変分オートエンコーダ
(variational autoencoder)

正田 備也

masada@rikkyo.ac.jp

Contents

オートエンコーダ (AE; autoencoder)

- dimensionality reduction（次元圧縮、次元削減）の手法の一つ
  - 高次元ベクトルを、低次元の空間へと写す手法
- 元の空間の次元を d、写す先の空間の次元を k とする
- 元の d 次元ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$、写した後の k 次元ベクトルを $\boldsymbol{z}_i$ と書くことにする
- AE では、$\boldsymbol{z}_i$ の良し悪しを問題にする
- どういう $\boldsymbol{z}_i$ なら良いと考えられているのか？

復習: 主成分分析 (PCA)

1. まず、データ集合を中心化（＝重心を原点へ移動）する
2. 原点を通るベクトルのうち、データ集合が最も大きく散らばっている方向を向いているものを選ぶ
   - これが第 1 主成分。
3. 次に、その方向に垂直な超平面へ、データ集合を押し潰す
4. すると空間の次元が一つ下がるので、次元が下がった空間の中で、2. と 3. を繰り返す
   - 第 2 主成分、第 3 主成分、・・・と続けて、第 k 主成分まで見つける

- 全体のばらつきを最もよく表す軸を k 本選ぶ、ということ
  - これらを座標軸として設定し直し、各データ点 $\boldsymbol{x}_i$ を k 次元空間の点 $\boldsymbol{z}_i$ として表現し直すのが PCA

オートエンコーダによる次元圧縮

- AE は、データ集合に属する個々のデータ点 $\boldsymbol{x}_i$ について、それ自身をより良く再現できるような低次元表現 $\boldsymbol{z}_i$ を求める
  - AE での低次元表現をコード (code) と呼ぶ
- オートエンコーダは 2 つのニューラルネット (NN) から成る

1. エンコーダ: 個々のデータ点 $\boldsymbol{x}_i$ を入力とし、コード $\boldsymbol{z}_i$ を出力する NN
2. デコーダ: コード $\boldsymbol{z}_i$ を入力とし、$\boldsymbol{x}_i$ と同じ次元のベクトル $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ を出力する NN

- 2 つの NN は、$\hat{\boldsymbol{x}}_i$ ができるだけ $\boldsymbol{x}_i$ に近くなるように訓練する

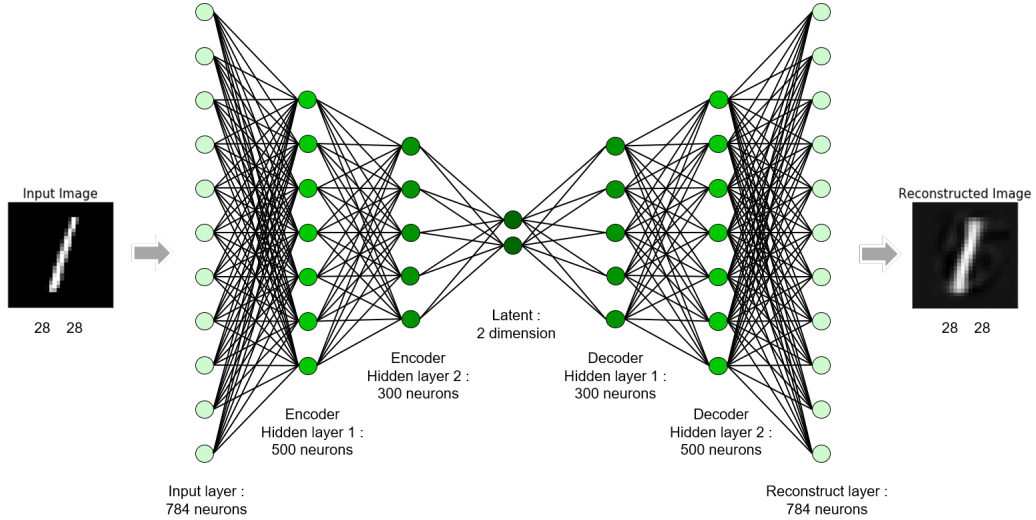

Figure: https://encodebox.medium.com/auto-encoder-in-biology-9264da118b83

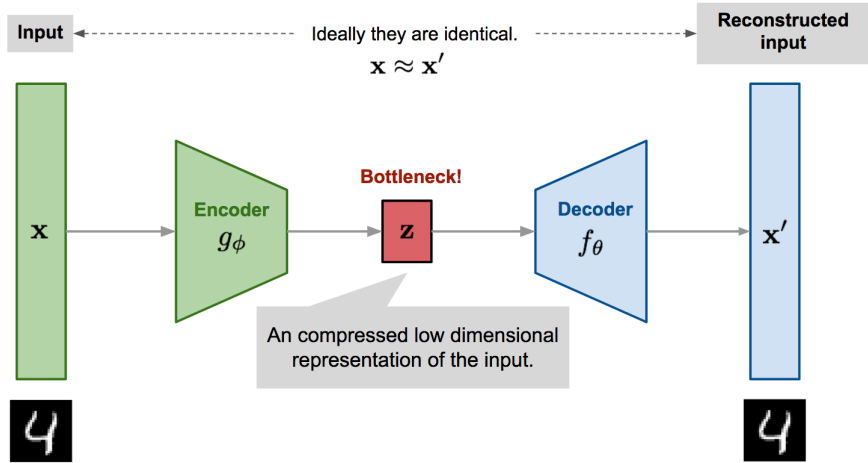

Figure: https://lilianweng.github.io/lil-log/2018/08/12/from-autoencoder-to-beta-vae.html

Contents

変分オートエンコーダ (VAE; variational autoencoder)

- 一見、AE と似ている・・・が、かなり違う
- $\boldsymbol{x}_i$ 自身を再現するための低次元表現として、AE で言えばエンコーダにあたる NN の出力を、そのまま使うことはない
- なぜなら、NN の出力は、それがそのままコードであるわけではなく、変分事後分布のパラメータだから
- この変分事後分布から得たサンプルが、コード $\boldsymbol{z}_i$ となる
- さらに、デコーダの出力は、元のデータ点 $\boldsymbol{x}_i$ と直接比較できるようなものであるとは限らない
  - 元のデータ点 $\boldsymbol{x}_i$ を生成する分布のパラメータを出力する

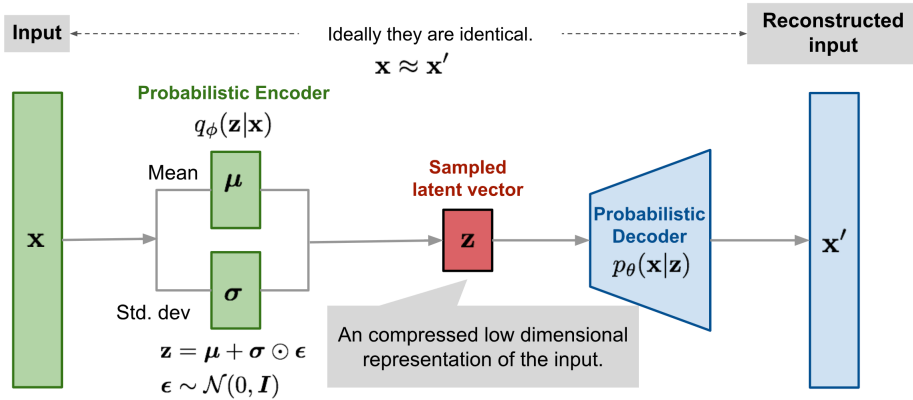

Figure: https://lilianweng.github.io/lil-log/2018/08/12/from-autoencoder-to-beta-vae.html

変分ベイズ法の一種としてのVAE

- VAE を、AE の一種として理解するには、無理がある
- 変分ベイズ法から理解するのが、吉
- そうでないと、VAE が、なぜあれでいいのか、分からない
  - エンコーダからデコーダへ移るときに、なぜ、サンプルを得るというステップが挟まっているのか？
  - エンコーダについて、なぜ、KL 情報量による正則化が考えられているのか？
    - これらが、AE からの延長で VAE を考えていると、分からない

変分ベイズ法の復習

$$
\begin{aligned}
\ln p(\mathcal{X}) &\geq \int q(\boldsymbol{\Theta}) \ln \frac{p(\boldsymbol{\Theta}) p(\mathcal{X}|\boldsymbol{\Theta})}{q(\boldsymbol{\Theta})} d\boldsymbol{\Theta} \\
&= \int q(\boldsymbol{\Theta}) \ln \prod_{i=1}^{N} p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{\Theta}) d\boldsymbol{\Theta} - \int q(\boldsymbol{\Theta}) \ln \frac{q(\boldsymbol{\Theta})}{p(\boldsymbol{\Theta})} d\boldsymbol{\Theta} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \int q(\boldsymbol{\Theta}) \ln p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{\Theta}) d\boldsymbol{\Theta} - D_{\mathsf{KL}}(q(\boldsymbol{\Theta}) \parallel p(\boldsymbol{\Theta})) \quad (1)
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{\Theta}$ の値が given なら、$p(\mathcal{X}|\boldsymbol{\Theta}) = \prod_{i=1}^{N} p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{\Theta})$ が成り立つ
- KL 情報量の項は $q(\boldsymbol{\Theta})$ を $p(\boldsymbol{\Theta})$ に近づけるはたらきをする

観測データのモデルのパラメータには2種類ある

1. 個々のデータ点に対して別々に用意されているパラメータ
   - 例：潜在的ディリクレ配分法での各文書のトピック確率
     $\boldsymbol{\theta}_i = (\theta_{i,1}, \ldots, \theta_{i,K})$ for $i = 1, \ldots, N$
2. データ集合全体に対して用意されているパラメータ
   - 例：潜在的ディリクレ配分法での各トピックの単語確率
     $\boldsymbol{\phi}_k = (\phi_{k,1}, \ldots, \phi_{k,W})$ for $k = 1, \ldots, K$

- どちらの種類のパラメータにも事前分布を導入できる
- VAE では、個々のデータ点に対して別々に用意されているパラメータのほうに事前分布を導入する

VAE における ELBO

$$\ln p(\mathcal{X}) \geq \sum_{i=1}^{N} \int q(\boldsymbol{\Theta}) \ln p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{\Theta}) d\boldsymbol{\Theta} - D_{\mathsf{KL}}(q(\boldsymbol{\Theta}) \parallel p(\boldsymbol{\Theta}))$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \int q(\boldsymbol{z}_i) \ln p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{z}_i) d\boldsymbol{z}_i - \sum_{i=1}^{N} D_{\mathsf{KL}}(q(\boldsymbol{z}_i) \parallel p(\boldsymbol{z}_i)) \quad (2)$$

- 観測データのモデルのパラメータのうち、各データ点 $\boldsymbol{x}_i$ に対して別々に用意されたパラメータ $\boldsymbol{z}_i$ だけを考慮する
  - 他のモデルパラメータは自由パラメータのままでもいいし、事前分布を使ってベイズ化されていてもいいが、VAE には関係しない

VAE における notation

- 確率モデリングの世界では、z は、離散値をとる確率変数を表すために使うことが多い
  - 例：各データ点がどのクラスタに属するかを表す潜在確率変数 z_i
- ところが、VAE の話をするときには、z を、観測データを生成するモデルのパラメータを表すために使う
  - 気分としては、i 番目の観測データ $\boldsymbol{x}_i$ の生成に関与する確率分布のパラメータは $\boldsymbol{\theta}_i$ と書きたいが、なぜか $\boldsymbol{z}_i$ と書く
    - AE の世界でそう書かれていたから？
  - “We assume that the data are generated by some random process, involving an unobserved continuous random variable $\mathbf{z}$.” [Kingma+ arXiv:1312.6114v10]

Contents

VAE の実装の目標

- 目標は ELBO の最大化の計算を実装すること
  - これによって、事後分布の近似としての変分事後分布が得られる
- そこで、ELBO の計算全体の計算グラフを作り・・・
- ELBO 最大化の問題を、通常のニューラルネットの学習と同じように行う（ELBO にマイナスを付けて最小化する）
- 以下、このようなことを効率的に実現するために、実際には多くの場合どのように VAE を実装するか、説明する

VAEにおける変分事後分布 $q(\boldsymbol{z}_i)$

- $q(\boldsymbol{z}_i)$ は、観測データ $\boldsymbol{x}_i$ をモデリングする確率分布のパラメータが従う分布である
  - この確率分布の密度関数を使って、尤度 $p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{z}_i)$ が表される
- VAEの変分事後分布 $q(\boldsymbol{z}_i)$ としては、普通、正規分布を使う
- しかも、共分散行列が対角行列であることを仮定する
- よって、$q(\boldsymbol{z}_i)$ のパラメータは、平均パラメータ $\boldsymbol{\mu}_i$ と、分散パラメータ $\boldsymbol{\sigma}_i^2$ で、いずれも K 次元ベクトルとなる
  - 以下、この場合についてだけ説明する

VAE における ELBO の前向き計算

- VAE における ELBO は

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \int q(\boldsymbol{z}_i) \ln p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{z}_i) d\boldsymbol{z}_i - \sum_{i=1}^{N} D_{\mathrm{KL}}(q(\boldsymbol{z}_i) \parallel p(\boldsymbol{z}_i))$$

- この ELBO の計算グラフを作り、backpropagation すれば、様々なパラメータを更新していけるが…
- $q(\boldsymbol{z}_i)$ についての積分はどう計算すればいい？
- KL 情報量の項はどう計算すればいい？

積分のモンテカルロ近似

- $\int q(\boldsymbol{z}_i) \ln p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{z}_i) d\boldsymbol{z}_i$ はモンテカルロ近似する
- つまり、$q(\boldsymbol{z}_i)$ からサンプル $\{\boldsymbol{z}_i^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{z}_i^{(S)}\}$ を生成し、以下のように近似する

$$\int q(\boldsymbol{z}_i) \ln p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{z}_i) d\boldsymbol{z}_i \approx \frac{1}{S} \sum_{s=1}^{S} \ln p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{z}_i^{(s)}) \tag{3}$$

- 通常、$S = 1$ と設定する

VAE の KL 情報量

- いま、変分事後分布 $q(\boldsymbol{z}_i)$ として、共分散行列が対角行列である正規分布を使っている
- さらに、事前分布 $p(\boldsymbol{z}_i)$ として、成分ごとに標準正規分布を使う（大体こうする）とすると…
- ELBO に現れている KL 情報量の項 $-D_{\mathrm{KL}}(q(\boldsymbol{z}_i) \parallel p(\boldsymbol{z}_i))$ は、以下のように解析的に計算できてしまう

$$-D_{\mathrm{KL}}(q(\boldsymbol{z}_i) \parallel p(\boldsymbol{z}_i)) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}(1 + \ln((\sigma_{i,k})^2) - (\mu_{i,k})^2 - (\sigma_{i,k})^2)$$

  - 計算グラフの一部として上の式の計算が入ってくる

VAE における ELBO の前向き計算（続）

- ELBO は、いまや以下のように計算される

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \ln p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{z}_i^{(1)}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K}(1 + \ln((\sigma_{i,k})^2) - (\mu_{i,k})^2 - (\sigma_{i,k})^2)$$

- 変分事後分布 $q(\boldsymbol{z}_i)$ のパラメータ $\boldsymbol{\mu}_i$ と $\boldsymbol{\sigma}_i^2$ はどう準備する？
  - エンコーダによって準備する
- 尤度 $p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{z}_i^{(1)})$ をどう表現する？
  - デコーダによって表現する

VAE のエンコーダ

- VAE では $\boldsymbol{\mu}_i$ と $\boldsymbol{\sigma}_i^2$ を NN の出力として得る
- この NN を、VAE ではエンコーダと呼ぶ
- VAE のエンコーダは $\boldsymbol{x}_i$ を入力とする
- VAE のエンコーダは $\boldsymbol{\mu}_i$ と $\boldsymbol{\sigma}_i^2$ とを出力する
  - 観測データのモデルのパラメータ $\boldsymbol{z}_i$ を出力するのではない！
  - 通常は $\boldsymbol{\sigma}_i^2$ ではなく $\ln \boldsymbol{\sigma}_i^2$ を出力するように実装する
- $\boldsymbol{x}_i$ に対応するコード $\boldsymbol{z}_i$ は、正規分布 $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\sigma}_i^2)$ からランダムにサンプルを生成することで得られる
  - このサンプリングが、モンテカルロ近似のためのサンプリング

VAE のデコーダ

- VAE のデコーダは $\boldsymbol{x}_i$ に対応するコード $\boldsymbol{z}_i$ を入力とする
  - エンコーダの出力をそのまま入力とするのではない
- VAE のデコーダは、確率分布のパラメータを出力する
- そして、デコーダの出力をパラメータとする確率分布を使って $\boldsymbol{x}_i$ の尤度 $p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{z}_i)$ を求める

例 デコーダの出力を平均パラメータ、単位行列（の定数倍）を共分散行列とする正規分布を使って、$\boldsymbol{x}_i$ の尤度を求め、それを ELBO 最大化を通して、最大化する

- これは、デコーダの出力 $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ を、データ点 $\boldsymbol{x}_i$ に、ユークリッド距離 $\|\hat{\boldsymbol{x}}_i - \boldsymbol{x}_i\|$ の意味で近づけることと、全く同じことになる

VAE における ELBO の前向き計算（続々）

- エンコーダが表す関数を $\mathtt{Enc}(\boldsymbol{x}_i)$、デコーダが表す関数を $\mathtt{Dec}(\boldsymbol{z}_i)$ と書くことにする
- VAE における ELBO の前向き計算は、以下の通り

1. $\mathtt{Enc}(\boldsymbol{x}_i)$ を計算して $(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\sigma}_i^2)$ を得る
2. $(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\sigma}_i^2)$ を使って $\boldsymbol{z}_i$ を生成
3. $\mathtt{Dec}(\boldsymbol{z}_i)$ を計算して尤度 $p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{z}_i)$ のパラメータを得る
4. 尤度 $p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{z}_i)$ と KL 項を計算

- しかし、$\boldsymbol{z}_i$ を単なる数値として生成すると、BP が $\boldsymbol{z}_i$ を越えてエンコーダへと遡れない！

reparametrization trick

- VAE のエンコーダが出力した $(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\sigma}_i^2)$ によって、そこからサンプルを生成すべき正規分布は確定する
- しかし、サンプル $\boldsymbol{z}_i$ を単なる数値として生成してしまうと、BP がデコーダの入り口で止まり、エンコーダへ遡れない！
- そこで・・・

1. $\mathcal{N}(0, \mathbf{I}_k)$ から単なる数値としてサンプル $\boldsymbol{\epsilon}_i^{(1)}$ を生成し…
2. その $\boldsymbol{\epsilon}_i^{(1)}$ を $\boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\sigma}_i \odot \boldsymbol{\epsilon}_i^{(1)}$ という計算によって、本当に欲しかった $q(\boldsymbol{z}_i)$ からのサンプルへ変換する
   - $\boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\sigma}_i \odot \boldsymbol{\epsilon}_i^{(1)}$ という計算は、BP を行う計算グラフの一部になる

VAE における ELBO の前向き計算（完）

- エンコーダが表す関数を $\mathtt{Enc}(\boldsymbol{x}_i)$、デコーダが表す関数を $\mathtt{Dec}(\boldsymbol{z}_i)$ と書くことにする
- VAE における ELBO の前向き計算は、以下の通り

1. $\mathtt{Enc}(\boldsymbol{x}_i)$ を計算して $(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\sigma}_i^2)$ を得る
2. $\boldsymbol{\epsilon}_i^{(1)}$ を $\mathcal{N}(0, \mathbf{I}_k)$ から単なる数値として生成
3. $\boldsymbol{\mu}_i + \boldsymbol{\sigma}_i \odot \boldsymbol{\epsilon}_i^{(1)}$ によって $\boldsymbol{z}_i$ を得る
4. $\mathtt{Dec}(\boldsymbol{z}_i)$ を計算して尤度 $p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{z}_i)$ のパラメータを得る
5. 尤度 $p(\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{z}_i)$ と KL 項を計算

VAE における amortized inference

- $\boldsymbol{\mu}_i$ と $\boldsymbol{\sigma}_i^2$ は、$\boldsymbol{x}_i$ を入力とする NN の出力として得た
- だが $\boldsymbol{\mu}_i$ と $\boldsymbol{\sigma}_i^2$ をデータ点 $\boldsymbol{x}_i$ ごとに単なる未知数として準備し、ELBO 最大化によって更新するので良かったのでは？
  - 変分ベイズ法では普通こうする
- 全てのデータ点に同じ一つの NN を共有させて、その出力としてデータ点ごとのパラメータ $\boldsymbol{\mu}_i$ と $\boldsymbol{\sigma}_i^2$ を得る、という考え方は、変分ベイズ法には元々はなかった考え方！
- 一般に、変分事後分布のパラメータをデータ点 $\boldsymbol{x}_i$ の関数として表現してベイズ推論することを、amortized inference と呼ぶ（エンコーダがこの関数を表現している）