

Zero-inflated Poisson model

正田 備也

masada@rikkyo.ac.jp

応用例

- ▶ SNS の投稿への「いいね」の数の分析
 - ▶ シリアスな内容を議論するアカウントについて、その投稿への「いいね」の数を分析する。
 - ▶ 基本的にはポワソン分布を使い、当のアカウントの投稿への平均的な「いいね」の数を推定する。
 - ▶ だが、最近の SNS ユーザの多くはシリアスな内容の投稿には興味がなく、単に刺激的な内容の投稿に反応するだけだろう。
 - ▶ そこで、そういったユーザは、シリアスな内容の投稿は単にスルーすると仮定する。

モデルの specification

- ▶ “Zero-inflated”

- ▶ π : 頻度が無条件に 0 となる確率
- ▶ $1 - \pi$: 頻度がパラメータ λ の Poisson 分布に従う確率

- ▶ 同時分布

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \pi, \lambda) = \prod_{i=1}^N \left(\pi \delta(x_i = 0) \right)^{1-z_i} \left((1 - \pi) \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \right)^{z_i}$$

- ▶ $\delta(\cdot)$ は、丸括弧内の条件が成立するとき 1、そうでないとき 0。

潜在変数の周辺化

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}; \pi, \lambda) &= \sum_{\mathbf{z}} p(\mathbf{x}, \mathbf{z}; \pi, \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^N \left(\pi \delta(x_i = 0) + (1 - \pi) \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \log p(\mathbf{x}; \pi, \lambda) = \sum_{i=1}^N \log \left(\pi \delta(x_i = 0) + (1 - \pi) \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \right)$$

Jensen の不等式の適用

$$\begin{aligned}\log p(\mathbf{x}; \pi, \lambda) &= \sum_{i=1}^N \log \left(\pi \delta(x_i = 0) + (1 - \pi) \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!} \right) \\&= \sum_{i=1}^N \log \left(q_i \frac{\pi \delta(x_i = 0)}{q_i} + (1 - q_i) \frac{(1 - \pi) \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}}{1 - q_i} \right) \\&\geq \sum_{i=1}^N \left(q_i \log \frac{\pi \delta(x_i = 0)}{q_i} + (1 - q_i) \log \frac{(1 - \pi) \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}}{1 - q_i} \right) \\&= \sum_{i=1}^N \left(q_i \log \pi + q_i \log \delta(x_i = 0) - q_i \log q_i + (1 - q_i) \log(1 - \pi) + (1 - q_i) x_i \log \lambda \right. \\&\quad \left. - (1 - q_i) \lambda - (1 - q_i) \log(x_i!) - (1 - q_i) \log(1 - q_i) \right) \\&\equiv L(\pi, \lambda)\end{aligned}$$

M step

$$\frac{\partial L(\pi, \lambda)}{\partial \pi} = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\pi} - \frac{\sum_{i=1}^N (1 - q_i)}{1 - \pi}$$

$\frac{\partial L(\pi, \lambda)}{\partial \pi} = 0$ とおくと、 $\pi = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{N}$ を得る。

$$\frac{\partial L(\pi, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\sum_{i=1}^N (1 - q_i) x_i}{\lambda} - \sum_{i=1}^N (1 - q_i)$$

$\frac{\partial L(\pi, \lambda)}{\partial \lambda} = 0$ とおくと、 $\lambda = \frac{\sum_{i=1}^N (1 - q_i) x_i}{\sum_{i=1}^N (1 - q_i)}$ を得る。

E step

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\pi, \lambda)}{\partial q_i} &= \log \pi + \log \delta(x_i = 0) - \log q_i - 1 - \log(1 - \pi) \\ &\quad - x_i \log \lambda + \lambda + \log(x_i!) + \log(1 - q_i) + 1\end{aligned}$$

$\frac{\partial L(\pi, \lambda)}{\partial q_i} = 0$ とおくと、以下を得る。

$$q_i = \frac{\pi \delta(x_i = 0)}{\pi \delta(x_i = 0) + (1 - \pi) \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}}$$