

# 2次元直交格子を用いた Shock-Fitting 法の基礎的研究

## Fundamental Study on the Shock-Fitting Method Using 2D Cartesian grid

○ 西尾朋人, 東大, 東京都文京区本郷 7-3-1, E-mail: nishio-tomohito048@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

今村太郎, 東大, 東京都文京区本郷 7-3-1, E-mail: imamura@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

Tomohito NISHIO, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan

Taro IMAMURA, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan

Abstract must be 100 – 150 words using 9pt Times font. This is a simple example of how to prepare the paper for CFD39. The headings should appear as above. The instruction is written in the main body. Abstract must be 100 – 150 words using 9pt Times font. This is a simple example of how to prepare the paper for CFD39. The headings should appear as above. The instruction is written in the main body.

### 1. 序論

超音速流れの数値流体計算 (Computational Fluid Dynamics, CFD) において, 衝撃波の取扱いは計算精度・収束性・安定性に大きな影響を及ぼす。従来広く用いられてきた shock-capturing 法 (SC 法) は, 全ての流体セルを同一のアルゴリズムで扱うため, 構造が単純で汎用性が高い。その一方で, 衝撃波の不連続性が人工粘性によって平滑化されるため, 数値振動の発生や衝撃波後流での計算精度の低下, さらには衝撃波位置の不明確さが課題となる。

shock-fitting 法 (SF 法) は, 背景格子形状に依らず衝撃波形状を明示的に追跡し, その運動および上下流の状態を Rankine-Hugoniot 条件に基づいて求める。この方法では衝撃波をゼロ厚さの面として扱うため, SC 法に内在する数値拡散を完全に除去でき, 比較的粗い格子でも高精度な結果を得ることができる。しかしながら, 衝撃波形状の動的追跡や, 差分計算が不連続をまたがないようにスキームを修正する必要があるため, 実装は非常に複雑である。

近年では, 非構造格子の SF 法である eDIT 法<sup>(1)</sup>(extrapolated Discontinuity Tracking 法) や, それを構造格子系に拡張した Structured Extrapolated Shock-Fitting 法<sup>(2)</sup>(SESF 法) が開発されている。これらの手法は, 衝撃波面周りでリメッシングを行わないため, 多種の既存の CFD ソルバへの適用が容易になり, 実用的な SF 法の実装が進展している。

本研究では, この SF 法の効果の実証と手法の改良を目的として, 多様な形状への適用と実装の比較的容易な直交格子系に手法を実装し, 基礎的なベンチマーク問題を解析する。[3.1] では 1 次元非定常衝撃波を扱い, SF 法の基本的な挙動と精度, 非定常問題への追従性を確認する。[3.2] では 2 次元定常斜め衝撃波を扱い, SC 法 CFD 結果, 解析解との比較により数値振動への耐性を評価する。[3.3] では, 流れ場の状態変数分布に非一様性があり, 衝撃波面が曲率を持つ 2 次元定常角柱離脱衝撃波を解析する。[3.4] では, 埋め込み境界法<sup>(4)</sup>(Immersed Boundary Method, IB 法) を用いて円柱離脱衝撃波を解き, 直交格子ソルバとの組み合わせの有効性を確認する。また, SC 法 CFD の結果から不連続領域を自動抽出し, 衝撃波面を配置して SF 法へ接続する処理の自動化を行うことで, SC 法と SF 法を統合した一連の計算手順を構築する。

### 2. 手法

#### 2.1 Shock-Capturing 法 Euler 方程式ソルバー

圧縮性 Euler 方程式を直交格子有限体積法 (FVM) で解く。状態変数の勾配計算は Weighted Least Square Quadrature (Gauss) (WLSQ (G), 重み付き最小二乗法)

をにより行い, セル内物理量の再構築には三次精度 Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws (MUSCL 法) を用いる。また, 制限関数として Van Albada リミッターを採用する。近似 Riemann ソルバーとして AUSM (Advection Upstream Splitting Method) 族 SLAU (Simple Low-dissipation AUSM) スキームを使用する。時間積分は陽解法の 3 次精度の TVD Runge-Kutta 法で行う。CFL 条件は各セルの幅  $\Delta x, \Delta y$ , 流体速度  $u_{i,j}, v_{i,j}$ , 音速  $a_{i,j}$  を用いて, 式 (1) で定める。

$$\Delta t = \frac{\text{CFL}}{\max \left( \frac{|u_{i,j}|}{\Delta x} + \frac{|v_{i,j}|}{\Delta y} + a_{i,j} \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \right)} \quad (1)$$

直交格子に沿わない物体境界での境界条件には, 埋め込み境界法<sup>(4)</sup> (Immersed Boundary Method, IB 法) を用いる。

#### 2.2 不連続領域の判定・抽出

##### 2.2.1 圧縮性の顕著なセルの特定

セルごとの圧縮性の定量的な評価法<sup>(5)</sup> として, 速度場の発散を用いる。SC 法 CFD の計算結果から, 各セルで速度発散を計算し, その 2 乗平均平方根 (RMS) を算出する。速度発散がこの RMS より大きいセルを, 圧縮性が顕著なセルとし, 不連続領域と特定する。Fig.1-①は斜め衝撃波の SC 法 CFD 結果から, 圧縮性の顕著なセル (白セル) を特定した例である。

##### 2.2.2 Connected Component Labeling

[2.2.1] で評価した圧縮性の顕著なセルは, 数値的な速度発散に基づく定義であるため, 物理的に意味のない領域 (ノイズや離小島) を含む場合がある。これらの不要な領域を自動的に除去し, 物理的に意味のある高圧縮性領域のみを抽出するために, Connected Component Labeling (CCL) によるクラスタリング処理を適用する。[2.2.1] で評価された圧縮性の顕著なセルについて, 同様のセルを縦横斜め 8 近傍に持つ場合に, それらを同一グループとしてクラスタリングしていく。得られた各クラスターごとにそのサイズ (属するセル数) を計算し, 計算領域に対して面積が一定割合未満の小さいクラスターをノイズとして除去対象とする。こうして, 対象となる比較的大きなクラスターのみが残り, 物理的に意味のある領域が選別可能となる。Fig.1-①の楕円内にあるノイズが除去され, Fig.1-②のように圧縮性の顕著なセルが整理される。この処理には Python の数値処理ライブラリ NumPy および SciPy の `ndimage.label` 関数を用いる。

### 2.2.3 不連続領域の Skeleton 化

Python の `skimage.morphology.skeletonize` 関数を用いて, [2.2.2] で得たクラスターの主要骨格をセル 1 ピクセル幅で取得する. この結果を Python の `networkx` を用いて処理する. 本研究では干渉のない 1 本の衝撃波を扱うため, 主要骨格セルの中の最長経路を特定する. Fig.1-③の赤線は不連続領域から抽出された最長主要骨格を示す. `networkx` は分岐や経路処理に強いため, 今後衝撃波干渉や分岐<sup>(6)</sup>などを扱うにあたっても, この手法は応用性が高いと考えた.

### 2.2.4 衝撃波面の Spline 近似

[2.2.3] で得た不連続領域の最長骨格に対し, SciPy.interpolate の `splprep`, `splev` 関数を用いて spline 補完を行う. ここで, ユーザー任意のサンプリング点数の shock-points を任意の滑らかさで用意できる. Fig.1-④の緑線は, Fig.1-③の最長主要骨格 (赤線) を spline 近似して配置した shock-points を示す.

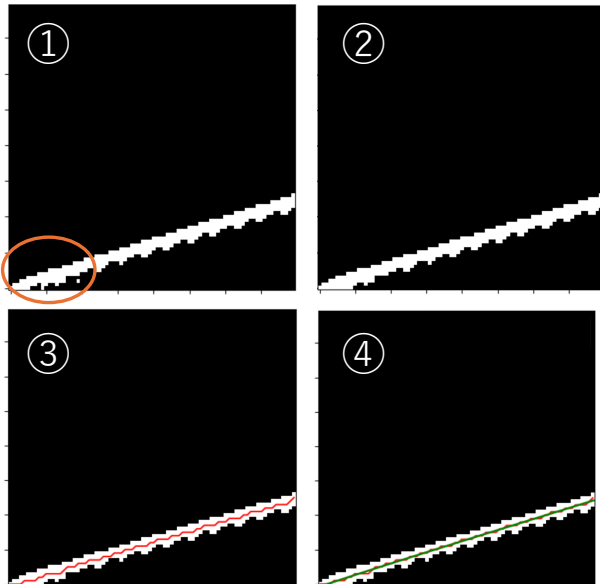


Fig. 1: 斜め衝撃波の衝撃波面抽出の例.

- ①SC 法 CFD の結果から速度発散を計算し圧縮性の顕著なセル (白セル) を特定 [2.2.1].
- ②CCL でノイズを除去 [2.2.2]. ①の楕円内のノイズが除かれる.
- ③Skeleton 化で主要骨格 (赤線) を抽出 [2.2.3].
- ④Spline 近似で滑らかな衝撃波面 (緑線) を得る [2.2.4].

## 2.3 Shock-Fitting 法

[2.1, 2.2] で, SC 法 CFD の計算結果と初期衝撃波面位置の shock-points が用意される. ここで, 直交格子のセルは各 1 つの物理量を持つのに対し, shock-points は衝撃波直前と直後の 2 つの値を持つ. shock-fitting 法 (SF 法) では, はじめに不連続領域を除く衝撃波上流と下流で独立して SC 法 CFD を行い [2.3.4], タイムステップを  $\Delta t$  進める. 次に, その情報を shock-points に外挿し [2.3.5], Rankine-Hugoniot 条件 (R-H 条件) を課すことで, shock-points での上流・下流の 2 つの物理量と shock-points の速度が決定される [2.3.7]. これにより, 不連続領域でもタイムステップを  $\Delta t$  進めることができる [2.3.8, 2.3.9]. こ

の情報をフィードバックし, 再び不連続領域を除く衝撃波上流と下流で独立して SC 法 CFD を実行する. このプロセスの繰り返しにより, 直交格子のセルと shock-points での状態変数, shock-points の位置が時間発展する.

以下にアルゴリズムの詳細を示す.

### 2.3.1 Blanked cells, Adjoining Boundary cells, Surrogate Boundary cells のラベリング

背景の直交格子のセルで, shock-points を繋いだ shock-edge (衝撃波面に相当) に横切られるものを, Blanked cells と呼ぶ. Blanked cells に少なくとも一辺を接しているセルを Adjoining Boundary cells と定義する. さらに, Adjoining Boundary cells と少なくとも一辺または一つの頂点を共有するセルを Surrogate Boundary cells と定義する.

ただし, 以下の条件を満たすように微修正を行う.

- 全ての Adjoining Boundary cells は, 少なくとも一辺を Surrogate Boundary cells と共有する. そうでないものは, Blanked cells にする.
- 全ての Surrogate Boundary cells は, 上下または左右から Adjoining Boundary cells や Ghost cells に挟まれない. 挟まれる場合, Adjoining Boundary cells にする.

Fig.2 は斜め衝撃波の衝撃波面の周囲で, 実際にラベリングを行った例である. 衝撃波面が Blanked cells に覆われ, さらにそれが Adjoining Boundary, Surrogate Boundary に囲まれている.

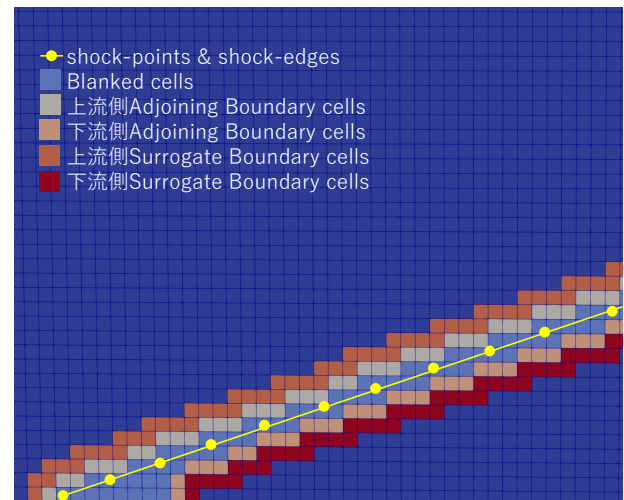


Fig. 2: shock-fitting 法におけるセルのグルーピングの例. 衝撃波面に横切られるセルを Blanked cells, その 1 層外側が Adjoining Boundary, さらに 1 層外側が Surrogate Boundary. さらに [2.3.1] の諸条件を満たすよう修正する.

[2.3.4] で衝撃波上流領域と下流領域で SC 法 CFD を独立に実行する際, Adjoining Boundary は境界条件を課す Ghost cells として働く. Surrogate Boundary cells は計算領域の境界を表す.

### 2.3.2 上流セル・下流セルの識別

Adjoining Boundary cells と Surrogate Boundary cells が, それぞれ衝撃波の上流か下流どちらにあるかを判別する. 最初のタイムステップでは, shock-edge 法線と最近傍 shock-point からの相対位置ベクトルの内積を取り,

内積値の符号の正負によって 2 グループに分ける。Fig.3 では、左上のセルは内積が正、右下のセルは負であるので、この 2 つのセルは一方が衝撃波上流側、もう一方が下流側と判別できる。その 2 グループのセルにおける圧力値を衝撃波面を跨いで比較し、圧力が高い方を衝撃波下流側と判定する。

次回以降のステップでは、[2.3.6] で法線方向を衝撃波上流方向に限定しているため、内積値の符号のみで上流・下流の識別が可能である。

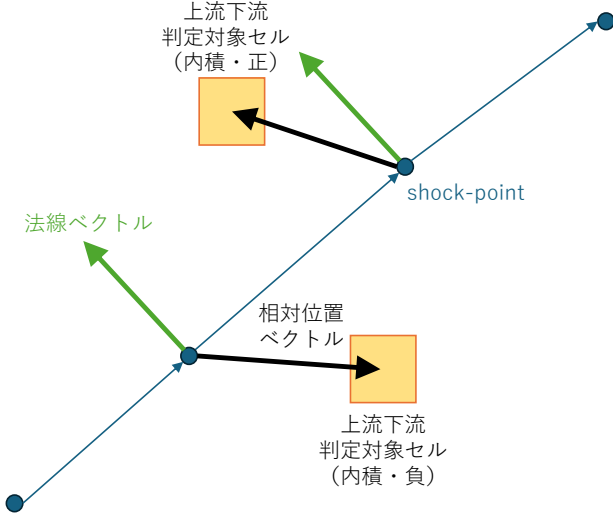


Fig. 3: 上流・下流判定対象セルに対し、最近傍 shock-point からの相対位置ベクトル (黒) と衝撃波法線 (緑) の内積を取る。左上のセルは内積が正、右下のセルは負である。一方が衝撃波上流側、もう一方が下流側と判別できるので、圧力値を比較し高いほうが下流側である。

### 2.3.3

shock-points の持つ上流値、下流値は [2.3.9] で Adjoining Boundary に値を外挿する際に用いられる。そのため、どの Adjoining Boundary cells から近くなく、外挿時に参照されない shock-points は全く不要であるので、あらかじめ取り除く。この操作は最初のタイムステップのみ行う。

### 2.3.4 SC 法ソルバーによる計算領域での CFD の実行

衝撃波上流領域と下流領域で SE 法 CFD を独立に実行する。SC 法 CFD で課した境界条件に加え、衝撃波上流側 Adjoining Boundary と下流側 Adjoining Boundary に境界条件を課す。

- ・ 衝撃波上流側 Adjoining Boundary：対象 Adjoining Boundary cell の縦横斜め 8 近傍で Surrogate Boundary cells を探索する。そのセルでの速度方向が最も対象 Adjoining Boundary cell に向いている Surrogate Boundary cell の値を、対象 Adjoining Boundary cell に複製する。流出・流入境界条件 (0 次外挿) に相当する。
- ・ 衝撃波下流側 Adjoining Boundary：もともとセルの持っている値を保持する。この値は各タイムステップの [2.3.9] のプロセスで更新される。

### 2.3.5 Surrogate Boundary cells から Shock-Points への値の外挿

時間更新された Surrogate Boundary cells で状態変数の勾配を Green-Gauss 法により計算する<sup>(3)</sup>。この結果を用いて、各 shock-point に対し、近傍の Surrogate Boundary cell から状態変数の値を 1 次外挿する<sup>(3)</sup>。各 shock-point は上流値と下流値の二つの値を持つが、上流側の Surrogate Boundary は超音速流出境界で上流方向に特性曲線が伝播しないため、すべての状態変数を外挿する。

一方で、下流値については遅い音響波 (slow acoustic wave) に対応するリーマン変数のみを外挿する。衝撃波下流領域から特性曲線に乗って衝撃波面に伝わる情報は、このひとつのみだからである。下流側から外挿するリーマン変数は次式で与えられる。

$$R_d^{t+\Delta t} = \tilde{a}_d^{t+\Delta t} + \tilde{\mathbf{u}}_d^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{n} \quad (2)$$

ここで、 $\tilde{a}_d^{t+\Delta t}$  および  $\tilde{\mathbf{u}}_d^{t+\Delta t}$  は下流側 Surrogate Boundary から外挿された仮の音速および速度ベクトルであり、 $\mathbf{n}$  は衝撃波面の法線ベクトルである。CFD 計算における風上差分の性質により、式 (2) の左辺に相当するリーマン変数  $R_d^{t+\Delta t}$  は正しく時間発展している一方で、右辺の外挿量 (チルダ付き) は近似値に過ぎない。これらの量は [2.3.7] で R-H 条件を課すことにより修正される。

### 2.3.6 衝撃波法線ベクトルの計算

各 shock-point において、衝撃波面法線ベクトルを計算する。このとき、周辺の shock-points が“影響範囲<sup>(7)</sup>”に含まれるかを判断し、風上 2 点分の shock-points の座標、または風上風下両側 2 点分の座標を用いて計算する<sup>(3)</sup>。法線ベクトルは衝撃波上流方向を向くものを採用する。

### 2.3.7 Shock-Points での Rankine-Hugoniot 条件の適用

各 shock-points において R-H 条件を適用する。求解対象となる変数は、衝撃波下流側の密度  $\rho_d$ 、法線方向速度  $u_n^d$ 、接線方向速度  $u_\tau^d$ 、圧力  $p_d$ 、および shock-point 速度  $w_s$  の計 5 変数である。これらに対して、以下の 5 つの式が構成される。

$$\begin{aligned} \rho_d(u_n^d - w_s) &= \rho_u(u_n^u - w_s) \\ \rho_d(u_n^d - w_s)^2 + p_d &= \rho_u(u_n^u - w_s)^2 + p_u \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_d}{\rho_d} + \frac{1}{2}(u_n^d - w_s)^2 &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_u}{\rho_u} + \frac{1}{2}(u_n^u - w_s)^2 \\ u_\tau^d &= u_\tau^u \\ a_d + \frac{\gamma - 1}{2} u_n^d &= R_d \end{aligned} \quad (3)$$

添字  $u$  と  $d$  はそれぞれ衝撃波の上流および下流側を意味し、 $a_d$  は下流側音速、 $R_d$  は下流側の特性変数である。なお、全ての物理量について上付添字  $t + \Delta t$  を省略している。

### 2.3.8 時間積分による Shock Nodes の進行

[2.3.7] で得た shock-point 速度  $w_s$  を使用し、shock-points の位置を更新する。非定常問題への対応や高次精度の要求を満たすため、高次の陽的多段法である Adams-Bashforth 法を用いる。

### 2.3.9 Shock-Points から下流 Adjoining Boundary, Blanked cells への値の外挿

各 shock-point で, 状態変数の勾配を計算する. 近傍の shock-point, 下流 Surrogate Boundary cell の状態変数値とその相対位置から, 状態変数場を shock-point 周りに線形近似する<sup>(3)</sup>. この際, 使用する shock-point は [2.3.6] で考えた”影響範囲”をもとに選択する. 求めた状態変数場から, Blanked cells, 下流 Adjoining Boundary cells の位置での各状態変数値が得られる.

以上のプロセスにより, 全てのセルの状態変数値, shock-points の持つ上流・下流値とその位置が時間更新される.

## 3. 結果

### 3.1 1 次元非定常垂直衝撃波

最も単純な 1 次元非定常垂直衝撃波を扱い, SF 法の基本的な挙動と精度, 非定常問題への追従性を確認する. Fig.4 に計算領域・設定の概略を示す. 衝撃波は最初に  $x = 0.5$  に存在し, 速度  $w = -0.2$  で移動する. 上流・下流の状態変数はこの条件を成立させるよう, あらかじめ R-H 条件を解いて与える. SC 法の計算では,  $x$  軸方向に 50 セルの直交格子を用いる. 1 タイムステップの時間幅は, CFL 条件を満たす固定値として設定し,  $\Delta t = 0.001$  とする.

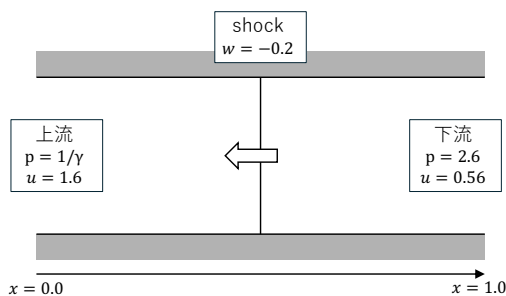


Fig. 4: 1 次元非定常垂直衝撃波の計算領域・設定の概略. 衝撃波は最初に  $x = 0.5$  に存在し, 速度  $w = -0.2$  で移動する.

SF 法による計算の結果, 衝撃波速さは常に 0.20000000298023216 という値となった. 理論解との差は, [2.3.7] でのニュートンラプソン法実行時の収束閾値が由来であった. 残差は倍精度の機械イプシロンまで収束していた. また, 流れ場は常に理論解と一致した.

Fig.5 上図は, SC 法 CFD の結果 (青) と SF 法の結果 (赤) を密度について比較している (1500step,  $t=1.5$ ). SC 法 CFD では, 衝撃波が人工粘性により平滑化され, 衝撃波位置が不明確である. また, SC 法の結果は衝撃波上流側では理論解と完全に一致するが, 衝撃波下流域では数値振動が発生し理論解と差を生じる. Fig.5 下図は, 衝撃波下流域の密度分布について, SC 法 CFD の結果と理論解との差を示している. 衝撃波前後の密度変化の 0.1% 程度の振幅の数値的減衰振動が確認できる.

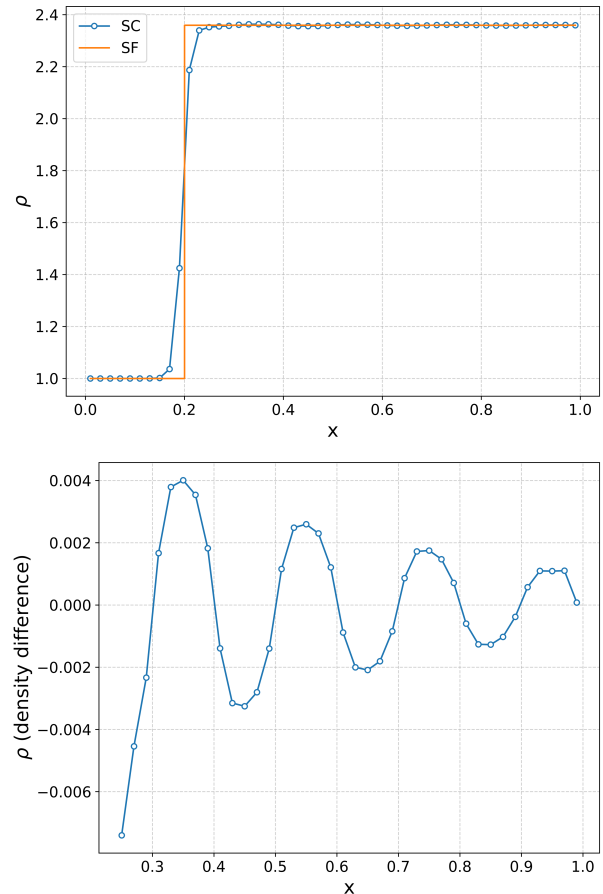


Fig. 5: 上: 1 次元非定常垂直衝撃波の SC 法 CFD の結果 (青) と SF 法の結果 (赤) を密度について比較 (1500step,  $t=1.5$ ).

下: 衝撃波下流域密度分布の, SC 法 CFD の結果と理論解との差.

### 3.2 2 次元定常斜め衝撃波

2 次元定常斜め衝撃波を扱い, 衝撃波面が背景格子に沿わない 2 次元流れでの SF 法の挙動と精度を確認する. Fig.6 に計算領域・設定の概略を示す. 計算領域左端から, マッハ数  $M_\infty = 2.5$ , 角度  $\theta = 15^\circ$  の均一流を流入する. 下端は滑り壁条件である. SC 法 CFD で 1000step 計算した後, [2.2] のプロセスで衝撃波面を抽出し, SC 法, SF 法でそれぞれ保存量の残差が  $10^{-14}$  を下回るまで計算を継続する.



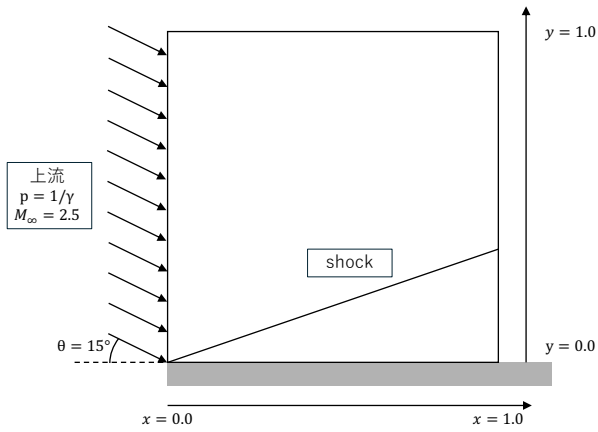


Fig. 6: 2次元定常斜め衝撃波の計算領域・設定の概略. 計算領域左端から, マッハ数  $M_\infty = 2.5$ , 角度  $\theta = 15^\circ$  の均一流を流入する. 下端は滑り壁条件.

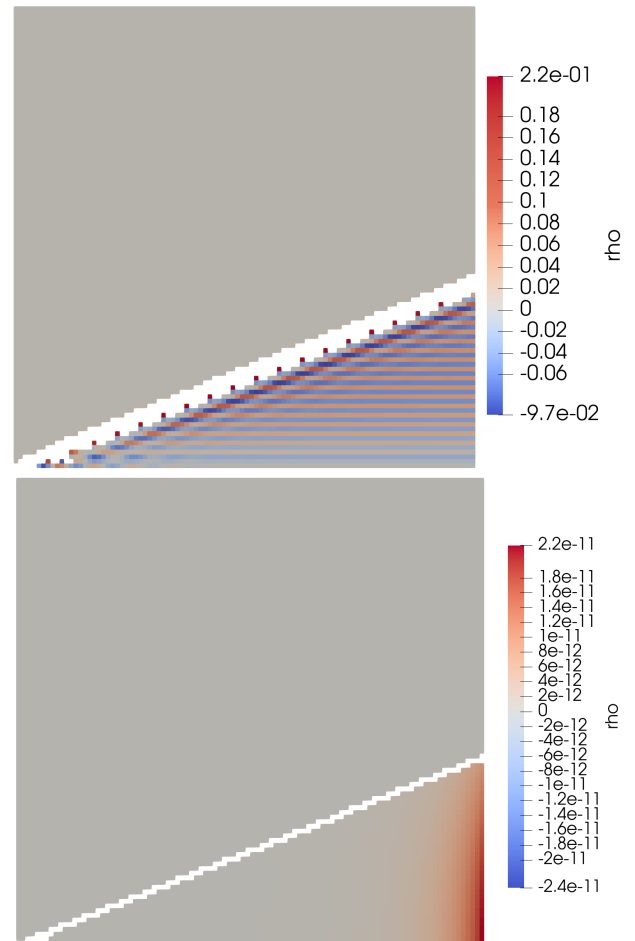


Fig. 7: 2次元定常斜め衝撃波のSC法, SF法計算結果(密度分布)の解析解との差分. 空白セルは不連続領域.  
上: SC法CFDと解析解の差分. 衝撃波後流域に数値振動が発生している.  
下: SF法と解析解の差分. 数値振動は見られない.

### 3.3 2次元定常角柱離脱衝撃波

SC法CFD, SF法での計算結果を解析解と比較する. 衝撃波の不連続が存在する領域は, SC法CFDでは正確に表現できないことが明らかであるため, 圧縮性が顕著なセル ([2.2.1]) を除いた計算領域で比較を行う. Fig.7 上は, SC法CFDの密度分布と解析解の差を示す. 衝撃波後流域に数値的減衰振動が発生していることが確認できる. 誤差は, 衝撃波前後の密度変化の約10%のオーダーに達している. 衝撃波面から離れるに従い, 誤差が減少することもわかる. 一方, Fig.7 下は, SF法の密度分布と解析解の差を示す. 誤差は衝撃波前後の密度変化の  $10^{-10}$  のオーダーに抑えられており, 数値振動は見られない.

2次元定常角柱離脱衝撃波を解析し, 流れ場の状態変数分布に非一様性があり, 衝撃波面が曲率を持つ場合のSF法の挙動を確認する. Fig.8に計算領域・設定の概略を示す. 計算領域左端から, マッハ数  $M_\infty = 4.0$  の一様流を流入する. 角柱表面は滑り壁条件を貸す.

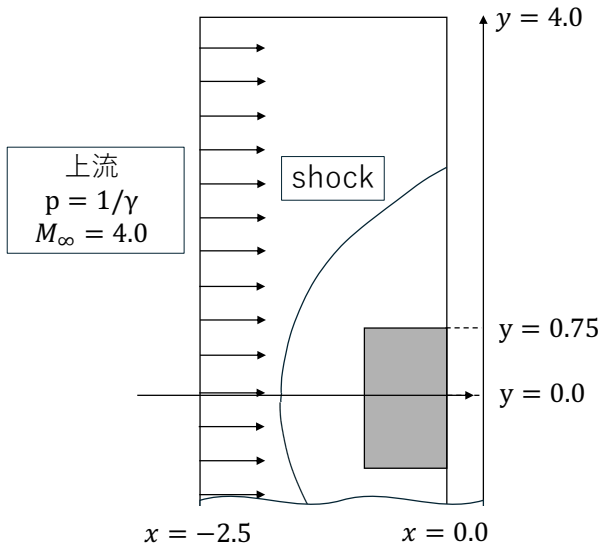


Fig. 8: 2次元定常角柱離脱衝撃波の計算領域・設定の概略. 計算領域左端から, マッハ数  $M_\infty = 4.0$  の一様流を流入する. 角柱表面は滑り壁条件.

### 3.4 2次元定常円柱離脱衝撃波

未定

## 4. 結論

### 参考文献

- (1) Ciallella, M., Ricchiuto, M., Paciorri, R. and Bonfiglioli, A., "Extrapolated Discontinuity Tracking for complex 2D shock interactions," *Computers & Fluids*, Vol. 391 (2022), pp. 114543.
- (2) Assonitis, A., Ciallella, M., Paciorri, R., Ricchiuto, M. and Bonfiglioli, A., "A new shock-fitting technique for 2-D structured grids," *AIAA SCITECH 2022 Forum*, Paper 2022-2008 (2022).
- (3) Assonitis, A., Paciorri, R., Ciallella, M., Ricchiuto, M. and Bonfiglioli, A., "Extrapolated Shock Fitting for Two-Dimensional Flows on Structured Grids," *AIAA J.*, Vol. 60, No. 11 (2022), pp. 6301-6312.
- (4) Yoshiharu, T., Motoshi, H. and Taro, I., "Near-Wall Modification of Spalart-Allmaras Turbulence Model for Immersed Boundary Method," *AIAA J.*, Vol. 55, No. 9 (2017), pp. 3027-3039.
- (5) De Zeeuw, D. and Powell, K. G., "Euler Calculations of Axisymmetric Under-Expanded Jets by an Adaptive-Refinement Method," *30th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, Paper 92-0321 (1992), pp. 1-13.
- (6) Paciorri, R. and Bonfiglioli, A., "Accurate detection of shock waves and shock interactions in two-dimensional shock-capturing solutions," *Journal of Computational Physics*, Vol. 406 (2020), pp. 109196.
- (7) Paciorri, R. and Bonfiglioli, A., "A shock-fitting technique for 2D unstructured grids," *Computers & Fluids*, Vol. 38 (2009), pp. 715-726.