

潜在的ディリクレ配分法

latent Dirichlet allocation

正田 備也

masada@rikkyo.ac.jp

Contents

PLSAの復習

PLSAの問題点

LDAの変分ベイズ法

PLSA (probabilistic latent semantic analysis)

- ▶ 同じ文書内でも、異なる単語トークンは異なる単語多項分布から生成されうる（＝異なるトピックを表現しうる）
- ▶ 文書によって、各トピックの出現確率が異なる
- ▶ PLSA では、単語多項分布をトピック (topic) と呼ぶ
- ▶ PLSA は最もシンプルなトピックモデル
 - ▶ トピックモデルは、単語トークンの “クラスタリング”
 - ▶ 同一文書内の同一単語の異なるトークンは区別されない (bag-of-words)

Notations

- ▶ 語彙集合 $\{1, \dots, W\}$
- ▶ トピック集合 $\{1, \dots, K\}$
 - ▶ 語彙やトピックをその添字と同一視している。
- ▶ 文書集合 $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$
- ▶ 文書 \mathbf{x}_i の j 番目のトークンとして現れる単語を、 $x_{i,j}$ という確率変数で表す
- ▶ 文書 \mathbf{x}_i の j 番目の単語 $x_{i,j}$ が表現するトピックを、 $z_{i,j}$ という確率変数で表す
- ▶ $x_{i,j}$ の値は観測されているが、 $z_{i,j}$ の値は観測されていない
 - ▶ つまり、 $z_{i,j}$ は潜在変数。

PLSAにおける同時分布

- ▶ PLSA では、文書 x_i の j 番目のトークンがトピック k を表現し、かつそのトピックを表現するために単語 w が使われる同時確率、つまり $p(x_{i,j} = w, z_{i,j} = k)$ は

$$p(x_{i,j} = w, z_{i,j} = k) = p(z_{i,j} = k)p(x_{i,j} = w|z_{i,j} = k) \quad (1)$$

- ▶ $p(z_{i,j} = k)$ は、文書 x_i の j 番目のトークンが（他のトピックでなく）トピック k を表現する確率
- ▶ $p(x_{i,j} = w|z_{i,j} = k)$ は、文書 x_i の j 番目のトークンがトピック k を表現するとき（他の単語でなく）単語 w が使われる確率
- ▶ さらに、PLSA では以下のように仮定する（次スライド）

PLSAにおいて仮定すること

- ▶ どの j, j' についても $p(z_{i,j} = k) = p(z_{i,j'} = k)$ と仮定
 - ▶ 同じ文書内なら、どの単語トークンであれ、トピック k を表現する確率は、同じ（場所によってトピックの確率が違ったりしない）
 - ▶ そこで、 $p(z_{i,\cdot} = k) = \theta_{i,k}$ とおく
- ▶ どの i, i' と j, j' についても、 $p(x_{i,j} = w | z_{i,j} = k) = p(x_{i',j'} = w | z_{i',j'} = k)$ と仮定
 - ▶ 同じコーパス内なら、どの文書のどの単語トークンであれ、それがトピック k を表現するために使われるならば（条件付き確率の条件の部分）、 k を表現するためにどの単語が使われるかの確率は、同じ
 - ▶ つまり、単語確率分布とトピックが一对一に対応している
 - ▶ そこで、 $p(x_{\cdot,j} = w | z_{\cdot,j} = k) = \phi_{k,w}$ とおく

PLSAにおける観測データの尤度

- ▶ 個々の単語トークンにおけるトピックと単語の同時分布は

$$p(x_{i,j} = w, z_{i,j} = k) = p(z_{i,j} = k)p(x_{i,j} = w|z_{i,j} = k) = \theta_{i,k}\phi_{k,x_{i,j}} \quad (2)$$

- ▶ 潜在変数である $z_{i,j}$ を周辺化

$$p(x_{i,j} = w) = \sum_{z_{i,j}=1}^K p(x_{i,j} = w, z_{i,j} = k) = \sum_{k=1}^K \theta_{i,k}\phi_{k,x_{i,j}} \quad (3)$$

- ▶ 各トークンの独立性の仮定より

$$p(\mathbf{x}_i) = \prod_{j=1}^{n_i} p(x_{i,j}) = \prod_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^K \theta_{i,k}\phi_{k,x_{i,j}} \right) \quad (4)$$

- ▶ 各文書の独立性の仮定より

$$p(\mathcal{X}) = \prod_{i=1}^N p(\mathbf{x}_i) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^K \theta_{i,k}\phi_{k,x_{i,j}} \right) \quad (5)$$

Contents

PLSAの復習

PLSAの問題点

LDAの変分ベイズ法

PLSAの問題点とベイズ化による改良

- ▶ 各文書におけるトピック確率 $\theta_i = (\theta_{i,1}, \dots, \theta_{i,K})$ に関して、異なる文書の間で何の関係性も仮定されていない
 - ▶ θ_i と $\theta_{i'}$ の間に何の関係もない。
- ▶ このことが過学習をもたらすかもしれない
- ▶ そこで、コーパスに属する全文書の θ_i が、同一のディリクレ事前分布 $\text{Dir}(\alpha)$ から draw されると仮定する
- ▶ 他はPLSAのまま
 - ▶ 各トピックの単語確率 ϕ_k についても別のディリクレ分布 $\text{Dir}(\beta)$ を導入できるが、そうしなくてもよい

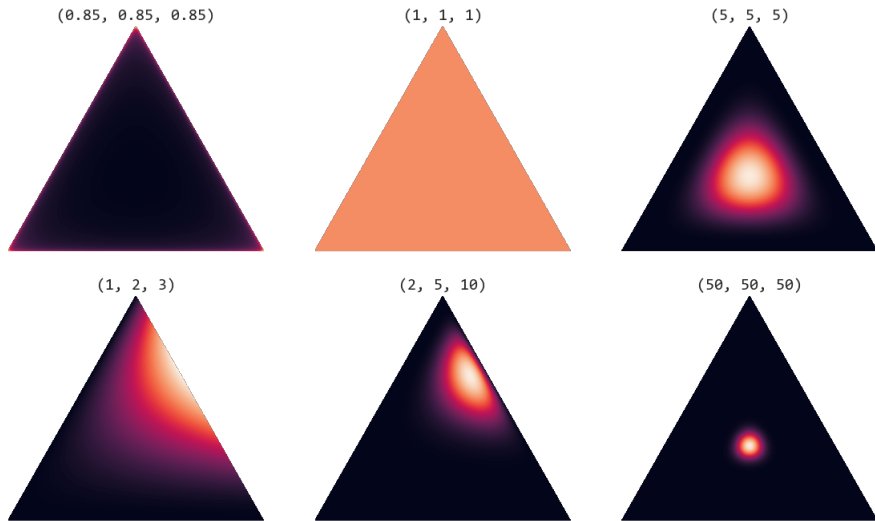


Figure: トピック数が3の場合のディリクレ分布 ([ここから引用](#)) 10 / 24

PLSA と LDA の比較

- ▶ PLSA における x_i の尤度

$$\begin{aligned} p(x_i; \theta_i, \Phi) &= \sum_{z_i} p(x_i, z_i; \theta_i, \Phi) = \sum_{z_i} p(z_i; \theta_i) p(x_i | z_i; \Phi) \\ &= \prod_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{z_{i,j}=1}^K p(z_{i,j}; \theta_i) p(x_{i,j} | z_{i,j}; \Phi) \right) = \prod_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^K \theta_{i,k} \phi_{k,x_{i,j}} \right) \end{aligned}$$

- ▶ LDA における x_i の尤度 ($p(x_i; \theta_i, \Phi)$ は $p(x_i | \theta_i; \Phi)$ に変わる)

$$\begin{aligned} p(x_i; \Phi, \alpha) &= \int p(\theta_i; \alpha) p(x_i | \theta_i; \Phi) d\theta_i \\ &= \int \sum_{z_i} p(\theta_i; \alpha) p(z_i | \theta_i) p(x_i | z_i; \Phi) d\theta_i \\ &= \int \left(\frac{\Gamma(\sum_k \alpha_k)}{\prod_k \Gamma(\alpha_k)} \prod_{k=1}^K \theta_{i,k}^{\alpha_k - 1} \right) \prod_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=1}^K \theta_{i,k} \phi_{k,x_{i,j}} \right) d\theta_i \quad (6) \end{aligned}$$

Contents

PLSAの復習

PLSAの問題点

LDAの変分ベイズ法

LDAの変分ベイズ法

- ▶ Jensen の不等式を適用して ELBO を求める。

$$\begin{aligned}\ln p(\mathbf{x}_i; \Phi, \alpha) &= \ln \int \sum_{\mathbf{z}_i} p(\boldsymbol{\theta}_i; \alpha) p(\mathbf{z}_i | \boldsymbol{\theta}_i) p(\mathbf{x}_i | \mathbf{z}_i; \Phi) d\boldsymbol{\theta}_i \\ &= \ln \int \sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}_i) \frac{p(\boldsymbol{\theta}_i; \alpha) p(\mathbf{z}_i | \boldsymbol{\theta}_i) p(\mathbf{x}_i | \mathbf{z}_i; \Phi)}{q(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}_i)} d\boldsymbol{\theta}_i \\ &\geq \int \sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}_i) \ln \frac{p(\boldsymbol{\theta}_i; \alpha) p(\mathbf{z}_i | \boldsymbol{\theta}_i) p(\mathbf{x}_i | \mathbf{z}_i; \Phi)}{q(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}_i)} d\boldsymbol{\theta}_i \quad (7)\end{aligned}$$

- ▶ 以下、 $q(\mathbf{z}_i, \boldsymbol{\theta}_i) = q(\mathbf{z}_i)q(\boldsymbol{\theta}_i)$ と factorize すると仮定する。

$q(\boldsymbol{\theta}_i)$ を求める (1/2)

- ▶ $q(\mathbf{z}_i)$ を固定する。

$$\begin{aligned}\ln p(\mathbf{x}_i; \Phi, \alpha) &\geq \int \sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) q(\boldsymbol{\theta}_i) \ln \frac{p(\boldsymbol{\theta}_i; \alpha) p(\mathbf{z}_i | \boldsymbol{\theta}_i) p(\mathbf{x}_i | \mathbf{z}_i; \Phi)}{q(\mathbf{z}_i) q(\boldsymbol{\theta}_i)} d\boldsymbol{\theta}_i \\&= \int q(\boldsymbol{\theta}_i) \left[\sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) \ln (p(\boldsymbol{\theta}_i; \alpha) p(\mathbf{z}_i | \boldsymbol{\theta}_i)) \right] d\boldsymbol{\theta}_i - \int q(\boldsymbol{\theta}_i) \ln q(\boldsymbol{\theta}_i) d\boldsymbol{\theta}_i + \text{const.} \\&= \int q(\boldsymbol{\theta}_i) \ln \left[\exp \sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) \ln (p(\boldsymbol{\theta}_i; \alpha) p(\mathbf{z}_i | \boldsymbol{\theta}_i)) \right] d\boldsymbol{\theta}_i - \int q(\boldsymbol{\theta}_i) \ln q(\boldsymbol{\theta}_i) d\boldsymbol{\theta}_i + \text{const.} \\&= - \int q(\boldsymbol{\theta}_i) \ln \frac{q(\boldsymbol{\theta}_i)}{\frac{1}{Z} \exp \left\{ \sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) \ln (p(\boldsymbol{\theta}_i; \alpha) p(\mathbf{z}_i | \boldsymbol{\theta}_i)) \right\}} d\boldsymbol{\theta}_i + \int q(\boldsymbol{\theta}_i) \ln Z d\boldsymbol{\theta}_i + \text{const.} \\&= -D_{\text{KL}}(q(\boldsymbol{\theta}_i) \parallel \frac{1}{Z} \exp \left[\sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) \ln p(\boldsymbol{\theta}_i; \alpha) p(\mathbf{z}_i | \boldsymbol{\theta}_i) \right]) + \text{const.} \tag{8}\end{aligned}$$

- ▶ 以上より、 $q(\boldsymbol{\theta}_i) \propto \exp \left[\sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) \ln p(\boldsymbol{\theta}_i; \alpha) p(\mathbf{z}_i | \boldsymbol{\theta}_i) \right]$ のとき、ELBO は最大。
- ▶ つまり、 $q(\boldsymbol{\theta}_i) \propto p(\boldsymbol{\theta}_i; \alpha) \exp \left[\sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) \ln p(\mathbf{z}_i | \boldsymbol{\theta}_i) \right]$ のとき、ELBO は最大。

$q(\theta_i)$ を求める (2/2)

- ▶ 指数関数の中身を、以下のように書き換える。

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) \ln p(\mathbf{z}_i | \theta_i) &= \sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) \ln \prod_{j=1}^{n_i} \theta_{i,z_{i,j}} = \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) \ln \theta_{i,z_{i,j}} \\ &= \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{z_{i,j}=1}^K q(z_{i,j}) \ln \theta_{i,z_{i,j}} = \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j=1}^{n_i} q(z_{i,j} = k) \right) \ln \theta_{i,k} = \sum_{k=1}^K n_{i,k} \ln \theta_{i,k} \quad (9)\end{aligned}$$

ただし、 $n_{i,k} \equiv \sum_{j=1}^{n_i} q(z_{i,j} = k)$ と定義した。よって

$$q(\theta_i) \propto \prod_{k=1}^K \theta_{i,k}^{\alpha_k - 1} \times \exp \left[\sum_{k=1}^K n_{i,k} \ln \theta_{i,k} \right] = \prod_{k=1}^K \theta_{i,k}^{\alpha_k + n_{i,k} - 1} \quad (10)$$

- ▶ これは、変分事後分布 $q(\theta_i)$ がディリクレ分布であることを意味する。
- ▶ つまり、変分ディリクレ事後分布 $q(\theta_i)$ のパラメータを ζ_i とすると、

$$\zeta_{i,k} = \alpha_k + n_{i,k} \quad (11)$$

$q(z_i)$ を求める (1/2)

- ▶ 今度は $q(\theta_i)$ を固定する。

$$\begin{aligned}\ln p(\mathbf{x}_i; \Phi, \alpha) &\geq \int \sum_{z_i} q(z_i) q(\theta_i) \ln \frac{p(\theta_i; \alpha) p(z_i | \theta_i) p(\mathbf{x}_i | z_i; \Phi)}{q(z_i) q(\theta_i)} d\theta_i \\ &= \sum_{z_i} q(z_i) \left[\ln p(\mathbf{x}_i | z_i; \Phi) + \int q(\theta_i) \ln p(z_i | \theta_i) d\theta_i \right] - \sum_{z_i} q(z_i) \ln q(z_i) + \text{const.} \\ &= -D_{\text{KL}}(q(z_i) \parallel \frac{1}{Z} \exp \left[\ln p(\mathbf{x}_i | z_i; \Phi) + \int q(\theta_i) \ln p(z_i | \theta_i) d\theta_i \right]) + \text{const.} \quad (12)\end{aligned}$$

- ▶ 以上より、 $q(z_i) \propto p(\mathbf{x}_i | z_i; \Phi) \exp \left[\int q(\theta_i) \ln p(z_i | \theta_i) d\theta_i \right]$ のとき、ELBO は最大。

$q(z_i)$ を求める (2/2)

- ▶ 変分ディリクレ事後分布 $q(\theta_i)$ のパラメータが ζ_i であることを使うと、

$$\begin{aligned}\int q(\theta_i; \zeta_i) \ln p(z_i | \theta_i) d\theta_i &= \int q(\theta_i; \zeta_i) \ln \prod_{j=1}^{n_i} \theta_{i,z_{i,j}} d\theta_i = \sum_{j=1}^{n_i} \int q(\theta_i; \zeta_i) \ln \theta_{i,z_{i,j}} d\theta_i \\ &= \sum_{j=1}^{n_i} \{ \psi(\zeta_{i,z_{i,j}}) - \psi(\sum_k \zeta_{i,k}) \} = \sum_{j=1}^{n_i} \psi(\zeta_{i,z_{i,j}}) + \text{const.}\end{aligned}\quad (13)$$

- ▶ よって、

$$\begin{aligned}q(z_i) &\propto p(x_i | z_i; \Phi) \exp \left[\int q(\theta_i) \ln p(z_i | \theta_i) d\theta_i \right] = \prod_{j=1}^{n_i} \phi_{z_{i,j}, x_{i,j}} \times \exp \left(\sum_{j=1}^{n_i} \psi(\zeta_{i,z_{i,j}}) \right) \\ &= \prod_{j=1}^{n_i} \phi_{z_{i,j}, x_{i,j}} \times \prod_{j=1}^{n_i} \exp(\psi(\zeta_{i,z_{i,j}})) = \prod_{j=1}^{n_i} \phi_{z_{i,j}, x_{i,j}} \exp(\psi(\zeta_{i,z_{i,j}}))\end{aligned}\quad (14)$$

- ▶ つまり、

$$q(z_{i,j} = k) = \frac{\phi_{k, x_{i,j}} \exp(\psi(\zeta_{i,k}))}{\sum_{l=1}^K \phi_{l, x_{i,j}} \exp(\psi(\zeta_{i,l}))} \quad (15)$$

変分事後分布を使って ELBO を書き下す (1/2)

$$\begin{aligned}\ln p(\mathbf{x}_i; \Phi, \alpha) &\geq \int \sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) q(\boldsymbol{\theta}_i) \ln \frac{p(\boldsymbol{\theta}_i; \alpha) p(\mathbf{z}_i | \boldsymbol{\theta}_i) p(\mathbf{x}_i | \mathbf{z}_i; \Phi)}{q(\mathbf{z}_i) q(\boldsymbol{\theta}_i)} d\boldsymbol{\theta}_i \\ &= \int \sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) q(\boldsymbol{\theta}_i) \ln p(\mathbf{z}_i | \boldsymbol{\theta}_i) d\boldsymbol{\theta}_i + \sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) \ln p(\mathbf{x}_i | \mathbf{z}_i; \Phi) \\ &\quad - D_{\text{KL}}(q(\boldsymbol{\theta}_i) \parallel p(\boldsymbol{\theta}_i; \alpha)) - \sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) \ln q(\mathbf{z}_i) \equiv \mathcal{L}_i(\Phi)\end{aligned}\tag{16}$$

► 式 (26) の右辺の最初の項を計算してみる。

$$\begin{aligned}\int \sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) q(\boldsymbol{\theta}_i) \ln p(\mathbf{z}_i | \boldsymbol{\theta}_i) d\boldsymbol{\theta}_i &= \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{\mathbf{z}_{i,j}=1}^K q(\mathbf{z}_{i,j}) \int q(\boldsymbol{\theta}_i) \ln p(\mathbf{z}_{i,j} | \boldsymbol{\theta}_i) d\boldsymbol{\theta}_i \\ &= \sum_{k=1}^K \left(\sum_{j=1}^{n_i} q(\mathbf{z}_{i,j} = k) \right) \left(\psi(\zeta_{i,k}) - \psi\left(\sum_l \zeta_{i,l}\right) \right)\end{aligned}\tag{17}$$

変分事後分布を使ってELBOを書き下す (2/2)

- ▶ 式 (26) の右辺の 2 番目の項を計算してみる。

$$\sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) \ln p(\mathbf{x}_i | \mathbf{z}_i; \Phi) = \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{\mathbf{z}_{i,j}=1}^K q(z_{i,j}) \ln \phi_{z_{i,j}, x_{i,j}} = \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^K q(z_{i,j} = k) \ln \phi_{k, x_{i,j}} \quad (18)$$

- ▶ トピック単語確率 Φ は、この項の全文書についての和

$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{k=1}^K q(z_{i,j} = k) \ln \phi_{k, x_{i,j}}$ を最大化することで求めることができる。
(ELBO の中で Φ を含むのはこの項だけだから。)

- ▶ $\sum_{w=1}^W \phi_{k,w} = 1$ が満たされるので、ラグランジュの未定乗数法を使えば、

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \phi_{k,w}} + \frac{\partial}{\partial \phi_{k,w}} \lambda_k \left(1 - \sum_{w=1}^W \phi_{k,w} \right) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} q(z_{i,j} = k) \delta(x_{i,j} = w)}{\phi_{k,w}} - \lambda_k$$

$$\therefore \phi_{k,w} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} q(z_{i,j} = k) \delta(x_{i,j} = w)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} q(z_{i,j} = k)} \quad (19)$$

LDAの変分ベイズ法のまとめ (1/2)

$$q(z_{i,j} = k) \leftarrow \frac{\phi_{k,x_{i,j}} \exp(\psi(\zeta_{i,k}))}{\sum_{l=1}^K \phi_{l,x_{i,j}} \exp(\psi(\zeta_{i,l}))} \quad (20)$$

$$\zeta_{i,k} \leftarrow \alpha_k + \sum_{j=1}^{n_i} q(z_{i,j} = k) \quad (21)$$

$$\phi_{k,w} \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} q(z_{i,j} = k) \delta(x_{i,j} = w)}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} q(z_{i,j} = k)} \quad (22)$$

LDAの変分ベイズ法のまとめ (2/2)

- ▶ 同じ単語ごとにまとめたかたちで更新式を書くと・・・

$$q_{i,w,k} \leftarrow \frac{\phi_{k,w} \exp(\psi(\zeta_{i,k}))}{\sum_{l=1}^K \phi_{l,w} \exp(\psi(\zeta_{i,l}))} \quad (23)$$

$$\zeta_{i,k} \leftarrow \alpha_k + \sum_{w=1}^W n_{i,w} q_{i,w,k} \quad (24)$$

$$\phi_{k,w} \leftarrow \frac{\sum_{i=1}^N n_{i,w} q_{i,w,k}}{\sum_{w=1}^W \sum_{i=1}^N n_{i,w} q_{i,w,k}} \quad (25)$$

- ▶ $q_{i,w,k}$ は文書 i で単語 w がトピック k を表現する確率
- ▶ $n_{i,w}$ は文書 i での単語 w の出現回数

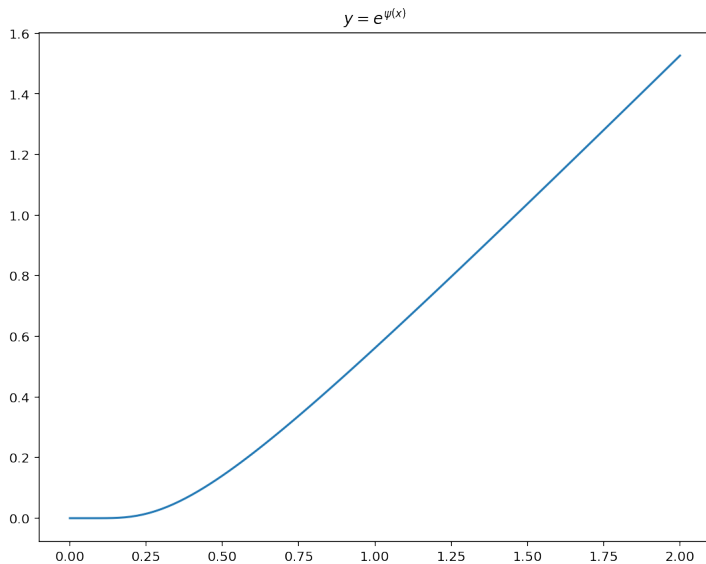


Figure: $y = e^{\psi(x)}$ のグラフ

正規分布を使う場合

「文書」は bag of vectors として表現されており、ベクトルの次元は D とする。

$$\begin{aligned}\ln p(\mathbf{x}_i; \Phi, \alpha) &\geq \int \sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) q(\boldsymbol{\theta}_i) \ln \frac{p(\boldsymbol{\theta}_i; \alpha) p(\mathbf{z}_i | \boldsymbol{\theta}_i) p(\mathbf{x}_i | \mathbf{z}_i; \Phi)}{q(\mathbf{z}_i) q(\boldsymbol{\theta}_i)} d\boldsymbol{\theta}_i \\ &= \int \sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) q(\boldsymbol{\theta}_i) \ln p(\mathbf{z}_i | \boldsymbol{\theta}_i) d\boldsymbol{\theta}_i + \sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) \ln p(\mathbf{x}_i | \mathbf{z}_i; \Phi) \\ &\quad - D_{\text{KL}}(q(\boldsymbol{\theta}_i) \parallel p(\boldsymbol{\theta}_i; \alpha)) - \sum_{\mathbf{z}_i} q(\mathbf{z}_i) \ln q(\mathbf{z}_i) \equiv \mathcal{L}_i(\Phi)\end{aligned}\tag{26}$$

トピックを D 次元正規分布でモデル化。ただし、共分散行列は対角成分以外ゼロ。このとき

$$p(\mathbf{x}_i | \mathbf{z}_i; \Phi) \equiv \prod_{j=1}^{n_i} \prod_{d=1}^D \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{z_i,j,d}^2}} \exp\left(-\frac{(x_{i,j,d} - \mu_{z_i,j,d})^2}{2\sigma_{z_i,j,d}^2}\right)\tag{27}$$

$$\Phi \equiv \{\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_K\} \cup \{\boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_K\}\tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \mu_{k,d}} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \frac{q(z_{i,j} = k)(x_{i,j,d} - \mu_{k,d})}{\sigma_{k,d}^2} \quad (29)$$

$$\therefore \mu_{k,d} = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} q(z_{i,j} = k)x_{i,j,d}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} q(z_{i,j} = k)} \quad (30)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \sigma_{k,d}} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \left(\frac{q(z_{i,j} = k)}{\sigma_{k,d}} - \frac{q(z_{i,j} = k)(x_{i,j,d} - \mu_{k,d})^2}{\sigma_{k,d}^3} \right) \quad (31)$$

$$\therefore \sigma_{k,d}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} q(z_{i,j} = k)(x_{i,j,d} - \mu_{k,d})^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} q(z_{i,j} = k)} \quad (32)$$