

移動境界を有する有限要素流体解析の次元削減

Reduced-order modeling for finite element flow analysis with moving boundary

金子 栄樹(東大・工) 吉村 忍(東大・工)

Shigeki KANEKO, The University of Tokyo

Shinobu YOSHIMURA, The University of Tokyo

FAX: 03-5841-6994, E-mail: s_kaneko@save.sys.t.u-tokyo.ac.jp

The present study worked on reduced-order modeling (ROM) using proper orthogonal decomposition for arbitrary Lagrangian–Eulerian (ALE) method-based fluid analysis. In the ALE method, Dirichlet boundary conditions on moving boundaries are time-variant. We proposed a ROM method to accurately impose the boundary conditions. We applied the ROM method to a classical fluid–rigid body interaction problem. Then, the number of degrees of freedom was reduced to less than 1 % while keeping the accuracy.

1. 序論

計算機性能の向上により大規模自由度モデルを用いた数値解析が可能になってきているが、パラメトリックスタディのように何度も解析を実行することは依然として容易ではない。そこで現象の特徴を十分に捉えつつ計算コストの低い代理モデルの開発が求められている。Reduced-order modeling (ROM) の代表的な手法として固有直交分解 (Proper orthogonal decomposition, POD) を用いた手法 (以後、POD-ROM という) があり、様々な分野の数値解析に応用されている¹⁾。POD-ROM では、まず次元削減前の高自由度解析システムでサンプリング解析を行い、Snapshot と呼ばれるトレーニングデータを収集する。次に、収集したデータから POD 基底を抽出し、そのうちの少数の基底を用いて未知数を近似する。そして、Galerkin 法と組み合わせてこの近似を用いることで解析システムの低次元化がなされ、自由度を大幅に削減することができる。本研究では移動境界を有する流体解析への POD-ROM の適用を試みる。

Stankiewicz ら²⁾ は Arbitrary Lagrangian–Eulerian (ALE) 法を用いた流体解析に POD-ROM の適用した。ALE 法を用いた流体解析では、移動境界上の流速の Dirichlet 境界条件としてメッシュ移動速度が付与される。ゆえに、刻々と変化する Dirichlet 境界条件を扱う必要があるが、この研究では境界条件の付与が正確にできていない。Tissot ら³⁾ は Fictitious domain (FD) 法を用いた流体解析に POD-ROM を適用した。FD 法では、移動境界上での条件は未定乗数法で処理されるため、前述の ALE 法を用いた場合の問題は生じない。界面追跡法は界面捕捉法に比べ解析精度が高いとされることを鑑み、我々は ALE 法を用いた流体解析に焦点を当てた。本研究では、解空間を Dirichlet 境界条件を満たすための固定元とそれ以外に分離して考え、後者のほうに POD 基底を用いた次元削減を施す、という ROM 手法を提案し、Dirichlet 境界条件を正確に付与できる POD-ROM 解析システムの構築を行った。

2. 移動境界を有する流体解析

非圧縮粘性流れの支配方程式は以下の通りである。

$$\rho^F \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^F = \rho^F \mathbf{b}^F \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

式 (1) は ALE 記述された Navier–Stokes 方程式、式 (2) は連続の式である。 ρ^F は密度、 \mathbf{u} は流速ベクトル、 $\hat{\mathbf{u}}$ はメッシュ速度、 $\boldsymbol{\sigma}^F$ は応力テンソルを示している。Newton 流体

を仮定し応力テンソルは以下のように表される。

$$\boldsymbol{\sigma}^F = -p\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (3)$$

p は圧力、 \mathbf{I} は 2 階の単位テンソル、 μ は粘性係数、 \mathbf{b}^F は物体力である。式 (1) と式 (2) を弱形式にし、適当に離散化することで、以下の式を得る。

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{f} \quad (4)$$

ここで、 $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は係数行列、 $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ は解ベクトル、 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ は既知量をまとめたベクトルである。ただし n は次元削減前のモデルの自由度数である。

3. 次元削減の方法

次元削減前の解析システムにおいて、解空間 M は $M = \mathcal{V} + G$ のようにかける。ここで \mathcal{V} は

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{q} | \exists \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{q}(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{c}\} \quad (5)$$

である。ただし、Dirichlet 境界条件が課される境界 (Γ_D と表す) 上で \mathbf{q} の値が 0 になるように適宜、係数 \mathbf{c} の成分の一部には 0 が与えられる。また、 $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ は形状関数を適宜まとめて表記した行列であり、 m は 1 節点をもつ自由度数を示す。 $G = \mathbf{N}\mathbf{g}$ は Dirichlet 境界条件を満たすための固定元である。 \mathbf{g} は Γ_D 上であれば境界条件の値が付与され、それ以外では 0 である。序論で述べたとおり、本研究では \mathcal{V} に次元削減を施す。そうするために、解ベクトルから Dirichlet 境界条件の値を減じたもの ($\tilde{\mathbf{d}}$ と表す) を Snapshot として収集する。Snapshot は以下のような Snapshot matrix $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times NS}$ にアセンブルされる。

$$\mathbf{U} = [\tilde{\mathbf{d}}(j_1), \tilde{\mathbf{d}}(j_2), \dots, \tilde{\mathbf{d}}(j_{NS})] \quad (6)$$

ここで j はパラメータセットを表しており、NS は Snapshot の総数である。時刻も解ベクトルを決定するパラメータと捉え、各時刻で Snapshot の収集を行う。次に、 \mathbf{U} に内在する特徴を分析し基底を抽出するため、特異値分解を施す。

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{S}\mathbf{W}^T \quad (7)$$

ここで $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times \text{Rank}(\mathbf{U})} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{\text{Rank}(\mathbf{U})}]$ の各列が左特異ベクトルとなる。また、 $\mathbf{S} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{\text{Rank}(\mathbf{U})})$ であり、 σ は特異値を表しており、添字が小さいほど大きく、非負である。左特異ベクトルが POD 基底であり、相当する特異値が大きいほど支配的なモードとなる。前述の通り、Dirichlet 境界条件の値を減じたものを収集したので、各モードの Γ_D

上の値は 0 となる。次元削減のために、はじめの k 本 (ただし $k \ll n$) の基底を用い、結果として \mathbf{d} は次のように近似される。

$$\mathbf{d} = \mathbf{V}_k \mathbf{a} + \mathbf{g} \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ は係数、 $\mathbf{V}_k \in \mathbb{R}^{n \times k}$ は $\mathbf{V}_k = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k]$ のように POD 基底をまとめた行列である。この近似は Galerkin 法と組み合わせて用いられるので、式 (4) は以下のように低次元化される。

$$\mathbf{V}_k^T \mathbf{K} \mathbf{V}_k \mathbf{a} = \mathbf{V}_k^T (\mathbf{f} - \mathbf{K} \mathbf{g}) \quad (9)$$

4. 数値解析例

図 1 に示すような、典型的な流体剛体連成問題を扱う。一様流れ内に円柱シリンダーが配置され、仮想的なバネとダンパにつながれているものとし、シリンダーは流体力により自励振動を起こす。表 1 に解析条件を示す。

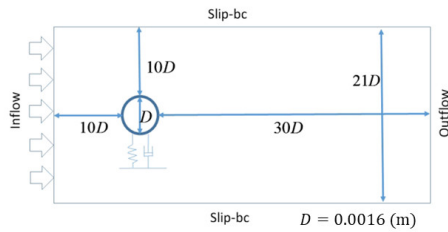


Fig. 1 Schematic view of fluid-rigid body interaction problem

Table 1 Analysis conditions

Time step width	$1.0 \times 10^{-3} [\text{s}]$
Number of nodes	9235
Density of fluid	$1.0 \times 10^3 [\text{kg/m}^3]$
Viscosity	$1.0 \times 10^{-3} [\text{kg/m} \cdot \text{s}]$
Inlet velocity	62.5[m/s]
Density of structure	$1.0 \times 10^3 [\text{kg/m}^3]$
Stiffness	69.84[N/m]
Damping	$4.0 \times 10^{-3} [\text{N} \cdot \text{s/m}]$

データ収集として 3000 タイムステップまで解析を行った (NS = 3000)。2.3 章では簡便のために未知数をまとめた場合の定式化を示したが、実際の実装では流速と圧力に分けて POD 基底を抽出している。図 2 に流速の 1 次モードの y 成分を可視化した。円柱付近の拡大図から明らかなよう

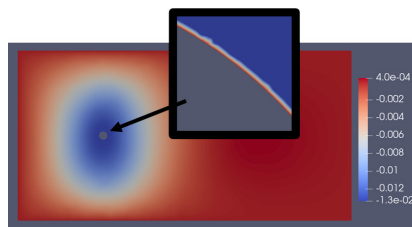


Fig. 2 1st POD mode of y -velocity

に、 Γ_D 上で値が 0 になっている。ROM のために、流速に関して 162 本、圧力に関して 37 本の POD 基底を用いた。よって、自由度数は 199 となり、もともとのシステム (自由度数 27705) の 1% 以下となった。

ROM 解析ともとの高精度解析の結果を比較するために、 $t = 4 \text{ s}$ における流速の大きさの分布を図 3 に示した。これより両者は大域的に良い一致を示していることが

わかる。図 4 にシリンダーの変位の時刻歴応答を示す。次

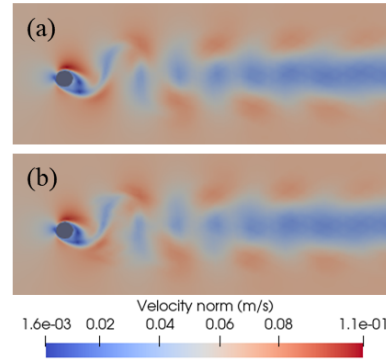


Fig. 3 Velocity norm at $t = 4 \text{ s}$, (a) High-fidelity (b) ROM

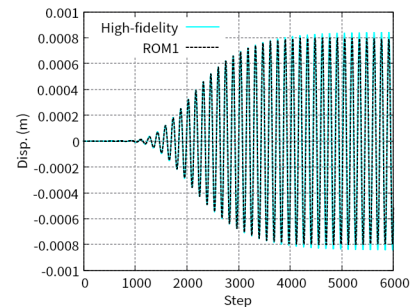


Fig. 4 Time histories of displacement of cylinder

元削減モデルでも自励振動を再現できている。3000 ステップ分の情報をもとに ROM は行われたので、それ以降、時間経過に伴い若干の誤差が生じている。

5. 結論

本研究では、ALE 法をベースとした流体解析への POD-ROM の適用を行った。既存研究で課題となっていた刻々と変化する Dirichlet 境界条件の付与を、正確に処理できるような手法を提案した。節点数が 1 万程度の流体剛体連成解析に提案手法を適用し、自由度が 200 程度の次元削減モデルを構築した。そして、ROM 解析ともとの高精度解析の結果を比較し、良い一致を確認した。ROM 解析時のパラメータセットや時刻がサンプリング解析時のものから大きく離れると、解析精度が低下するため、基底を解析途中でエンリッチするといったアダプティブな精度向上手法の開発が今後必要である。

参考文献

- 1) A. Quarteroni, A. Manzoni, F. Negri.: Reduced basis methods for partial differential equations, Springer, 2016.
- 2) W. Stankiewicz, R. Roszak, M. Morzynski.: Arbitrary Lagrangian-Eulerian approach in reduced order modeling of a flow with a moving boundary, *Prog. Flight. Phys.*, Vol.5, pp.109-124, 2013.
- 3) G. Tissot, L. Cordier, B. Noack. Feedback stabilization of an oscillating vertical cylinder by POD reduced-order model, 22th French Mechanics Congress, Lyon, France, August 2015.