

2次元直交格子を用いたShock-Fitting法の基礎的研究

Fundamental Study on the Shock-Fitting Method Using 2D Cartesian grid

○ 西尾朋人, 東大, 東京都文京区本郷 7-3-1, E-mail : nishio-tomohito048@g.ecc.u-tokyo.ac.jp
 今村太郎, 東大, 東京都文京区本郷 7-3-1, E-mail : imamura@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

Tomohito NISHIO, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan
 Taro IMAMURA, The University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, Japan

In computational fluid dynamics (CFD) of supersonic flows, shock-capturing methods smear discontinuities over several cells due to numerical diffusion, leading to reduced accuracy in post-shock regions. In contrast, the shock-fitting method explicitly represents the shock front by introducing shock-points and applying the Rankine-Hugoniot conditions, allowing accurate tracking of its position and shape while minimizing artificial viscosity effects. In this study, the shock-fitting technique was implemented on a Cartesian grid to facilitate its application to general geometries. Fundamental one- and two-dimensional benchmark problems were analyzed to validate the method's accuracy. The proposed approach achieved second-order accuracy except near immersed boundaries and reproduced analytical solutions with minimal error. However, slight deviations in the predicted shock standoff distance were observed, suggesting that the treatment of wall boundaries in the immersed boundary framework requires further refinement.

1. 序論

超音速流れの数値流体計算 (Computational Fluid Dynamics, CFD)において、衝撃波の取扱いは計算精度・収束性・安定性に大きな影響を及ぼす⁽¹⁾。従来広く用いられてきた shock-capturing 法 (SC 法) は、全ての流体 cell を同一のアルゴリズムで扱うため、構造が単純で汎用性が高い。その一方で、衝撃波の不連続性による数値振動の発生⁽²⁾、人工粘性による衝撃波後流での計算精度の低下⁽³⁾、さらには衝撃波位置の不明確さ⁽⁴⁾⁽⁵⁾が課題となる。

Shock-fitting 法 (SF 法) は、背景格子形状に依らず衝撃波形状を明示的に追跡し、その運動および上下流の状態を Rankine-Hugoniot 条件に基づいて求める。この方法では衝撃波をゼロ厚さの面として扱うため、SC 法に内在する数値拡散を完全に除去でき、比較的粗い格子でも高精度な結果を得ることができる⁽⁶⁾。しかしながら、SC 法では全 cell を单一のアルゴリズムで扱うのに対し、SF 法では衝撃波検知や衝撃波面前後の物理量の取り扱いが異なるため、実装が複雑である。

近年では、非構造格子の SF 法である eDIT 法⁽⁷⁾(extrapolated Discontinuity Tracking 法) や、それを構造格子系に拡張した Structured Extrapolated Shock-Fitting 法⁽⁸⁾(SESF 法) が開発されている。これらの手法は、衝撃波面周りでリメッシングを行わないため、多種の既存の CFD ソルバへの適用が容易になり、実用的な SF 法の実装が進展している。

本研究の目的は、SF 法の有効性を検証し、その改良に資する知見を得ることである。この目的のため、多様な物体形状への適用が容易な直交格子上に手法を実装し、基礎的なベンチマーク問題を解析する。2.1 節では、SC 法ソルバーを説明する。2.2 節では SC 法の結果から不連続領域を抽出し、衝撃波面を配置して、2.3 節で紹介する SF 法へ接続する処理を自動化する。3.1 節では 1 次元非定常衝撃波を扱い、SF 法の基本的な挙動と精度、非定常問題への追従性を確認する。3.2 節では 2 次元定常斜め衝撃波を SF 法で解き、SC 法の結果、解析解との比較により数値振動への耐性を評価する。3.3 節では、流れ場の基本変数分布に非一様性があり、衝撃波面が曲率を持つ円柱離脱衝撃波を解く。埋め込み境界法⁽⁹⁾(Immersed Boundary Method, IB 法) を用いて、直交格子ソルバーとの組み合せの有効性を確認する。4 節は本論文のまとめである。

2. Shock-fitting 手法

以下では SF 法による解析手順の概要を説明する。はじめに、SC 法により CFD 解析を実行する(2.1 節)。定常問題の場合は定常解に収束するまで SC 法による計算を継続する。非定常問題の場合には、SF 法による衝撃波面の追跡を開始したい時刻まで計算を進める。次に、SC 法の計算結果から圧縮性の顕著な cell を抽出し、初期衝撃波面位置を推定して、衝撃波位置を表す shock-points を配置する(2.2 節)。ここで、直交格子の cell は 1 つの cell に 1 つの基本変数を持つのに対し、shock-points は衝撃波前後の 2 つの値を持つ。SF 法では、はじめに不連続領域を除く衝撃波上流と下流で独立して SC 法を行い(2.3.2 節)、タイムステップを Δt 進める。次に、その情報を shock-points に外挿し(2.3.3 節)、Rankine-Hugoniot 条件 (R-H 条件) を課することで、shock-points での上流・下流の 2 つの基本変数と shock-points の速度が決定される(2.3.5 節)。これにより、不連続領域でもタイムステップを Δt 進めることができる(2.3.6 節)。このプロセスの繰り返しにより、直交格子の cell と shock-points での基本変数、shock-points の位置がタイムステップ Δt ごとに時間発展する。

以下にアルゴリズムの詳細を示す。

2.1 Shock-Capturing 法 Euler 方程式ソルバー

圧縮性 Euler 方程式を直交格子有限体積法 (FVM) で解く。以下、密度 ρ 、x 軸方向速度 u 、y 軸方向速度 v 、圧力 P を基本変数、 $\rho, \rho u, \rho v, \rho e$ (e は全エネルギー) を保存変数と呼ぶ。基本変数の勾配計算は Weighted Least Square Quadrature(Gauss)(WLSQ(G), 重み付き最小二乗法)⁽¹⁰⁾ をにより行い、cell 内基本変数の再構築には 2 次精度 Monotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws(MUSCL 法)⁽¹¹⁾ を用いる。また、制限関数として van Albada リミッター⁽¹²⁾ を採用する。近似 Riemann ソルバーとして AUSM(Advection Upstream Splitting Method) 族 SLAU(Simple Low-dissipation AUSM) スキーム⁽¹³⁾ を使用する。時間積分は陽解法の 3 次精度の TVD Runge-Kutta 法⁽¹⁴⁾ で行う。CFL 条件は各 cell の幅 $\Delta x, \Delta y$ 、流体速度 $u_{i,j}, v_{i,j}$ 、音速 $a_{i,j}$ を用いて、Eq.1 で定める⁽¹⁵⁾。式中 C はクーラン数である。

$$\Delta t = \frac{C}{\max \left(\frac{|u_{i,j}|}{\Delta x} + \frac{|v_{i,j}|}{\Delta y} + a_{i,j} \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2}} \right)} \quad (1)$$

直交格子に沿わない物体境界での境界条件には、IB 法⁽⁹⁾を用いる。

2.2 不連続領域の判定・抽出

2.2.1 圧縮性の顕著な cell の特定

Cell ごとの圧縮性の定量的な評価法として、速度場の発散を用いる⁽¹⁶⁾。SC 法の計算結果から、各 cell で速度発散を計算し、その 2 乗平均平方根 (RMS) を算出する。速度発散がこの RMS より大きい cell を、圧縮性が顕著な cell とし、不連続領域と特定する。Figure 1 は、3.2 節に示す二次元斜め衝撃波の解析における不連続領域の判定・抽出結果である。Figure 1(a) は SC 法の結果から、圧縮性の顕著な cell(白 cell) を特定した例である。

2.2.2 Connected Component Labeling

2.2.1 節で評価した圧縮性の顕著な cell は、数値的な速度発散に基づく定義であるため、物理的に意味のない領域（ノイズや離小島）を含む場合がある。これらの不要な領域を自動的に除去し、物理的に意味のある高圧縮性領域のみを抽出するために、Connected Component Labeling (CCL)⁽¹⁷⁾によるクラスタリング処理を適用する。2.2.1 節で評価された圧縮性の顕著な cell について、同様の cell を縦横斜め 8 近傍に持つ場合に、それらを同一グループとしてクラスタリングしていく。得られた各クラスターごとにそのサイズ（属する cell 数）を計算し、計算領域に対して面積が一定割合未満の小さいクラスターをノイズとして除去対象とする。こうして、対象となる比較的大きなクラスターのみが残り、物理的に意味のある領域が選別可能となる。Figure 1(a) の橋円内にあるノイズが除去され、Fig.1(b) のように圧縮性の顕著な cell が整理される。この処理には Python の数値処理ライブラリ NumPy および SciPy の ndimage.label 関数を用いる。

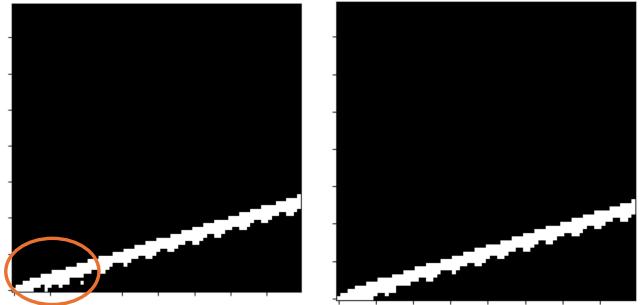
2.2.3 不連続領域の Skeleton 化

2.2.2 節で得たクラスターの主要骨格を、Skelton 化 (skeletonization) と呼ばれる処理により抽出する。Skelton 化は、離散的に表現された領域からその幾何的中心線を抽出する画像処理手法である。領域の形状やトポロジーを保持しつつ細線化を行うことで、構造を簡潔に記述できる。もともとは医学画像処理や形状解析などの分野で、複雑な領域の構造を簡潔に表現するために広く用いられてきた。アルゴリズムとしては、モルフォロジー演算（収縮操作）に基づき、領域の外縁から内側へと細線化を繰り返して骨格を得るものである⁽¹⁸⁾。本研究では、Python の skimage.morphology.skeletonize 関数を用い、2.2.2 節で得たクラスターの主要骨格を 1cell (1 ピクセル) 幅で抽出した。この結果を Python の networkx を用いてグラフ構造として処理する。本研究では干渉のない 1 本の衝撃波を対象とするため、主要骨格 cell の中から最長経路を特定した。Figure 1(c) の赤線は、不連続領域から抽出された最長主要骨格を示している。なお、networkx は分岐や経路探索に強いため、今後、衝撃波干渉や分岐⁽¹⁹⁾などの複雑な形態を扱う際にも応用可能であると考えられる。

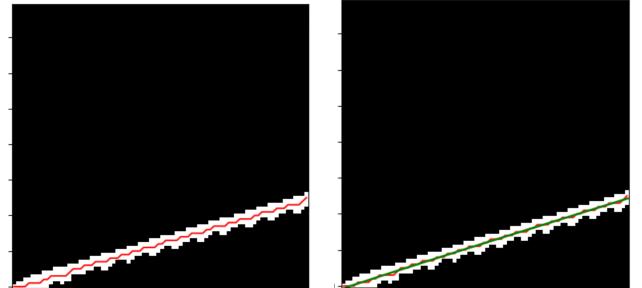
2.2.4 衝撃波面の Spline 近似

2.2.3 節で得た不連続領域の最長骨格に対し、SciPy.interpolate の splprep, splev 関数を用いて spline 補完を行う。ここで、ユーザー任意のサンプリング点数の shock-points を任意の滑らかさで用意できる。Figure 1(d) の緑線は、Fig.1(c) の最長主要骨格（赤線）を spline 近似して配置した shock-points を示す。

2.3 Shock-Fitting 法



(a) SC 法の結果から速度発散を計算し圧縮性の顕著な cell(白 cell) を特定する (2.2.1 節). (b) CCL でノイズを除去 (2.2.2 節). (a) の橋円内のノイズが除去される (2.2.1 節).



(c) Skeleton 化で主要骨格 (赤線) (d) Spline 近似で滑らかな衝撃波面 (緑線) を得る (2.2.3 節).

Fig. 1: SC 法の結果から不連続領域を抽出し初期衝撃波面を推定する手順 (2.2 節).

2.3.1 Blanked cells, Adjoining Boundary cells, Surrogate Boundary cells のラベリング⁽⁸⁾

背景の直交格子の cell で、shock-points を繋いだ shock-edge(衝撃波面に相当)に横切られる cell を、Blanked cells と呼ぶ。Blanked cells に少なくとも一辺を接している cell を Adjoining Boundary cells と定義する。さらに、Adjoining Boundary cells と少なくとも一辺または一つの頂点を共有する cell を Surrogate Boundary cells と定義する。

ただし、以下の条件を満たすように微修正を行う。

- 全ての Adjoining Boundary cells は、少なくとも一辺を Surrogate Boundary cells と共有する。そうでないものは、Blanked cells にする。
- 全ての Surrogate Boundary cells は、上下または左右から Adjoining Boundary cells や計算境界に挟まれない。挟まれる場合、Adjoining Boundary cells にする。

Figure 2 は 3.2 節で示す二次元斜め衝撃波の衝撃波面の周囲で、実際にラベリングを行った例である。

2.3.2 SC 法ソルバーによる衝撃波上流・下流領域毎の CFD 解析

Adjoining Boundary cells と Surrogate Boundary cells が、それぞれ衝撃波の上流か下流どちらにあるかを判別する。最初のタイムステップでは、shock-point での衝撃波法線と、最近傍 shock-point からの相対位置ベクトルの内積を取り、内積値の符号の正負によって cell を 2 グループに分ける。Figure 3 では、左上の cell は内積が正、右下の cell は負であるので、この 2 つの cell は一方が衝撃波上流側、もう一方が下流側と判別できる。その 2 グループ

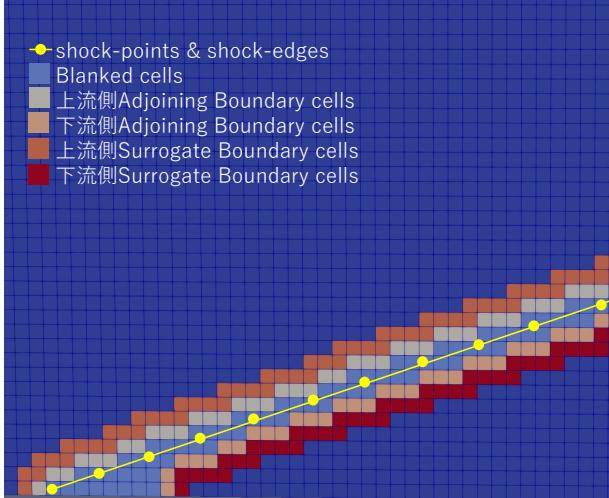


Fig. 2: Shock-fitting 法における cell のラベリングの例。衝撃波面に横切られる cell を Blanked cells, その 1 層外側が Adjoining Boundary, さらに 1 層外側が Surrogate Boundary. さらに 2.3.1 節の諸条件を満たすよう修正する。

の cell における圧力値を衝撃波面を跨いで比較し, 圧力が高い方を衝撃波下流側と判定する。

次回以降のステップでは, 2.3.4 節で衝撃波法線方向を衝撃波上流方向に限定しているため, 内積値の符号のみで上流・下流の識別が可能である。

各 Shock-point が保持する上流側および下流側の値は, 2.3.6 節において Adjoining Boundary へ値を外挿する際に使用される。したがって, いずれの Adjoining Boundary cell にも近接せず, 外挿時に参照されない shock-point は不要であるため, あらかじめ削除する。この操作は最初のタイムステップのみ行う。

以上の準備の後, 衝撃波上流領域と下流領域で SC 法を独立に実行する。2.1 節での SC 法で課した境界条件に加え, 衝撃波上流側 Adjoining Boundary と下流側 Adjoining Boundary に境界条件を課す。

- 衝撃波上流側 Adjoining Boundary : 対象 Adjoining Boundary cell の縦横斜め 8 近傍で Surrogate Boundary cells を探索する。その cell での速度方向が最も対象 Adjoining Boundary cell に向いている Surrogate Boundary cell の値を, 対象 Adjoining Boundary cell に 1 次外挿する。流出・流入境界条件(1 次外挿)に相当する。
- 衝撃波下流側 Adjoining Boundary : もともと cell の持っている値を保持する。この値は各タイムステップの 2.3.6 節のプロセスで更新される。

2.3.3 Surrogate Boundary cells から shock-points への値の外挿

時間更新された Surrogate Boundary cells で基本変数の勾配を Green-Gauss 法により計算する⁽²⁰⁾。この結果を用いて, 各 shock-point に対し, 近傍の Surrogate Boundary cell から基本変数の値を 1 次外挿する⁽²⁰⁾。上流側の Surrogate Boundary は超音速流出境界で, 上流方向に特性曲線が伝播せず衝撃波の影響を受けないため, すべての基本変数を shock-points の上流値に外挿する。

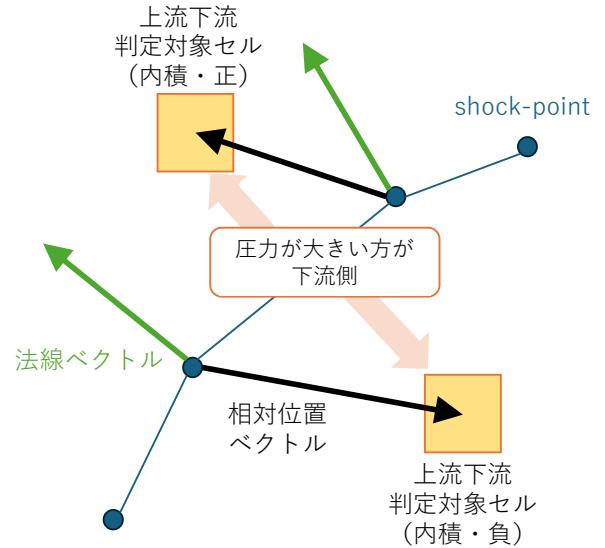


Fig. 3: 上流・下流判定対象 cell に対し, 最近傍 shock-point からの相対位置ベクトル(黒)と衝撲波法線(緑)の内積を取る。左上の cell は内積が正, 右下の cell は負である。一方が衝撲波上流側, もう一方が下流側と判別できるので, 圧力値を比較し高いほうが下流側である。

一方下流値については, 遅い音響波 (slow acoustic wave) に対応するリーマン変数のみを下流側 Surrogate Boundary から外挿する。衝撲波下流領域から特性曲線に乗って衝撲波面に伝わる情報は, このひとつのみだからである。下流側から外挿するリーマン変数は次式で与えられる。

$$R_d^{t+\Delta t} = \tilde{a}_d^{t+\Delta t} + \frac{\gamma - 1}{2} \tilde{\mathbf{u}}_d^{t+\Delta t} \cdot \mathbf{n} \quad (2)$$

ここで, $\tilde{a}_d^{t+\Delta t}$ および $\tilde{\mathbf{u}}_d^{t+\Delta t}$ は下流側 Surrogate Boundary から外挿された仮の音速および速度ベクトルであり, \mathbf{n} は衝撲波法線ベクトルである。CFD 解析における風上差分の性質により, Equation2 の左辺に相当するリーマン変数 $R_d^{t+\Delta t}$ は正しく時間発展している一方で, 右辺の外挿量 (チルダ付き) は近似値に過ぎない。これらの量は 2.3.5 節で R-H 条件を課すことにより修正される。

2.3.4 衝撲波法線ベクトルの計算

各 shock-point において, 衝撲波法線ベクトルを計算する。このとき, 周辺の shock-points が“影響範囲”⁽⁶⁾に含まれるかを判断し, CFD の風上的性質に基づいて計算する必要がある。Shock-point i に対して, 隣接する shock-point $i+1$ が i に影響を及ぼす(すなわち“影響範囲”に含まれる)とき, 以下の不等式が成り立つ。

$$\mathbf{u}_{d,i+1}^t \cdot \mathbf{s}_{i+1/2} - a_{d,i+1}^t < 0 \quad (3)$$

- $\mathbf{u}_{d,i+1}^t$: 時刻 t における shock-point $i+1$ の下流側速度ベクトル
- $a_{d,i+1}^t$: 同じ点の音速
- $\mathbf{s}_{i+1/2}$: shock-edge $l_{i+1/2}$ の単位接線ベクトル (i から $i+1$ 方向)

Figure 4 の場合、shock-point $i+1$ は shock-point i の”影響範囲”に含まれる。shock-point $i-1$ に対しても同様に条件をチェックする。

下流側の shock-point が”影響範囲”外の場合、上流側 2 点分の shock-points の座標 (Fig.4 P_{i-2}^t, P_{i-1}^t) を用いて、衝撃波法線ベクトルを求める⁽²⁰⁾。一方、隣接する shock-point が両方とも”影響範囲”内の場合、上流下流各 1 点分 (Fig.4 P_{i-1}^t, P_{i+1}^t) の座標を用いて衝撃波法線ベクトルを計算する⁽²⁰⁾。なお衝撃波法線ベクトルは衝撃波上流方向を向くものを採用する。

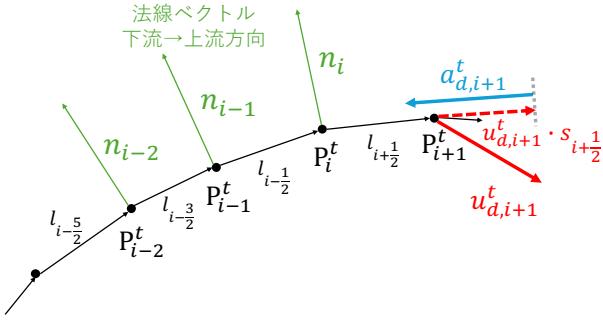


Fig. 4: 隣接する shock-point が”影響範囲”に含まれるかの判定。各 shock-point において、衝撃波接線方向速度(赤点線)と局所音速(青)を Eq.3 で比較、判定する。

2.3.5 Shock-points における基本変数と位置の更新

各 shock-points において R-H 条件を適用する。求解対象となる変数は、衝撃波下流側の密度 ρ_d 、衝撃波法線方向速度 u_n^d 、接線方向速度 u_τ^d 、圧力 p_d 、および shock-point 速度 w_s の計 5 変数である。これらに対して、以下の 5 つの式が構成される。

$$\begin{aligned} \rho_d(u_n^d - w_s) &= \rho_u(u_n^u - w_s) \\ \rho_d(u_n^d - w_s)^2 + p_d &= \rho_u(u_n^u - w_s)^2 + p_u \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_d}{\rho_d} + \frac{1}{2}(u_n^d - w_s)^2 &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_u}{\rho_u} + \frac{1}{2}(u_n^u - w_s)^2 \\ u_\tau^d &= u_\tau^u \\ a_d + \frac{\gamma-1}{2} u_n^d &= R_d \end{aligned} \quad (4)$$

上付き添字 u と d はそれぞれ衝撃波の上流および下流側を意味し、 a_d は下流側音速、 R_d は下流側の遅い音響波 (slow acoustic wave) に対応するリーマン変数である (Eq.2)。なお、全ての基本変数について上付添字 $t + \Delta t$ を省略している。これを Newton-Raphson 法で解く。その結果得られた shock-point 速度 w_s を使用し、shock-points の位置を更新する。時間積分には Euler 法を用いる。

2.3.6 Shock-points から下流 Adjoining Boundary, Blanked cells への値の外挿

各 shock-point で、基本変数の勾配を計算する。近傍の shock-point、下流 Surrogate Boundary cell の基本変数値とその相対位置から、基本変数場を各 shock-point 周りに

線形近似する⁽²⁰⁾。この際、使用する shock-point は 2.3.4 節で考えた”影響範囲”をもとに選択する。求めた基本変数場から、Blanked cells、下流 Adjoining Boundary cells の位置での各基本変数値が得られる。Blanked cells は、shock-points の移動により Blanked cells 以外のグループに変化する可能性があるため、毎時間ステップごとに値を更新する。

以上のプロセスにより、全ての cell の基本変数値、shock-points の持つ上流・下流値とその位置が時間更新される。

3. 結果

3.1 1 次元非定常垂直衝撃波

1 次元非定常垂直衝撃波を扱い、SF 法の基本的な挙動と精度、非定常問題への追従性を確認する。Figure 5 に計算領域・設定の概略を示す。衝撃波は最初に $x = 0.5$ に存在し、速度 $w = -0.2$ で移動する。上流・下流の初期基本変数値は、この条件を成立させるようあらかじめ R-H 条件を解いて与える。SC 法の計算では、 x 軸方向に 50cells の直交格子を用いる。1 タイムステップの時間幅は、CFL 条件 (Eq.1) を満たす固定値として設定し、 $\Delta t = 0.001$ とする。

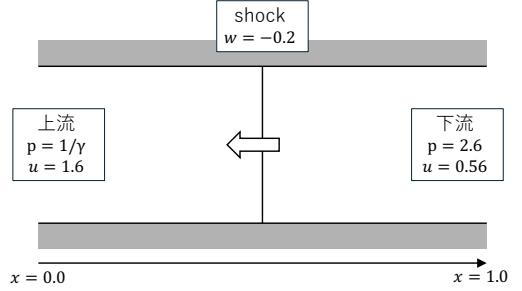


Fig. 5: 1 次元非定常垂直衝撃波の計算領域・設定の概略。衝撃波は最初に $x = 0.5$ に存在し、速度 $w = -0.2$ で移動する。

SF 法による計算の結果、衝撃波速さは常に 0.20000000298023216 となった。理論解との差は、2.3.5 節での Newton-Raphson 法実行時の収束閾値が由来であった。残差は倍精度の機械イプシロンまで収束していた。また、流れ場は常に理論解と一致した。

Figure 6 で、SC 法の結果 (青) と SF 法の結果 (赤) を密度について比較する (1500step, $t=1.5$)。SC 法では、衝撃波が人工粘性により平滑化され、衝撃波位置が 4 セル程度に跨る。衝撃波上流側では理論解と完全に一致するが、衝撃波下流領域では差が生じる。Figure 7 では、衝撃波下流域の密度分布について、SC 法、SF 法の結果と理論解との差を示す。SC 法の衝撃波下流域では数値的減衰振動が発生することがわかる。振幅は衝撃波前後の密度変化の 0.3% 程度である。

3.2 2 次元定常斜め衝撃波

2 次元定常斜め衝撃波を扱い、衝撃波面が背景格子に沿わない 2 次元流れでの SF 法の挙動と精度を確認する。Figure 8 に計算領域・設定の概略を示す。計算領域左端から、マッハ数 $M_\infty = 2.5$ 、角度 $\theta = 15^\circ$ の一様流を流入する。下端は滑り壁条件である。SC 法で 1000step 計算した後、2.2 節のプロセスで衝撃波面を抽出する。その後、SC 法、SF 法それぞれで収束するまで計算を継続する。最も壁に近い左下端の shock-point での衝撃波法線計算時 (2.3.4 節) には、原点に仮の shock-point があるとして、その座標を必要に応じて用いた。

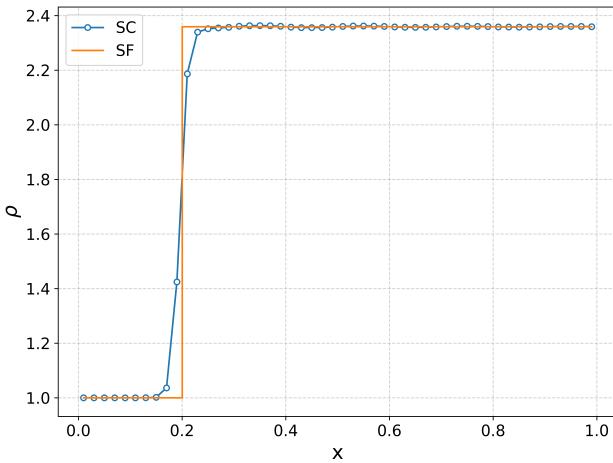


Fig. 6: 1次元非定常垂直衝撃波のSC法の結果(青)とSF法の結果(赤)を密度について比較(1500step, $t = 1.5$).

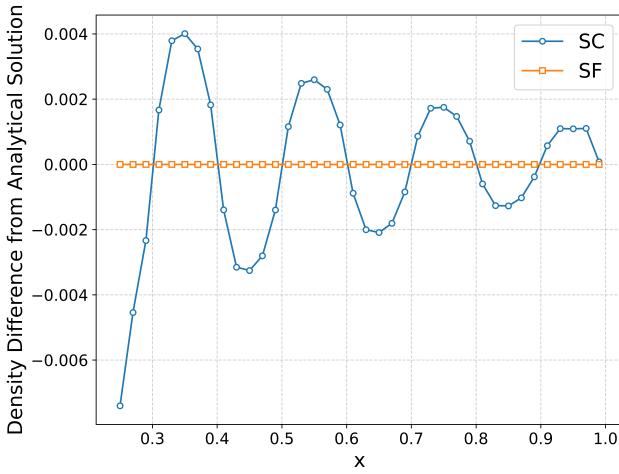


Fig. 7: 衝撃波下流域密度分布における、SC法の結果と理論解との差。

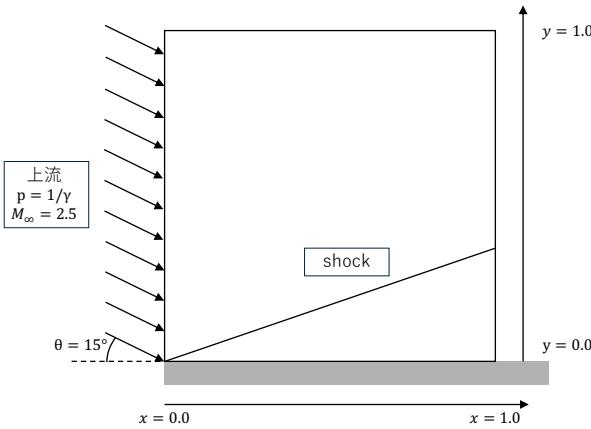


Fig. 8: 2次元定常斜め衝撃波の計算領域・設定の概略。計算領域左端から、マッハ数 $M_\infty = 2.5$ 、角度 $\theta = 15^\circ$ の一様流を流入する。下端は滑り壁条件。

Figure 9に、SF法で計算された各shock-pointの速さの時間履歴を示す。Figure 8の衝撃波面に配置されたshock-pointsに対し、左下から右上に順に番号を振り、カラーマップで表示した。200 stepまでは全てのshock-pointsが運動しているが、やがて斜め衝撃波の壁に近い側(番号の若い側)から速度の収束が始まり、それが伝播していくことがわかる。今回の計算条件では、衝撃波接線方向の流速マッハ数は1を超える。そのため、2.3節に説明されるSF法の風上的性質により、番号の若いshock-pointの挙動の収束が下流に伝播していく。Figure 10で、SF法計算結果

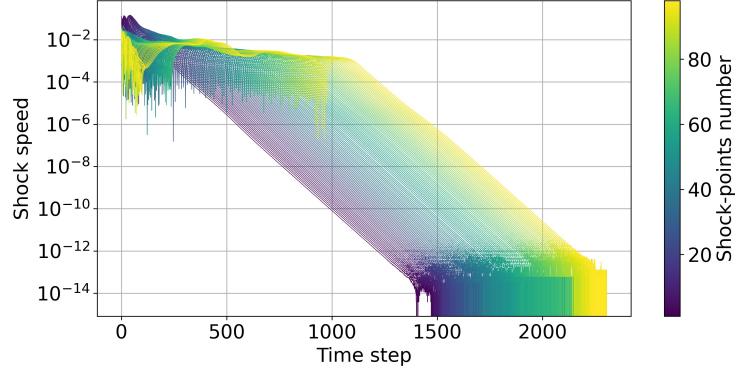


Fig. 9: 各 Shock-point の速さの時間履歴。Figure 8の衝撃波面に配置された shock-pointsに対し、左下から右上に順に番号を振り、カラーマップで表示。

の最終的な shock-points 位置(青点)を示す。赤線は、最小二乗法で推定した衝撃波面の近似直線で、その傾きは 0.402908006 である。一方理論解は傾き 0.402908009 であり、その差は $10^{-6}\%$ 程度に収まっている。

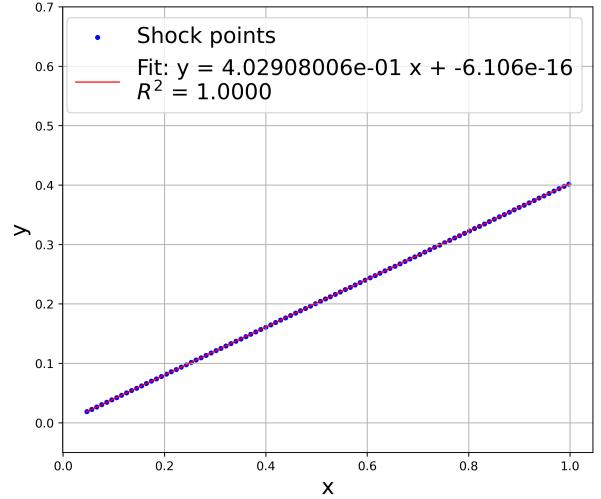
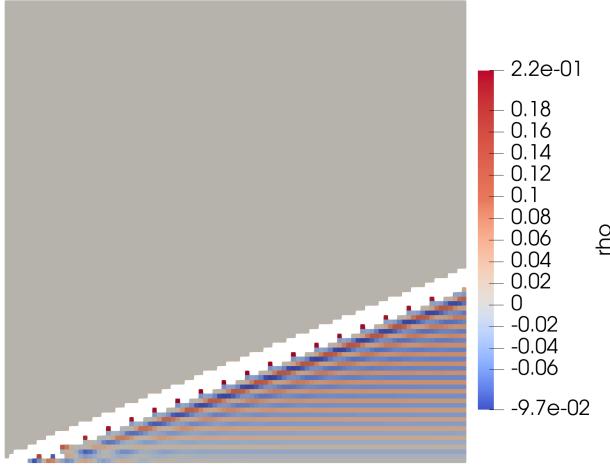


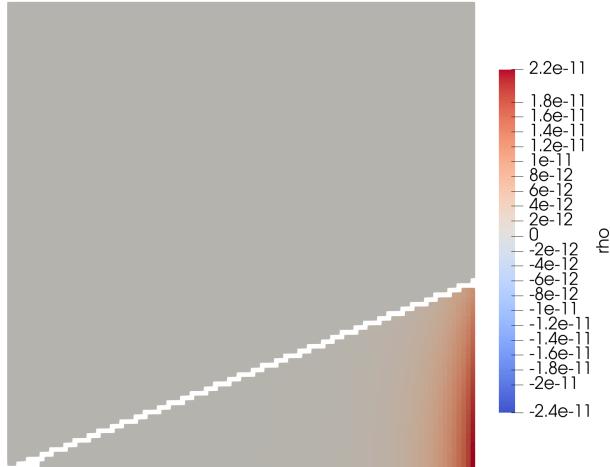
Fig. 10: 最終的な shock-points 位置(青点)と近似直線(赤線)。決定係数 $R^2 = 1.0$ 。

SC法、SF法での計算結果を解析解と比較する。衝撃波の不連続が存在する領域は、SC法では正確に表現できないことが明らかであるため、圧縮性が顕著なcell(2.2.1節)を除いた計算領域で比較を行う。Figure 11(a)は、SC法の密度分布と解析解の差を示す。衝撃波後流域に斜め衝撃波に平行に数値的減衰振動が発生していることが確

認できる。振動の振幅は、衝撃波前後の密度変化の約10%のオーダーに達している。一方、Fig.11(b)は、SF法の密度分布と解析解の差を示す。誤差は衝撃波前後の密度変化の 10^{-10} のオーダーに抑えられており、数値振動は見られない。



(a) SC 法と解析解の差分。衝撃波後流域に数値振動が発生している。



(b) SF 法と解析解の差分。数値振動は見られない。

Fig. 11: 2次元定常斜め衝撃波のSC法, SF法計算結果(密度分布)の解析解との差分。空白cellは不連続領域。

3.3 2次元定常円柱離脱衝撃波

2次元定常円柱離脱衝撃波を解析し、流れ場の基本変数分布に非一様性があり、衝撃波面が曲率を持つ場合のSF法の挙動を確認する。IB法を用いて円柱表面滑り壁条件を課し、直交格子ソルバーとSF法の組み合わせの有効性を確認する。Figure 12に計算領域・設定の概略を示す。計算領域左端から、マッハ数 $M_\infty = 2.3$ の一様流を流入する。

計算結果から、全温 T_0 の計算領域全体での保存誤差を求める。定常問題で流入が一様流のため、全温 T_0 は計算領域全体で保存されているべきであり、この保存誤差を調べることで計算手法の格子収束を評価できる。格子サイズ h_i, h_{i+1} で、全温 T_0 の保存誤差 L_1 ノルム平均がそれぞれ $\epsilon_i, \epsilon_{i+1}$ の時、収束次数 \tilde{n} は以下の式で計算できる。

$$\tilde{n}_{i,i+1} = \frac{\log(\epsilon_i/\epsilon_{i+1})}{\log r} \quad (5)$$

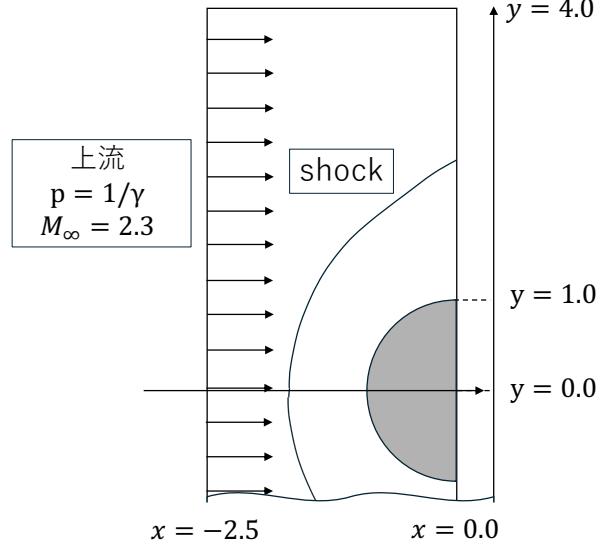


Fig. 12: 2次元定常円柱離脱衝撃波の計算領域・設定の概略。計算領域左端から、マッハ数 $M_\infty = 2.3$ の一様流を流入する。IB法により円柱表面に滑り壁条件を課す。

ただし、 $r = h_i/h_{i+1}$ である。

本解析では3段階の格子(粗, 中, 細。それぞれ*i* = 0, 1, 2に対応。)を用い、それぞれSC法, SF法の計算を行う。 $r = 2$ で統一した。また、 L_1 ノルム平均を求める際、SC法, SF法両方の計算結果からBlanked cellsを取り除いて比較する。

Table 1は、全温 T_0 の保存誤差 L_1 ノルムの格子サイズ依存性を示す。いずれの格子サイズでも、SF法の保存誤差がSC法より小さいことがわかる。収束次数 \tilde{n} は、SF法では設計精度の2次を下回り平均1.74、一方のSC法では平均0.37である。円柱離脱衝撃波を極座標構造格子SF法で解析した先行研究⁽⁸⁾では、SF法が1.9次精度ほどの収束次数を保つ一方、SC法は0.9次精度ほどに落ちる、と報告されている。Table 1の結果は、収束次数がSF法、SC法の両方でさらに低下している。

Tab. 1: 全温 T_0 の計算領域全体での保存誤差の L_1 ノルム平均と格子サイズ h の相関。

Grid	h	SF		SC	
		L_1	\tilde{n}	L_1	\tilde{n}
0	0.0781	$5.34 \cdot 10^{-4}$	—	$8.96 \cdot 10^{-4}$	—
1	0.0391	$1.46 \cdot 10^{-4}$	1.87	$6.97 \cdot 10^{-4}$	0.361
2	0.0195	$4.79 \cdot 10^{-5}$	1.61	$5.40 \cdot 10^{-2}$	0.369

Figure 13は、SC法とSF法の全温 T_0 の保存誤差の分布を示す。SC法では顕著な衝撃波後流領域の保存誤差が、SF法では消えていることがわかる。一方、IB法は保存則を満たさないため、円柱表面境界セル部分ではSC法, SF法ともに大きく誤差が残っていることがわかる。この部分で誤差のオーダーが大きく、 L_1 ノルム平均への寄与が大きい。誤差が ± 2 標準偏差から外れるセルを取り除いて収束次数 \tilde{n} を計算すると、Tab.2を得る。SF法で収束

次数がソルバー設計精度の2次近くまで回復していることがわかる。

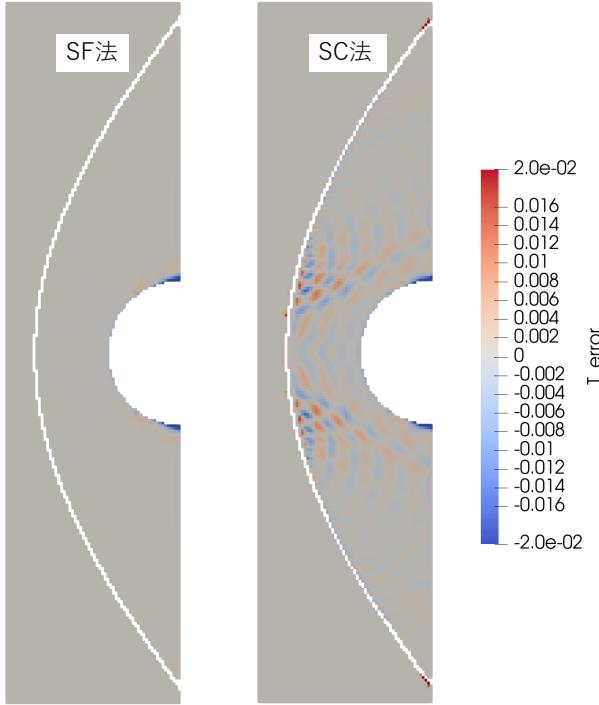


Fig. 13: 全温 T_0 の保存誤差の分布。空白領域は Blanked cells と円柱。

Tab. 2: 全温 T_0 の計算領域全体での保存誤差の L_1 ノルム平均と格子サイズ h の相関。壁面境界の IB 法による影響を除く。

Grid	h	SF		SC	
		L_1	\tilde{n}	L_1	\tilde{n}
0	0.0781	$3.63 \cdot 10^{-4}$	—	$5.96 \cdot 10^{-4}$	—
1	0.0391	$9.28 \cdot 10^{-4}$	1.97	$4.50 \cdot 10^{-4}$	0.405
2	0.0195	$2.36 \cdot 10^{-5}$	1.98	$2.95 \cdot 10^{-2}$	0.611

続いて、衝撃波の収束位置についての比較を行う。Figure12 の x 軸上の cell に対し、密度分布を取り出して SC 法、SF 法の比較を行う。Figure14 ではさらに、修正 Newton 理論を用いる衝撃波位置の近似理論値⁽²¹⁾を併記している。この手法は、主流マッハ数 $M_\infty = 1.35 \sim 6$ で良い近似を与えると報告されている。

SC 法では、どの格子サイズにおいても 4cells にわたって不連続が平滑化されている。SF 法の衝撃波位置は、どの格子サイズの結果においてもその平滑化領域中に収束している。一方で、各格子サイズごとに比較すると衝撃波収束位置は異なっており、円柱半径の 5%程度のズレを持って収束している。これは、非構造格子 SF 法で衝撃波位置は格子サイズに依存しない、とする先行研究結果⁽⁶⁾に反する。また、どの格子サイズにおける衝撃波収束位置も、理論近似解とは円柱半径の 10%程度の差がある。

ここで、今回用いた IB 法の概略を Fig.15 に示す。Image

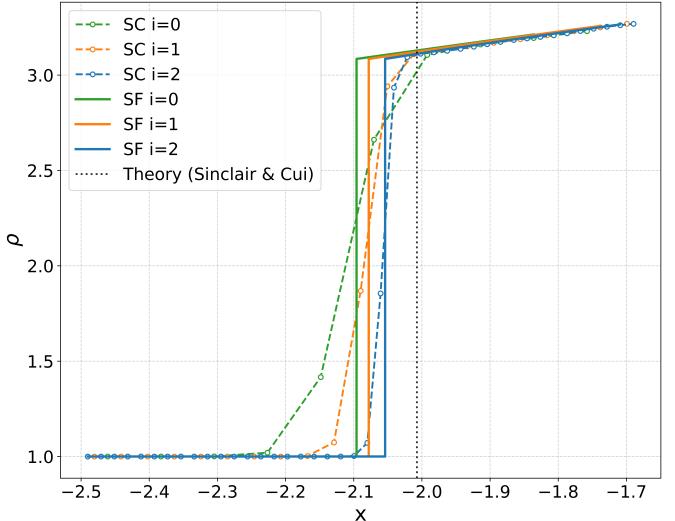


Fig. 14: x 軸上の密度分布と衝撃波位置の比較。 i は格子サイズ。黒波線は近似理論値⁽²¹⁾

point から壁面までの法線方向速度を線形近似し、face center に数値流束を課すこと、滑り壁条件を課している。この時、壁面から Image point まで伸ばす法線の長さ d_{IP} について、次元 n_{dim} の直交格子では Eq.6 が満たさざる必要がある。

$$d_{IP} > \sqrt{n_{dim}} \cdot \max(\Delta x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n_{dim}) \quad (6)$$

本研究では、経験的に $d_{IP} = 3\Delta x$ としている。ここに格子サイズ依存性がある。この長さ d_{IP} の区間における、IB 法で近似した線形速度プロファイルと実際の壁面近傍速度プロファイルの差が、格子サイズによる衝撃波収束位置の差につながっている可能性がある。

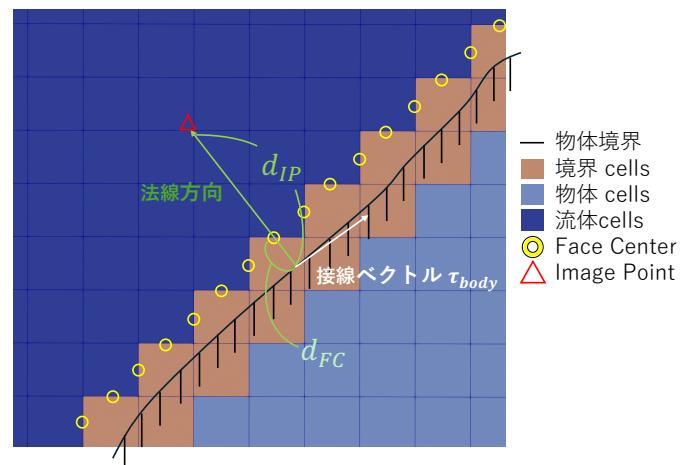


Fig. 15: IB 法の概要図。Image Point(赤三角) から壁面にかけて、法線方向速度を線形近似して壁面で 0 とする。Image Point の密度、圧力、物体接線方向速度はこの間で一定とする。こうして Face Center の基本変数を決定し、数値流束を計算して Face center に課す。

4. 結論

SF 法を直交格子上に実装し、計算精度の評価と課題点の抽出を行った。

1 次元非定常垂直衝撃波問題(3.1節)では、R-H 条件により衝撃波前後の整合性をとることで、背景格子位置に依らず衝撃波を追跡し、演算誤差を除いて解析解と完全に一致する流れを得られた。1次元で初期解が解析解で与えられた場合、SC 法では時間発展に伴い数値粘性による不連続の平滑化、数値振動が発生する一方、SF 法ではその質を損なわず時間発展することを確認した。

2 次元定常斜め衝撃波問題(3.2節)では、初期解として与えた SC 法結果から、不連続位置を自動で推定・抽出し、SF 法のイタレーションを行うことで解析解を得られた。

2 次元定常円柱離脱衝撃波問題(3.2節)では、基本変数場が非一様で、衝撃波面が曲率を持つ流れ場で、SF 法のアルゴリズムが正確に機能することを確かめた。

流れ場全体の全温 T_0 の保存誤差解析では、保存誤差の L_1 ノルム平均を 3 つの異なる格子幅で計算した。SF 法では、IB 法を課す物体境界付近 cells を除いて設計精度の 2 次精度が保たれる一方、SC 法では収束次数が 1 次精度を下回った。物体境界付近 cells を考慮しても、SF 法では SC 法よりも良い収束次数が得られた。

最後に、SF 法の 3 つの異なる格子幅に対し、衝撃波収束位置の比較を行った。非構造格子 SF 法を扱った先行研究⁽⁶⁾では、SF 法の格子幅は衝撃波収束位置に影響しない、とされていたが、本研究では円柱半径の 5%程度のずれを持って収束する結果となった。SC 法結果から読み取るおよその衝撃波位置も同様の傾向のズレを持ち、これは物体境界を擬似的に扱う IB 法と組み合わせたことによる影響と考えられる。直交格子を用いる場合、衝撃波位置を正確に捉えられるという SF 法の利点を活かす上で、IB 法による壁面境界条件の与え方に課題を残した。

参考文献

- (1) Bonfiglioli, A. and Paciorri, R., "Convergence Analysis of Shock-Capturing and Shock-Fitting Solutions on Unstructured Grids," *AIAA Journal*, Vol. 52, No. 7 (2014), pp. 1404–1416.
- (2) Lee, T. K. and Zhong, X., "Spurious Numerical Oscillations in Numerical Simulation of Supersonic Flows Using Shock-Capturing Schemes," *AIAA Paper 98-0115* (1998).
- (3) Quirk, J. J., "A Contribution to the Great Riemann Solver Debate," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 18, No. 6 (1994), pp. 555–574.
- (4) Carpenter, M. H. and Casper, J. H., "Accuracy of Shock Capturing in Two Spatial Dimensions," *AIAA Journal*, Vol. 37, No. 9 (1999), pp. 1072–1079.
- (5) Zaide, D. and Roe, P. L., "Shock Capturing Anomalies and the Jump Conditions in One Dimension," *Proc. AIAA Fluid Dynamics and Collocated Conferences*, American Institute of Aeronautics and Astronautics (2011), Paper 2011-3686.
- (6) Paciorri, R. and Bonfiglioli, A., "A Shock-Fitting Technique for 2D Unstructured Grids," *Computers & Fluids*, Vol. 38 (2009), pp. 715–726.
- (7) Ciallella, M., Ricchiuto, M., Paciorri, R. and Bonfiglioli, A., "Extrapolated Discontinuity Tracking for Complex 2D Shock Interactions," *Computers & Fluids*, Vol. 391 (2022), pp. 114543.
- (8) Assonitis, A., Ciallella, M., Paciorri, R., Ricchiuto, M. and Bonfiglioli, A., "A New Shock-Fitting Technique for 2-D Structured Grids," *AIAA SCITECH 2022 Forum*, Paper 2022-2008 (2022).
- (9) Tamaki, Y., Harada, M. and Imamura, T., "Near-Wall Modification of Spalart–Allmaras Turbulence Model for Immersed Boundary Method," *AIAA Journal*, Vol. 55, No. 9 (2017), pp. 3027–3039.
- (10) Shima, E., Kitamura, K. and Haga, T., "Green–Gauss/Weighted-Least-Squares Hybrid Gradient Reconstruction for Arbitrary Polyhedra Unstructured Grids," *AIAA Journal*, Vol. 51, No. 11 (2013), pp. 2740–2747.
- (11) Henrick, A. K., Aslam, T. D. and Powers, J. M., "Simulations of Pulsating One-Dimensional Detonations with True Fifth-Order Accuracy," *Journal of Computational Physics*, Vol. 213, No. 1 (2006), pp. 311–329.
- (12) 藤井孝藏, “流体力学の数値計算法,” 東京大学出版会, (1994), p.133.
- (13) Shima, E. and Kitamura, K., "On New Simple Low-Dissipation Scheme of AUSM-Family for All Speeds," *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, Paper 2009-136 (2009).
- (14) Gottlieb, S. and Shu, C. W., "Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes," *Mathematics of Computation*, Vol. 67, No. 221 (1998), pp. 73–85.
- (15) MacCormack, R. W., "Numerical Solution of the Interaction of a Shock Wave with a Laminar Boundary Layer," *Proceedings of the Second International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Lecture Notes in Physics, Vol. 8 (1971), pp. 151–163.
- (16) De Zeeuw, D. and Powell, K. G., "Euler Calculations of Axisymmetric Under-Expanded Jets by an Adaptive-Refinement Method," *30th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, Paper 92-0321 (1992), pp. 1–13.
- (17) Wu, K., Otoo, E. and Shoshani, A., "Optimizing Connected Component Labeling Algorithms," *International Journal of High Performance Computing Applications**, Vol. 23, No. 2 (2009), pp. 156–182.
- (18) Zhang, T. Y. and Suen, C. Y., "A Fast Parallel Algorithm for Thinning Digital Patterns," *Communications of the ACM*, Vol. 27, No. 3 (1984), pp. 236–239.
- (19) Paciorri, R. and Bonfiglioli, A., "Accurate Detection of Shock Waves and Shock Interactions in Two-Dimensional Shock-Capturing Solutions," *Journal of Computational Physics*, Vol. 406 (2020), pp. 109196.
- (20) Assonitis, A., Paciorri, R., Ciallella, M., Ricchiuto, M. and Bonfiglioli, A., "Extrapolated Shock Fitting for Two-Dimensional Flows on Structured Grids," *AIAA Journal*, Vol. 60, No. 11 (2022), pp. 6301–6312.
- (21) Sinclair, J. and Cui, X., "A theoretical approximation of the shock standoff distance for supersonic flows around a circular cylinder," **Physics of Fluids**, Vol. 29, No. 2 (2017), 026102.