# 5つ目の課題の答え

正田 備也

masada@rikkyo.ac.jp

# ガンマ関数の性質

授業中にも述べましたが、ガンマ関数 $\Gamma(x)$ について、次の等式が成立します。

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{1}$$

このことを、以下の議論で使います。

# ベータ分布の規格化定数

また、ベータ分布の密度関数 $f(\mu;\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\mu^{\alpha-1}(1-\mu)^{\beta-1}$ を $[0,1]$ の範囲で積分すると 1 になること、つまり

$$1=\int_0^1\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\mu^{\alpha-1}(1-\mu)^{\beta-1}d\mu \tag{2}$$

であることも、以下の議論では利用します。

（これは、積分すると 1 になるようにするには、$\mu^{\alpha-1}(1-\mu)^{\beta-1}$ に $\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$ をかけ算しておく必要がある、ということでもあります。）

特に、上の式 (2) を変形すると

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}=\int_0^1\mu^{\alpha-1}(1-\mu)^{\beta-1}d\mu \tag{3}$$

となることに注意しましょう。

# 問 1

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \mu f(\mu;\alpha,\beta)d\mu &= \int_0^1 \mu \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\mu^{\alpha-1}(1-\mu)^{\beta-1}d\mu \\
&= \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\mu^{\alpha}(1-\mu)^{\beta-1}d\mu && \text{$\mu$ と $\mu^{\alpha-1}$ とをまとめた} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 \mu^{\alpha}(1-\mu)^{\beta-1}d\mu && \text{定数部分を積分の外に出した} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} && \text{式 (3) の $\alpha$ を $\alpha+1$ で置き換えて使った} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)} && \text{$\Gamma(\beta)$ を分母分子でキャンセル} \\
&= \frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} && \text{式 (1) より} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

# 問2

（事後分布）∝（尤度）×（事前分布）なので、規格化定数を除き、$\mu$ に依存する部分だけに着目すると

$$\begin{aligned}
(\text{事後分布}) &\propto \mu^m(1-\mu)^l \times \mu^{\alpha-1}(1-\mu)^{\beta-1} \\
&= \mu^{\alpha+m-1}(1-\mu)^{\beta+l-1} \qquad (5)
\end{aligned}$$

これは、パラメータが $\alpha+m$ と $\beta+l$ のベータ分布 $\mathrm{Beta}(\alpha+m,\beta+l)$ である。
よってその密度関数は、規格化定数もきちんと書くと

$$\frac{\Gamma(\alpha+m+\beta+l)}{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\beta+l)}\mu^{\alpha+m-1}(1-\mu)^{\beta+l-1} \qquad (6)$$

となる。