

# PLSA

正田 備也

[masada@rikkyo.ac.jp](mailto:masada@rikkyo.ac.jp)

# Contents

VB の回の課題のヒント

混合多項分布の問題点

PLSA (probabilistic latent semantic analysis)

## VB の回の課題のヒント

- ▶  $q(\lambda_1)$  の shape パラメータは  $\alpha_1$ 、rate パラメータは  $\beta_1$
- ▶ このとき、 $\int q(\lambda_1; \alpha_1, \beta_1) \ln p(\lambda_1; a, b) d\lambda_1$  を計算せよ。
- ▶ ヒント 1 :  $q(\lambda_1)$  のパラメータ  $\alpha_1$  と  $\beta_1$  を使って答えを表す。
- ▶ ヒント 2 :  $p(\lambda_1; a, b)$  がガンマ分布で、shape パラメータは  $a$ 、rate パラメータは  $b$  であることも当然使う。
- ▶ ヒント 3 :  $\ln p(\lambda_1; a, b)$ 、つまり、shape パラメータが  $a$  で rate パラメータが  $b$  であるガンマ分布の密度関数の式の対数を使う。

$$\begin{aligned}
\int q(\lambda_1; \alpha_1, \beta_1) \ln p(\lambda_1; a, b) d\lambda_1 &= \int q(\lambda_1; \alpha_1, \beta_1) \ln \left[ \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda_1^{a-1} e^{-b\lambda_1} \right] d\lambda_1 \\
&= \int q(\lambda_1; \alpha_1, \beta_1) (a \ln b) d\lambda_1 - \int q(\lambda_1; \alpha_1, \beta_1) \ln \Gamma(a) d\lambda_1 \\
&\quad + \int q(\lambda_1; \alpha_1, \beta_1) (a-1) \ln \lambda_1 d\lambda_1 + \int q(\lambda_1; \alpha_1, \beta_1) \ln \exp(-b\lambda_1) d\lambda_1 \\
&= a \ln b - \ln \Gamma(a) + (a-1) \int q(\lambda_1; \alpha_1, \beta_1) \ln \lambda_1 d\lambda_1 - b \int q(\lambda_1; \alpha_1, \beta_1) \lambda_1 d\lambda_1 \\
&= a \ln b - \ln \Gamma(a) + (a-1) \mathbb{E}_{q(\lambda_1; \alpha_1, \beta_1)}[\ln \lambda_1] - b \mathbb{E}_{q(\lambda_1; \alpha_1, \beta_1)}[\lambda_1]
\end{aligned} \tag{1}$$

$\mathbb{E}_{q(\lambda_1; \alpha_1, \beta_1)}[\ln \lambda_1]$  は、Wikipedia に以下のように書いてあることを利用する。

$$\mathbb{E}[\ln(X)] = \psi(\alpha) - \ln(\beta)$$

$\mathbb{E}_{q(\lambda_1; \alpha_1, \beta_1)}[\lambda_1]$  は、ガンマ分布の mean。

# Contents

VB の回の課題のヒント

混合多項分布の問題点

PLSA (probabilistic latent semantic analysis)

# なぜPLSAの話をするか

- ▶ 次回LDA(latent Dirichlet allocation) の話をするため
- ▶ LDAはPLSA(probabilistic latent semantic analysis)をベイズ化したモデル
- ▶ PLSAは混合多項分布の改良版と見なすこともできる

# 混合多項分布による文書データのモデリング

- ▶ 混合多項分布を使った文書のモデリングでは、 $N$  件の文書  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$  が以下のように生成されると仮定する
  1. カテゴリカル分布  $\text{Cat}(\boldsymbol{\theta})$  から、確率変数  $z_i$  の値を draw
  2.  $z_i$  番目のコンポーネントを表す多項分布  $\text{Multi}(\boldsymbol{\phi}_{z_i})$  から、 $\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n_i})$  のそれぞれの  $x_{i,j}$  の値を draw

例:  $x_{i,j} = \text{"apple"}$  は、 $i$  番目の文書の  $j$  番目のトークンが、単語 “apple” の出現であることを示す。

  - ▶  $n_i$  は  $i$  番目の文書の長さ (=トークンの総数) を表す。
- ▶  $\mathbf{x}_i$  は単語の列を表すが、実質的には各単語の出現頻度だけをモデリングしている (bag-of-words モデルだから)

# 混合多項分布の問題点

- ▶ 混合多項分布モデルでは、一つの文書がそれ全体で意味的に均一だと仮定することになる
  - ▶ ニュース記事であれば、一つの記事まるごとが、特定のカテゴリ（ex. 政治、経済、スポーツ、etc）に割り振られる。
- ▶ しかし、文書内は意味的に均一という仮定は実態に合わない
- ▶ というのも、一つの文書は複数の話題を含みうるからである



# 混合多項分布の改良としてのPLSA

- ▶ 混合多項分布と同様、カテゴリの違いは、語彙集合上に定義された多項分布の違いとして表す

例: 政治について書かれたテキストと経済について書かれたテキスト  
とでは、どの単語がいくらの確率で出現するかが、異なる。

- ▶ 同じ文書に含まれる単語トークン群が複数の単語多項分布から生成されると仮定する
  - ▶ 同じ文書内に、異なる単語多項分布に由来する単語トークンが混ざっていてもよい、という考え方
  - ▶ つまり、同じ文書が複数の「トピック」を含みうる、という考え方
  - ▶ トピック = 単語多項分布  $\text{Multinomial}(\phi_k)$

# PLSA の概要

- ▶ PLSI (probabilistic latent semantic indexing) と呼ばれる
- ▶ LSA の確率モデル版、ということ
  - ▶ LSA は、単語-文書行列の特異値分解で次元圧縮する手法（後述）
- ▶ 生成モデルとして記述すると…
  - ▶ 文書に固有のトピック多項分布（その文書でどのトピックがいくらの確率で現れるか）から、単語トークンごとに別々にトピックを draw
  - ▶ 各単語トークンについて、そのトピックに対応する単語多項分布（そのトピックについて書くときどの単語がいくらの確率で使われるか）から単語を draw

## 混合多項分布



## PLSI



Figure: 混合多項分布と PLSA の違いのイメージ

Shanghai is the largest city in China, located on its eastern coast at the outlet of the Yangtze River. Originally a fishing and textiles town, Shanghai grew in importance in the 19th century. In 2005 Shanghai became the world's busiest cargo port. The city is an emerging tourist destination renowned for its historical landmarks such as the Bund and Xintiandi, its modern and

Figure: PLSA では同一文書内の単語トークンが複数の単語多項分布に由来

# Contents

VB の回の課題のヒント

混合多項分布の問題点

PLSA (probabilistic latent semantic analysis)

# PLSA (probabilistic latent semantic analysis)

- ▶ LSA(latent semantic analysis) を probabilistic にしたモデル
  - ▶ LSA については次スライドの図を参照（実態は単なる SVD）
- ▶ 同じ文書内でも、異なる単語トークンは、異なる単語多項分布から生成されうる（＝異なるトピックを表現しうる）
- ▶ また、どのトピックがいくらの確率で現れるかが、文書によって異なる
- ▶ PLSA における単語多項分布を、トピック (topic) と呼ぶ
  - ▶ PLSA は最もシンプルなトピックモデル

# LSA の概念図

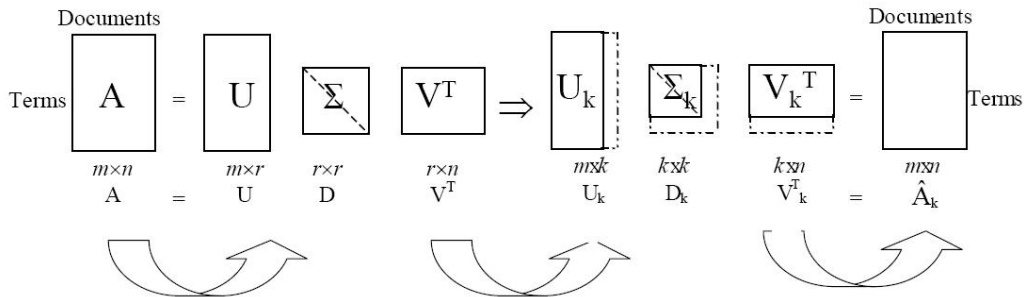


Figure: LSA の概念図

- ▶ 左から順に、データ行列の特異値分解、低ランク近似、元のデータ行列の再現
- ▶  $m$  が語彙サイズ、 $n$  が文書数、 $k$  がトピック数 ( $r$  は元のデータ行列のランク)

# Notations

- ▶ 語彙集合  $\{1, \dots, W\}$
- ▶ トピック集合  $\{1, \dots, K\}$ 
  - ▶ 語彙やトピックをその添字 (index) と同一視している。
- ▶ 文書集合  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$
- ▶ 文書  $\mathbf{x}_i$  の  $j$  番目のトークンとして現れる単語を  $x_{i,j}$  という確率変数で表す (例:  $x_{412,27} = 8203$ )
- ▶ 文書  $\mathbf{x}_i$  の  $j$  番目のトークンが表現するトピックを  $z_{i,j}$  という確率変数で表す (例:  $z_{412,27} = 69$ )
- ▶  $x_{i,j}$  の値は観測されているが  $z_{i,j}$  の値は観測されていない
  - ▶ つまり、 $z_{i,j}$  は潜在変数。



# PLSAにおける同時分布

- ▶ PLSA では、文書  $x_i$  の  $j$  番目のトークンがトピック  $k$  を表現し、かつそのトピックを表現するために単語  $w$  が使われる同時確率、つまり  $p(x_{i,j} = w, z_{i,j} = k)$  は

$$p(x_{i,j} = w, z_{i,j} = k) = p(z_{i,j} = k)p(x_{i,j} = w|z_{i,j} = k) \quad (2)$$

- ▶  $p(z_{i,j} = k)$  は、文書  $x_i$  の  $j$  番目のトークンが（他のトピックでなく）トピック  $k$  を表現する確率
- ▶  $p(x_{i,j} = w|z_{i,j} = k)$  は、文書  $x_i$  の  $j$  番目のトークンがトピック  $k$  を表現するとき（他の単語でなく）単語  $w$  が使われる確率
- ▶ さらに、PLSA では以下のように仮定する（次スライド）

# PLSAにおいて仮定すること

- ▶ どの  $j, j'$  についても  $p(z_{i,j} = k) = p(z_{i,j'} = k)$  と仮定
  - ▶ 同じ文書内なら、どの単語トークンであれ、トピック  $k$  を表現する確率は、同じ（場所によってトピックの確率が違ったりしない）
  - ▶ そこで、 $p(z_{i,\cdot} = k) = \theta_{i,k}$  とおく
- ▶ どの  $i, i'$  と  $j, j'$  についても、 $p(x_{i,j} = w | z_{i,j} = k) = p(x_{i',j'} = w | z_{i',j'} = k)$  と仮定
  - ▶ 同じコーパス内なら、どの文書のどの単語トークンであれ、それがトピック  $k$  を表現するために使われるならば（条件付き確率の条件の部分）、 $k$  を表現するためにどの単語が使われるかの確率は、同じ
  - ▶ つまり、単語確率分布とトピックが一对一に対応している
  - ▶ そこで、 $p(x_{\cdot,j} = w | z_{\cdot,j} = k) = \phi_{k,w}$  とおく

# PLSA モデルのパラメータ

- ▶  $\{\theta_{i,k} : i = 1, \dots, N, k = 1, \dots, K\}$ 
  - ▶ 文書  $i$  を構成する単語トークンが、他のトピックではなく、トピック  $k$  を表現する確率
  - ▶ 制約条件  $\sum_{k=1}^K \theta_{i,k} = 1$  を満たす。
- ▶  $\{\phi_{k,w} : k = 1, \dots, K, w = 1, \dots, W\}$ 
  - ▶ どの文書のどの単語トークンであれ、トピック  $k$  から、他の単語ではなく、単語  $w$  が生成される確率。
  - ▶ 制約条件  $\sum_{w=1}^W \phi_{k,w} = 1$  を満たす。

# PLSAにおける観測データの尤度

個々の単語トークンにおけるトピックと単語の同時分布は

$$p(x_{i,j} = w, z_{i,j} = k) = p(z_{i,j} = k)p(x_{i,j} = w|z_{i,j} = k) = \theta_{i,k}\phi_{k,x_{i,j}} \quad (3)$$

潜在変数である  $z_{i,j}$  を周辺化

$$p(x_{i,j} = w) = \sum_{z_{i,j}=1}^K p(x_{i,j} = w, z_{i,j} = k) = \sum_{k=1}^K \theta_{i,k}\phi_{k,x_{i,j}} \quad (4)$$

各トークンの独立性の仮定より

$$p(\mathbf{x}_i) = \prod_{j=1}^{n_i} p(x_{i,j}) = \prod_{j=1}^{n_i} \left( \sum_{k=1}^K \theta_{i,k}\phi_{k,x_{i,j}} \right) \quad (5)$$

各文書の独立性の仮定より

$$p(\mathcal{X}) = \prod_{i=1}^N p(\mathbf{x}_i) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{n_i} \left( \sum_{k=1}^K \theta_{i,k}\phi_{k,x_{i,j}} \right) \quad (6)$$

# 混合多項分布と PLSA の比較

- ▶ PLSA における  $\mathbf{x}_i$  の尤度

$$p(\mathbf{x}_i) = \prod_{j=1}^{n_i} \left( \sum_{k=1}^K \theta_{i,k} \phi_{k,x_{i,j}} \right) \quad (7)$$

- ▶ 混合多項分布における  $\mathbf{x}_i$  の尤度

$$p(\mathbf{x}_i) = \sum_{k=1}^K \theta_k \prod_{j=1}^{n_i} \phi_{k,x_{i,j}} \quad (8)$$

# 対数尤度最大化のため Jensen の不等式を適用

$$\begin{aligned}\ln p(\mathbf{x}_i) &= \ln \prod_{j=1}^{n_i} \left( \sum_{k=1}^K \theta_{i,k} \phi_{k,x_{i,j}} \right) \\&= \sum_{j=1}^{n_i} \ln \left( \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \frac{\theta_{i,k} \phi_{k,x_{i,j}}}{q_{i,j,k}} \right) \\&\geq \sum_{i=1}^{n_i} \left( \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \ln \frac{\theta_{i,k} \phi_{k,x_{i,j}}}{q_{i,j,k}} \right) \\&= \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \ln(\theta_{i,k} \phi_{k,x_{i,j}}) - \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \ln q_{i,j,k} \\&= \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \ln \theta_{i,k} + \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \ln \phi_{k,x_{i,j}} - \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \ln q_{i,j,k} \quad (9)\end{aligned}$$

where  $\sum_{k=1}^K q_{i,j,k} = 1$  holds for all  $i, j$ .

# 対数尤度の lower bound

$$\ln p(\mathcal{X}) \geq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \ln \theta_{i,k} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \ln \phi_{k,x_{i,j}} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \ln q_{i,j,k} \quad (10)$$

最大化すべき目的関数は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Theta, \Phi, Q) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \ln \theta_{i,k} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \ln \phi_{k,x_{i,j}} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \ln q_{i,j,k} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \lambda_i \left( 1 - \sum_{k=1}^K \theta_{i,k} \right) + \sum_{k=1}^K \mu_k \left( 1 - \sum_{w=1}^W \phi_{k,w} \right) + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \nu_{i,j} \left( 1 - \sum_{k=1}^K q_{i,j,k} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

# PLSAのEMアルゴリズム(1/2)

M step

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_{i,k}} = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{q_{i,j,k}}{\theta_{i,k}} - \lambda_i \quad (12)$$

$$\therefore \theta_{i,k} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} q_{i,j,k}}{\sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{n_i} q_{i,j,k}} \quad (13)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{k,w}} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \delta(x_{i,j} = v_w) q_{i,j,k}}{\phi_{k,w}} - \mu_k \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \therefore \phi_{k,w} &= \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \delta(x_{i,j} = v_w) q_{i,j,k}}{\sum_{w=1}^W \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \delta(x_{i,j} = v_w) q_{i,j,k}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \delta(x_{i,j} = v_w) q_{i,j,k}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} q_{i,j,k}} \end{aligned} \quad (15)$$



# PLSA の EM アルゴリズム (2/2)

E step

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_{i,j,k}} = \ln \phi_{k,x_{i,j}} + \ln \theta_{i,k} - \ln q_{i,j,k} - 1 - \nu_{i,j} \quad (16)$$

$$\therefore q_{i,j,k} \propto \theta_{i,k} \phi_{k,x_{i,j}} \quad (17)$$

$$\therefore q_{i,j,k} = \frac{\theta_{i,k} \phi_{k,x_{i,j}}}{\sum_{k=1}^K \theta_{i,k} \phi_{k,x_{i,j}}} \quad (18)$$

よって、 $x_{i,j} = x_{i,j'}$  ならば  $q_{i,j,k} = q_{i,j',k}$  となる。つまり、PLSA では同一文書内で別の場所に現れる同じ単語を区別できない。よって、第  $i$  文書での単語  $w$  の TF を  $n_{i,w}$  とすると

$$q_{i,w,k} = \frac{\phi_{k,w} \theta_{i,k}}{\sum_{k=1}^K \phi_{k,w} \theta_{i,k}} \quad (19)$$

$$\theta_{i,k} = \frac{\sum_{w=1}^W n_{i,w} q_{i,w,k}}{\sum_{k=1}^K \sum_{w=1}^W n_{i,w} q_{i,w,k}}, \quad \phi_{k,w} = \frac{\sum_{i=1}^N n_{i,w} q_{i,w,k}}{\sum_{w=1}^W \sum_{i=1}^N n_{i,w} q_{i,w,k}} \quad (20)$$

# PLSAのEMアルゴリズムのまとめ

- ▶ 文書  $x_i$  内の単語  $w$  のトークンがトピック  $k$  を表現する確率

$$q_{i,w,k} \leftarrow \frac{\phi_{k,w} \theta_{i,k}}{\sum_{k=1}^K \phi_{k,w} \theta_{i,k}} \quad (21)$$

- ▶ 文書  $x_i$  内の単語トークンがトピック  $k$  を表現する確率

$$\theta_{i,k} \leftarrow \frac{\sum_{w=1}^W n_{i,w} q_{i,w,k}}{\sum_{k=1}^K \sum_{w=1}^W n_{i,w} q_{i,w,k}} \quad (22)$$

- ▶ トピック  $k$  が単語  $w$  のトークンによって表現される確率

$$\phi_{k,w} \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^N n_{i,w} q_{i,w,k}}{\sum_{w=1}^W \sum_{i=1}^N n_{i,w} q_{i,w,k}} \quad (23)$$

# 直感的な意味

- ▶  $q_{i,w,k}$  は、 $i$  番目の文書に現れる単語  $w$  が、他のトピックではなくトピック  $k$  を表現する確率
- ▶  $\sum_{w=1}^W n_{i,w} q_{i,w,k}$  は、 $i$  番目の文書のなかで、トピック  $k$  を表現している単語トークンの個数
- ▶  $\sum_{i=1}^N n_{i,w} q_{i,w,k}$  は、コーパス全体のなかで、単語  $w$  のトークン群のうち、トピック  $k$  を表現しているトークンの個数