課題 4 の解答例

正田 備也

masada@rikkyo.ac.jp

課題の解き方

- まず、二項分布が指数分布族に属することを示す。そのためには、指数分布族の密度関数の式がどんな形をしているかに関する一般的な結果に当てはまるように、二項分布の確率質量関数の式を変形すればよい。
- 次に、指数分布族の共役事前分布の密度関数の式がどんな形をしているかに関する一般的な結果から、特殊ケースとして、二項分布の場合の共役事前分布の密度関数の式を導き出す。

ヒント： ベルヌーイ分布の場合の解き方とほぼ同じです。

指数型分布族 exponential family の復習

- 以下のような形の確率密度関数を持つ確率分布をまとめて、指数型分布族と呼ぶ

$$p(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\eta}) = h(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{\eta})\exp(\boldsymbol{\eta}^\intercal \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})) \tag{1}$$

- $\boldsymbol{\eta}$ は分布のパラメータだが、指数型分布族については特に、自然パラメータ natural parameter と呼ばれる
- $g(\boldsymbol{\eta})$ は、規格化のために導入されている係数とみなせる
  - $g(\boldsymbol{\eta})$ は $\boldsymbol{x}$ を含まないことに注意
- 確率変数 $\boldsymbol{x}$ がとる値は、スカラーでもベクトルでもよいし、離散値でも連続値でもよい。

例. ベルヌーイ分布

- ベルヌーイ分布の確率質量関数が式 (1) の形を持つことを、以下のようにして示せる。

$$
\begin{aligned}
p(x|\phi) &= \phi^x (1-\phi)^{1-x} \\
&= \exp(x \ln \phi + (1-x)\ln(1-\phi)) \\
&= (1-\phi)\exp\left(\ln\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) \times x\right)
\end{aligned} \tag{2}
$$

- $\eta = \ln\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)$ とすればよい
- すると $g(\eta) = 1 - \phi = \frac{1}{1+e^{\eta}}$ となる
- そして $h(x) = 1$ となる

課題の解答の前半

- 二項分布の確率質量関数が式 (1) の形を持つことを、以下のようにして示せる。

$$
\begin{aligned}
p(x|\phi, n) &= \frac{n!}{x!(n-x)!}\phi^x(1-\phi)^{n-x} \\
&= \frac{n!}{x!(n-x)!}(1-\phi)^n \exp\left(\ln\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) \times x\right) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

- $\eta = \ln\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)$ とすればよい
- すると $g(\eta) = (1-\phi)^n = \left(\frac{1}{1+e^\eta}\right)^n$ となる
- そして $h(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}$ となる
- https://ocw.mit.edu/courses/18-655-mathematical-statistics-spring-2016/resources/mit18_655s16_lecnote7/

共役事前分布

- 式 (1) のような密度関数を持つどの確率分布に対しても、以下の形の密度関数を持つ共役事前分布が存在する

$$p(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\chi}, \nu) = f(\boldsymbol{\chi}, \nu) g(\boldsymbol{\eta})^{\nu} \exp(\nu \boldsymbol{\eta}^{\intercal} \boldsymbol{\chi}) \tag{4}$$

- つまり、式 (4) の形の密度関数を持つ確率分布を事前分布とすると、事後分布が事前分布と同じ形の密度関数を持つ
- $f(\boldsymbol{\chi}, \nu)$ は、規格化のために導入されている係数とみなせる
  - $f(\boldsymbol{\chi}, \nu)$ は $\boldsymbol{\eta}$ を含まないことに注意

例. ベルヌーイ分布の共役事前分布

- $\eta = \ln\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)$ および $g(\eta) = 1 - \phi$ だったので

$$
\begin{aligned}
p(\eta; \chi, \nu) &\propto (1-\phi)^{\nu} \exp\left(\nu \ln\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) \times \chi\right) \\
&= (1-\phi)^{\nu} \phi^{\nu\chi} (1-\phi)^{-\nu\chi} \\
&= \phi^{\nu\chi} (1-\phi)^{\nu(1-\chi)} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

- この式の形は、ベータ分布の密度関数の式の形と、同じ！（規格化定数は略してある）
- 実際、$\nu = \alpha + \beta - 2$ および $\chi = \frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$ と置き換えればよい

課題の解答の後半

- $\eta = \ln\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right)$ および $g(\eta) = (1-\phi)^n$ だったので

$$\begin{aligned} p(\eta;\chi,\nu) &\propto (1-\phi)^{n\nu} \exp\left(\nu \ln\left(\frac{\phi}{1-\phi}\right) \times \chi\right) \\ &= (1-\phi)^{n\nu} \phi^{\nu\chi} (1-\phi)^{-\nu\chi} \\ &= \phi^{\nu\chi}(1-\phi)^{\nu(n-\chi)} \end{aligned} \tag{6}$$

- この式の形は、ベータ分布の密度関数の式の形と、同じ！（規格化定数は略してある）
- 実際、$\nu = \frac{\alpha+\beta-2}{n}$ および $\chi = \frac{n(\alpha-1)}{\alpha+\beta-2}$ と置き換えればよい