小さいので、反復回数を増やすと答えに収束した。

(以上全ての計算で停止条件は$\|Ax - b\| < tol$で取っている)