

# 機械学習入門

経済学部 BX584

第11回 ロジスティック回帰

# 線形関数とは(正確にはアフィン関数)

- $d$ 次元ベクトルを入力とし、スカラーを出力とする以下のような関数

$$f_w(\mathbf{x}) = b + w_1 x_1 + \cdots + w_D x_D$$

- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}$ とも書ける。
  - ただし  $\mathbf{w} = (b, w_1, \dots, w_D)$ 、および、 $\mathbf{x} = (1, x_1, \dots, x_D)$ とする。
- 訓練データを使って  $(b, w_1, \dots, w_D)$ を求めるのが機械学習
  - 損失関数が小さくなるように、これらのパラメータを計算機に動かさせる。

# 線形関数の使いみち

- 回帰 (regression)
  - 分析対象の特定の性質がひとつの数値で表される
  - $f(x)$ がその数値を表すように線形関数を選ぶ
- 二値分類 (binary classification) ... 多値分類についてはいずれ説明します。
  - 分析対象が2つのグループに分かれている
  - $f(x)$ の値によって2つのグループを区別できるように線型関数を選ぶ

# 線形関数を分類にどう使うか？

- 回帰では関数の出力値をそのまま使っていた
  - 出力値の範囲は $-\infty$ から $+\infty$ まで
- 出力値を2値分類に使うにはどうすればいいか？
  - 0から1の範囲に押し込める
    - ロジスティック回帰
  - 符号を使う(正か負か)
    - パーセプトロン、SVM

# 問題（出力が0か1かの二値）

- ある箱に、
  - 1という数値を入れたら0という数値が出てきてほしい。
  - 2という数値を入れたら0という数値が出てきてほしい。
  - 7という数値を入れたら1という数値が出てきてほしい。
  - 8という数値を入れたら1という数値が出てきてほしい。
- 箱の中でどういう計算をすればいいのでしょうか？
  - こういうタイプの問題は、またいずれ。

# 線形回帰(単回帰)

- モデル＝観測された現象を数式で表したもの。
- 関数のかたちを一次式に設定。一番簡単なので。

$$f(x) = ax + b$$

- そして「 $a$ と $b$ をいくらにすればいいか？」という問題を解く。

# 回帰から分類へ

- 出力値は $-\infty$ から $+\infty$ まで

$$f(x) = ax + b$$

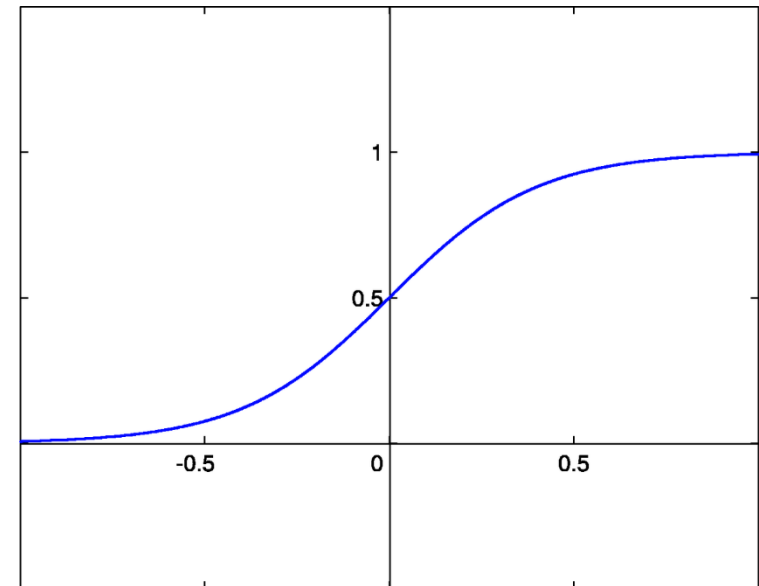
- 出力値を0から1の範囲に変えたい
  - 0.5より上か下かで1と0の2値に割り振る
  - どうやって0から1の範囲に押し込める？

# 標準シグモイド関数

- 標準シグモイド関数は、以下のように定義される

$$\sigma(s) = \frac{1}{1 + e^{-s}}$$

- 定義域は $-\infty$ から $+\infty$ まで
- 値域は0から1まで
  - 使える！





# 標準シグモイド関数の性質

標準シグモイド関数の定義

$$\sigma(s) = \frac{1}{1 + e^{-s}}$$

$$\sigma(-s) = \frac{1}{1 + e^s} = \frac{e^{-s}}{e^{-s} + 1} = 1 - \frac{1}{1 + e^{-s}} = 1 - \sigma(s)$$

$$\frac{\partial \sigma(s)}{\partial s} = (1 - \sigma(s)) \times \sigma(s)$$

関数の値を使って  
傾きを表せる、  
ということ。

# ロジスティック回帰

- 関数のかたちを次の式に設定する

$$g(x) = \frac{1}{1 + e^{-(ax+b)}}$$

- そして「 $a$ と $b$ をいくらにすればいいか？」という問題を解く
  - 最急降下法を利用

# ロジスティック回帰（説明変数が複数ある場合）

- 関数のかたちを次の式に設定する

$$g(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} = \frac{1}{1 + e^{-(b + w_1 x_1 + \dots + w_D x_D)}}$$

- そして「 $b, w_1, \dots, w_D$ をいくらにすればいいか？」という問題を解く
  - 最急降下法を利用

# 問題（出力が0か1かの二値）

- ある箱に、
  - 1という数値を入れたら0という数値が出てきてほしい。
  - 2という数値を入れたら0という数値が出てきてほしい。
  - 7という数値を入れたら1という数値が出てきてほしい。
  - 8という数値を入れたら1という数値が出てきてほしい。
- 箱の中でどういう計算をすればいいのでしょうか？
  - こういうタイプの問題は、またいずれ。

# 訓練データが4つ(未知数は2つ)

$$\frac{1}{1 + e^{-(a+b)}} \approx 0.0$$

$$\frac{1}{1 + e^{-(2a+b)}} \approx 0.0$$

$$\frac{1}{1 + e^{-(7a+b)}} \approx 1.0$$

$$\frac{1}{1 + e^{-(8a+b)}} \approx 1.0$$

- 望ましい出力値(1または0)とのズレをどう測る？

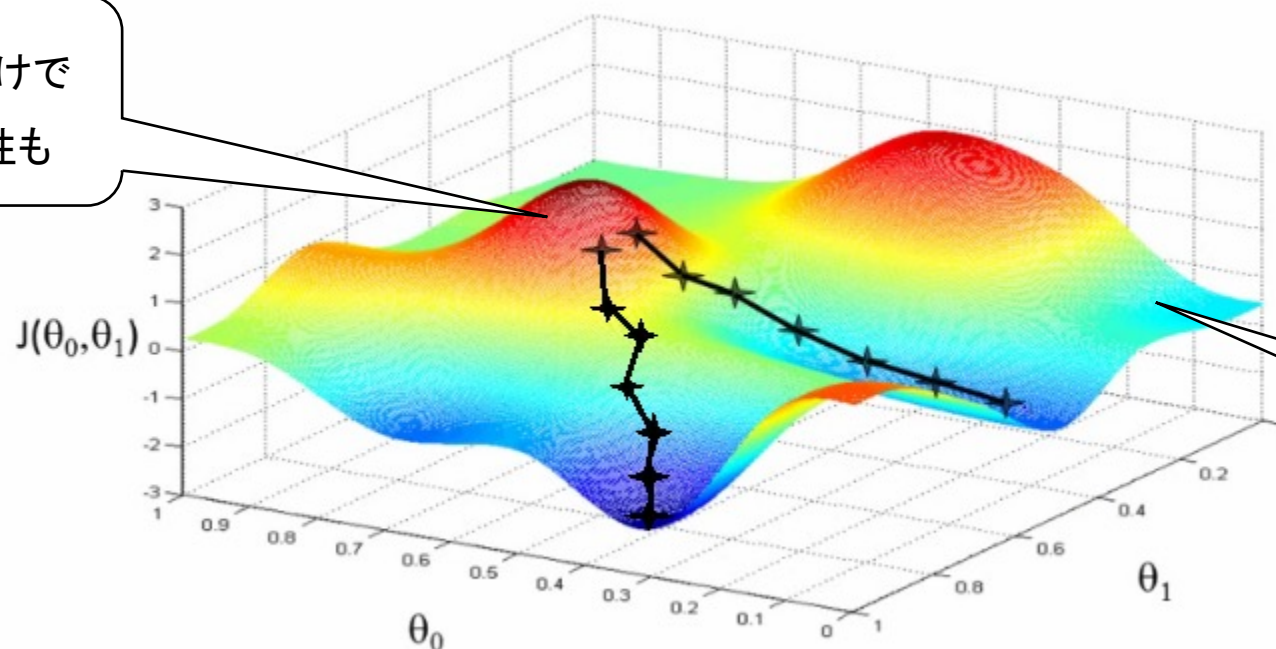
# 損失関数

- それを最小化すると良い線形関数が見つかるような関数
- 「損失」= 値が小さいほど良い
  - 無数にある $w$ の集合に、下るほど良いことがあるような地形を持ち込むのが、損失関数。
- 普通は勾配を利用して最小化する
  - 損失関数によって持ち込まれた地形の傾きを調べて(=微分して)下っていく

# 損失関数は地形を持ち込む

- 坂を下る方向にパラメータを変化させる → 極小値に近づく

出発点が少し違うだけで  
別の谷に行く可能性も



損失関数によって  
持ち込まれた地形

# モデルと損失関数（ロジスティック回帰の場合）

- 線形関数＋ロジスティック関数をモデルとして採用
- そして以下の損失関数を最小化

$$L(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^N \{-t_i \log(g(\mathbf{x}_i)) - (1 - t_i) \log(1 - g(\mathbf{x}_i))\}$$

- $\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,D})$  は  $i$  番目の入力データ
- $t_i$  は  $i$  番目のデータの正解ラベル＝望ましい出力（0か1かのどちらか）

例) スпамメールを  $t = 0$ 、通常メールを  $t = 1$  で表すとする

- この損失関数はクロスエントロピーと呼ばれる



# クロスエントロピー

- 個々の訓練データ $(x_i, t_i)$ に関するクロスエントロピー

- $t_i$ は正解ラベル(0または1)

$$-t_i \log(g(x_i)) - (1 - t_i) \log(1 - g(x_i))$$

- $t_i = g(x_i)$ のとき(予測値が完全に当たっているとき)いくら？
- $1 - t_i = g(x_i)$ のとき(予測値が間逆に外れているとき)いくら？

# ロジスティック回帰の更新式 (結果だけ示します)

$$\begin{bmatrix} b \\ w_1 \\ \vdots \\ w_D \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} b \\ w_1 \\ \vdots \\ w_D \end{bmatrix} - \eta \{ (1 - t_i)g(\mathbf{x}_i) - t_i(1 - g(\mathbf{x}_i)) \} \begin{bmatrix} 1 \\ x_{i,1} \\ \vdots \\ x_{i,D} \end{bmatrix}$$

$\eta$ は学習率

- あれ？ 訓練データがひとつしか ( $\mathbf{x}_i$ しか) 式に出てこないですけど...

# 確率的勾配降下法 (stochastic gradient descent, SGD)

- 損失関数が個々の訓練データに関する和として書ける時に使える
  - 線形回帰も、ロジスティック回帰も、そう。
- 最急降下法では、その和を偏微分して得られる勾配を使っていた
- 確率的勾配降下法では・・・
  1. パラメータを適当に初期化
  2. 訓練データをランダムにシャッフルする
  3. for  $x_i$  in シャッフルされた訓練データ:

$$\mathbf{w} \leftarrow \mathbf{w} - \eta \nabla L_i$$

訓練データを  
ひとつずつ取って来る

# ミニバッチ学習

- バッチ式の勾配降下法と確率的勾配降下法(SGD)の中間
- 複数の訓練データを使ってパラメータを更新
  - 複数の訓練データの集まりをミニバッチと呼ぶ。
  - バッチは訓練データ全体。それよりかなり小さいので「ミニ」。
- ミニバッチに含まれる個々の訓練データに関する勾配の平均を使う
  - 学習率は適当に調整する。
- エポック＝全訓練データを一回使うこと

# ロジスティック回帰の更新式

$$\begin{bmatrix} b \\ w_1 \\ \vdots \\ w_D \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} b \\ w_1 \\ \vdots \\ w_D \end{bmatrix} - \eta \{ (1 - t_i)g(\mathbf{x}_i) - t_i(1 - g(\mathbf{x}_i)) \} \begin{bmatrix} 1 \\ x_{i,1} \\ \vdots \\ x_{i,D} \end{bmatrix}$$

$\eta$ は学習率

- この更新を、ランダムにシャッフルされた訓練データについて繰り返す

# ロジスティック回帰の更新式(場合分け)

- $t_i = 1$ の訓練データ

$$\begin{bmatrix} b \\ w_1 \\ \vdots \\ w_D \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} b \\ w_1 \\ \vdots \\ w_D \end{bmatrix} + \eta(1 - g(\mathbf{x}_i)) \begin{bmatrix} 1 \\ x_{i,1} \\ \vdots \\ x_{i,D} \end{bmatrix}$$

- $t_i = 0$ の訓練データ

$$\begin{bmatrix} b \\ w_1 \\ \vdots \\ w_D \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} b \\ w_1 \\ \vdots \\ w_D \end{bmatrix} - \eta g(\mathbf{x}_i) \begin{bmatrix} 1 \\ x_{i,1} \\ \vdots \\ x_{i,D} \end{bmatrix}$$

# ロジスティック回帰の更新式の導出

損失関数

$$L_i = -t_i \log(g(\mathbf{x}_i)) - (1 - t_i) \log(1 - g(\mathbf{x}_i))$$

$t_i = 0$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_i}{\partial w_d} &= \frac{\partial L_i}{\partial g(\mathbf{x}_i)} \frac{\partial g(\mathbf{x}_i)}{\partial w_d} = - \frac{\partial \log(1 - g(\mathbf{x}_i))}{\partial g(\mathbf{x}_i)} \frac{\partial g(\mathbf{x}_i)}{\partial w_d} = \frac{1}{1 - g(\mathbf{x}_i)} \frac{\partial g(\mathbf{x}_i)}{\partial f(\mathbf{x}_i)} \frac{\partial f(\mathbf{x}_i)}{\partial w_d} \\ &= \frac{1}{1 - g(\mathbf{x}_i)} (1 - g(\mathbf{x}_i)) g(\mathbf{x}_i) x_{i,d} = g(\mathbf{x}_i) x_{i,d} \end{aligned}$$

$t_i = 1$ の場合

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_i}{\partial w_d} &= \frac{\partial L_i}{\partial g(\mathbf{x}_i)} \frac{\partial g(\mathbf{x}_i)}{\partial w_d} = - \frac{\partial \log(g(\mathbf{x}_i))}{\partial g(\mathbf{x}_i)} \frac{\partial g(\mathbf{x}_i)}{\partial w_d} = \frac{1}{g(\mathbf{x}_i)} \frac{\partial g(\mathbf{x}_i)}{\partial f(\mathbf{x}_i)} \frac{\partial f(\mathbf{x}_i)}{\partial w_d} \\ &= \frac{1}{g(\mathbf{x}_i)} (1 - g(\mathbf{x}_i)) g(\mathbf{x}_i) x_{i,d} = (1 - g(\mathbf{x}_i)) x_{i,d} \end{aligned}$$

# scikit-learnのロジスティック回帰を使う

- scikit-learnのlinear\_modelモジュールに含まれる
- 前回のLinearRegression()メソッドの代わりに  
LogisticRegression()メソッドを使えばいいだけ
  - cというパラメータに注意
    - 正則化の弱さを表す(値が大きいほど正則化が弱くなる)
- 損失関数はバッチ最適化される
  - 確率的勾配降下法ではありません。おそらく。
    - 内部でどう実装されているか、よく知りません・・・



# scikit-learnのロジスティック回帰における正則化

- 係数が大きくなならないようにして過学習を防ぐ
- scikit-learnではオプションで指定
  - L1ノルムかL2ノルムかを引数penaltyで指定
    - L1ノルム＝絶対値の和、L2ノルム＝2乗の和
  - 正則化の強さは引数Cで指定
    - 値が小さいほど正則化が強くなる。
    - RidgeやLassoのalphaは逆で、値が大きいほど正則化が強くなる。

# クロスエントロピー最小化によるロジスティック回帰

```
import numpy as np
from sklearn import linear_model

clf = linear_model.LogisticRegression()
x = [1, 2, 7, 8]
x = np.array(x).reshape(-1, 1)
y = [0, 0, 1, 1]
clf.fit(x, y)
a = clf.coef_
b = clf.intercept_
print(a, b)
```

# 最小二乗法による線形回帰と比較

```
import numpy as np
from sklearn import linear_model

clf = linear_model.LinearRegression()
x = [2, 1, -3, -1]
x = np.array(x).reshape(-1, 1)
y = [-4, -2, 5, 2]
clf.fit(x, y)
a = clf.coef_
b = clf.intercept_
print(a, b)
```

# 応用：MNISTを使って2値分類問題を解く

- 0の画像と0以外の画像とを分類することにする
  - 訓練データ、検証データ、テストデータを、すべて0の画像と0以外の画像とに分ける
    - 0以外の画像のラベルをすべて1にする

# MNISTデータを訓練/検証/テスト・データに分割

```
import numpy as np
from sklearn.datasets import fetch_openml
```

```
X, y = fetch_openml('mnist_784', version=1, return_X_y=True)
```

```
X_train, X_test = X[:60000], X[60000:]
y_train, y_test = y[:60000], y[60000:]
```

```
# 最初の6万件を、訓練データと検証データ(10000個)にランダムに分ける
from sklearn.model_selection import train_test_split
```

```
X_train, X_valid, y_train, y_valid = train_test_split(X_train, y_train,
test_size=10000, random_state=0)
```

# 二値分類問題に変換してしまう

#数字0の画像のラベルは「0」のまま  
#それ以外の画像のラベルを「1」とする

```
idx = (y_train != '0')  
y_train[idx] = '1'
```

```
idx = (y_valid != '0')  
y_valid[idx] = '1'
```

```
idx = (y_test != '0')  
y_test[idx] = '1'
```

# ロジスティック回帰モデルの学習

```
from sklearn import linear_model
```

```
clf = linear_model.LogisticRegression(penalty='l2',  
solver='saga')  
clf.fit(X_train, y_train)
```

#solverをsagaにしているのは、デフォルトのソルバだと遅いため

# 検証データのクラスを予測、予測を評価する

```
pred = clf.predict(X_valid)  
print((pred == y_valid).sum() / len(pred))
```



## 係数を可視化してみる

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
plt.imshow(clf.coef_.reshape(28,28))
```

```
plt.show()
```

# 今日の課題

- MNISTデータの0の画像と0以外の画像を分類しよう
- scikit-learnのロジスティック回帰を使うこと
- penaltyとCの設定を変更しながら、検証データ上での評価を繰り返すことで、最も分類性能のよい設定を見つけよう
- 見つけた設定を使って、テストデータ上での評価をおこなおう