

2次元直交格子を用いた Shock-Fitting 法の基礎的研究

Fundamental Study on the Shock-Fitting Method Using 2D Cartesian grid

○ 西尾朋人, 東大, 東京都文京区本郷 7-3-1, E-mail: nishio-tomohito048@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

今村太郎, 東大, 東京都文京区本郷 7-3-1, E-mail: imamura@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

Tomohito NISHIO, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan

Taro IMAMURA, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan

Abstract must be 100 – 150 words using 9pt Times font. This is a simple example of how to prepare the paper for CFD39. The headings should appear as above. The instruction is written in the main body. Abstract must be 100 – 150 words using 9pt Times font. This is a simple example of how to prepare the paper for CFD39. The headings should appear as above. The instruction is written in the main body.

1. 序論

2. 手法

2.1 Shock-Capturing 法 Euler 方程式ソルバー

圧縮性 Euler 方程式を直交格子有限体積法 (FVM) で解く。状態変数の勾配計算は Weighted Least Square Quadrature (Gauss) (WLSQ(G), 重み付き最小二乗法) をにより行い, セル内物理量の再構築には三次精度 Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws (MUSCL 法) を用いる。また, 制限関数として Van Albada リミッターを採用する。近似 Riemann ソルバーとして AUSM (Advection Upstream Splitting Method) 族 SLAU (Simple Low-dissipation AUSM) スキームを使用する。時間積分は陽解法の 3 次精度の TVD Runge-Kutta 法で行う。CFL 条件は各セルの幅 $\Delta x, \Delta y$, 流体速度 $u_{i,j}, v_{i,j}$, 音速 $a_{i,j}$ を用いて, 式 (1) で定める。

$$\Delta t = \frac{\text{CFL}}{\max \left(\frac{|u_{i,j}|}{\Delta x} + \frac{|v_{i,j}|}{\Delta y} + a_{i,j} \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \right)} \quad (1)$$

直交格子に沿わない物体境界での境界条件には, 埋め込み境界法⁽²⁾ (Immersed Boundary Method, IB 法) を用いる。

2.2 不連続領域の判定・抽出

2.2.1 圧縮性の顕著なセルの特定

セルごとの圧縮性の定量的な評価法⁽³⁾ として, 速度場の発散を用いる。SC 法 CFD の計算結果から, 各セルで速度発散を計算し, その 2 乗平均平方根 (RMS) を算出する。速度発散がこの RMS より大きいセルを, 圧縮性が顕著なセルとし, 不連続領域と特定する。Fig.1-①は斜め衝撃波の SC 法 CFD 結果から, 圧縮性の顕著なセル (白セル) を特定した例である。

2.2.2 Connected Component Labeling

[2.2.1] で評価した圧縮性の顕著なセルは, 数値的な速度発散に基づく定義であるため, 物理的に意味のない領域 (ノイズや離小島) を含む場合がある。これらの不要な領域を自動的に除去し, 物理的に意味のある高圧縮性領域のみを抽出するために, Connected Component Labeling (CCL) によるクラスタリング処理を適用する。[2.2.1] で評価された圧縮性の顕著なセルについて, 同様のセルを縦横斜め 8 近傍に持つ場合に, それらを同一グループとしてクラスタリングしていく。得られた各クラスターごとにそのサイズ (属するセル数) を計算し, 計算領域に対して面積が一定割合未満の小さいクラスターをノイズと

して除去対象とする。こうして, 対象となる比較的大きなクラスターのみが残る。物理的に意味のある領域が選別可能となる。Fig.1-①の楕円内にあるノイズが除去され, Fig.1-②のように圧縮性の顕著なセルが整理される。この処理には Python の数値処理ライブラリ NumPy および SciPy の `ndimage.label` 関数を用いる。

2.2.3 不連続領域の Skeleton 化

Python の `skimage.morphology.skeletonize` 関数を用いて, [2.2.2] で得たクラスターの主要骨格をセル 1 ピクセル幅で取得する。この結果を Python の `networkx` を用いて処理する。本研究では干渉のない 1 本の衝撃波を扱うため, 主要骨格セルの中の最長経路を特定する。Fig.1-③の赤線は不連続領域から抽出された最長主要骨格を示す。`networkx` は分岐や経路処理に強いため, 今後衝撃波干渉や分岐⁽⁴⁾ などを扱うにあたって, この手法は応用性が高いと考えた。

2.2.4 衝撃波面の Spline 近似

[2.2.3] で得た不連続領域の最長骨格に対し, SciPy.interpolate の `splprep`, `splev` 関数を用いて spline 補完を行う。ここで, ユーザー任意のサンプリング点数の shock-points を任意の滑らかさで用意できる。Fig.1-④の緑線は, Fig.1-③の最長主要骨格 (赤線) を spline 近似して配置した shock-points を示す。

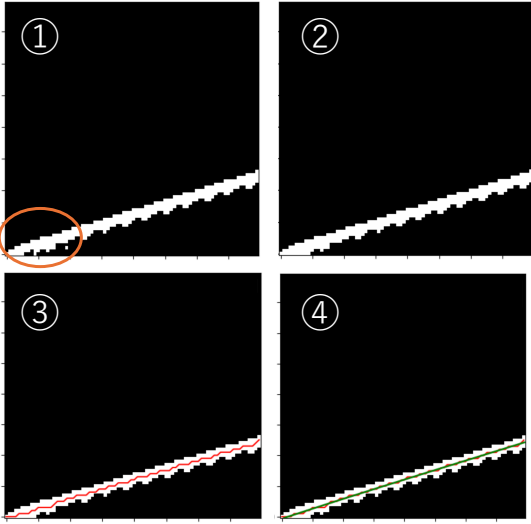


Fig. 1: 斜め衝撃波の衝撃波面抽出の例.

- ① SC 法 CFD の結果から速度発散を計算し圧縮性の顕著なセル (白セル) を特定 [2.2.1].
- ② CCL でノイズを除去 [2.2.2]. ①の楕円内のノイズが除かれる.
- ③ Skeleton 化で主要骨格 (赤線) を抽出 [2.2.3].
- ④ Spline 近似で滑らかな衝撃波面 (緑線) を得る [2.2.4].

2.3 Shock-Fitting 法

[2.1, 2.2] で, SC 法 CFD の計算結果と初期衝撃波面位置の shock-points が用意される. ここで, 直交格子のセルは各 1 つの物理量を持つのにに対し, shock-points は衝撃波直前と直後の 2 つの値を持つ. shock-fitting 法 (SF 法) では, はじめに不連続領域を除く衝撃波上流と下流で独立して SC 法 CFD を行い [2.3.4], タイムステップを Δt 進める. 次に, その情報を shock-points に外挿し [2.3.5], Rankine-Hugoniot 条件 (R-H 条件) を課すことで, shock-points での上流・下流の 2 つの物理量と shock-points の速度が決定される [2.3.7]. これにより, 不連続領域でもタイムステップを Δt 進めることができる [2.3.8, 2.3.9]. この情報をフィードバックし, 再び不連続領域を除く衝撃波上流と下流で独立して SC 法 CFD を実行する. このプロセスの繰り返しにより, 直交格子のセルと shock-points での状態変数, shock-points の位置が時間発展する.

以下にアルゴリズムの詳細を示す.

2.3.1 Blanked cells, Adjoining Boundary cells, Surrogate Boundary cells のラベリング

背景の直交格子のセルで, shock-points を繋いだ shock-edge (衝撃波面に相当) に横切られるものを, Blanked cells と呼ぶ. Blanked cells に少なくとも一辺を接しているセルを Adjoining Boundary cells と定義する. さらに, Adjoining Boundary cells と少なくとも一辺または一つの頂点を共有するセルを Surrogate Boundary cells と定義する.

ただし, 以下の条件を満たすように微修正を行う.

- 全ての Adjoining Boundary cells は, 少なくとも一辺を Surrogate Boundary cells と共有する. そうでないものは, Blanked cells にする.
- 全ての Surrogate Boundary cells は, 上下または左右から Adjoining Boundary cells や Ghost cells に挟まれない. 挟まれる場合, Adjoining Boundary cells にする.

[2.3.4] で衝撃波上流領域と下流領域で SC 法 CFD を独立に実行する際, Adjoining Boundary は境界条件を課す Ghost cells として働く. Surrogate Boundary cells は計算領域の境界を表す.

2.3.2 上流セル・下流セルの識別

Adjoining Boundary cells と Surrogate Boundary cells が, それぞれ衝撃波の上流か下流どちらにあるかを判別する. はじめに, shock-edge 法線と shock-edge からの相対位置ベクトルの内積を取り, 内積値の符号の正負によって 2 グループに分ける. その 2 グループのセルにおける圧力値を衝撃波面を跨いで比較し, 圧力が高い方を衝撃波下流側と判定する.

2.3.3 不要な Shock-Points の除去

shock-points の持つ上流値, 下流値は [2.3.9] で Adjoining Boundary に値を外挿する際に用いられる. そのため, どの Adjoining Boundary cells から最も近い shock-points は全く不要であるので, あらかじめ取り除く.

2.3.4 SC 法ソルバーによる計算領域での CFD の実行

衝撃波上流領域と下流領域で SE 法 CFD を独立に実行する. SC 法 CFD で課した境界条件に加え, 衝撃波上流側 Adjoining Boundary と下流側 Adjoining Boundary に境界条件を課す.

- 衝撃波上流側 Adjoining Boundary: 対象 Adjoining Boundary cell の縦横斜め 8 近傍で Surrogate Boundary cells を探索する. そのセルでの速度方向が最も対象 Adjoining Boundary cell に向いている Surrogate Boundary cell の値を, 対象 Adjoining Boundary cell に複製する. 流出・流入境界条件 (0 次外挿) に相当する.
- 衝撃波下流側 Adjoining Boundary: もともとセルの持っている値を保持する. この値は各タイムステップの [2.3.9] のプロセスで更新される.

2.3.5 Surrogate Boundary cells から Shock-Points への値の外挿

時間更新された Surrogate Boundary cells で状態変数の勾配を Green-Gauss 法により計算する⁽¹⁾. この結果を用いて, 各 shock-point に対し, 近傍の Surrogate Boundary cell から状態変数の値を 1 次外挿する⁽¹⁾. 各 shock-point は上流値と下流値の二つの値を持つが, 上流側の Surrogate Boundary は超音速流出境界で上流方向に特性曲線が伝播しないため, すべての状態変数を外挿する.

一方で, 下流値については遅い音響波 (slow acoustic wave) に対応するリーマン変数のみを外挿する. 衝撃波下流領域から特性曲線に乗って衝撃波面に伝わる情報は, このひとつのみだからである. 下流側から外挿するリーマン変数は次式で与えられる.

$$R_d^{t+\Delta t} = \tilde{a}_d^{t+\Delta t} + \tilde{u}_d^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{n} \quad (2)$$

ここで, $\tilde{a}_d^{t+\Delta t}$ および $\tilde{u}_d^{t+\Delta t}$ は下流側 Surrogate Boundary から外挿された仮の音速および速度ベクトルであり, \mathbf{n} は衝撃波面の法線ベクトルである. CFD 計算における風上差分の性質により, 式 (2) の左辺に相当するリーマン変数 $R_d^{t+\Delta t}$ は正しく時間発展している一方で, 右辺の外挿量 (チルダ付き) は近似値に過ぎない. これらの量は [2.3.7] で R-H 条件を課すことにより修正される.

2.3.6 衝撃波法線ベクトルの計算

各 shock-point において, 衝撃波面法線ベクトルを計算する. このとき, 周辺の shock-points が”影響範囲”⁽⁵⁾に含まれるかを判断し, 風上 2 点分の shock-points の座標, または風上風下両側 2 点分の座標を用いて計算する⁽¹⁾. 法線ベクトルは衝撃波上流方向を向くものを採用する.

2.3.7 Shock-Points での Rankine-Hugoniot 条件の適用

各 shock-points において R-H 条件を適用する. 求解対象となる変数は, 衝撃波下流側の密度 ρ_d , 法線方向速度 u_n^d , 接線方向速度 u_τ^d , 圧力 p_d , および shock-point 速度 w_s の計 5 変数である. これらに対して, 以下の 5 つの式が構成される.

$$\begin{aligned}\rho_d(u_n^d - w_s) &= \rho_u(u_n^u - w_s) \\ \rho_d(u_n^d - w_s)^2 + p_d &= \rho_u(u_n^u - w_s)^2 + p_u \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_d}{\rho_d} + \frac{1}{2}(u_n^d - w_s)^2 &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_u}{\rho_u} + \frac{1}{2}(u_n^u - w_s)^2 \\ u_\tau^d &= u_\tau^u \\ a_d + \frac{\gamma - 1}{2} u_n^d &= R_d\end{aligned}\quad (3)$$

添字 u と d はそれぞれ衝撃波の上流および下流側を意味し, a_d は下流側音速, R_d は下流側の特性変数である. なお, 全ての物理量について上付添字 $t + \Delta t$ を省略している.

2.3.8 時間積分による Shock Nodes の進行

[2.3.7] で得た shock-point 速度 w_s を使用し, shock-points の位置を更新する. 非定常問題への対応や高次精度の要求を満たすため, 高次の陽的多段法である Adams-Bashforth 法を用いる.

2.3.9 Shock-Points から Adjoining Boundary, Blanked cells への値の外挿

各 shock-point で, 状態変数の勾配を計算する. 近傍の shock-point, Surrogate Boundary cell の状態変数値とその相対位置から, 状態変数場を shock-point 周りに線形近似する⁽¹⁾. この際, 使用する shock-point は [2.3.6] で考えた”影響範囲”をもとに選択する. 求めた状態変数場から, Blanked cells, Adjoining Boundary cells の位置での各状態変数値が得られる.

以上のプロセスにより, 全てのセルの状態変数値, shock-points の持つ上流・下流値とその位置が時間更新される.

3. 結果

3.1 1 次元非定常垂直衝撃波

一枚グラフ. 各タイムステップでの位置と形状の比較

3.2 2 次元定常斜め衝撃波

grid convergence のグラフ, どここの部分で解析解と差があるかの比較グラフ

3.3 2 次元定常角柱離脱衝撃波

未定

3.4 2 次元定常円柱離脱衝撃波

未定

4. 結論

参考文献

- (1) Assonitis, A., Paciorri, R., Ciallella, M., Ricchiuto, M. and Bonfiglioli, A., “Extrapolated Shock Fitting for Two-Dimensional Flows on Structured Grids,” AIAA J., Vol. 60, No. 11 (2022), pp. 6301-6312.
- (2) Yoshiharu, T., Motoshi, H. and Taro, I., “Near-Wall Modification of Spalart–Allmaras Turbulence Model for Immersed Boundary Method,” AIAA J., Vol. 55, No. 9 (2017), pp. 3027-3039.
- (3) De Zeeuw, D. and Powell, K. G., “Euler Calculations of Axisymmetric Under-Expanded Jets by an Adaptive-Refinement Method,” 30th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit, Paper 92-0321 (1992), pp. 1-13.
- (4) Paciorri, R. and Bonfiglioli, A., “Accurate detection of shock waves and shock interactions in two-dimensional shock-capturing solutions,” Journal of Computational Physics, Vol. 406 (2020), pp. 109196.
- (5) Paciorri, R. and Bonfiglioli, A., “A shock-fitting technique for 2D unstructured grids,” Computers & Fluids, Vol. 38 (2009), pp. 715-726.