

GVTD-X 法

辻野智紀

2023/02/22

第1章 Lee et al. (1999) による GBVTD 論文

(図はすべて Lee et al. (1999) から引用. 和訳は DeepL を辻野がマニュアル修正.)

1 はじめに

激しい熱帯低気圧 (TC) は, 熱帯地方の沿岸地域で最も壊滅的な自然災害の一つである. 歴史的に見ても, 深刻な熱帯低気圧は他のすべての自然災害よりも人命や財産の損失が大きい (Anthes 1982). 最近の例ではハリケーン Iniki (1992), Andrew (1992), 台風 Herb (1996), Paka (1997) などがあり, それぞれカウアイ島, フロリダ州南部, 台湾, グアムに甚大な被害をもたらした.

熱帯低気圧は循環中心付近に穏やかな領域があることを特徴とする, 大型の低気圧性回転体と古くから認識されている. 熱帯低気圧の強さは, 通常地表面の最大風速と中心気圧の最小値で分類される. 熱帯低気圧の循環についての理解は, レーウィンゾンデ, 航空機によるその場観測, ドロップゾンデ, 衛星, ドップラーレーダーなど長年にわたる大気観測システムの進歩とともに深まってきた. 熱帯低気圧の強さは, これらの観測機器の 1 つまたは複数の測定値から推測することができるが, 熱帯低気圧の詳細な 3 次元渦構造は, ドップラーレーダーによってのみ明らかになる.

ドップラーレーダーは, 1950 年代後半に初めて気象学的に使用されて以来, メソスケール渦の観測に欠かせないツールとなっている (Metcalf and Glover 1990). 1980 年代初頭から, 米国海洋大気庁 (NOAA) の WP-3D に搭載されたテールドップラーレーダーは, ハリケーンの偵察や調査のミッションでドップラーレーダーデータを収集している. デュアルドップラーレーダーのデータは, 古典的な (ステアラブル) アンテナを装備した 2 本の垂直なフライトパス (例えば「4 の字」パターン), またはデュアルビーム (すなわち「フランス式」) アンテナを装備した 1 本のフライトパスから収集することができる. そして熱帯低気圧の 3 次元内部構造を再構築することができる (例えば, Marks and Houze 1984, 1987; Marks et al. 1992; Roux and Viltard 1995). デュアルドップラーレーダーによって導かれる熱帯低気圧構造は, 研究的価値は高いもののデータ処理に手間がかかるため, リアルタイムでの応用には限界がある.

ロバストな航空機搭載のシングルドップラーレーダ風速のリトリブ技術である Velocity Track Display (VTD) は、トラックに直交するモードでスキャンされた航空機搭載ドップラーレーダーからリアルタイムで低気圧の一次循環を推測するために提案された (Lee et al.1994). VTD 法とその拡張版である EVTD (Roux and Marks 1996) は, NOAA WP-3D のワークステーション上でリアルタイムに実行されている (Griffin et al.1992). VTD および EVTD で得られた風は, 衛星を介してフロリダ州マイアミにある NOAA 熱帯予報センターにほぼリアルタイムで送信され, 予報官に重要な情報を提供している.

一方, 地上のドップラーレーダーでは, 最近まであまり多くの熱帯低気圧を観測しておらず, またドップラーレーダー間の距離が大きいため, 熱帯低気圧のデュアルドップラーレーダー観測はまだ稀なケースとなっている. さらに, デュアルドップラーレーダーによる解析は, 通常熱帯低気圧の一部しかカバーしていない限られた領域によってさらに制約を受ける (例えば, Jou et al. 1997). したがって, シングルドップラーレーダーの技術は, 上陸する熱帯低気圧を解析するための主要なツールであり続ける. 地上のシングルドップラーレーダーを用いた熱帯低気圧の解析手法は, より一般的なメソサイクロンのドップラーレーダーの特徴にそのルーツがある. Donaldson (1970) はパターン認識のアプローチにより, 渦が逆位相のドップラー速度双極子パターンを生成することを発見した. このドップラー速度の双極子パターンは, Plane Position Indicator (PPI) モードでレーダーのアジマス方向にスキャンすることで識別できる. 動径速度のアジマス方向のシアは, レーダースコープ上で潜在的に激しい大気の渦を識別するために使用され, これが竜巻の渦の特徴的パターンにつながった (Brown et al. 1978).

Baynton (1979) はドップラー速度の渦特性を初めて熱帯低気圧に適用した. 大西洋の平均的なハリケーン (Shea and Gray 1973) のドップラー速度パターンを, ハリケーン中心から 200 km 離れた場所にある, ビーム幅 2° の仮想的な沿岸用 S バンド (10 cm 波長) ドップラーレーダーを想定して作成した. Baynton (1979) はこの仮想的な熱帯低気圧のドップラー速度パターンが中規模サイクロンのものと基本的に同じであることを示した.

Wood and Brown (1992, 以下, WB) は Rankine (1901) の渦をもとに, 接線方向と動径方向の流れからなる軸対称の熱帯低気圧のドップラー速度パターンを系統的に研究した. 定量的には, Rankine 複合渦 (例えば, Lemon et al. 1978) は, V_T が R (半径) に比例する剛体回転と, V_T が $1/R$ に比例するポテンシャル渦に囲まれた 2 つの流れ領域で特徴付けられる. 最大風速 V_{\max} はこれらのレジーム間の境界である最大風速半径 (R_{\max}) にある.

Wood and Brown (1992) は軸対称熱帯低気圧のドップラー速度特性を次のように結論づけている.

1. 軸対称の回転および発散のシングルドップラー速度パターンは, アスペクト比の関数として変化する:

$$\alpha = \frac{\text{コアの直径}}{\text{レーダーから低気圧中心までの距離}} \quad (\text{L99-01})$$

2. ドップラー速度の最大値は、軸対称の回転流に軸対称のアウトフロー（インフロー）が重なることで、反時計回りに回転する。軸対称の回転と動径風の大きさは、ドップラー速度の極大値の変位から推定できる。
3. $\alpha \rightarrow 0$ のとき、見かけの低気圧中心（正負 2 つのドップラー速度極大値を結ぶ弦の中点と定義）が真の低気圧中心に近づく。
4. 真の低気圧中心は常にレーダーと 2 つのドップラー速度の極大値を通る円上に位置する。

Baynton (1979) と WB の研究は、パターン認識を用いて軸対称の熱帯低気圧の強さと中心位置を推定するための基礎を提供しており、これらは予報官がリアルタイムで判断するための貴重なリソースとなっている。しかし、非対称形の熱帯低気圧は、1950 年代から偵察機でよく観測された (LaSeur and Hawkins 1963; Hawkins and Rubsam 1968; Marks and Houze 1987; Marks et al 1992 など)。Stewart and Lyons (1996) は、グアムの Weather Surveillance Radar-1988 Doppler (WSR-88D) から台風 Ed (1993) の非対称なドップラー速度パターンを初めて記録した。しかし、非対称な台風におけるドップラー速度パターンの一般的な特徴はまだ明らかになっていない。そこで、WB の軸対称熱帯低気圧のドップラー速度パターンの解析結果を、非対称熱帯低気圧にも拡大し、その特性を調べることが有益である。パターン認識は熱帯低気圧を予測する上で効率的かつ実用的な方法であるが、通常はドップラー速度のゼロ点やピーク点などの点値のみを用いて、熱帯低気圧の中心や強度を定性的に推定する。現在のところ、パターン認識法を用いてシングルドップラーの PPI スキャンから熱帯低気圧の水平方向の一次循環を再構築する能力はない。

Lhermitte and Atlas (1962) は、VAD (Velocity-Azimuth Display) を開発するにあたり、PPI スキャンで得られるすべてのドップラー速度を線形の流れモデルと組み合わせて使用し、風が空間内で線形に変化する気象現象に関する定量的な情報を得た (Caton 1963; Browning and Wexler 1968; Matejka and Srivastava 1991)。同様のコンセプトで、円形の風モデルを仮定し、VTD および EVTD 手法は、単一の空中ドップラーレーダーデータから熱帯低気圧の 3 次元一次循環を再構築した。ハリケーン Gloria (1985) および Hugo (1989) の軸対称および非対称の接線風構造を取得し、現場での測定値と比較して良好な結果を得た。

航空機搭載ドップラーレーダーによる観測は、陸上では飛行時間や運用上の制限がある。そのため、航空機搭載ドップラーレーダーは、外洋上の熱帯低気圧の観測により適している。米国の沿岸地域に沿って WSR-88D ネットワークが完成したことで、海岸線から約 400 km (低高度は反射率係数のみ) および約 150 km (反射強度およびドップラー速度) 以内の熱帯低気圧の活動を継続的に監視できるようになった。WSR-88D は VTD タイプの技術が導入された場合、上陸する熱帯低気圧を監視するための強力なツールとなる。航空機搭載ドップラーレーダーと地上ドップラーレーダーではスキャンの形状が異なるため、より複雑な形状の関係に対応するために、より一般的な形の方程式が必要となる。この新しい形式の方程式を「Ground-based VTD (GBVTD) 法」と名付ける。

本論文の第 1 部では, 単一の地上ドップラーレーダーデータから熱帯低気圧の循環を抽出するための背景とツールを確立する. 解析的な軸対称および非対称の熱帯低気圧のドップラー速度パターンを示し, GBVTD 法の定式を導出し, 解析的な風速場を用いて GBVTD 法で得られた熱帯低気圧の一次循環の特徴を調べる. 第 2 節では, GBVTD 法の基本的な概念と定式化について, 第 3 節では, 解析用データセットの構築について説明する. 第 4 節では, 非対称な熱帯低気圧のドップラー速度分布を分析する. 第 5 節では, GBVTD 法で得られた解析的な熱帯低気圧循環の一般的な特徴, 利点, および適用限界を示す. 第 6 節では, 非対称動径風の接線風へのエイリアシングについて議論し, 第 7 節で全体をまとめる.

2 GBVTD 法

2.1 幾何学的な関係

空間を移動する航空機搭載ドップラーレーダーと異なり, 地上のドップラーレーダー^{*1}は空間に固定されている. そのため, 図 1.2.1 に示された GBVTD の幾何学的関係は, Lee et al. (1994) に示された VTD の幾何学的関係とは異なる. 図 1.2.1 は, WB の図 A1 を忠実に再現しているが, いくつかの記号を変更し, 右回りの座標系を使用する. 図 1.2.1 に登場する記号とその定義を付録 A にまとめた.

GBVTD の概念を図 1.2.2 に示す. この概念は, 大気中の渦についてのドップラー速度のパターンを利用する (Donaldson 1970; Brown et al. 1978). 渦の循環は円形であると仮定し, A (図 1.2.1) でゼロの γ と ψ を定義する. 図 1.2.2a に示すように, 軸対称の正の接線風 (北半球では反時計回り) V_T の場合, GBVTD のリング上のドップラー速度は, ビーム方向が TC の接線風に垂直な A ($\psi = 0$) と C ($\psi = \pi$) でゼロとなる. ドップラーレーダーが接線風の全成分を測定する B ($\psi = \pi/2$) と D ($\psi = 3\pi/2$) では, ドップラー速度は接線風と等しくなる. TC 循環の関数依存性が γ ではなく, ψ になっていることに注意する. その結果, $\hat{V}_d / \cos \phi$ (次節で定義) は $-V_T \sin \psi$ に減少する. 図 1.2.2b に示された軸対称の負の半径方向の風 (流入) V_R の場合, GBVTD のリング上のドップラー速度は, A と C では半径方向の風と等しく, B と D ではドップラー速度がゼロになる. つまり, $\hat{V}_d / \cos \phi$ は $V_R \cos \psi$ の形となる. この 2 つの軸対称のフローパターンを組み合わせると, 位相のずれた負のサインカーブが得られる (図 1.2.2c). この位相シフトの符号は, 流入 (最大 V_d の正の位相シフト) または流出 (最大 V_d の負の位相シフト) を示し, 位相シフトの大きさは, 特定の半径上の渦の V_R/V_T によって決まる.

Lee et al. (1994) で議論されているように, 実際の TC における接線方向および半径方

^{*1}

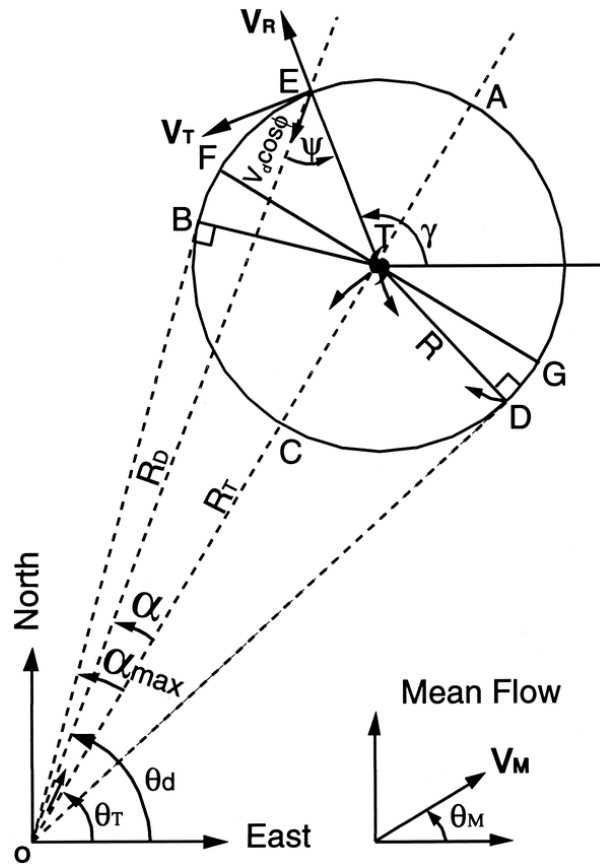


図 1.2.1: GBVTD 法の幾何と記号.

向の速度は、通常あらゆるスケールの平均流と波からなる非対称的なものである。その結果、 $\hat{V}_d / \cos \phi$ は、GBVTD のリング上では、図 1.2.2 に示された軸対称の流れ場のような、単純なサインとコサインの形をとらず、フーリエ成分に分解できる複雑な波形として現れることになる。これらのフーリエ成分は、TC の各半径における接線風と半径風の各波数からの寄与を含んでいる。

なお、 ψ と γ が一致するのは、 $\sin \alpha_{\max} = 0$ の A と C のみである。ここで、 $\sin \alpha$ は WB で定義されたアスペクト比 α の半分である。WB (彼らの 図 2) に示されるように、PPI スキャンの幾何学的な関係から、ドップラー速度の極値は B と D (それぞれ $\psi = \pi/2$ と $3\pi/2$) に位置し、図 1.2.1 の F と G (それぞれ $\gamma = \pi/2$ と $3\pi/2$) とは一致しない。その結果、弦 BD は TC の中心を通らず ($\sin \alpha_{\max} = 0$ の場合を除く)、観測されたドップラー速度パターンに歪みが生じる (WB の図 1)。

GBVTD 法と VTD 法の違いは、 γ と θ_d の関係にある (F. Roux 1998, 私信)。VTD では、レーダースキャンが互いに平行とみなされるため、 θ_d は $\pi/2$ のままで、 γ は一定の半径で 0 から 2π まで変化する。GBVTD では、PPI スキャンのすべてのビームが平行とは考えられないため、 θ_d と γ は依存する。この違いは、GBVTD が VTD よりも多くの

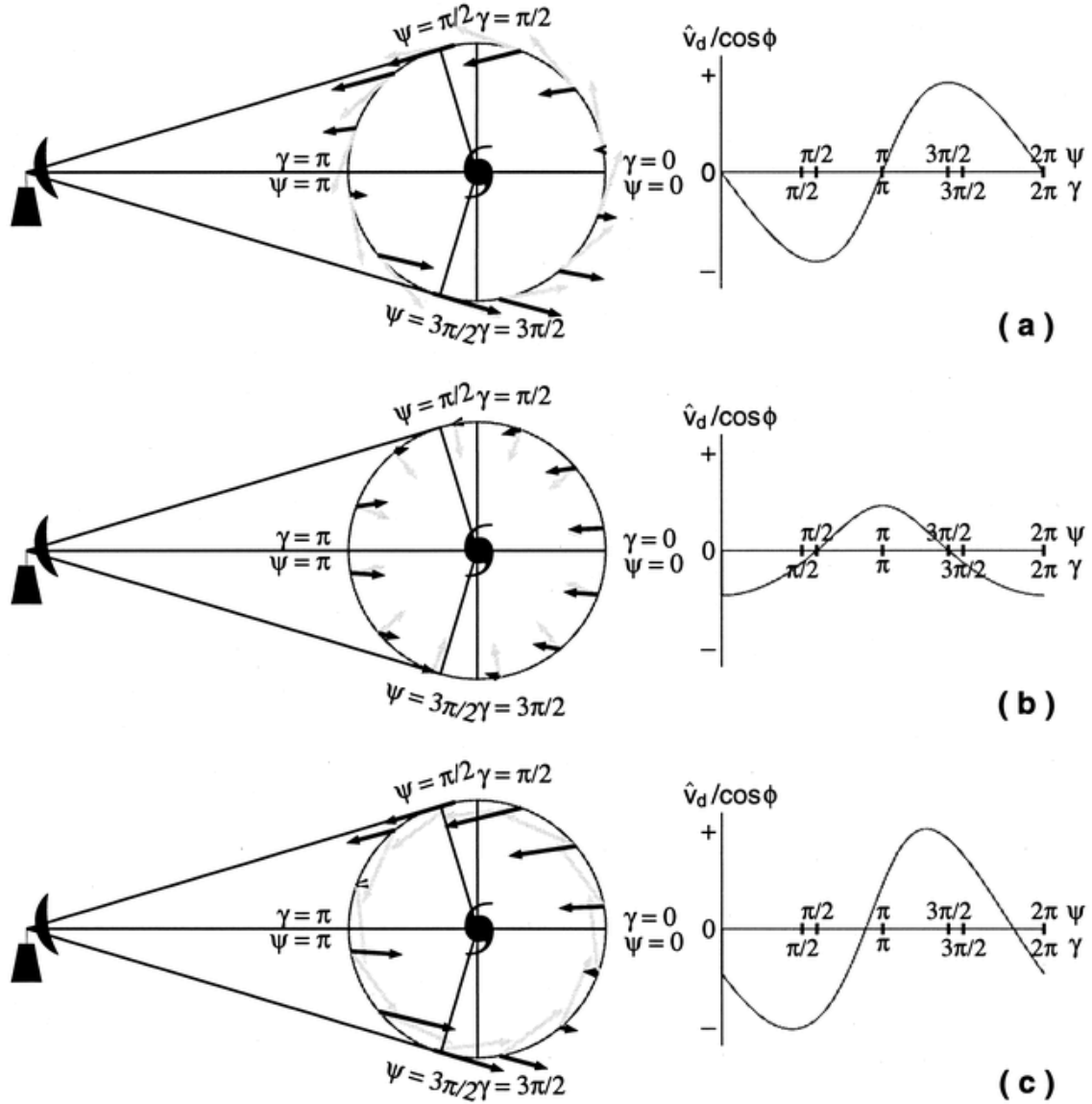


図 1.2.2: (a) 軸対称の回転, (b) 軸対称のインフロー, (c) 軸対称の回転とインフローの場合の GBVTD 法の概念. 左図は軸対称の熱帯低気圧の循環 (灰色の矢印) と, それに対応するドップラー速度 (黒矢印) を示している. 右図は方位角に対するドップラー速度の分布を示す.

情報を含んでいることを意味するが, 内在する不確実性はより複雑である (次節で説明). $\sin \alpha_{\max} \approx 0$ (渦がレーダーから離れている, または $R \ll R_T$) の場合, このリングと交差する PPI スキャンの全てのビームを平行ビームとして扱うことができ, GBVTD の形状は VTD の形状まで縮小される. したがって, B は F に, D は G に漸近していく. $R \approx R_T$ のとき, B と D は C に向かって移動し, $\sin \alpha_{\max} = 1$ のとき, レーダーの位置 (O) で C と一致する. $\sin \alpha_{\max} \geq 1$ のとき, つまりレーダーが GBVTD リングの上か内側にあると

きである。その結果、 V_T の全成分はどのビームでも観測されず、代わりにすべてのドップラー速度に半径方向の風 V_R が大きく寄与していることになる。地上のレーダーが渦の中心 ($\sin \alpha_{\max} \approx \infty$) に位置する場合、幾何学的な関係は基本的に VAD 法 (Browning and Wexler 1968) となり、渦の半径方向の成分のみをサンプリングすることになる。したがって、GBVTD 解析に適した半径 R の渦循環の全接線成分をサンプリングするためには、地上のドップラーレーダーをこの半径の外側 (すなわち $R_T > R$) に設置する必要がある。

2.2 数学的定式化

接線風 (V_T), 動径風 (V_R), 鉛直風 (w), 終端速度 (v_t), 熱帯低気圧の平均風 (V_M) から計算されるドップラー速度 (V_d) は

$$V_d = V_M \cos(\gamma - \theta_M) \cos \phi - V_T \sin \psi \cos \phi + V_R \cos \psi \cos \phi + (w - v_t) \sin \phi \quad (\text{L99-2})$$

で表現される。

終端速度 (v_t) は $Z - v_t$ 関係から見積もられる。鉛直速度 w は未知であり、本研究ではゼロに設定される。(L99-2) の w と v_t からの寄与を除いたのち、残ったドップラー速度は \hat{V}_d と定義される。これは元のドップラー速度を水平に投影したもので、

$$\frac{\hat{V}_d}{\cos \phi} = V_M \cos(\gamma - \theta_M) - V_T \sin \psi + V_R \cos \psi \quad (\text{L99-3})$$

と表現される^{*2}。最小二乗法によるフィッティングを行うために、(L99-3) 式の右辺全ての項は ψ のみの関数として表現しなければならない。(L99-3) 式における $(\gamma - \theta_M)$ の項は $\theta_T + \alpha - \theta_M$ と書き表される。結果として、

$$V_M \cos(\gamma - \theta_M) = V_M [\cos(\theta_T - \theta_M) \cos \alpha - \sin(\theta_T - \theta_M) \sin \alpha]. \quad (\text{L99-4})$$

一方、 $\cos \alpha$ と $\sin \alpha$ は α_{\max} と ψ を用いて以下のように表現される：

$$\cos \alpha \approx \left(\frac{1 - \cos \alpha_{\max}}{2} \right) \cos 2\psi + \left(\frac{1 + \cos \alpha_{\max}}{2} \right), \quad (\text{L99-5})$$

$$\sin \alpha = \sin \alpha_{\max} \sin \psi. \quad (\text{L99-6})$$

(この導出は付録 B に記述したので、興味のある読者はそちらも参考のこと。) (L99-4), (L99-5), (L99-6) を (L99-3) に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\hat{V}_d}{\cos \phi} \approx & V_M \left[\cos(\theta_T - \theta_M) \left(\frac{1 - \cos \alpha_{\max}}{2} \cos 2\psi + \frac{1 + \cos \alpha_{\max}}{2} \right) \right. \\ & \left. - \sin(\theta_T - \theta_M) \sin \alpha_{\max} \sin \psi \right] \\ & - V_T \sin \psi + V_R \cos \psi \end{aligned} \quad (\text{L99-7})$$

^{*2} (原文誤植?) 原文では (L99-3) 式右辺第 1 項および、(L99-4) 式左辺は $V_M \cos(\gamma - \theta_M)$ と記載されているが、直後の文言 γ と $\theta_T + \alpha$ が同じことを示せない (図 1.2.1 で見ても明らかに等しくない)。図 1.2.1 にある Mean Flow 図の原点を E に合わせると、 V_M のドップラーに沿った方向への投影は $V_M \cos(\theta_d - \theta_M)$ となる。 $\theta_d = \theta_T + \alpha$ なので、(L99-4) 式の右辺は正しい。

α_{\max} は半径に対して一定なので, $\hat{V}_d/\cos\phi$ は ψ のみの関数となる. Lee et al. (1994) における VTD の導出に従い, $\hat{V}_d/\cos\phi$, V_T , V_R は有限級数でのフーリエ展開を用いて

$$\hat{V}_d(\psi)/\cos\phi = \sum_{n=0}^L (A_n \cos n\psi + B_n \sin n\psi), \quad (\text{L99-8})$$

$$V_T(\psi) = \sum_{n=0}^M (V_T C_n \cos n\psi + V_T S_n \sin n\psi), \quad (\text{L99-9})$$

$$V_R(\psi) = \sum_{n=0}^N (V_R C_n \cos n\psi + V_R S_n \sin n\psi), \quad (\text{L99-10})$$

と表現される. ここで $V_T C_n$ ($V_R C_n$), $V_T S_n$ ($V_R S_n$) は角波数 n (以降, 角波数を単に波数と呼ぶ) に対する V_T (V_R) のサインとコサイン成分の振幅である.

(L99-8), (L99-9), (L99-10) を (L99-7) に代入し, 以下の三角関数に関する公式

$$\begin{aligned} 2 \sin A \cos B &= \sin(A+B) + \sin(A-B), \\ 2 \cos A \cos B &= \cos(A+B) + \cos(A-B), \\ 2 \sin A \sin B &= \cos(A-B) - \cos(A+B), \end{aligned}$$

を用いることで, 以下の方程式が得られる:

$$\frac{\hat{V}_d}{\cos\phi} \approx \sum_{n=0}^L (A_n \cos n\psi + B_n \sin n\psi) \quad (\text{L99-11})$$

$$\begin{aligned} &= V_M \left[\cos(\theta_T - \theta_M) \left(\frac{1 - \cos\alpha_{\max}}{2} \cos 2\psi + \frac{1 + \cos\alpha_{\max}}{2} \right) - \sin(\theta_T - \theta_M) \sin\alpha_{\max} \sin\psi \right] \\ &\quad - V_T C_0 \sin\psi - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \{ V_T C_n [\sin(n+1)\psi + \sin(1-n)\psi] + V_T S_n [\cos(n-1)\psi - \cos(n+1)\psi] \} \\ &\quad + V_R C_0 \cos\psi + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \{ V_R C_n [\cos(n+1)\psi + \cos(n-1)\psi] + V_R S_n [\sin(n+1)\psi + \sin(n-1)\psi] \}. \end{aligned} \quad (\text{L99-12})$$

本論文では (L99-12) 以降の式で, 近似記号を等号に置き換えている. (L99-12) におけ

る $\cos n\psi$, $\sin n\psi$ に対応する係数を合わせると,

$$A_0 = \frac{1}{2} \{V_M \cos(\theta_T - \theta_M) (1 + \cos \alpha_{\max}) - V_T S_1 + V_R C_1\}, \quad (\text{L99-13})$$

$$A_1 = \frac{1}{2} (2V_R C_0 - V_T S_2 + V_R C_2), \quad (\text{L99-14})$$

$$B_1 = \frac{1}{2} [V_T C_2 - 2V_T C_0 - 2V_M \sin(\theta_T - \theta_M) \sin \alpha_{\max} + V_R S_2], \quad (\text{L99-15})$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \{V_M \cos(\theta_T - \theta_M) (1 - \cos \alpha_{\max}) - V_T S_3 + V_T S_1 + V_R C_3 + V_R C_1\}, \quad (\text{L99-16})$$

$$A_n (n \geq 3) = \frac{1}{2} [V_T S_{n-1} - V_T S_{n+1} + V_R C_{n+1} + V_R C_{n-1}], \quad (\text{L99-17})$$

$$B_n (n \geq 2) = \frac{1}{2} [V_T C_{n+1} - V_T C_{n-1} + V_R S_{n+1} + V_R S_{n-1}], \quad (\text{L99-18})$$

が得られる. 式 (L99-13)-(L99-18) は, 観測されたドップラー速度と, GBVTD リング上の接線方向および半径方向の風との間の一般的な表現である. $n = 0$ から L では $2L + 1$ 個の式があるが, $n = 1$ から $L - 1$ では $V_M, \theta_M, V_T C_0, V_R C_0, V_T C_n, V_T S_n, V_R C_n, V_R S_n$ の $4L$ 個の未知数がある. 式を検討すると, 同じ波数の接線風のサイン部分と放射風のサイン部分は似たような形をしており, 追加の観測をしないと分離できないことがわかる. したがって, これは過小決定問題であり, 一つのドップラー観測からすべての係数が一意に決まるわけではない. 実際, この過小決定された方程式群を閉じるには様々な方法がある. 1 つの可能な方法は, Lee et al. (1994) の議論に従えばよい. Lee et al. は, 非対称 V_R が対応する V_T よりもはるかに小さいと仮定した. これはすべての V_T の重み付け関数を 1 に, すべての非対称 V_R の重み付け関数を 0 に割り当てることに相当し, 未知数の数を $4L$ から $2L + 1$ に減らすことができる. (L99-13)-(L99-18) の項のうち, 非対称 V_R を含まないものだけが, 単純な熱帯低気圧モデルを適用した後も保持される.

L を 0 から 4 までに制限し^{*3}, 上の簡単な熱帯低気圧モデルを適用すると, 未知変数は

^{*3}恐らく M と N は波数 3 までしか考えていない. なぜなら, A_4, B_4 は S_5, C_5 と関係を持つが, 導出結果にはそれが含まれていないため. これが正しいかどうかはよくわからない.

9 に減少し, A_n , B_n に関して以下のように解くことができる^{*4}:

$$V_M \cos(\theta_T - \theta_M) = A_0 + A_2 + A_4 - V_R C_1 - V_R C_3, \quad (\text{L99-19})$$

$$V_T C_0 = -B_1 - B_3 - V_M \sin(\theta_T - \theta_M) \sin \alpha_{\max} + V_R S_2, \quad (\text{L99-20})$$

$$V_R C_0 = A_1 + A_3 - V_R C_2, \quad (\text{L99-21})$$

$$V_T S_1 = A_2 - A_0 + A_4 + (A_0 + A_2 + A_4 - V_R C_1 - V_R C_3) \cos \alpha_{\max} - V_R C_3, \quad (\text{L99-22})$$

$$V_T C_1 = -2(B_2 + B_4) + V_R S_1 + 2V_R S_3, \quad (\text{L99-23})$$

$$V_T S_2 = 2A_3 - V_R C_2, \quad (\text{L99-24})$$

$$V_T C_2 = -2B_3 + V_R S_2, \quad (\text{L99-25})$$

$$V_T S_3 = 2A_4 - V_R C_3, \quad (\text{L99-26})$$

$$V_T C_3 = -2B_4 + V_R S_3. \quad (\text{L99-27})$$

上記でのクロージャー仮定によるバイアスを記述するために, (右辺での V_R を含む) 無視された項も (L99-19)-(L99-27) では残されていることに注意する.

$V_M \cos(\theta_T - \theta_M)$ (以下, ビームに沿った V_M) と $V_M \sin(\theta_T - \theta_M)$ (以下, ビームに直交する V_M) は, OT に平行な V_M と垂直な V_M の成分であり, V_M と θ_M をさらに分離するには十分な情報がない. (L99-20) 式のビームに直交する V_M は未知であり, 平均接線風である $V_T C_0$ にエイリアスされる. この誤差は, $\theta_T - \theta_M = \pm\pi/2$ のときに最大となる. $V_M \sin \theta_M(z)$ は通常, 平均接線風 $V_T C_0$ よりはるかに小さいので, $V_T C_0$ の不確かさは, 移動速度の大きい, 弱い熱帯低気圧の場合を除いて小さくなるはずである. (L99-19)-(L99-25) を (L99-9), (L99-10) 式に代入すると, 渦の接線風 (波数 3 まで) と平均動径風 (波数 0) が得られる.

2.3 計算手続き

GBVTD 法の計算手続きは以下の 5 段階となる:

1. PPI から一定高度での PPI (CAPPI) に内挿する.
2. 低気圧中心を同定する.
3. CAPPI から低気圧中心を原点とする円筒座標 (ψ) にデータを内挿する.
4. 各半径と高度について (ψ 座標上で) GBVTD 解析を実行し, GBVTD 係数を得る.
5. 得られた GBVTD 係数から γ 座標に熱帯低気圧の風場を構築する.

^{*4}原文式はいくつか誤植がある. V_R の非軸対称成分以外のクリティカルと思われる誤植は (L99-20) 式右辺の B_3 の符号が逆.

ステップ 1 と 3 では, 双線形補間法 (Mohr et al. 1986) が用いられる. 低気圧中心の定義には, 反射強度, 最低気圧, 循環など様々な方法がある. 本研究では, 低気圧中心を循環中心と定義し, その位置は既知であるとする. 実際どのように客観的に低気圧中心を特定するかは本稿の範囲外であり, 第 2 部で議論することとする. 異なる高度の CAPPI データを用いて GBVTD 解析を行うと, 低気圧渦の 3 次元構造を構築することができる.

3 解析的なデータセットの構築

GBVTD 法の評価に利用可能な, いくつかの地上ドップラーレーダーによる熱帯低気圧のデータセットがある. しかし, 実データを用いると, 中心位置の不確かさ, 未知である鉛直速度や終末速度によるバイアス, 対象の偏在など, GBVTD 法の性能とは直接関係のない要素も含まれる. 最も重要なことは, 実際のデータセットでは真の風場が不明であるということである. テストに実データセットではなく解析データセットを用いたのは, 以下の理由による: 1) V_T , V_R , V_M の任意の組み合わせの風場に対して, GBVTD 法の性能を評価することができる. 2) GBVTD の性能に対する実データの影響を解析的なデータセットで分離・再現することができる.

解析的なデータセットは海面高度 1 高度での理想的なランキン複合渦に基づく. その軸対称な V_T は

$$V_T = V_{\max} \left(\frac{R}{R_{\max}} \right), \quad R \leq R_{\max}, \quad (\text{L99-28})$$

$$V_T = V_{\max} \left(\frac{R_{\max}}{R} \right), \quad R > R_{\max} \quad (\text{L99-29})$$

として構築される. ここで V_{\max} と R_{\max} はそれぞれ 50 m s^{-1} と 20 km に設定される. 実際の熱帯低気圧では, V_T のプロファイルは与えられたランキン渦よりも R_{\max} の外側ではるかにゆっくりと落ちていくのが普通である. 軸対称の V_R は流出 (流入) が R_{\max} の内側 (外側) にあるように構成され, V_R は低気圧中心, R_{\max} , 無限遠でゼロになる. このパターンは Jorgensen (1984a,b) で記録されたものと同様である. ゆえに,

$$V_R = C_1 [(R_{\max} - R) R]^{1/2}, \quad R \leq R_{\max}, \quad (\text{L99-30})$$

$$V_R = -C_2 (R - R_{\max})^{1/2} R_{\max}/R, \quad R > R_{\max}. \quad (\text{L99-31})$$

ここで, C_1 と C_2 はスケールファクターでそれぞれ 0.1 s^{-1} と $3 \text{ m}^{1/2} \text{ s}^{-1}$ とすると, V_R は妥当な範囲に収まる. 非対称の低気圧循環は, 基本的な軸対称の循環により高い波数を重ね合わせることで構築される. 各波数の振幅は 10 m s^{-1} とし, 位相は 0 から $2\pi/n$ (n は波数) までとした. ここで V_M は 10 m s^{-1} で一定の大きさを持ち, θ_M は 0 から 2π まで変化する. これらの設定で理想化された熱帯低気圧には, 単純なランキン複合渦と, 非対称な V_T , V_R , V_M の組み合わせが含まれる.

通常、レーダーからの距離が長くなると、レーダービームが広がるため、方位角方向の分解能が低下する。しかし、本論文ではレーダービームが限りなく狭いと考え、すべての距離でレーダー分解能が完璧になるようにする。またシミュレーションモデルでは、レーダーの測定値にノイズがないことを前提とする。この仮想的なドップラーレーダーは、有効距離が 120 km で、速度エイリアシングを考慮しない高い有効ドップラー速度範囲を持つ。このドップラーレーダーは、熱帯低気圧中心 (0, 60) から 60 km 南の格子原点 (0, 0) に設置されている。1) 軸対称低気圧のドップラー速度パターンは $\sin \alpha_{\max}$ にのみ依存し、0 から 1 の間の $\sin \alpha_{\max}$ は固定 R_T に対して異なる R でシミュレーションされ、2) 非対称低気圧のドップラー速度パターンは θ_T と θ_M にも依存し、非対称成分の位相角と θ_M を変化させることで、両方の角度依存性をシミュレーションすることができる。したがって、この単純化は結果の一般性を低下させるものではない。

4 解析対象の熱帯低気圧のドップラー速度パターンの特徴

本節ではいくつかの解析的な熱帯低気圧のドップラー速度パターンの特徴について説明する。これらの理想的なドップラー速度パターンは、実際の熱帯低気圧を解釈する際に有用な多くの指針を示している。ここでは、一般的に観測される 5 つの流れ場に焦点を当てて議論する。1) ランキン複合渦、2) 軸対称な V_T に V_M を加えた渦、3) 軸対称 V_T に波数 1 成分を加えた渦、4) 軸対称 V_T に波数 2 成分を加えた渦、5) 軸対称 V_T に波数 3 成分を加えた渦である。非対称な動径方向の流れは、 90° の位相差を持つ非対称な接線方向の流れと同じ特徴を持つため、議論には含めない。これらの影響については、6 節で定性的に議論する。

4.1 ランキン複合渦

ランキン複合渦の流れ場とその振幅、およびドップラー速度特性を図 1.4.3 に示す。軸対称の V_T のドップラー速度パターン (図 1.4.3e) では、渦の奥側でドップラー速度パターンが開くなど、WB で示された特徴が確認できる。なおドップラー速度ゼロ線 (太い実線) は、熱帯低気圧の中心を (0, 60) で通る直線となっている。図 1.4.3c の軸対称 V_T のドップラー速度パターンは、以降の小節で非対称低気圧のドップラー速度パターンと比較する際の「基本パターン」となる。

現実的な軸対称 V_R のドップラー速度パターン (図 1.4.3d) は、WB で示された単純な放射状の流出パターンよりも複雑である。低気圧中心を中心としたドップラー速度の太いゼロ円は、 R_{\max} におけるインフローからアウトフローへの移行を表す。レーダーと低気圧の中心を通るもう一つのドップラー速度のゼロ円は、各レーダービームに沿った V_R のゼロ投影を表す。

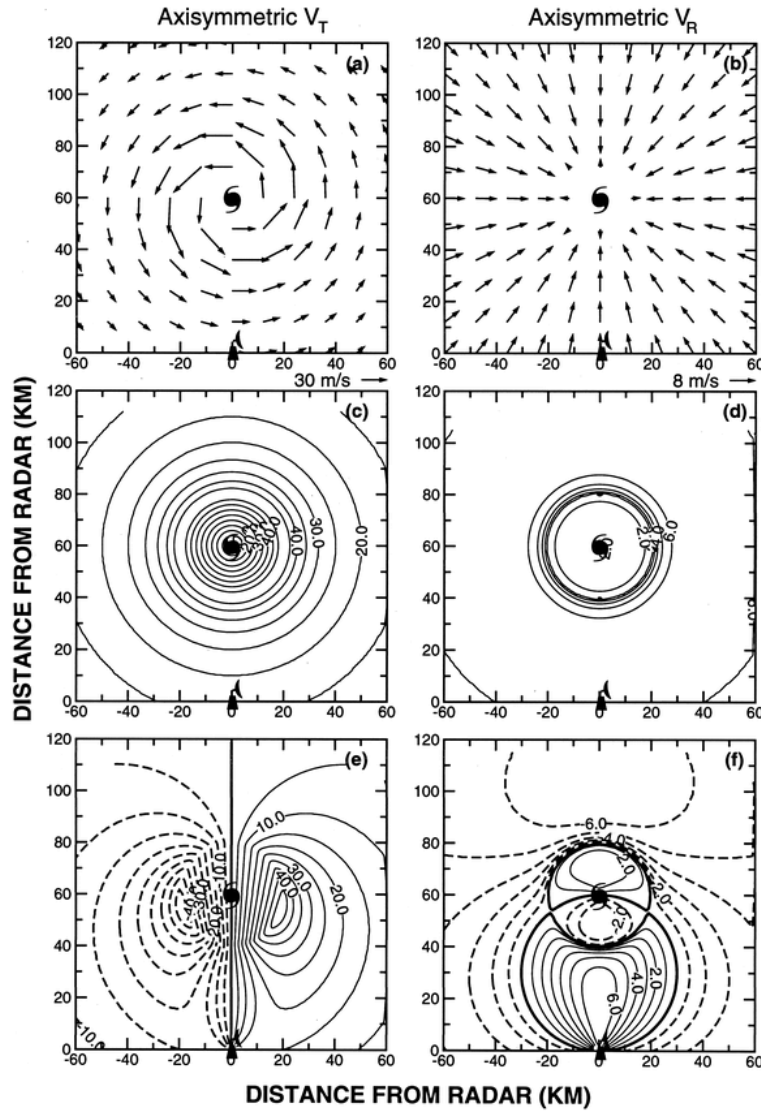


図 1.4.3: (a), (b) 軸対称の V_T と V_R の流れ場, (c), (d) はその振幅, (e), (f) は対応するドップラー速度パターン. 正 (負) のドップラー速度は, 実線 (破線) で輪郭を描いている. 太い実線はドップラー速度ゼロの線を表す. ハリケーンとレーダーの記号はそれぞれ真の低気圧の中心とレーダーの位置を示す.

軸対称の V_T と V_R (図 1.4.3a, 1.4.3b) を組み合わせると, 図 1.4.4 のようなドップラー速度パターンが得られる. 双極子型の速度パターンは, WB (図 3) や GBVTD の概念で示されているように, R_{\max} の外側 (内側) で時計回り (反時計回り) に回転している. ドップラー速度のゼロ線は, 時計回り (R_{\max} の外側の流入領域) と反時計回り (R_{\max} の内側の流出領域) に膨らんだ低気圧の中心を通る. 時計回りの膨らみから反時計回りの膨らみへの転換点は, インフローとアウトフローが衝突する R_{\max} の位置にある. このドップラー速度のゼロ線の特徴を利用して, 低仰角の PPI 画像上で平均的なアウトフロー・インフロー

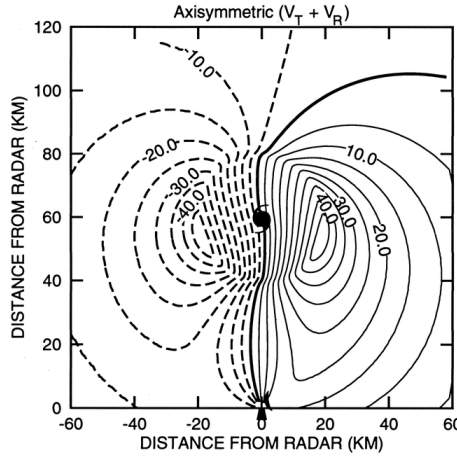


図 1.4.4: 軸対称 V_T と V_R のドップラー速度パターン.

パターンや, 軸対称の最大収束/発散の位置をリアルタイムで特定することができる.

4.2 V_M の効果

この基本パターン (図 1.4.3c) に 10 m s^{-1} の北風 V_M を重ねると, 流れ場は変化するが (図 1.4.5a), 全体のドップラー速度パターン (図 1.4.5b) は変わらない (Brown and Wood 1991 など). ドップラー速度のゼロ線は, ハリケーンマークで示された真の低気圧中心 (0, 60) の右側 (図 1.4.3b 参照) に曲がって移動しているが, 見かけの中心を通過している. 直線的なドップラー速度の線は, ビームに沿った V_M の大きさを持つ真の渦中心を通過する. 南風の V_M (図略) の風場とドップラー速度パターンは, $x = 0$ の線を挟んで図 1.4.5a, 1.4.5b の鏡像のようになる.

図 1.4.5c (図 1.4.5e) は, 東風 (西風) の V_M による風を示す. ここでは非対称な流れ場が北風 (南風) の V_M と 90° ずれており, 見かけの中心が真の循環中心 (0, 60) から南 (北) にずれている. なお V_M がレーダーの視線方向に垂直な場合, ドップラー速度のゼロ線は真の循環中心を通る直線となる.

直感に反して, 図 1.4.5d と図 1.4.5f のドップラー速度パターンはお互いに鏡像ではない. PPI スキャンではファンビームを使用しているため, ビームに直交する V_M はビーム角の関数としてドップラー速度に影響を与える. 主な違いは, ドップラー速度の双極子のピークの大きさである. 西風の V_M は, 低気圧中心の南側 (北側) の基本的な流れを強め (弱め), 東風の V_M はその逆となる. V_M が低気圧中心を通るビームに対して平行でも垂直でもない場合 (図略), ドップラー速度パターンはビームに沿った V_M とビームに直交する V_M に応じて, 上述の特性が混在することになる.

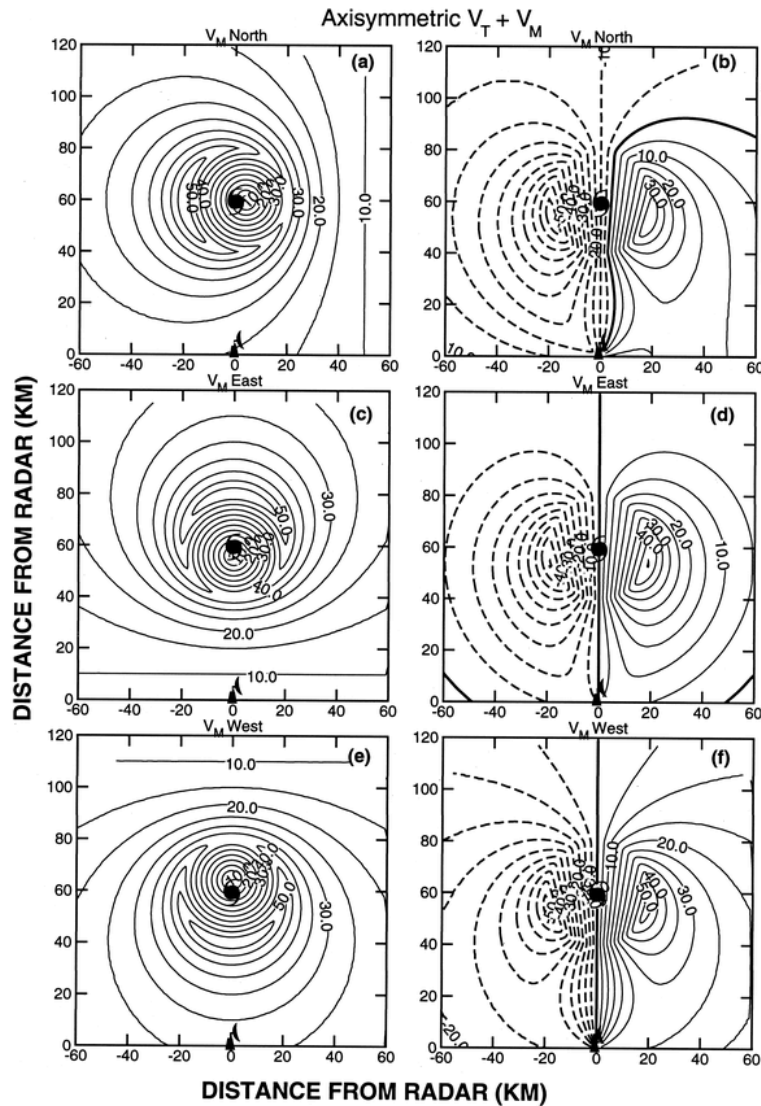


図 1.4.5: (a), (b) は北風の V_M , (c), (d) は東風の V_M , (e), (f) は西風の V_M の場合における $V_T + V_M$ の軸対称成分の大きさ (左) とドップラー速度パターン (右).

まとめると、ビームに沿った V_M の影響は本質的にドップラー速度のゼロ線の特徴 (例えば、見かけ上の中心の位置) に影響を与え、ビームに直交する V_M は主にドップラー速度の双極子の大きさに影響を与える。ビームに沿った V_M がレーダーに近づく (遠ざかる) と、ドップラー速度のゼロ線は低気圧中心から遠い側で時計回り (反時計回り) にカーブする。

4.3 波数 1 の効果

図 1.4.6 は方位 90° , 180° , 270° に位置する波数 1 成分を基本パターンの流れに重ね合わせた例である。波数 1 のピーク風の位相角が R_{\max} に沿って回転しても、ドップラー速度のゼロ線は直線のままで、見かけ上の中心は真の渦中心 $(0, 60)$ と一致している。波数 1 が 90° と 270° にある場合 (図 1.4.6b, 1.4.6f), ドップラー速度パターンは基本パターン (図 1.4.3b) と同様に左右対称となるが、ドップラー速度のピーク of 双極子の位置が異なる。波数 1 が 90° (270°) の位置にあると、ドップラー速度のピーク of 双極子の位置が基本パターンのものより北 (南) にずれる。

波数 1 が 180° に位置する場合 (図 1.4.6d), 正 (負) のピーク風に向かう勾配がきつくなる (ゆるくなる)。波数 1 が 0° に位置するときのドップラー速度パターンは、図 1.4.6d の鏡像となる (図略)。

北風の平均風による風パターン (図 1.4.5a) と 180° に配置された波数 1 による風パターン (図 1.4.6c) は、見かけの中心の位置とビームに直交する方向の速度勾配を除いてほぼ同じである。このような微妙な違いは、風速場では判別しにくいですが、ドップラー速度のゼロ線やビームに直交する方向のドップラー速度勾配の挙動には、対応するドップラー速度パターンの違いが表れている (図 1.4.5b, 1.4.6d)。これらのドップラー速度パターンの違いは、循環中心だけでなく、見かけ上の波数 1 の構造的非対称性の原因を特定するための重要な情報となるため、図 1.4.5 と図 1.4.6 で比較することが重要である。

4.4 波数 2 の効果

図 1.4.7 は基本パターンに波数 2 成分を重ねた例で、 90° (270°), 135° (315°), 180° (0°) に 2 つのピーク振幅がある。全体の風速分布 (図 1.4.7 左) は楕円形となる。長軸 (短軸) は波数 2 成分の山 (谷) に沿う。見かけ上の循環中心は真の中心 $(0, 60)$ と重なっているが (図 1.4.7a, 1.4.7c, 1.4.7e), ドップラー速度のゼロ線は真の低気圧中心をまっすぐに通る。波数 2 が 90° (270°) のとき、南風の最大値は双極子をレーダー側に引き寄せ、北風の最大値は双極子を低気圧中心の反対側に伸ばす (例: 図 1.4.7b)。波数 2 が 0° (180°) のときのドップラー速度パターン (図 1.4.7f) は、双極子が水平方向に伸びていることを除けば、基本的な流れ (図 1.4.3b) と同様である (図 7b)。この双極子を結ぶ弦は、先に示した 2 つの対称パターンを除き、すべての波数 2 の位相角でドップラー速度のゼロ線に垂直ではない (例えば、図 1.4.7d)。この特徴は波数 2 の流れを軸対称の流れや波数 1 の流れと異なる特徴である。

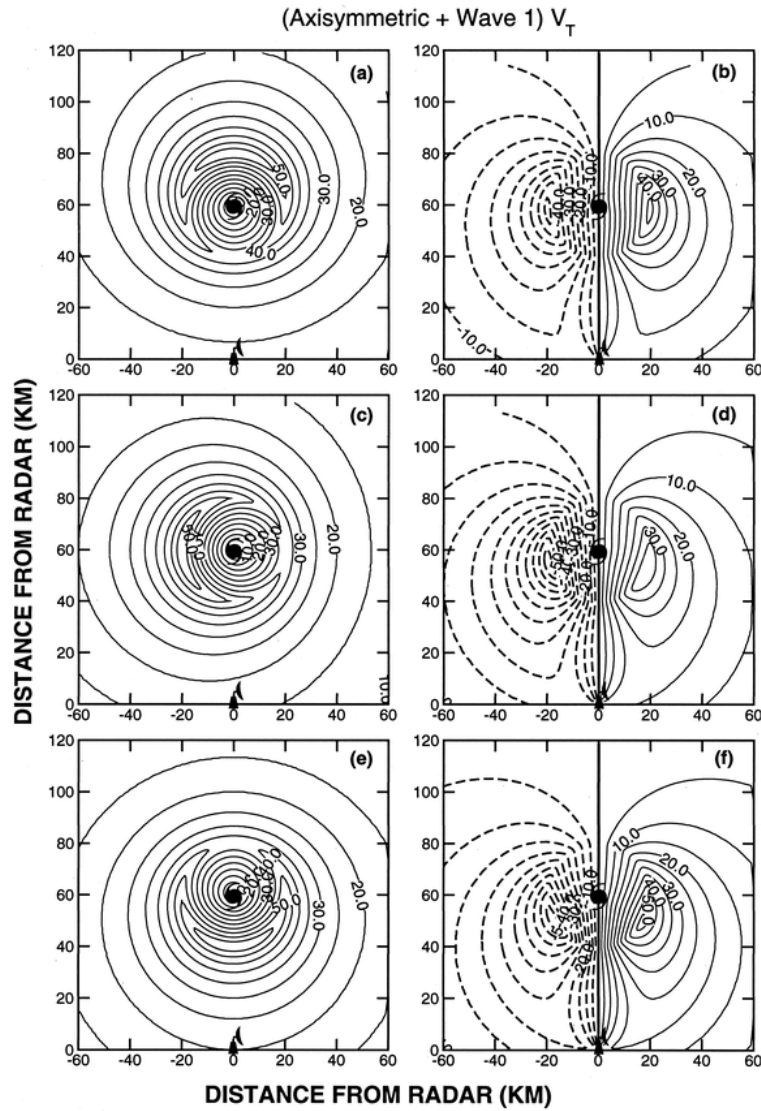


図 1.4.6: (a), (b) は 90° , (c), (d) は 180° , (e), (f) は 270° における軸対称の V_T と波数 1 成分の V_T の大きさ (左) とドップラー速度パターン (右).

4.5 波数 3 の効果

90° (210° , 330°), 150° (270° , 30°), 170° (290° , 50°) の基本パターンに波数 3 を重ね合わせた例を図 1.4.8 に示す. 見かけ上の中心は, 直線的なドップラー速度のゼロ線が通過する真の渦中心 (0, 60) に配置されている. 図 1.4.8b の対称的なドップラー速度パターンは図 1.4.7f と似ているが, これらのパターンは図 1.4.8d と図 1.4.7b ではかなり異なっている. 一般的に, ドップラー速度パターンは, 波数 3 の流れの非対称性により, 双極子の片側で伸長を示している (図 1.4.8f). また波数 3 成分の位相が進むにつれて, ドップラー速度の横方向の勾配が変化する.

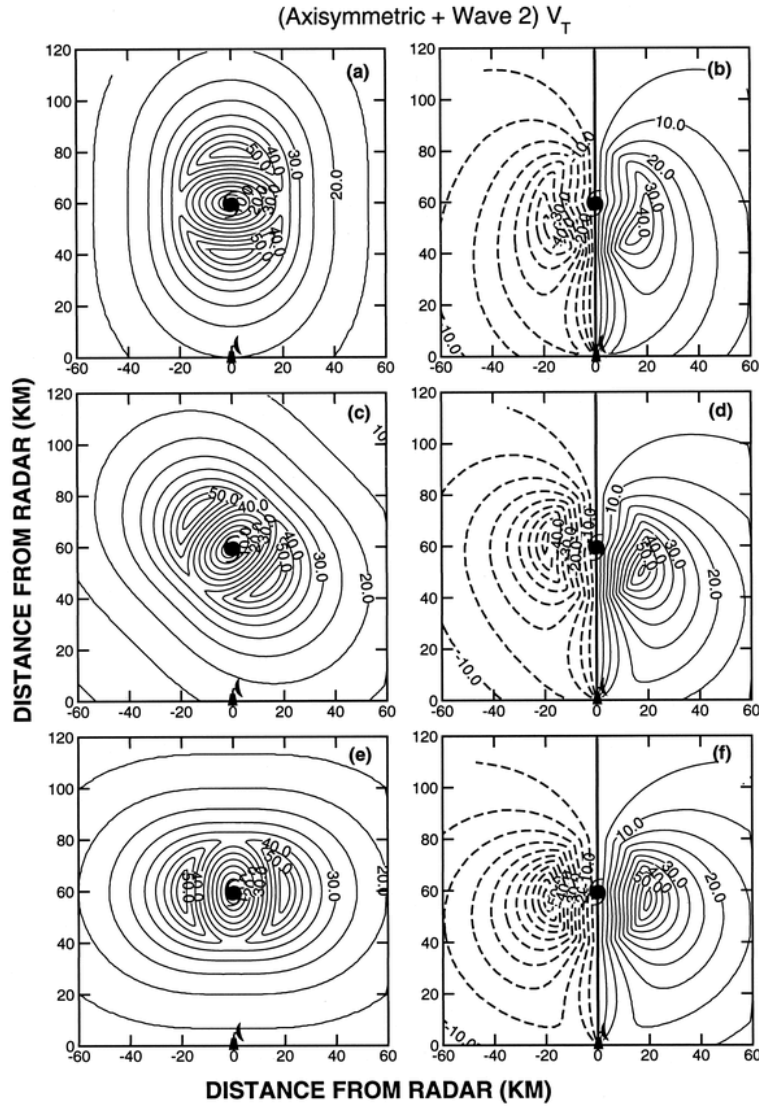


図 1.4.7: (a), (b) は 90° , (c), (d) は 135° , (e), (f) は 180° における軸対称の V_T と波数 2 成分の V_T の大きさ (左) とドップラー速度パターン (右).

5 解析的な熱帯低気圧上で GBVTD リトリーブされた風

前節で示したドップラー速度パターンは、低高度の PPI スキャンから熱帯低気圧の構造を識別するための定性的な指針となる。各非対称成分はそのドップラー速度パターンに異なる特徴を持っているが、異なる非対称流場の組み合わせから生じる類似のドップラー速度パターンにより、これらのドップラー速度パターンのみから熱帯低気圧の構造を識別することは困難である。本節では、これらの解析対象である熱帯低気圧から GBVTD によってリトリーブされた循環を示し、GBVTD 方がドップラー速度パターンから熱帯低気圧の主要な循環をロバストに抽出できることを示す。GBVTD 解析は 半径 1 km から 60 km

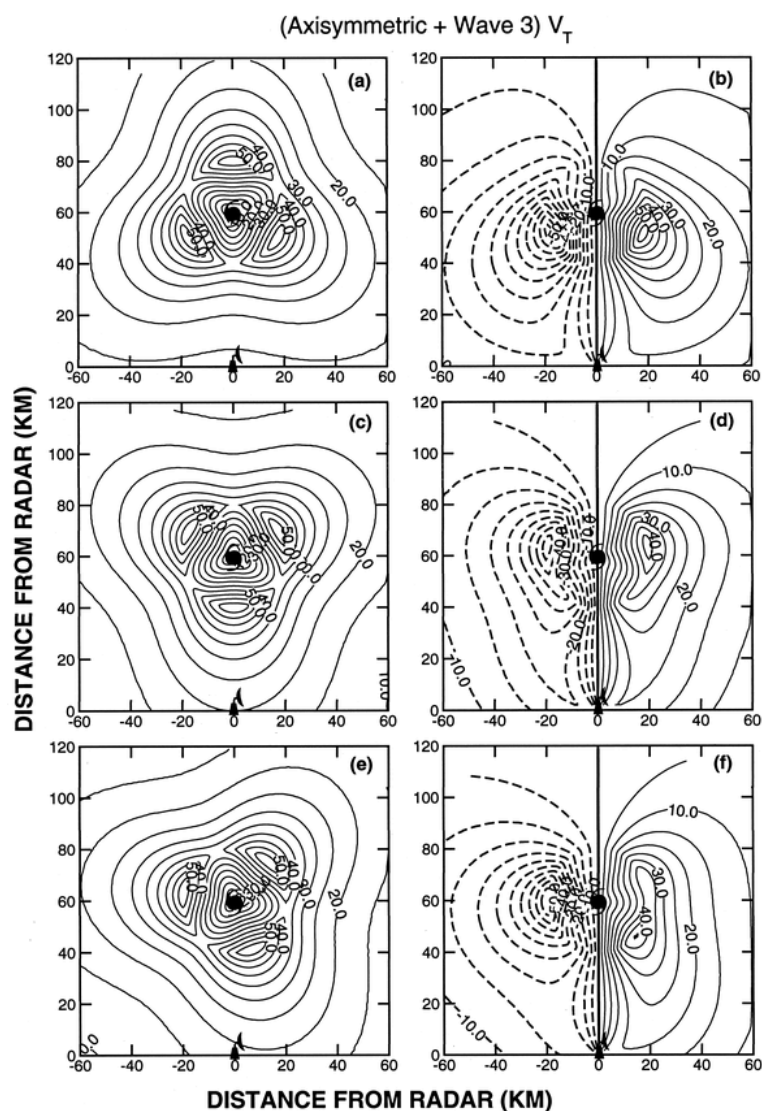


図 1.4.8: (a), (b) は 90° , (c), (d) は 150° , (e), (f) は 170° における軸対称の V_T と波数 3 成分の V_T の大きさ (左) とドップラー速度パターン (右).

まで, 半径 1 km 刻みで行われ, データは一定半径のリング上の 90 点に, 方位角 4° 刻みで補間される. 誤差解析を行い, GBVTD で得られた風と解析で得られた風との間のバイアスを明らかにする.

5.1 ランキン複合渦

図 1.4.4 のドップラー流速から GBVTD で推定した V_T (図 1.5.9a), V_R (図 1.5.9b) は, 図 1.4.3a, 1.4.3c の解析的な風の V_T , V_R と比べてほぼ一致している. GBVTD でリトリー

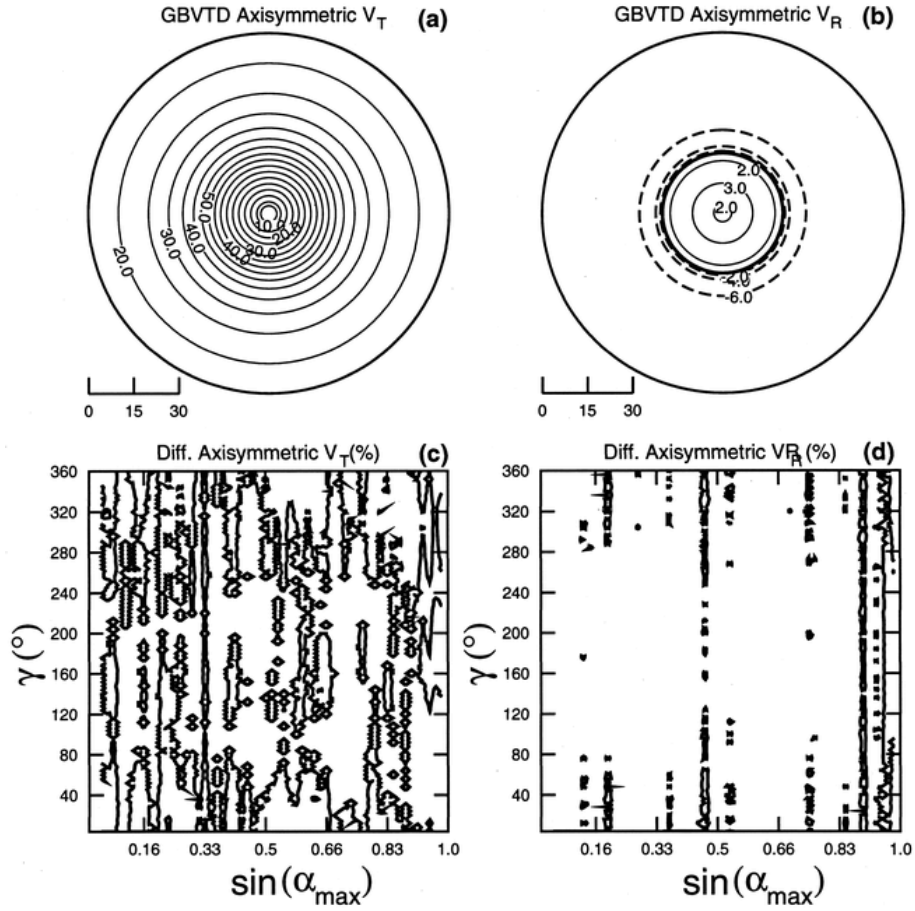


図 1.5.9: GBVTD でリトリブされた (a) V_T の軸対称成分, (b) V_R の軸対称成分, (c) V_T のリトリブされた成分の誤差 (%), (d) V_R のリトリブされた成分の誤差 (%). 太い実線はゼロ線. 正 (負) の等値線は実線 (破線). (c) と (d) の等値線間隔は 1%.

ブした風 (V_T と V_R) と解析的な風の偏り (%) は, 熱帯低気圧周辺のすべての $\sin \alpha_{\max}$ と方位角において 2% 以下である (図 1.5.9c, 1.5.9d). このようにほぼ完璧な結果が得られたのは, V_T と V_R の軸対称の循環が支配方程式で明示的に表現され, GBVTD の概念図で示されているからである (図 1.2.2).

5.2 V_M の効果

V_M が北風 (ビームに沿った方向) の場合, GBVTD でリトリブされた風 (図 1.5.10a) は対応する解析風 (図 1.4.5a) を再現する. $\sin \alpha_{\max}$ が大きい場合, 解析場の風 (図 1.4.5a) では 10 m s^{-1} の直線的な等高線 ($x = 50 \text{ km}$ 地点) が, リトリブされた風 (図 1.5.10a) では曲線的な等高線になるなど, 若干の歪みが見られる. V_M にビームに直交する成分 (この例では東風または西風) がある場合, リトリブされた風のバイアスが明らかであり,

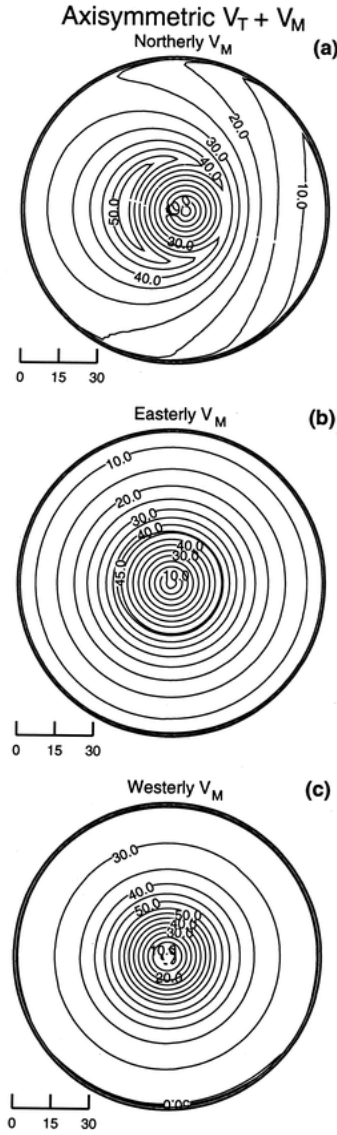


図 1.5.10: V_T の軸対称成分に V_M を加えた場合の GBVTD でリトリブされた風. (a) は北風 V_M , (b) は東風 V_M , (c) は西風 V_M を表す.

GBVTD では基本的なパターンのみが推定されるが, V_M によって生じる非対称性は全くリトリブできない (図 1.5.10b, 1.5.10c と図 1.4.5c, 1.4.5e を比較). 図 1.5.10b, c でリトリブされた渦と図 1.5.9c の基本渦との違いは, V_M のビームに直交する成分がリトリブされた V_T にエイリアスしていることを示唆する.

図 1.5.11a は, $\sin \alpha_{\max}$ と V_M の角度が異なる場合, V_M の割合としてリトリブされた V_T の系統的なバイアスを示している. V_M のビームに直交する成分が存在する場合 (θ_M が 0° と 180° 以外) には必ずバイアスが存在し, その誤差は $\theta_M = 90^\circ$ と 270° で最大となる. また, $\sin \alpha_{\max}$ が大きくなると, ビームに直交する成分のより多くが, リトリブされ

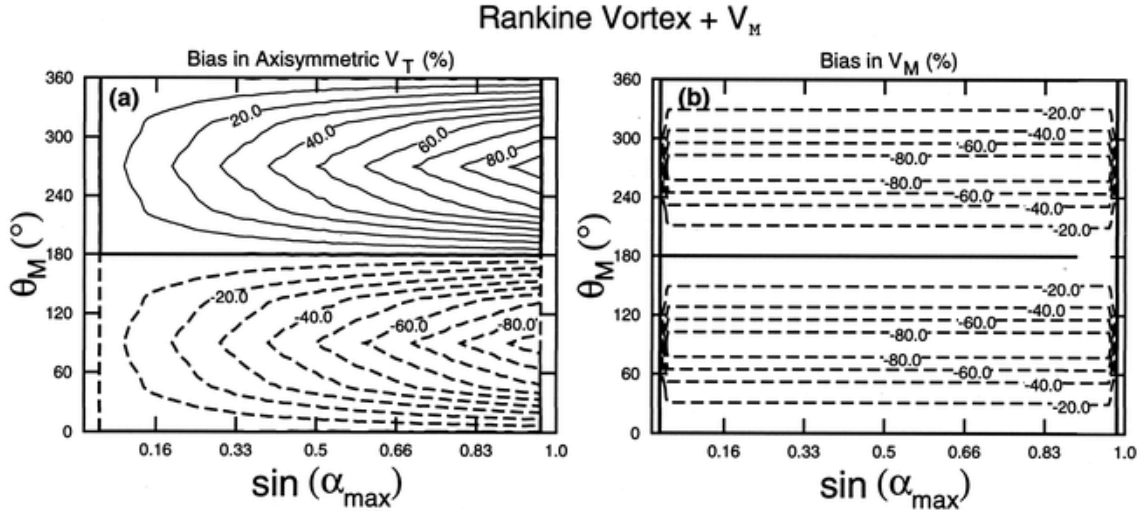


図 1.5.11: $\sin \alpha_{\max}$ および θ_M の関数としての V_M の大きさに対する GBVTD でリトリートされた風のバイアス (%): (a) 軸対称な V_T , および (b) V_M .

た軸対称 V_T にエイリアスされる. このような特性は, (L99-01) 式からも推測できる. これらの特性は, (L99-19), (L99-20) 式からも結論付けられる. これらのバイアスは, V_M の振幅と方向に依存する.

5.3 基本パターン + 波数 1

基本パターンにいくつか位相を変えて波数 1 の V_T を加えた場合に対する GBVTD でリトリートされた風を図 1.5.12 に示す. V_M による見かけ上の波数 1 の非対称性とは異なり, 波数 1 の位相角に関わらず真の波数 1 の非対称性が GBVTD によって得られる (図 1.5.12 と図 1.4.6 の比較). 驚くべきことに, 位相角 90° (図 1.5.12a) および 270° (図 1.5.12c) での GBVTD リトリートされた波数 1 構造は, ドップラー速度パターンが軸対称渦の特徴を示す解析場の風 (図 1.4.6a および 1.4.6e) と比較して, 良好な結果が得られた. この 2 つのケースは, ドップラーレーダーではピークの振幅を直接観測できないため (図 1.4.6b, 1.4.6f) 非常に困難である. そのため, ドップラー速度パターン (図 1.4.6b) をもとに低気圧の渦構造を予測すると, 風のピーク位置がずれてしまうだけでなく, その強さも過小評価される. しかし, GBVTD は波数 1 の構造を風のピークを直接観測するのではなく, 観測されたドップラー速度の傾向からリトリートする.

GBVTD でリトリートされた風速場には波数 1 構造の特徴が保たれているが, いくつかの歪みが存在していることがわかる. これらの歪みは主に, 非線形 (ψ) 座標系で最小二乗法によるフィッティングを行ったことによるものである. このような状況下での系統的なバイアスを評価するために, 再構成された風速場を方位角 (γ) 領域に分解し, 解析的な風

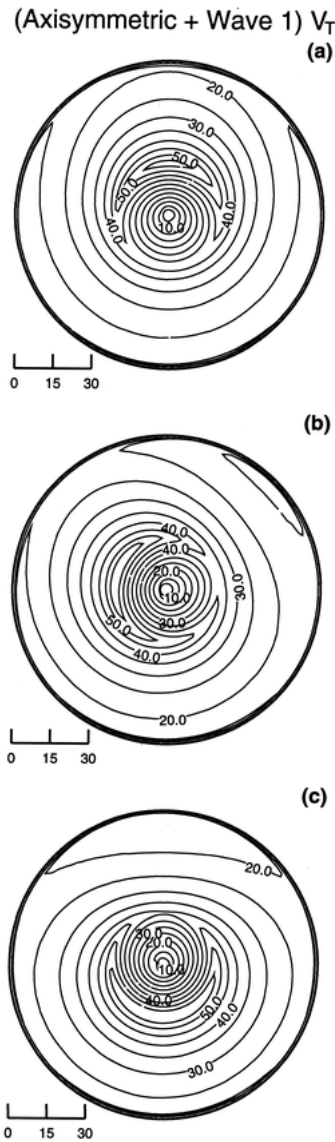


図 1.5.12: (a) 90° , (b) 180° , (c) 270° における軸対称の $V_T + V_T$ の波数 1 成分の GBVTD リトリブされた風.

速場と比較した. $\sin \alpha_{\max}$ と波数 1 の位相 (γ) の関数として, リトリブされた軸対称の V_T のバイアスを図 1.5.13a にまとめた. バイアスが対称なので, 位相角 90° から 270° までの領域の半分のみを示す.

軸対称な V_T は, 波数 1 のピークが低気圧中心の北 (南) に位置する場合に過大評価 (過小評価) され, $\sin \alpha_{\max} = 1$ の場合に最大の誤差 (20%) が発生する. GBVTD 法は波数 1 の振幅を常に過小評価する. 軸対称 V_T の偏りとは対照的に, 波数 1 の位相角が 0° と 180° の時に波数 1 の振幅の最大のバイアス (図 1.5.13b) が発生し, $\sin \alpha_{\max} = 1$ の時には 40% を超える誤差が発生する (例えば, GBVTD リングがレーダーを通過する場合). 波数

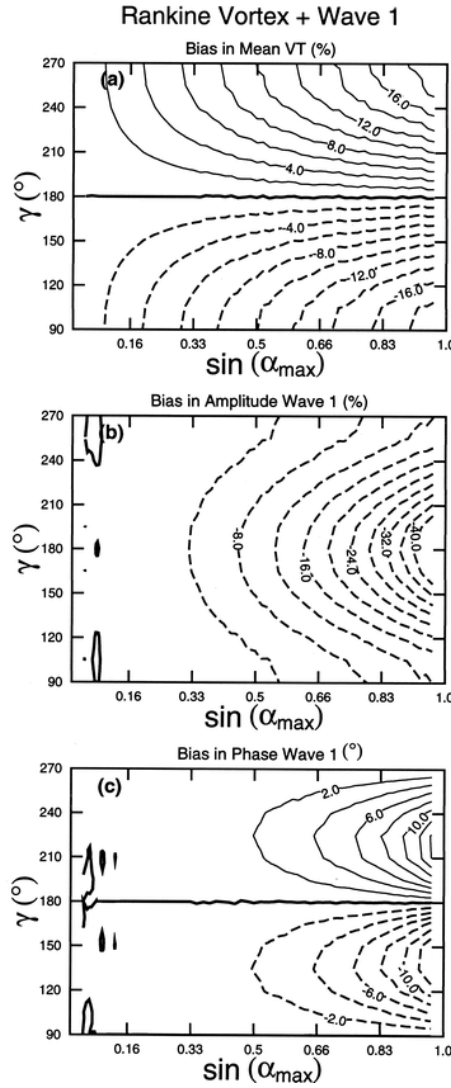


図 1.5.13: $\sin \alpha_{\max}$ および θ_M の関数としての各渦の解析的な値に対する GBVTD でリトリブされた風のバイアス (%): (a) 軸対称な V_T , (b) 波数 1 の振幅, (c) 波数 1 の位相.

1 の位相のバイアスは, 中心から南 (北) に向かって南 (北) にシフトし, 位相角 45° , 135° , 225° , 315° にピークがある. 全体的な位相のバイアスは小さく, $\sin \alpha_{\max} \rightarrow 1$ ときに最大のバイアスは 12° 付近にある. 以上から, 波数 1 の振幅のバイアスは, 波数 1 の軸対称の V_T と位相の偏りよりも悪いことがわかる. 20% 程度の偏りを許容できるのであれば, $\sin \alpha_{\max} < 0.7$ の場合, GBVTD 法は波数 1 の非対称熱帯低気圧渦を合理的に取得することができる.

5.4 基本パターン + 波数 2

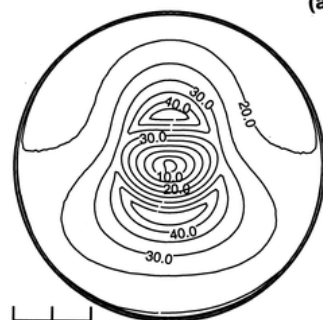
波数 2 の構造はすべてのケースでよく再現される (図 1.5.14 および 1.4.7 参照). $\sin \alpha_{\max} < 0.7$ の場合, 楕円形の輪郭がよく保たれる. しかし, R_{\max} の外側では明らかに歪みが見られる. レーダーに近いところでリトリブされた最大風は, レーダーから離れたところでリトリブされた最大風よりも強く, 細長くなっている (例えば, 図 1.5.14a, 1.5.14b). また解析場の風速では波数 2 の成分しかなかったものが, エイリアシングにより波数 1, 3 のリトリブされた接線風が発生している. GBVTD 法では, 楕円の長軸に沿って波数 1 が人工的に生成され (図 1.5.14), ピーク (谷) がレーダーに近い位置 (離れた位置) にあることがわかる. 波数 2 の成分だけを比較すると, 解析場の成分に比べてリトリブされた成分には位相, 振幅ともに誤差がある. しかし, リトリブされた (エイリアシングによる) 波数 1 と波数 3 が, リトリブされた波数 2 のバイアスのほとんどを補っており, もっともらしい全風速が得られている.

5.5 基本パターン + 波数 3

図 1.5.15 は, 異なる位相角における軸対称および波数 3 の V_T の GBVTD による風を示したものである. 波数 3 の構造は R_{\max} の内側でよく再現されている (例えば, $\sin \alpha_{\max} < 0.33$). 波数 3 のピーク振幅は低気圧の反対側で大きく減少する. しかし, 風のピーク位置は解析結果とよく一致している (図 1.4.8 および 1.5.15). R_{\max} の外側では, 波数 2 のパターンしか見られない. 結果として, $\sin \alpha_{\max} > 0.33$ 以上では波数 3 の限られた定量的な情報しか得られない.

6 議論

理想化された熱帯低気圧において, より高波数の接線風および動径風が存在する場合, 各シナリオにおける V_T の誤差を系統的に評価することは困難である. (L99-19)-(L99-26) を見ると, 高波数の動径風は異なる波数の波の非線形な相互作用により, 接線風の振幅と位相の両方に影響を与え, 他の波数にも影響を与える. 各波数において, V_R/V_T の比が大きくなると, GBVTD でリトリブした V_T の絶対誤差は大きくなる (図略). $V_R/V_T = 0$ の場合はエイリアシングエラーはない. 波数 1 の V_T と V_R の振幅がともに 5 m s^{-1} と等しい場合 (例えば, Roux and Marks 1996), 波数 1 の V_T と V_R の相対的な位相に応じて, GBVTD でリトリブされた V_T の波数 1 の振幅は 0 から 10 m s^{-1} , 位相は $\pm 90^\circ$ の間で変化する. 同様の結果は, より高波数にも拡張できる. V_T と V_R の振幅が等しい場合, 振幅のエイリアシング特性は波数 1 の場合と同じであるが, 位相のエイリアシングは, 波数 n に対して円の周りに n 回繰り返されるため, $\pm 90^\circ$ から $\pm 90/n^\circ$ に減少する. 波数 1 の V_R の振幅が V_T より大きくなると, GBVTD 法の仮定が崩れ, 位相の偏りが $\pm 180^\circ$ と大きくなる可能性がある.

(Axisymmetric + Wave 2) V_T
(a)

(b)



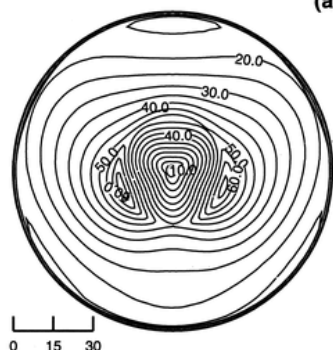
(c)



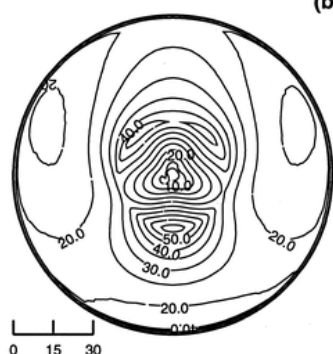
図 1.5.14: (a) 90° , (b) 135° , (c) 180° における軸対称の $V_T + V_T$ の波数 2 成分の GBVTD リトリブされた風.

7 結論

本論文の第 1 部では, 熱帯低気圧の研究やナウキャストに地上のシングルドップラーレーダーデータを使用する際の 2 つの重要な点を述べる. 1) 非対称熱帯低気圧は軸対称熱帯低気圧よりも複雑なドップラー速度パターンを持ち, これらのパターンから渦の質的な構造を特定することができる. 2) GBVTD 法を導入することで, 軸対称熱帯低気圧から波数 3 の非対称熱帯低気圧までの渦構造をロバストに推定できることがわかった.

(Axisymmetric + Wave 3) V_T
(a)

(b)



(c)



図 1.5.15: (a) 90° , (b) 150° , (c) 170° における軸対称の $V_T + V_T$ の波数 3 成分の GBVTD リトリブされた風.

本論文でまとめたドップラー速度パターンにより, シングルドップラーレーダーデータを用いて, 軸対称から非対称熱帯低気圧までの渦構造を定性的に識別できる範囲が広がった. これらの非対称熱帯低気圧の基本的なドップラー速度パターンは, 予報官がドップラー速度データから低気圧の基本的な情報をリアルタイムで抽出することができる有用なデータベースを形成する. これらの結果は非対称低気圧のドップラー速度パターンが, WB に記録されている軸対称低気圧のものとは大きく異なることを示す. ドップラー速度のゼロ線は, 沿線平均流 (V_M) が存在する場合を除き, すべてのケースで真の低気圧中心を通過しており, その形状は低気圧の一般的な構造の重要な指標となる. またドップラー速度の

ゼロ線が曲がるのは、軸対称の V_R とビームに沿った方向の V_M が存在する場合のみである。パターンの違いは微妙であるが、ドップラー速度のゼロ線輪郭の特徴を調べることで区別できる。

V_M による見かけ上の波数 1 の非対称と真の波数 1 の非対称は、似たような風パターンになる。しかし、ドップラー速度のゼロ線と低気圧中心を横切るビームに直交する方向のドップラー速度勾配の特性を調べることで、これらを区別できる。波数 2, 3 のドップラー速度パターンは、基本パターンや波数 1 のパターンとは全く異なり、容易に識別できる。非対称 V_T の存在は、ビームに直交する方向のドップラー速度勾配を変化させるだけで、ドップラー速度のゼロ線は直線のまま、真の低気圧中心を通過する。

GBVTD 法は、シングルドップラー速度パターンから低気圧の一次循環を推定する客観的な手法である。GBVTD 法では最小二乗法を用いて、低気圧中心から一定の半径を持つリング上のドップラー速度に、低気圧の一次循環をフィットさせる。その結果、半径と高度ごとにビームに沿った方向の V_M 、軸対称の V_R 、 V_T を求めることができる。非対称な動径風とビームに直交する方向の V_M は分解されず、接線風とビームに沿った方向の V_M にエイリアスされる。これらの定量的な渦構造は、パターン認識法では取得できない。

GBVTD 法は本研究でテストしたほぼすべてのケースで、良好な風をリトリブする。GBVTD 法はドップラーレーダーで直接観測されなかった風の最大値を、観測された絶対的な最大値や最小値ではなく、ドップラー速度パターンに含まれる傾向を利用してリトリブするため、サンプリングされていない風の最大値を取得できることが示される。この特徴は従来のパターン認識手法と比較して、上陸する熱帯低気圧を予測する際に、基本的な低気圧構造を識別できることと合わせて、GBVTD 法を使用する 2 つの重要な利点となる。

GBVTD で得られた風速分布の品質は、 $\sin \alpha_{\max}$ (アスペクト比, R/R_T) に大きく依存する。 $\sin \alpha_{\max}$ の上限値は非対称な循環の存在によってさらに制限される。20% のバイアスの場合、 $\sin \alpha_{\max}$ の上限は波数 1, 2, 3 でそれぞれ 0.7, 0.5, 0.33 となる。これらの結果は、今後の熱帯低気圧研究において、GBVTD の結果をどのように解釈し、適用するかについての理論的基盤となる。

本シリーズの第 2 部 (Lee and Marks, manuscript submitted to Mon.Wea.Rev.) では、客観的な渦中心探索アルゴリズムである GBVTD-simplex アルゴリズムを紹介する。本シリーズの第 3 部 (Lee et al. 1999, manuscript submitted to Mon.Wea. Rev.) では、GBVTD-simplex アルゴリズムから推論された循環中心を用いて、GBVTD 法からハリケーン Alex (1987) の 3 次元構造を抽出する。

付録 A: GBVTD 法の座標系

GBVTD 法の座標系と記号は本文中の図 1.2.1 に示される。座標系は低気圧を中心とした円筒座標系と、レーダーを中心としたレーダー球面座標系の 2 つがある。これらの座標系と対応する風の成分は以下のように定義される。

- O: 地上ドップラーレーダーの位置
- T: 熱帯低気圧の中心
- R: 低気圧中心から GBVTD 解析が行われるある一定の高度でのリングまでの動径方向の距離
- E: レーダービームとある一定の半径リングの交点
- A, C: レーダービーム (OT) と半径 R のリングの交点
- B, D: $OB \perp TB$ かつ $OD \perp TD$ となる半径 R のリングに接するレーダービームの交点
- F, G: FG は T を通り, OT に直交する
- R_D : レーダーと 1 つのパルス体積の間の動径距離
- R_T : レーダーと低気圧中心の間の動径距離
- θ_d : 東から反時計回りに測定されるレーダービームの数学角度
- z : 熱帯低気圧の円筒座標における鉛直軸, $z = 0$ が海面高度である
- ϕ : レーダービームの仰角
- V_T : 熱帯低気圧の接線速度成分, 北 (南) 半球で反時計回り (時計回り) を正にとる
- V_R : 熱帯低気圧の動径速度成分, 低気圧中心から外向きを正にとる
- V_d : 地上設置ドップラーレーダーから得られるドップラー速度, レーダーから遠ざかる (に近づく) 速度が正 (負) である
- v_t : 降水粒子の終端落下速度, 下向きが正である
- w : 鉛直速度, 上向きが正である
- $V_M(z)$: 平均風の大きさ, 高度の関数
- $\theta_M(z)$: 平均風の方向, 高度の関数
- α : OE と OT によってなす角 ($\angle TOE$)
- α_{\max} : ある半径での最大 α ($\angle TOB$)

ψ : $\angle OET$, $\psi = 0$ (A) および π (C) のとき, レーダービームが動径方向 TE に平行になる, $\psi = \pi/2$ (B) および $3\pi/2$ (D) のとき, レーダービームが動径方向 TE に直交する

γ : 熱帯低気圧の円筒座標における E に対する数学角度

θ_T : レーダーからみた低気圧中心に対する数学角度

Z: レーダー反射強度

付録 B: $\cos \alpha$ の近似

図 1.2.1 における三角形 OTE から $\sin \alpha$ と $\cos \alpha$ は以下のように記述される:

$$\frac{\sin \alpha}{R} = \frac{\sin \psi}{R_T} \quad (\text{L99-B1})$$

$$\sin \alpha = \frac{R}{R_T} \sin \psi \quad (\text{L99-B2})$$

$$\sin \alpha = \sin \alpha_{\max} \sin \psi \quad (\text{L99-B3})$$

$$\cos \alpha = [1 - (\sin \alpha_{\max} \sin \psi)^2]^{1/2}. \quad (\text{L99-B4})$$

$\cos \alpha$ は $\sin n\psi$ と $\cos n\psi$ では明示的に表現できないため, 以下のように $\cos \alpha$ の近似形を構築する. 表?? に ψ に対する $\cos \alpha$ の対応を示す. ψ が 0 から 2π まで変化する間, $\cos \alpha$ は 2 サイクルとなり, $\cos 2\psi$ の関数として近似できることがわかる. さらに $\cos \alpha$ は $\cos \alpha_{\max}$ と 1 の間で拘束される. したがって, $\cos \alpha$ は $(1 - \cos \alpha_{\max})/2$ の振幅を持つ:

$$\cos \alpha \approx \frac{1 - \cos \alpha_{\max}}{2} \cos 2\psi + \frac{1 + \cos \alpha_{\max}}{2}. \quad (\text{L99-B5})$$

図 1.7.16 は 30° , 60° , 80° の 3 つの異なる α_{\max} における (L99-B5) の $\cos \alpha$ の近似値と (L99-5) の解析的表現を示す. この差はある α_{\max} に対して 0 から 2π の範囲で変化する. これは表?? に示されているように, この近似の極端な誤差が α_{\max} の上昇とともに増加することを明確に示している. α_{\max} が 45° 未満の場合, 誤差は 1% 未満である. しかし, α_{\max} が 75° を超えると, その誤差は 10% を超える. したがって, α_{\max} が 75° より大きい場合にのみ, この近似式は疑わしいものとなる.

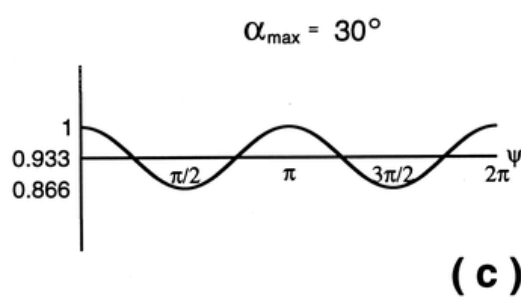
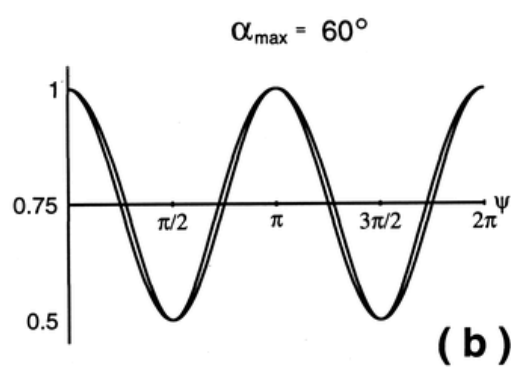
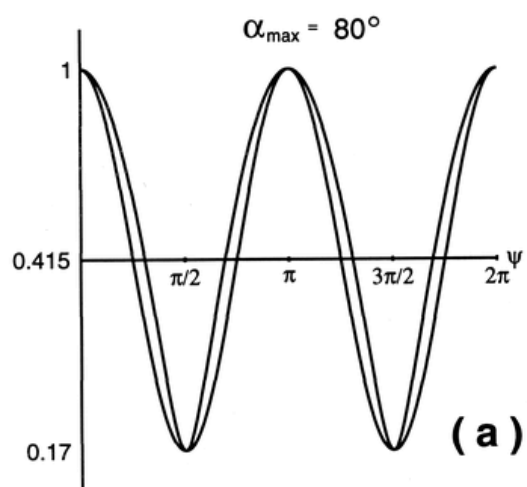


図 1.7.16: ψ の関数としての $\cos \alpha$ とその近似式 (L99-B5) の分布.

8 和訳付録

(L99-13)-(L99-18) 導出
(L99-11), (L99-12) 式再掲:

$$\frac{\hat{V}_d}{\cos \phi} \approx \sum_{n=0}^L (A_n \cos n\psi + B_n \sin n\psi) \quad (\text{L99-11})$$

$$\begin{aligned} &= V_M \left[\cos(\theta_T - \theta_M) \left(\frac{1 - \cos \alpha_{\max}}{2} \cos 2\psi + \frac{1 + \cos \alpha_{\max}}{2} \right) - \sin(\theta_T - \theta_M) \sin \alpha_{\max} \sin \psi \right] \\ &\quad - V_T C_0 \sin \psi - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \{ V_T C_n [\sin(n+1)\psi + \sin(1-n)\psi] + V_T S_n [\cos(n-1)\psi - \cos(n+1)\psi] \} \\ &\quad + V_R C_0 \cos \psi + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \{ V_R C_n [\cos(n+1)\psi + \cos(n-1)\psi] + V_R S_n [\sin(n+1)\psi + \sin(n-1)\psi] \} \end{aligned} \quad (\text{L99-12})$$

$$\begin{aligned} &= V_M \cos(\theta_T - \theta_M) \frac{1 + \cos \alpha_{\max}}{2} + V_M \cos(\theta_T - \theta_M) \frac{1 - \cos \alpha_{\max}}{2} \cos 2\psi \\ &\quad - V_M \sin(\theta_T - \theta_M) \sin \alpha_{\max} \sin \psi \\ &\quad - V_T C_0 \sin \psi + V_R C_0 \cos \psi \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \{ V_T C_n [\sin(n+1)\psi - \sin(n-1)\psi] + V_T S_n [\cos(n-1)\psi - \cos(n+1)\psi] \} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \{ V_R C_n [\cos(n+1)\psi + \cos(n-1)\psi] + V_R S_n [\sin(n+1)\psi + \sin(n-1)\psi] \} \\ &= V_M \cos(\theta_T - \theta_M) \frac{1 + \cos \alpha_{\max}}{2} + V_M \cos(\theta_T - \theta_M) \frac{1 - \cos \alpha_{\max}}{2} \cos 2\psi \\ &\quad - V_M \sin(\theta_T - \theta_M) \sin \alpha_{\max} \sin \psi \\ &\quad - V_T C_0 \sin \psi + V_R C_0 \cos \psi \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^M V_T C_n \sin(n+1)\psi - \sum_{n=1}^M V_T C_n \sin(n-1)\psi \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^M V_T S_n \cos(n-1)\psi - \sum_{n=1}^M V_T S_n \cos(n+1)\psi \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^N V_R C_n \cos(n+1)\psi + \sum_{n=1}^N V_R C_n \cos(n-1)\psi \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^N V_R S_n \sin(n+1)\psi + \sum_{n=1}^N V_R S_n \sin(n-1)\psi \right\} \end{aligned}$$

上式右辺についてサイン・コサインでまとめると,

$$\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= V_M \cos(\theta_T - \theta_M) \frac{1 + \cos \alpha_{\max}}{2} + V_M \cos(\theta_T - \theta_M) \frac{1 - \cos \alpha_{\max}}{2} \cos 2\psi \\
&\quad - V_M \sin(\theta_T - \theta_M) \sin \alpha_{\max} \sin \psi \\
&\quad - V_T C_0 \sin \psi + V_R C_0 \cos \psi \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=2}^M V_T C_{n-1} \sin n\psi - \sum_{n=0}^M V_T C_{n+1} \sin n\psi + \sum_{n=0}^M V_T S_{n+1} \cos n\psi - \sum_{n=2}^M V_T S_{n-1} \cos n\psi \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=2}^N V_R C_{n-1} \cos n\psi + \sum_{n=0}^N V_R C_{n+1} \cos n\psi + \sum_{n=0}^N V_R S_{n+1} \sin n\psi + \sum_{n=2}^N V_R S_{n-1} \sin n\psi \right\} \\
&= V_M \cos(\theta_T - \theta_M) \frac{1 + \cos \alpha_{\max}}{2} + V_M \cos(\theta_T - \theta_M) \frac{1 - \cos \alpha_{\max}}{2} \cos 2\psi \\
&\quad - V_M \sin(\theta_T - \theta_M) \sin \alpha_{\max} \sin \psi \\
&\quad - V_T C_0 \sin \psi + V_R C_0 \cos \psi \\
&\quad - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=2}^M V_T C_{n-1} \sin n\psi - \sum_{n=2}^M V_T C_{n+1} \sin n\psi + \sum_{n=2}^M V_T S_{n+1} \cos n\psi - \sum_{n=2}^M V_T S_{n-1} \cos n\psi \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=2}^N V_R C_{n-1} \cos n\psi + \sum_{n=2}^N V_R C_{n+1} \cos n\psi + \sum_{n=2}^N V_R S_{n+1} \sin n\psi + \sum_{n=2}^N V_R S_{n-1} \sin n\psi \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \{ V_T C_2 \sin \psi - V_T S_1 - V_T S_2 \cos \psi + V_R C_1 + V_R C_2 \cos \psi + V_R S_2 \sin \psi \} \\
&= \frac{1}{2} [V_M \cos(\theta_T - \theta_M) (1 + \cos \alpha_{\max}) + V_R C_1 - V_T S_1] \\
&\quad + \frac{1}{2} [2V_R C_0 + V_R C_2 - V_T S_2] \cos \psi \\
&\quad + \frac{1}{2} [-2V_M \sin(\theta_T - \theta_M) \sin \alpha_{\max} - 2V_T C_0 + V_T C_2 + V_R S_2] \sin \psi \\
&\quad + \frac{1}{2} [V_M \cos(\theta_T - \theta_M) (1 - \cos \alpha_{\max}) - V_T S_3 + V_T S_1 + V_R C_1 + V_R C_3] \cos 2\psi \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^M [-V_T S_{n+1} + V_T S_{n-1} + V_R C_{n-1} + V_R C_{n+1}] \cos n\psi \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^M [-V_T C_{n-1} + V_T C_{n+1} + V_R S_{n+1} + V_R S_{n-1}] \sin n\psi.
\end{aligned}$$

以上で (L99-13)-(L99-18) 式が導出された。

(L99-19)-(L99-27) 式導出

(L99-13)-(L99-18) について, V_T は波数 3 成分まで, V_R は軸対称成分のみ (ただし, 論文と式を一致させるため, 項は波数 3 まで残す) もつと仮定すると,

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2} \{V_M \cos(\theta_T - \theta_M) (1 + \cos \alpha_{\max}) - V_T S_1 + V_R C_1\}, \\
A_1 &= \frac{1}{2} (2V_R C_0 - V_T S_2 + V_R C_2), \\
B_1 &= \frac{1}{2} [V_T C_2 - 2V_T C_0 - 2V_M \sin(\theta_T - \theta_M) \sin \alpha_{\max} + V_R S_2], \\
A_2 &= \frac{1}{2} \{V_M \cos(\theta_T - \theta_M) (1 - \cos \alpha_{\max}) - V_T S_3 + V_T S_1 + V_R C_3 + V_R C_1\}, \\
A_3 &= \frac{1}{2} [V_T S_2 + V_R C_2], \\
A_4 &= \frac{1}{2} [V_T S_3 + V_R C_3], \\
B_2 &= \frac{1}{2} [V_T C_3 - V_T C_1 + V_R S_3 + V_R S_1], \\
B_3 &= \frac{1}{2} [-V_T C_2 + V_R S_2], \\
B_4 &= \frac{1}{2} [-V_T C_3 + V_R S_3].
\end{aligned}$$

A_3, A_4, B_3, B_4 はそれら自身で直ちに

$$V_T S_2 = 2A_3 - V_R C_2, \quad (\text{L99-24}')$$

$$V_T C_2 = -2B_3 + V_R S_2, \quad (\text{L99-25}')$$

$$V_T S_3 = 2A_4 - V_R C_3, \quad (\text{L99-26}')$$

$$V_T C_3 = -2B_4 + V_R S_3. \quad (\text{L99-27}')$$

これらを用いて A_0, A_1, A_2, B_1, B_2 は

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2} \{V_M \cos(\theta_T - \theta_M) (1 + \cos \alpha_{\max}) - V_T S_1 + V_R C_1\}, \\
A_1 &= \frac{1}{2} (2V_R C_0 - 2A_3 + 2V_R C_2), \\
B_1 &= \frac{1}{2} [-2B_3 - 2V_T C_0 - 2V_M \sin(\theta_T - \theta_M) \sin \alpha_{\max} + 2V_R S_2], \\
A_2 &= \frac{1}{2} \{V_M \cos(\theta_T - \theta_M) (1 - \cos \alpha_{\max}) - 2A_4 + V_T S_1 + 2V_R C_3 + V_R C_1\}, \\
B_2 &= \frac{1}{2} [-2B_4 - V_T C_1 + 2V_R S_3 + V_R S_1],
\end{aligned}$$

A_1 と B_2 は上式から直ちに

$$V_R C_0 = A_1 + A_3 - V_R C_2, \quad (\text{L99-21}')$$

$$V_T C_1 = -2B_4 - 2B_2 + 2V_R S_3 + V_R S_1, \quad (\text{L99-23}')$$

が得られる. これらから B_1 は

$$\begin{aligned} B_1 &= -B_3 - V_T C_0 - V_M \sin(\theta_T - \theta_M) \sin \alpha_{\max} + V_R S_2 \\ \Rightarrow V_T C_0 &= -B_3 - B_1 - V_M \sin(\theta_T - \theta_M) \sin \alpha_{\max} + V_R S_2 \end{aligned} \quad (\text{L99-20'})$$

最後に A_0 と A_2 を整理して

$$V_M \cos(\theta_T - \theta_M) = A_0 + A_2 + A_4 - V_R C_3 - V_R C_1, \quad (\text{L99-19'})$$

$$V_T S_1 = -A_0 + A_2 + A_4 - V_R C_3 + (A_0 + A_2 + A_4 - V_R C_3 - V_R C_1) \cos \alpha_{\max}, \quad (\text{L99-22'})$$

第2章 Jou et al. (2008) による GVTD 論文

(図はすべて Jou et al. (2008) から引用. 和訳は DeepL を辻野がマニュアル修正.)

1 はじめに

熱帯低気圧や竜巻などの大気中の渦は, 地上のドップラーレーダーを PPI (Plan-Position Indicator) モードで走査して観測すると, ダイポールなドップラー速度パターンを持つ (Donaldson 1970 など). 軸対称の渦のダイポールパターンの形状は, 「渦の循環中心」(以下, 中心) とレーダーとの距離, コアの直径, 接線風ピークと動径風ピークの比の関数である. Wood and Brown (1992) に示されているように, 動径方向の風が流入 (流出) している場合には, その双極子は時計回り (反時計回り) に回転する. 軸対称の渦がレーダーから無限の距離にある場合, その中心は 2 つのピークダイポール速度を結ぶ線分の中点として決定することができる (Wood and Brown 1992). 渦がレーダーに近づくと, 双極子のピーク速度は中心よりも速くレーダーに向かって移動する. そのため, 双極子のパターンが歪み, 中心が双極子の 2 つのピーク速度を結ぶ線分上に位置しないため, 運用時に中心を正確に特定することが難しくなる.

渦の回転特性に基づいて, Lee et al. (1999) は, 大気中の渦の主要な力学的構造を調査するために, GBVTD と呼ばれる単一のドップラーレーダ風リトリバー法を定式化した (Lee et al. 2000; Roux et al. 2004; Bluestein et al. 2003; Harasti et al. 2004; Lee and Wurman 2005; Lee and Bell 2007; Tanamachi et al. 2007). GBVTD 法の記号と幾何形状を図 2.1.1 に示す. ここでは, 議論の便宜上, R_T の大きさと, レーダーから中心に向かう方向を「 \mathbf{R}_T ベクトル」と定義する. GBVTD 法は, 中心を原点とする円筒座標系を用いて, 半径 R の各円周上のドップラー速度 V_d をフーリエ分解し, 既存の単一ドップラー風リトリバー法 (Browning and Wexler 1968; Donaldson 1991; Harasti 2003 など) では推定できなかった 3 次元の接線および動径方向の循環を推定するものである. また, 角運動量, 垂直渦度, 摂動圧力などの軸対称の 3 次元運動学的・力学的量も, GBVTD で取得した軸対称の接線風と動径風から計算できる (Lee et al. 2000; Lee and Wurman 2005; Lee and Bell 2007).

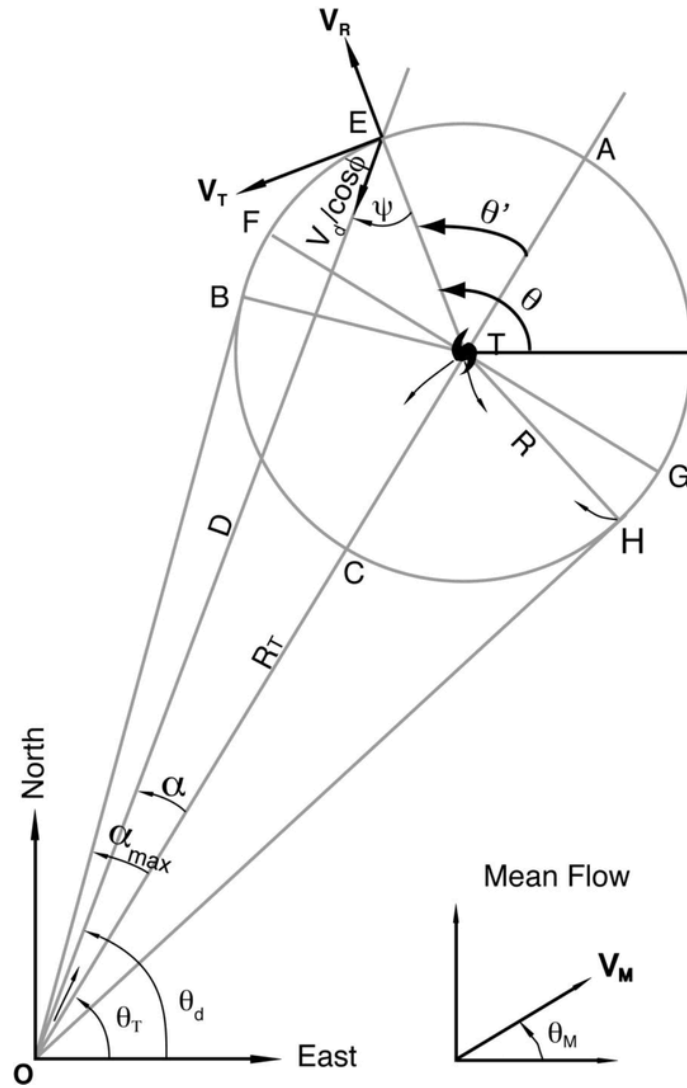


図 2.1.1: GBVTD の定式化に使用された幾何学と記号. T は渦の中心, E は観測点, $V_d / \cos \phi$ は観測されたドップラー速度の水平投影, V_M , V_T , V_R はそれぞれ渦の平均風, 接線風, 動径風である (Lee et al. 1999 より引用).

GBVTD 法の制限は以下の通りである. 1) 非対称風の歪み, 2) 制限された解析領域, 3) 平均風のレーダービームに直交する成分をリトリバルできない, 4) 非対称接線風と動径風との分離ができない. 最初の 3 つの制限はサンプリングの幾何形状に起因するもので, 最後の制限は GBVTD 法に内在するクロージャー仮定に起因するものである. したがって, GBVTD から得られる渦の循環は, 「真の」循環の代替であり, 特定の状況では, 上記の制限に起因する大きな不確実性を引き継ぐ可能性がある (Lee et al. 1999).

本論文では, 一般化された VDT (GVTD) 手法と, その大気中の渦への適用について紹介する. GVTD 法は, Lee et al. (1999) で確立された GBVTD の基礎を拡張し, GBVTD

法に内在する最初の 3 つの制限を解決しようとするものである。GVTD 法では、同じレーダー観測データから、各ゲートの距離 (D) に V_d を乗じ、レーダーと渦の中心の距離 (R_T) でスケーリングすることで、 $V_d D/R_T$ という新しい変数を導入する。 $V_d D/R_T$ 空間に表示される主要な渦の力学的構造は、レーダー模様の解釈を単純化し、 V_d 空間で継承された幾何学的な歪みを排除する (Jou et al.1996)。GBVTD では V_d を非線形座標 (ψ') で展開するのに対し、GVTD では $V_d D/R_T$ を線形座標 (θ') でフーリエ係数に展開することが示される。この結果、やや複雑ではあるが数学的には正確な表現となり、GBVTD で必要とされる $\cos \alpha$ の近似が不要となる [Lee et al. (1999) の式 (5)]。GVTD では、中心が正確にわかっていれば、非対称な渦構造を歪みなく取り出すことができる。GVTD の定式化は、VTD 法の拡張版 (例えば, Roux et al. 2004; Liou et al. 2006) に適用して、その性能を向上させることができる。

2 節では、GVTD 技術の数学的定式化について説明する。3 節では、 $V_d D/R_T$ 空間に表示される解析風パターンの特徴を示し、 V_d 空間に表示されるものと比較する。4 節では、 $V_d D/R_T$ と V_d の表示の間で、中心と最大風速半径 (RMW) の推定値を比較する。5 節では、いくつかの解析的な渦について、GVTD 法と GBVTD 法によって得られた風速場を図示し、比較する。非対称性、中心のずれ、平均風の不確実性がある場合に、GVTD 法と GBVTD 法で取得した風場の違いを調べるため、誤差解析を実施する。6 節では、簡単な流れモデルを用いて、台風 Gladys で観測されたドップラー風速特性をシミュレーションする。最後に、まとめと今後の課題を示す。

2 一般化 VTD 法

まず、ドップラー速度の水平方向への投影 [Lee et al. (1999) の式 (3)]:

$$\hat{V}_d / \cos \phi = V_M \cos (\theta_d - \theta_M) - V_T \sin \psi + V_R \cos \psi \quad (\text{J08-1})$$

から始める。ここで ϕ は仰角である。図 2.1.1 に示される関係 $\psi = \theta' - \alpha = \theta - \theta_T - \alpha = \theta - \theta_d$ を適用すると、

$$\begin{aligned} \hat{V}_d \cos \phi &= V_M \cos (\theta_d - \theta_M) - V_T \sin (\theta - \theta_d) + V_R \cos (\theta - \theta_d) \\ &= V_M (\cos \theta_d \cos \theta_M + \sin \theta_d \sin \theta_M) - V_T (\sin \theta \cos \theta_d - \cos \theta \sin \theta_d) + V_R (\cos \theta \cos \theta_d + \sin \theta \sin \theta_d) \end{aligned} \quad (\text{J08-2})$$

が得られる。点 $E(D, \theta_d)$ (図 2.1.1) でのドップラー速度に対して、

$$D \cos \theta_d = R \cos \theta + R_T \cos \theta_T, \quad (\text{J08-3})$$

$$D \sin \theta_d = R \sin \theta + R_T \sin \theta_T, \quad (\text{J08-4})$$

の関係をもつ。ここで任意の角度は数学角度であり、反時計回りを正と定義する。

(J08-3), (J08-4) を (J08-2) に代入し, V_d で $\hat{V}_d / \cos \phi$ を近似すると,

$$V_d = (-V_T \sin \theta + V_R \cos \theta + V_M \cos \theta_M)(R \cos \theta + R_T \cos \theta_T)/D \\ + (V_T \cos \theta + V_R \sin \theta + V_M \sin \theta_M)(R \sin \theta + R_T \sin \theta_T)/D \quad (\text{J08-5})$$

が得られる. (J08-5) 式を整理し, 三角法の恒等式を用いると,

$$V_d \frac{D}{R_T} = -V_T(\sin(\theta - \theta_T)) + V_R \left[\frac{R}{R_T} + \cos(\theta - \theta_T) \right] \\ + V_M \cos(\theta_T - \theta_M) + \frac{R}{R_T} V_M \cos(\theta - \theta_M) \quad (\text{J08-6})$$

が得られる. $\theta' = \theta - \theta_T$ であり, $\theta - \theta_M = (\theta - \theta_T) + (\theta_T - \theta_M)$ という関係を用いると, (J08-6) 式は

$$V_d \frac{D}{R_T} = V_R \frac{R}{R_T} + V_M \cos(\theta_T - \theta_M) \\ - \left[V_T + \left(\frac{R}{R_T} \right) V_M \sin(\theta_T - \theta_M) \right] \sin \theta' \\ + \left[V_R + \frac{R}{R_T} V_M \cos(\theta_T - \theta_M) \right] \cos \theta' \quad (\text{J08-7})$$

となる.

与えられた R に対して, (J08-7) の右辺は θ' にのみ依存する. Lee et al. (1999) の式 (7) とここでの式 (J08-7) を比較すると, GBVTD の非線形 ψ の関数である V_d は, GVTD の線形 θ' の関数である $V_d D / R_T$ に対応することがわかる. なお, Lee et al. (1999) の式 (7) では, 未知の変数 $\sin \alpha$ と既知の定数 $\sin \alpha_{\max} = R / R_T$ を結びつける近似が必要であった. $R > R_T$ の場合, α_{\max} は定義されない^{*1}(図 2.1.1 参照). D を新しい変数の一部として左辺に明示的に移動させることで, (J08-7) 式は数学的に厳密になり, $R > R_T$ を超えるすべての半径に対して有効になる.

Lee et al. (1999) に従い, $V_d D / R_T$, V_T , V_R を θ' 座標におけるフーリエ成分に分解すると,

$$V_d \frac{D}{R_T}(R, \theta') = A_0 + \sum_1^N A_n \cos n\theta' + \sum_1^N B_n \sin n\theta', \quad (\text{J08-8})$$

$$V_T(R, \theta') = V_T C_0 + \sum_1^N V_T C_n \cos n\theta' + \sum_1^N V_T S_n \sin n\theta', \quad (\text{J08-9})$$

$$V_R(R, \theta') = V_R C_0 + \sum_1^N V_R C_n \cos n\theta' + \sum_1^N V_R S_n \sin n\theta'. \quad (\text{J08-10})$$

^{*1}(原文脚注) Lee et al. (1999) の式 (B3) で $\sin \alpha_{\max}$ の代わりに R / R_T を用いた場合, この制約は実際に存在しない. しかし, $R / R_T > 1$ の場合, 意味のある GBVTD リトリバールを行うためには, ψ が $0 - 2\pi$ の範囲で, 不十分で非常に非線形な間隔にあることが示される.

ここで $A_n (V_T C_n, V_R C_n)$, $B_n (V_T S_n, V_R S_n)$ は Lee et al. (1999) で定義されたように, $V_d D/R_T (V_T, V_R)$ の方位角波数 n のコサイン・サイン成分である.

Lee et al. (1999) と同様に, (J08-8), (J08-9), (J08-10) 式を (J08-7) 式に代入すると,

$$A_0 = \frac{R}{R_T} V_R C_0 + V_M \cos(\theta_T - \theta_M) + \frac{1}{2} V_R C_1 - \frac{1}{2} V_T S_1, \quad (\text{J08-11})$$

$$A_1 = \frac{R}{R_T} V_R C_1 + V_R C_0 + \frac{1}{2} V_R C_2 - \frac{1}{2} V_T S_2 + \frac{R}{R_T} V_M \cos(\theta_T - \theta_M), \quad (\text{J08-12})$$

$$B_1 = \frac{R}{R_T} V_R S_1 - V_T C_0 + \frac{1}{2} V_R S_2 + \frac{1}{2} V_T C_2 - \frac{R}{R_T} V_M \sin(\theta_T - \theta_M), \quad (\text{J08-13})$$

$$A_n (n \geq 2) = \frac{R}{R_T} V_R C_n + \frac{1}{2} (V_T S_{n-1} - V_T S_{n+1} + V_R C_{n+1} + V_R C_{n-1}), \quad (\text{J08-14})$$

$$B_n (n \geq 2) = \frac{R}{R_T} V_R S_n + \frac{1}{2} (V_T C_{n+1} - V_T C_{n-1} + V_R S_{n-1} + V_R S_{n+1}), \quad (\text{J08-15})$$

が得られる. (J08-16)-(J08-20) 式を整理し, これらのフーリエ係数を用いて渦の各波数成分を表記する^{*2}と,

$$V_M \cos(\theta_T - \theta_M) = A_0 - \frac{R}{R_T} V_R C_0 + \frac{1}{2} V_T S_1 - \frac{1}{2} V_R C_1, \quad (\text{J08-16})$$

$$V_T C_0 = -B_1 - B_3 + \frac{R}{R_T} [-V_M \sin(\theta_T - \theta_M) + V_R S_1 + V_R S_3] + V_R S_2, \quad (\text{J08-17})$$

$$V_R C_0 = \frac{A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{1 + \frac{R}{R_T}} - V_R C_1 - V_R C_2 - V_R C_3 - V_M \cos(\theta_T - \theta_M), \quad (\text{J08-18})$$

$$V_T S_n = 2A_{n+1} - 2\frac{R}{R_T} V_R C_{n+1} + V_T S_{n+2} - V_R C_{n+2} - V_R C_n, \quad (\text{J08-19})$$

$$V_T C_n = -2B_{n+1} + V_T C_{n+2} + V_R S_n + V_R S_{n+2} + 2\frac{R}{R_T} V_R S_{n+1}. \quad (\text{J08-20})$$

式 (J08-16)-(J08-20) は, Lee et al. (1999) ^{*3} の GBVTD の式 (L99-19)-(L99-27) に, R/R_T に関する項を追加したものである. $R/R_T \sim 0$ の極限では, これらの 2 つの方程式は同じ切断波数 n について同一になる. $R/R_T \sim 0$ (すなわち, $D/R_T \sim 1$) の極限では, (J08-6) は VTD [Lee et al. 1994 の (3) 式] に帰着ことが示される (付録 7). この状況では, 地上のレーダーのすべてのビームは, VTD におけるサンプリング幾何形状と同様に, 互いに平行に扱うことができる. また, GBVTD (Lee et al. 1999) で課されていた最も厳しい幾何学的制約, すなわち渦の解析領域が $R/R_T < 1$ に限られるという制約もなくなる. GVTD の解析領域は, 信頼性の高い GVTD フーリエ係数推定値を得るのに十分なドップラー速度データが得られる場所であれば, 全領域に渡る. この点については, 第 5 節で説明する. したがって, GVTD は, 一連の VTD シリーズの技術をより一般的にしたものである.

^{*2}(原文誤植) (J08-18) 式右辺の V_M に比例する項は原文では \sin 関数であるが³, 正しくは \cos 関数である.

^{*3}(原文脚注) Lee et al. (1999) の式 (L99-20) に誤植がある. 正しい式は $V_T C_0 = -B_1 - B_3 - V_M \sin(\theta_T - \theta_M) \sin \alpha_{\max} + V_R S_2$ である.

GVTD は, Lee et al. (1999) のように, 未知の変数の数が方程式の数よりも多いという問題に直面する. そのため, GBVTD と同様のクロージャの仮定, すなわち, 非対称 V_R は V_T より小さく, したがって無視できると仮定している. VTD シリーズの動的なクロージャの仮定を探することは, 今後の研究課題である.

3 $V_d D / R_T$ 表示の特徴

$V_d D / R_T$ 空間における渦の速度分布の特性は, (J08-7) 式から解析的に評価できる. (J08-7) 式は VTD [Lee et al. 1994 の (3) 式] と似ているので, $V_d D / R_T$ の特性は, レーダービームが平行で非対称構造の幾何学的歪みがない VTD の V_d の特性と似ている.

(J08-7) 式を再び整理すると,

$$\frac{V_d D}{R_T} = -U_1 \sin(\theta' - \theta_0) + U_2 \quad (\text{J08-21})$$

が得られる. ここで,

$$U_1 = \left\{ \left[V_T + \left(\frac{R}{R_T} \right) V_M \sin(\theta_T - \theta_M) \right]^2 + \left[V_R + \left(\frac{R}{R_T} \right) V_M \cos(\theta_T - \theta_M) \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (\text{J08-22})$$

$$U_2 = V_R \frac{R}{R_T} + V_M \cos(\theta_T - \theta_M), \quad (\text{J08-23})$$

$$\theta_0 = \tan^{-1} \frac{V_R + \frac{R}{R_T} V_M \cos(\theta_T - \theta_M)}{V_T + \frac{R}{R_T} V_M \sin(\theta_T - \theta_M)}. \quad (\text{J08-24})$$

一定の R に対して, V_M, V_T, V_R が θ' の関数である限り, (J08-21) 式は θ' の関数であると結論づけられる. (J08-23) 式の V_R や V_M の存在は, サインカーブ全体を上下させる. なお, VTD および GBVTD では, 軸対称渦の場合, 曲線全体を上下にシフトさせる要因は V_M のみである. (J08-24) において, θ_0 はサインカーブの位相シフト (すなわち双極子の方位角回転) を表す. 平均風がない ($V_M = 0$) 場合, θ_0 は GBVTD のように $\tan^{-1}(V_R/V_T)$ に減少する (Lee et al. 1999 の図 1.2.2). V_M による θ_0 への影響は, 中心付近では係数 R/R_T によってさらに小さくなるが, 渦の半径が遠い場合にはこの影響は無視できないだろう. $V_T \gg V_R$ の場合, $\theta_0 \sim 0$ となる. したがって, V_R が大きい渦では, 一般に θ_0 は小さくなる. なお, ドップラー速度のダイポールパターンの位相変化は, V_d 空間では V_M に依存せず, $V_d D / R_T$ 空間では V_M に依存する. これは, (J08-18) と Lee et al. (1999) の式 (L99-21) を比較するとわかるように, 軸対称の動径風の推定を複雑にする効果がある. 平均風ベクトルは, HVVP (hurricane volume velocity processing) 法 (Harasti 2003) を用いるか, $V_d D / R_T$ の平均風のユニークなパターン (以下に示す) を用いて推定できる.

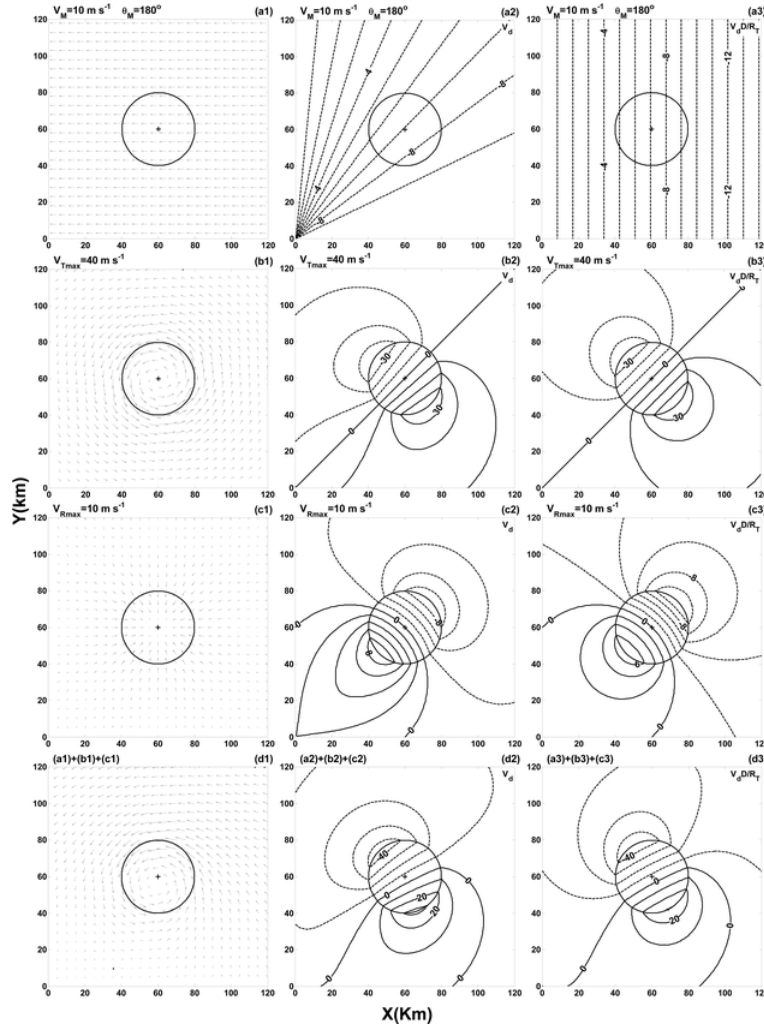


図 2.3.2: (左) [a(1)] 大きさ 10 m s^{-1} の一定の東風平均風, [b(1)] ランキン複合渦, [c(1)] 軸対称の動径風, [d(1)] これらの全てを合わせた風 [(a1)+(a2)+(a3)] と, それに対応する (中) 観測ドップラー速度, (右) 左のシミュレーション風場の $V_d D/R_T$ 表示. ドップラーレーダーは図の左下に配置されている.

Brown and Wood (1991) に従い, V_d および $V_d D/R_T$ の風のパターンをシミュレーションするために, 理想化された渦の流れ場を構築する. 完全な流れ場には, 一様な平均風, 軸対称の V_T , および軸対称の V_R が含まれる. 自然座標における数学的な表現は

$$\begin{aligned}
 V_M &= -V_M \sin(\theta - \theta_M) \mathbf{t} + V_M \cos(\theta - \theta_M) \mathbf{r}, \\
 V_T &= V_{T_{\max}} \left(\frac{R}{R_{\max}} \right)^{\lambda_t} \mathbf{t}, \\
 V_R &= V_{R_{\max}} \left(\frac{R}{R_{\max}} \right)^{\lambda_r} \mathbf{r}.
 \end{aligned} \tag{J08-25}$$

ここで, \mathbf{t} は接方向の単位ベクトル (反時計回りを正), \mathbf{r} は直交方向の単位ベクトル (中心

から外向きを正), $V_{T_{\max}}(V_{R_{\max}})$ は軸対称 $V_T(V_R)$ の最大値である. 図 2.3.2 はその流れ場の組み合わせを示している. ここで, プラスの符号は $(x, y) = (60 \text{ km}, 60 \text{ km})$ での渦中心を表す. また, $V_{T_{\max}} = 40 \text{ m s}^{-1}$, $V_{R_{\max}} = 10 \text{ m s}^{-1}$, $\theta_M = 180^\circ$, $R_{\max} = 20 \text{ km}$ である. ランキン渦の場合, $R \leq R_{\max}$ のとき, $\lambda_t = \lambda_r = 1$, $R > R_{\max}$ のとき, $\lambda_t = \lambda_r = -1$ である. 仮想的なドップラーレーダは原点に置かれている.

一定の東風平均風と, それに対応する V_d および $V_d D/R_T$ の表示を図 2.3.2a(1)-(3) に示す. 平均風の等値線の特徴は, V_d 表示ではレーダーから発散する一連の直線である [図 2.3.2a(2)]. 風向はドップラー速度ゼロの線に直交し, 正の等値線の方を指す. 風速は領域内の最大ドップラー速度である. $V_d D/R_T$ の表示において, 東風の平均風速の等値線パターンは南北方向の平行線の集合である [図 2.3.2a(3)]. 平均風のベクトルは $V_d D$ の勾配であることが示されている (付録 7). なお, R_T はスケールファクターであり, 平均風ベクトルを決定するためには必要ない. この等値線が平行であるという特徴は通常, 渦中心の反対側の象限における渦の循環の影響を受けていない $V_d D/R_T$ の等値線を目視で確認することで確認できる. 渦が混入している場合の平均風ベクトルを推定する客観的な手順は, 近日中に行われる本研究の第 2 部で紹介される予定である. したがって, GBVTD 定式化における未決定量の 1 つであるビームに直交する平均風は, $V_d D/R_T$ 表示で直接推定することができる.

図 2.3.2b(1)-(3) は, 軸対称の渦の流れ場 V_d と $V_d D/R_T$ 表示を示している. V_d 表示と $V_d D/R_T$ 表示 [図 2.3.2b(2),(3)] の顕著な違いは, 等値線の形状にある. 軸対称の接線風渦の V_d パターン [図 2.3.2b(2)] は, R/R_T に比例した関数として歪んでいる. 逆に, $V_d D/R_T$ の等値線は中心について対称で [図 2.3.2b(3)], R/R_T に依存せず, 歪みもない. Jou et al. (1996) は, $V_d D/R_T$ 表示のダイポールパターンを結ぶ線の中点を用いて, 中心と RMW を推定することを最初に提案した (彼らはこれを "velocity distance azimuth display" (VDAD) 法と呼んだ).

図 2.3.2c(1)-(3) は, 軸対称のアウトフローの例である. (J08-25) で $V_T = 0$, $V_M = 0$, $U_1 = V_R$, $U_2 = V_R(R/R_T)$, $\theta_0 = \pi/2$ または $3\pi/2$ と考えると, (J08-21) 式は $V_d D/R_T = -V_R \sin(\theta' - \pi/2) + V_R(R/R_T)$ となる. これが, $V_d D/R_T$ 表示で見た V_R パターンが中心について対称でない理由であり, $V_d D/R_T$ 表示における V_R と V_T の間には $\pi/2$ の位相差がある. それでも, $V_d D/R_T$ 表示では, V_d 表示に比べて等値線がより対称になっている.

図 2.3.2d(1)-(3) は, V_M, V_T, V_R を組み合わせた場合の流れ場と, それに対応する V_d 表示および $V_d D/R_T$ 表示を示している. 組み合わせた流れ場は非対称になっている. しかし, RMW 付近の $V_d D/R_T$ 表示では, 一定の V_M と軸対称の V_R を加えてもダイポールは大きく歪まず, VDAD 法を用いて中心と RMW を推定することができる [図 2.3.2d(3)].

さらに, V_d および $V_d D/R_T$ 表示における渦の特徴を R_{\max} の関数として調べるために, $V_{T_{\max}} = 50 \text{ m s}^{-1}$, R_{\max} が 30 および 80 km の 2 つの軸対称回転渦を作成し, それらに対応する V_d および $V_d D/R_T$ 表示を図 2.3.3 に示す. 図 2.3.3a, c は, レーダーが RMW の外側に位置する, R_{\max} が 30 km の小さい渦の V_d と $V_d D/R_T$ の表示, 図 2.3.3b, d は, 2 つの

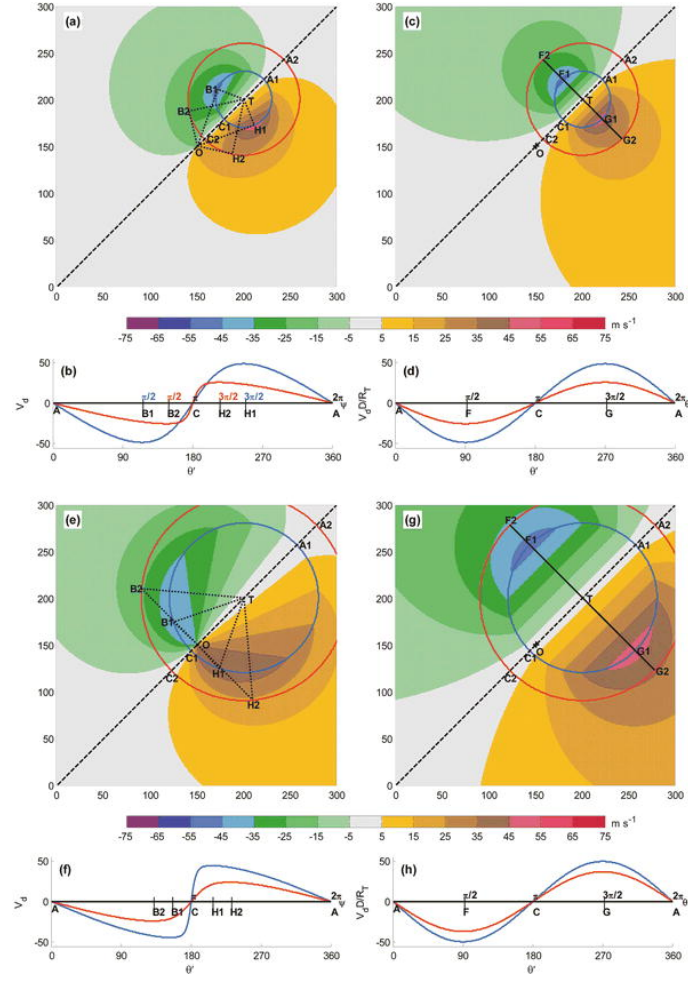


図 2.3.3: 異なる RMW を持つ 2 つの渦の 2 つの異なる半径 (赤と青の線で示す) に対する V_d と $V_d D/R_T$ の表示の比較. (a) $R_{\max} = 30$ km の純粋な回転渦の V_d 表示, (b) $R = 30$ km と 60 km における V_d の分布, (c) $V_d D/R_T$ 表示を除いて (a) と同じ, (d) $V_d D/R_T$ 分布を除いて (b) と同じ. (e)-(h) (a)-(d) と同じだが, $R_{\max} = 80$ km $> R_T$ で, 2 つの V_d プロファイルは $R = 80$ km と 110 km になっている. 渦中心 T は $(x, y) = (200$ km, 200 km) に, 仮想的なドップラーレーダー O は $(x, y) = (150$ km, 150 km) に位置し, $R_T = 50\sqrt{2}$ km である.

半径 ($R = 30$ km と 60 km) 周辺の V_d と $V_d D/R_T$ の対応する分布を示している. R が大きくなるにつれて, V_d の風のピーク位置 (図 2.3.3b の $\psi = \pi/2$ と $3\pi/2$) は $\psi = \theta' = \pi$ に移動し, $V_d D/R_T$ のピーク値 (図 2.3.3d) は $\theta' = \pi/2$ と $\theta' = 3\pi/2$ に留まっている. $V_d D/R_T$ 表示では, 幾何学的な係数 R/R_T によらず, ドップラー速度ゼロの線とダイポールを結ぶ線の交点に中心が保たれている.

レーダーが大きな渦の RMW の内側 ($R_{\max} = 80$ km, $R_T = 70.7$ km, つまり $R_{\max} > R_T$) にあるとき, レーダーは $V_{T_{\max}}$ の全成分をサンプリングしていないため, RMW 付近の V_d

のピーク (図 2.3.3e の青丸) は $V_{T_{\max}}$ (図 2.3.3a) よりも小さくなっている. しかし, $R = R_{\max} = 80$ km および $R = 110$ km における $V_d D/R_T$ プロファイル (図 2.3.3g,h の青線および赤線) は, $R_{\max} < R_T$ の場合と同様に, 渦の強さを復元することができる (図 2.3.3c). レーダーが各半径での V_T の全成分を完全にサンプリングしない場合でさえ, $V_d D/R_T$ 空間ではダイポール構造が完全に復元される. この特性は, $V_R = 0, V_M = 0, U_1 = V_T, U_2 = 0, \theta_0 = 0$ を (J08-21) 式に代入することで解析的に示すことができ, $V_d D/R_T = -V_T \sin \theta'$ となる. 大気中の渦を $V_d D/R_T$ 空間で表示することは, 従来の V_d 空間で表示するよりも明らかに有利である.

要約すると, $V_d D/R_T$ 空間で渦を表現することで, 渦のドップラー速度の分布特性が単純化され, 従来の V_d 表示での R_{\max}/R_T の関数としてのダイポールの歪みがなくなる. 特に, 一定の平均風の等値線パターンは, 平行線の 1 セットとなる. $V_d D/R_T$ 表示で渦と平均風を分離できる可能性は, 渦と平均流の相互作用を研究するための新しいパラダイムを提供する.

4 中心と RMW

(J08-21) 式から, U_1 と U_2 が R_{\max} で一定である限り (つまり, 軸対称の V_T , 軸対称の V_R , 一定の V_M の任意の組み合わせ), 中心は $V_d D/R_T$ 表示 (つまり, VDAD 法) のダイポールを結ぶ線の中点であることがわかる. 軸対称の V_R および/または V_M が存在すると, 各半径のサインカーブに一定の大きさと一定の位相のずれが加わる. そのサインカーブはダイポールの大きさが同じではなくなり, 方位角方向に回転する. VDAD 法は, リアルタイムの運用環境において, 軸対称に近い渦の中心を特定するのに特に有効であることがわかった. 顕著な非対称成分が存在する場合, (J08-21) 式は有効ではなく, 中心を正確に推定するには, 「シンプレックス」法 (Lee and Marks 2000) のような, より精巧な手法が必要となるが, これは本稿の範囲外である.

Wood and Brown (1992) の手法を用いて中心と R_{\max} を求めたところ [図 2.3.2d(2)], 真の中心が (60 km, 60 km) に位置し, R_{\max} が 20 km であるのに対し, 推定された中心は (60.33 km, 60.19 km) に位置し, R_{\max} は 19.65 km となった. これらの誤差は非常に小さい (中心の誤差は 0.38 km, R_{\max} の誤差は 0.35 km). 次に, R_{\max} が 30 km, $V_{T_{\max}}$ が 25 m s^{-1} , V_M が 20 m s^{-1} , V_M の方向が \mathbf{R}_T ベクトルと平行な南西方向という, より極端なケースを考える. このときリトリバルされた中心は (61.45 km, 60.34 km) で, R_{\max} は 28.77 km となる. 誤差は中心と RMW でそれぞれ 1.49 km と 1.23 km に増加している. この誤差は, 割り当てられた風速場と, 平均風速・平均風向の相対的な大きさの両方に依存していることがわかる. 一方, VDAD 法で推定された両センターはほぼ完璧である.

表 2.5.1: GBVTD および GVTD の感度実験のまとめ. 3 つの実験シリーズを実施し, 非対称性 (AS), 中心ずれ (C), 平均風速感度 (VM) を定量化する. 接頭辞 G (M) は, GBVTD (GVTD) の結果を表す. CxN (CyN) は, N km だけ, 東 (北) に向かって中心をずらした場合の応答を表す.

Test series	Description	Parameter	GBVTD	GVTD
AS0	Wave 0	GAS0	MAS0	—
AS1	Wave 0 + 1	$\theta_0 = 90^\circ$	GAS1	MAS1
AS2	Wave 0 + 2	$\theta_0 = 90^\circ$	GAS2	MAS2
AS3	Wave 0 + 3	$\theta_0 = 0^\circ$	GAS3	MAS3
Cx	Center displacement in the x direction	1–10 km	GCxN	MCxN
Cy	Center displacement in the y direction	1–10 km	GCyN	MCyN
VM1	—	$\theta_T - \theta_M = -90^\circ$ $\Delta V_M = -5-5 \text{ m s}^{-1}$ $\Delta \theta_M = -30-30^\circ$	—	— — VM1
VM2	—	$\theta_T - \theta_M = 180^\circ$ $\Delta V_M = -5-5 \text{ m s}^{-1}$ $\Delta \theta_M = -30-30^\circ$	—	— — VM2

5 GVTD と GBVTD

(解析的な渦を用いた) 一連の数値実験を行い, 1) 非対称性, 2) 間違った渦中心, 3) 平均風に不確実性が存在する場合での, GVTD と GBVTD でリトリバルされた風場の間の差を調べる. これらの数値実験の設定は表 2.5.1 にまとめられる.

5.1 非対称性の検証 (AS シリーズ)

非対称性についての感度実験 (AS シリーズ) では, その実験設定は Lee et al. (1999) に従い, 基本的な軸対称渦が以下のように構築される:

$$\begin{aligned}
 V_T &= V_{T_{\max}} \frac{R}{R_{\max}}, & (R \leq R_{\max}), \text{あるいは} \\
 V_T &= V_{T_{\max}} \frac{R_{\max}}{R}, & (R > R_{\max}), \\
 V_R &= \delta_1 [(R_{\max} - R)R]^{1/2}, & (R \leq R_{\max}), \text{あるいは} \\
 V_R &= \delta_2 (R_{R-\max})^{1/2} \left(\frac{R_{\max}}{R} \right), & (R > R_{\max}),
 \end{aligned}$$

ここで $V_{T_{\max}} = 50 \text{ m s}^{-1}$, $R_{\max} = 30 \text{ km}$, $\delta_1 = 0.1 \text{ s}^{-1}$, $\delta_2 = 3 \text{ m s}^{-1}$ である.

実験は軸対称の渦 (AS0) と, 軸対称の渦の中に埋め込まれた波数 1, 2, 3 の非対称構造 (AS1, AS2, AS3) の 4 つの実験を行った. 非対称構造 (波数 $n = 1, 2, 3$) は, 以下の式

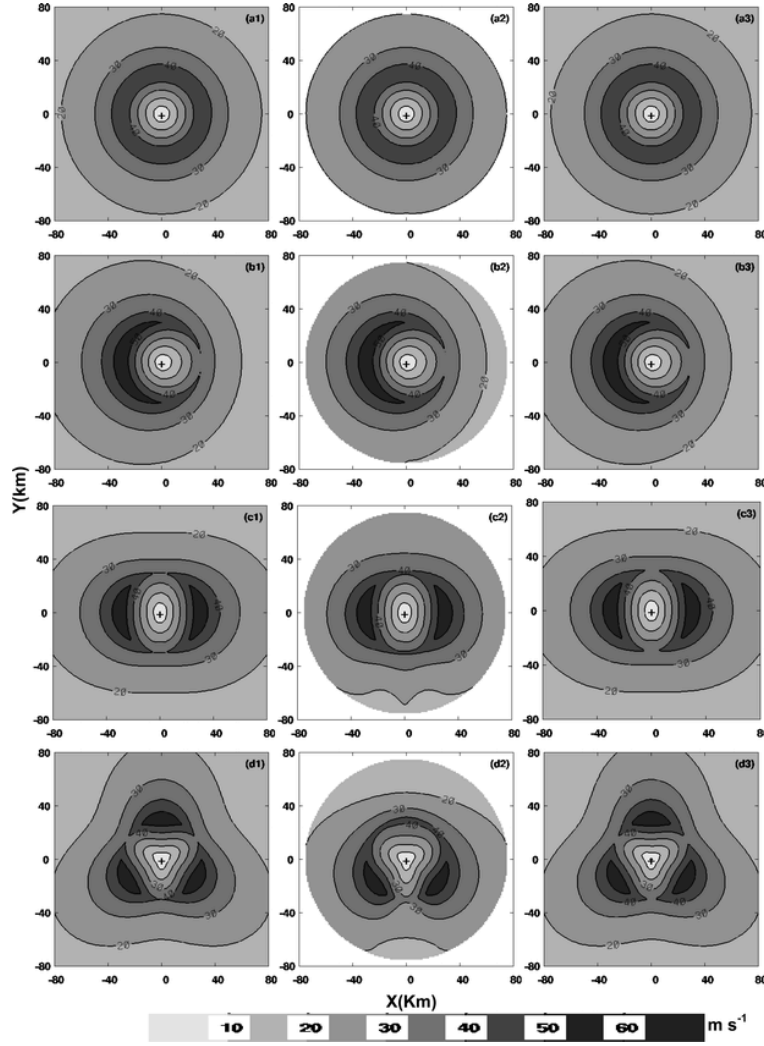


図 2.5.4: GBVTD と GVTD で再現された渦構造の比較. [a(1)] シミュレーションされた軸対称の風速場, [a(2)] GBVTD で再現された風速場, [a(3)] GVTD で再現された風速場である. [a(1)]-[a(3)] と同じだが, [b(1)]-[b(3)] は波数 1 の場合, [c(1)]-[c(3)] は波数 2 の場合, [d(1)]-[d(3)] は波数 3 の場合. 渦中心は (0, 0) に, 仮想的なドップラーレーダーは (0, -80) に配置される.

と表 2.5.1 に示すパラメータを用いて構築した:

$$V_T = V_{T_{\max}} \frac{R}{R_{\max}} \{1 + A_n \cos[n(\theta' - \theta_0)]\}, \quad (R \leq R_{\max}), \text{あるいは}$$

$$V_T = V_{T_{\max}} \frac{R_{\max}}{R} \{1 + A_n \cos[n(\theta' - \theta_0)]\}, \quad (R > R_{\max}),$$

ここで $A_n = 0.2$. なお, Lee et al. (1999) に従い, シミュレーションされた渦における非対称な動径風成分はないと仮定する.

図 2.5.4 は, 非対称性が波数 0 (1 列目), 波数 0+1 (2 列目), 波数 0+2 (3 列目), 波数 0+3

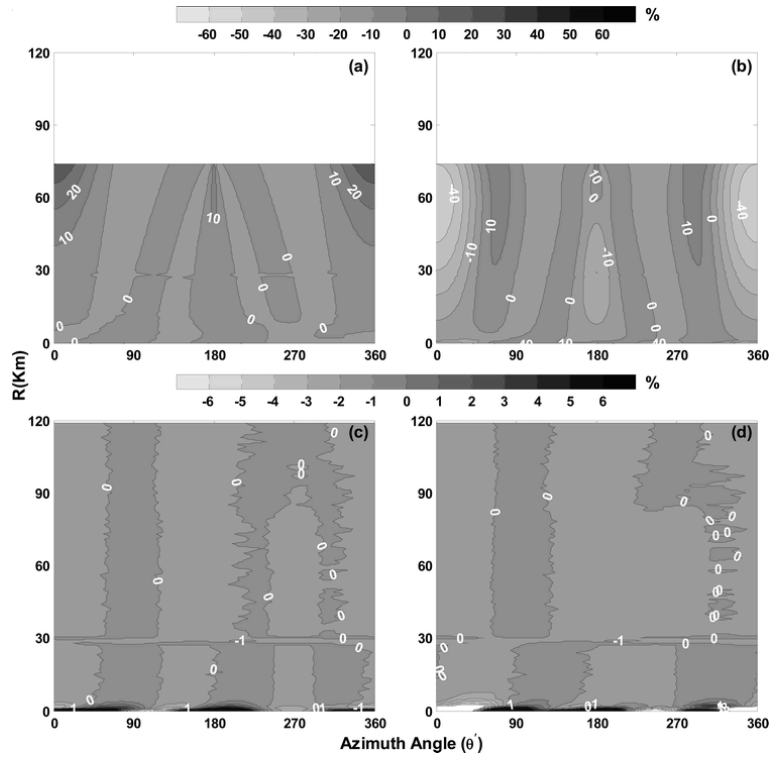


図 2.5.5: (a) 波数 2 の GBVTD リトリールされた V_T , (b) 波数 3 の GBVTD リトリールされた V_T , (c) 波数 2 の GVTD リトリールされた V_T , (d) 波数 3 の GVTD リトリールされた V_T の各場合における, θ' (x 軸, $^\circ$) と R (y 軸, km) の関数としての, リトリールされた渦の相対誤差分布.

(4 列目) の場合の解析, GBVTD, GVTD で得られた風速場を示している. GBVTD でリトリールされた非対称風の顕著な歪み [中列, Lee et al. (1999) での議論] は GVTD でリトリールされた非対称風 (右列) ではほぼ存在しない. 中列の白抜き部分 ($R = 75$ km 以遠) は, GBVTD でリトリールされた風がゼロというわけではない. それは GBVTD では $R/R_T < 1$ の制限があるため, GBVTD の推定値がないことによるもので, GBVTD に対する GVTD の長所が明確に示されている.

図 2.5.5 は, 波数 2 と 3 の非対称性について, θ' (x 軸) と R (y 軸) の関数としての, リトリールされた風の誤差分布を示す (波数 0 と 1 の場合の誤差は無視できるので, 図略). GBVTD (図 2.5.5a,b) では, 誤差は R と正の相関があり, また非対称性の位相にも大きく依存している. 一般的に, GBVTD 法では波数 2 の渦が非常によくリトリールされる [図 2.5.4c(2)]. 最も悪い誤差 (10% 以上) は R_T ベクトルに沿って $R = 40$ km 以上で発生している. 波数 3 の場合 (図 2.5.5b), 中心 [$\theta = 0$, 図 2.5.4d(2)] を超えて R_T ベクトルに沿って風のピークを取り出すことができず, 大きな R では位相と振幅に大きな歪みが生じる.

一方, GVTD ではこのような半径や位相に依存した誤差分布は見られず (図 2.5.5c,d), 中心付近の領域を除いて誤差は無視できるレベル ($< 1\%$) である. したがって, GVTD に

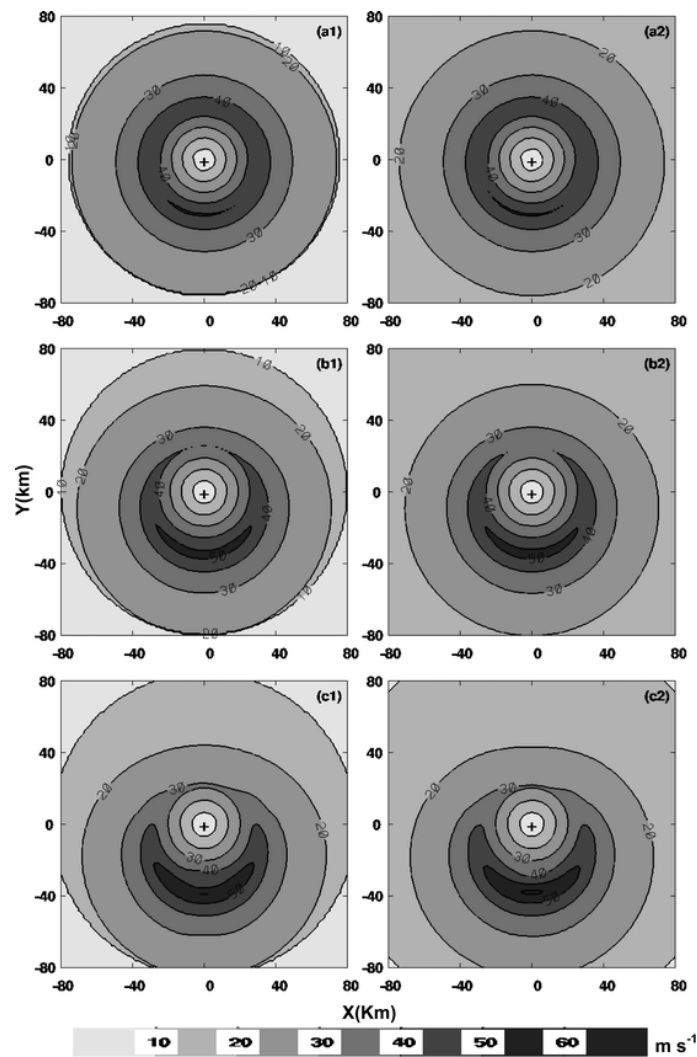


図 2.5.6: R_T ベクトル (y 軸) に沿って渦中心について所定のずれを与えた場合の, GBVTD と GVTD で取得した純粋な回転渦構造の比較. [a(1)] GBVTD と [a(2)] GVTD で取得された構造の中心のずれが 1 km の場合. [a(1)], [a(2)] と同じだが, 中心のずれがそれぞれ [b(1)], [b(2)] 5 km, [c(1)], [c(2)] 10 km の場合.

よる解析は非常にロバストであり, 取得した非対称風速場の幾何学的な歪みをほぼ解消することができる.

5.2 推定中心がずれた場合の検証 (C シリーズ)

図 2.5.6a-c は, R_T ベクトル (y 軸) に沿って中心を真の中心から (a) 1 km, (b) 5 km, (c) 10 km ずらした場合の, GBVTD および GVTD でリトリバルした渦の構造を示している. 元の渦には軸対称の V_T のみが含まれている. いずれの場合も, 中心のずれとは逆

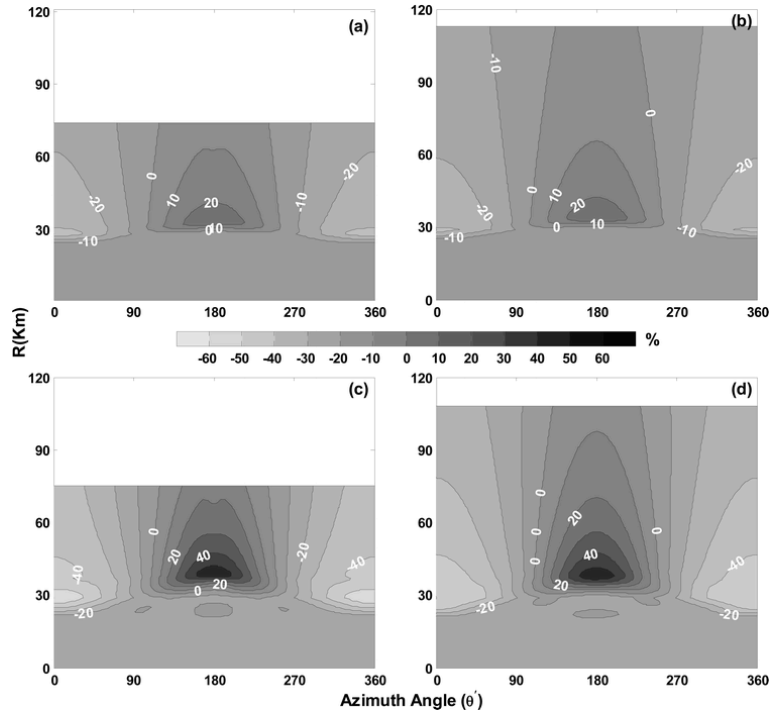


図 2.5.7: θ' と R の関数としての、リトリールされた渦の相対誤差分布. (a) GBVTD, (b) GVTD でリトリールした渦の中心のずれが 5 km の場合, (c), (d) は (a), (b) と同じだが, 中心のずれが 10 km の場合の結果.

方向に見かけの波数 1 成分が発生し, 中心のずれが大きくなるにつれて振幅が大きくなっていることがわかる. これらの誤差は, 信号処理におけるエイリアシング誤差に類似する. 中心ずれの量が 1 km の場合, この誤差は小さくなる (図略). 図 2.5.7 によると, 中心のずれが 5 km および 10 km の場合, GBVTD および GVTD で取得した風速場の RMW 付近での誤差は, 解析的な軸対称渦の 50% にもなる (図 2.5.7c, d). これらの結果は, どちらの手法も中心部の不確かさに敏感でありながら, 似たような誤差特性を持つことを強く示唆する. 合理的に正しい渦の風をリトリールする (例えば, 軸対称の接線成分の誤差が 20% 以下) ためには, 中心の不確かさが 5 km を超えてはいけない.

さらなる検証のために, 様々な中心位置のずれに対して, GBVTD と GVTD でリトリールした $V_{T_{\max}}$ と $V_{R_{\max}}$ の二乗平均平方根誤差 (RMSE) を計算した. その結果, $V_{T_{\max}}$ の RMSE は, x および y 方向の中心変位の関数として (図 2.5.8a, b), 中心位置のずれの大きさに準線形に比例していることがわかった. GVTD で取得した $V_{T_{\max}}$ の誤差は, GBVTD で取得した $V_{T_{\max}}$ よりも約 40% 少ない. 中心位置が 2 km ずれた場合, GBVTD では約 3% の誤差 ($V_{T_{\max}} = 50 \text{ m s}^{-1}$ の場合は 1.5 m s^{-1} の誤差), GVTD では約 2% の誤差が生じる. この誤差は, 中心が \mathbf{R}_T ベクトルに垂直にずれた場合には対称となる. 中心が \mathbf{R}_T ベクトルに沿ってずれている場合は, 中心の近辺 (遠辺) で誤差が大きく (小さく) なる. $V_{R_{\max}}$ の誤差分布は, 2 つの手法で大きく異なる (図 2.5.8c, d). GBVTD の $V_{R_{\max}}$ の誤差は, 中心に対してより対称的であるのに対し, GVTD の $V_{R_{\max}}$ の誤差は, \mathbf{R}_T ベクトルに

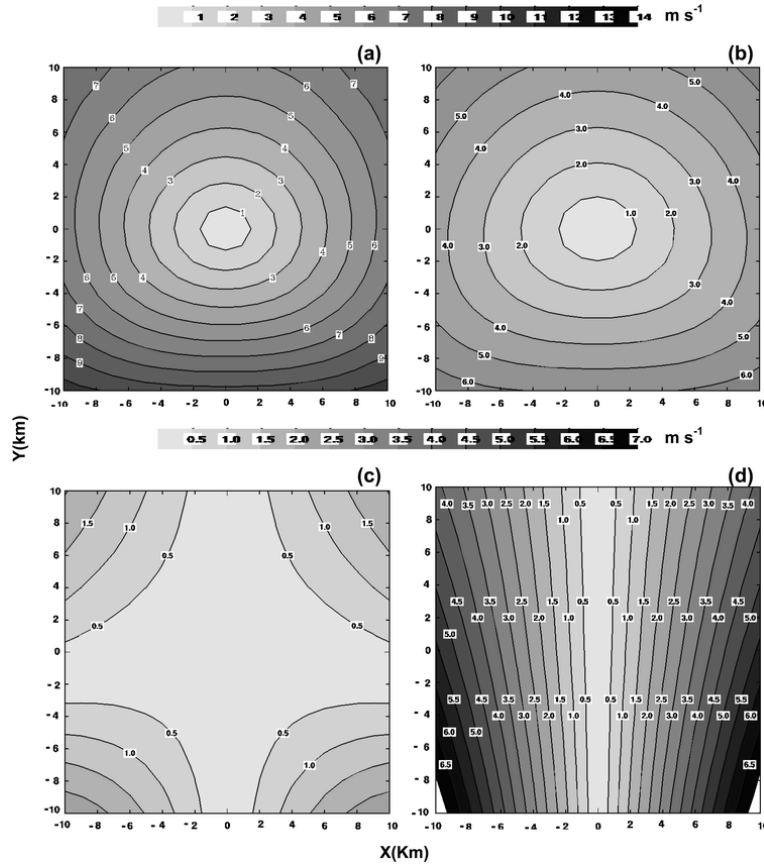


図 2.5.8: 中心位置のずれに対応する GBVTD および GVTD でリトリールした $V_{T_{\max}}$ および $V_{R_{\max}}$ に対する, 真の中心からの x, y の関数としての RMSE 分布. $V_{T_{\max}}$ は (a) GBVTD と (b) GVTD で, $V_{R_{\max}}$ は (c) GBVTD と (d) GVTD でリトリールした.

垂直な中心のずれに対してより敏感である. 中心位置のずれが約 2 km という典型的な状況 (Lee and Marks 2000) では, どちらの手法も非常に良い性能を示す.

5.3 平均風の感度 (VM シリーズ)

GVTD でリトリールされた軸対称の渦が, \mathbf{R}_T ベクトルに垂直な方向の平均風の不確かさに対する感度を図 2.5.9 に示す. 誤差分布は, $V_{T_{\max}}$ と $V_{R_{\max}}$ で大きく異なる. リトリールされた $V_{T_{\max}}$ は平均風速の誤差に敏感であることがわかる. 平均風速の 50% の誤差は, $V_{T_{\max}}$ の約 10% の誤差になる. $V_{T_{\max}}$ の誤差は, 割り当てられた平均風速の誤差に比例して大きくなる. しかし, $V_{R_{\max}}$ の誤差は, 平均風向により敏感である. 平均風向が \mathbf{R}_T ベクトルに沿っている場合 (VM2 実験, 図略) は, 状況が逆転し, リトリールされた $V_{T_{\max}}$ は平均風向に対してより敏感になり, リトリールされた $V_{R_{\max}}$ は平均風速に対してより敏感になる.

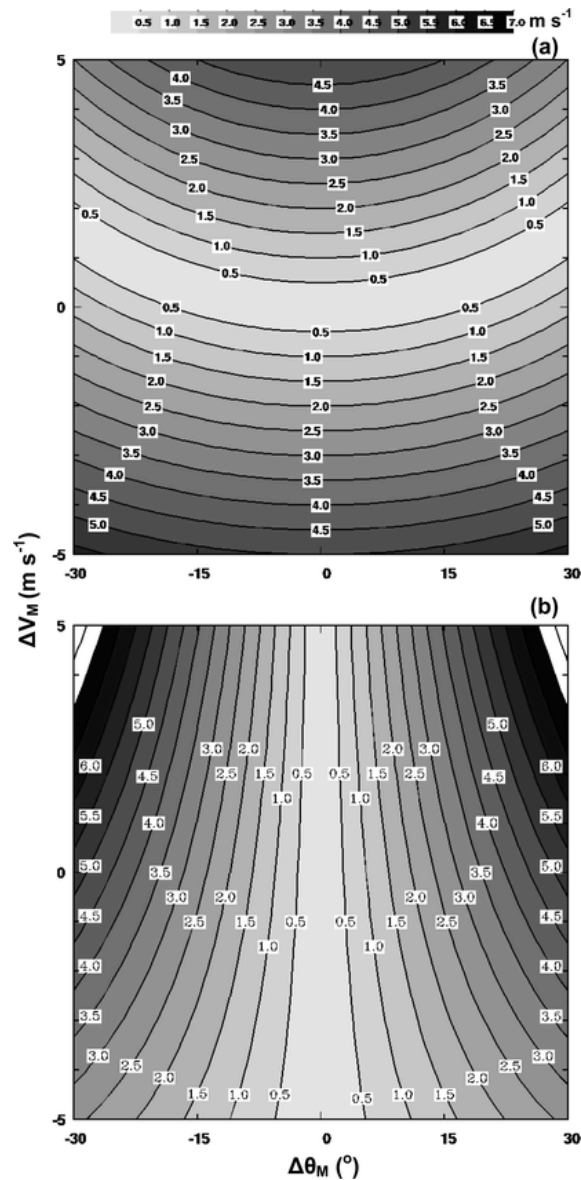


図 2.5.9: GVTD で取得された渦に対する平均風の影響. (a) は $V_{T_{\max}}$, (b) は $V_{R_{\max}}$ をリトリーバルした際の RMSE. 平均風は \mathbf{R}_T ベクトルに垂直で, 大きさは 10 m s^{-1} .

6 台風 Gladys

本節では, 台風 Gladys (1994) を用いて, $V_d D / R_T$ 表示における平均風と渦のパターンについて理解を深める. JTWC によると, Gladys は中程度の強さの比較的小さな台風であった. 4 km 高度での Gladys の V_d の CAPPI 表示 (図 2.5.10a) を見ると, Gladys の内部コアの直径は約 35 km で, 表示の右下に円で示されている. ドップラー速度は, 近づく成分が 50 m s^{-1} を超え, 遠のく成分は 15 m s^{-1} 程度である. この顕著な非対称構造は,

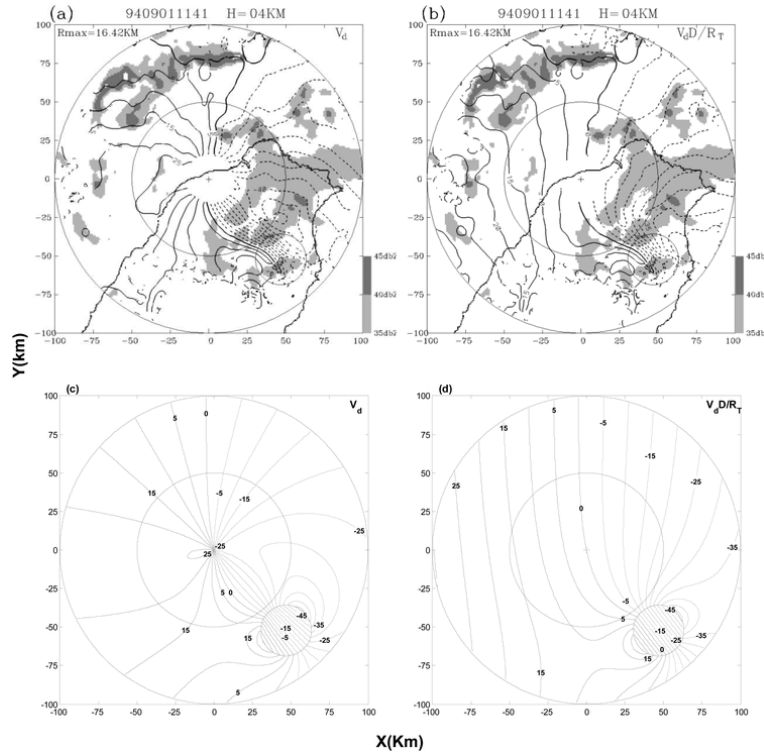


図 2.5.10: 台湾北部の民間航空局のドップラーレーダーで観測された高度 4 km における台風 Gladys の (a) V_d および (b) $V_d D/R_T$ の CAPPI 表示. $V_M = 20 \text{ m s}^{-1}$, $\theta_M = -90^\circ$ (東風), $V_{T_{\max}} = 35 \text{ m s}^{-1}$, $V_R = 0$ をパラメータとした (c) V_d , (d) $V_d D/R_T$ のシミュレーション結果.

強い平均流と非対称な渦の組み合わせの可能性を示している. 図 2.5.10b は, $V_d D/R_T$ 表示を示す. 渦の循環は右下に集中していることがわかる. レーダーの左側 (中央の反対側) に南北方向にほぼ平行な直線があることから, この高度では東西方向の平均風が吹いていると考えられる.

RMW=16.5 km, $V_{T_{\max}} = 35 \text{ m s}^{-1}$ の Gladys サイズのランキン渦が, 20 m s^{-1} の東風の平均風に埋もれた場合の流れ場をシミュレーションし, 対応する V_d と $V_d D/R_T$ の表示を図 2.5.10c, d に示す. V_T と V_R が非対称であっても, V_d (図 2.5.10a, c) と $V_d D/R_T$ (図 2.5.10b, d) の表示は, 観測値とシミュレーション値が非常によく似ている. $V_d D/R_T$ 表示では, 渦の全体的な特徴とそれに伴う平均流の特徴をそれなりの精度で推定することができるが, V_d 表示では平均風が識別できるほどわかりやすいものではない (図 2.5.10a). なお, レーダーの北約 70 km に東西方向の線状の対流群があるため, 図 2.5.10d のように $V_d D/R_T$ の等値線が南北方向ではなく, 図 2.5.10b では東西方向になっている. また, レーダーの北東に位置するレインバンドでは, 非対称な渦成分が存在する可能性があるため, 実際の $V_d D/R_T$ とシミュレーションの $V_d D/R_T$ の違いが見られる.

7 まとめと今後の課題

本論文では、大気中の渦の力学的構造を表示、解釈、リトリバルするための新しいパラダイムとして、新しい変数 $V_d D/R_T$ を用いた GVTD 法を紹介した。解析的な渦を用いて、渦の $V_d D/R_T$ 表示と GVTD 法の特性を調べ、 V_d 表示と GBVTD 法のレーダーパターンと比較した。 $V_d D/R_T$ 表示は、渦の解釈を単純化し、 V_d 表示におけるダイポールパターンの幾何学的な歪みを取り除くことができることが明らかになった。また、GVTD は一連の VTD 手法をより一般的にしたものであることが示されている。GVTD 法が GBVTD 法に比べて優れている点は以下の通りである。

1. 幾何学的歪みの小ささ: $V_d D/R_T$ 変数は、線形座標系での渦の循環と関連する。特に高波数の非対称風が含まれる場合や、 R/R_T が 1 程度の場合には、GBVTD での非対称風の歪みがほぼ解消される。
2. 解析領域の拡張: GBVTD では、解析領域が $R/R_T < 1$ に限定されており、 R/R_T が 1 に近づくにつれて、取得された風速場の歪みが悪化する。GVTD では、図 2.5.4 に示すように、GVTD の解析に十分なデータがあれば、ドップラーレーダーの全領域に解析を拡張することができる。特に、 $R > R_T$ におけるダイポール構造の復元能力は特筆すべきである。この特性は、将来的に GVTD で得られた風を数値モデルに同化する際に特に重要となる。
3. わかりやすさ: 平均風の主観的な推定は、渦の循環がドップラー速度を支配していないときに、 $V_d D/R_T$ 表示から行う。この状況では、一定の平均風は平行な等値線として現れ、主観的に容易に認識することができる。渦のパターンと平均風のパターンを分離できることは、今後、渦の平均流の相互作用を研究する上で有用なツールとなる。

$V_d D/R_T$ 空間で中心位置と RMW を推定する場合、特に軸対称に近い渦の場合、VDAD 法は V_d 空間の Wood and Brown (1992) 法よりも有利である。VDAD 法は、渦の全体的な特徴を迅速に判断するために、現業環境では特に有効である。中心位置と RMW を推定するための、より定量的でロバストなアルゴリズムは、GVTD とシンプレックス法を組み合わせたもので、今後の論文で紹介する。

このような利点がある一方で、GVTD 法には言及すべき限界がある。まず、中心ずれの検証 (C シリーズ) から、GVTD からリトリバルされた $V_{R_{\max}}$ は、GBVTD 法から得られた $V_{R_{\max}}$ に比べて、中心の精度に対して 3 倍敏感であることがわかる (図 2.5.8c, d)。しかし、中心付近の約 2 km という典型的な不確かさでは、その誤差は大きくない。第 2 に、平均風ベクトルの主観的な決定は、渦の循環が大きい場合 (例えば、ハリケーン Katrina (2005)) には困難である。第 3 に、 $V_d D/R_T$ の距離加重は、ドップラー速度を再スケールするものである。ノイズや限定された曖昧な範囲に起因する大きな範囲でのデータの欠落が、GVTD 係数の最小二乗フィッティングに、GBVTD 技術とは異なる影響を与える可能性がある。

現在, これらの限界を見積もり, 解決するためにいくつかの研究が行われている. $V_d D / R_T$ 表示における一定の平均風パターンを利用して, 最適な平均風ベクトルと中心位置を同時に推定する自動化された方法が開発されている. GVTD を実際の大気中の渦に適用し, 実際の観測に伴う制限 (データの欠落, 距離の重み付けなど) を検討する. これらの話題は今後の論文で報告される.

付録 A: VTD と GVTD

本付録では, $R/R_T \sim 0$ の極限において, (J08-6) 式が VTD [Lee et al. (1994) の式 (3)] と同一であることを証明することで, GVTD が VTD の一般的な形式であることを示すことを意図している. なお, 航空機搭載ドップラーレーダー (例えば, Lee et al. 1994 の図 3) と本稿の地上レーダー (図 2.1.1) とでは, 形状や記号が異なる. VTD の飛行コースが東西方向に向いていると仮定すると (Lee et al. 1994 の図 3), GVTD の幾何形状 (図 2.1.1) では $\theta_T = \pi/2$ となることと等価である. VTD の方位角 $\theta(\theta^{\text{VTD}})$ (Lee et al. 1994 の ϕ) と GVTD の方位角 $\theta(\theta^{\text{GVTD}})$ は, $\theta^{\text{VTD}} = \theta^{\text{GVTD}} - \pi$ となる. また, VTD の V_d が正の場合 (V_d^{VTD}) は, 渦の V_T (低気圧性回転) と V_R (動径風) が正の場合に相当し, GVTD の V_d はその逆になる. $R/R_T \sim 0$ の極限では, θ を θ^{GVTD} に, $\theta_T - \theta_M$ を $\pi/2 - \theta_M^{\text{GVTD}}$ に置き換えると, (J08-6) は次のようになる:

$$\begin{aligned}
 V_d^{\text{GVTD}} &= V_M \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_M^{\text{GVTD}}\right) - V_T \sin\left(\theta^{\text{GVTD}} - \frac{\pi}{2}\right) + V_R \cos\left(\theta^{\text{GVTD}} - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= V_M \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_M^{\text{VTD}} - \pi\right) - V_T \sin\left(\theta^{\text{VTD}} + \pi - \frac{\pi}{2}\right) + V_R \cos\left(\theta^{\text{VTD}} + \pi - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= V_M \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta_M^{\text{VTD}}\right) - V_T \sin\left(\theta^{\text{VTD}} + \frac{\pi}{2}\right) + V_R \cos\left(\theta^{\text{VTD}} + \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= -V_M \sin\theta_M^{\text{VTD}} - V_T \cos\theta^{\text{VTD}} - V_R \sin\theta^{\text{VTD}} \\
 &= -V_d^{\text{VTD}}.
 \end{aligned} \tag{J08-A1}$$

これより, $R/R_T \sim 0$ の極限において, GVTD は VTD に帰着されることが示される.

付録 B: 平均風ベクトルの導出

(J08-5) 式から始めて, D を左辺に移動させる. 一様な平均風のみを考えると,

$$\begin{aligned}
 V_d D &= V_M \cos\theta_M (R \cos\theta + R_T \cos\theta_T) + V_M \sin\theta_M (R \sin\theta + R_T \sin\theta_T) \\
 &= V_M \cos\theta_M (x' + x_T) + V_M \sin\theta_M (y' + y_T) \\
 &= V_M (x \cos\theta_M + y \sin\theta_M),
 \end{aligned} \tag{J08-B1}$$

ここで, $x_T = R_T \cos\theta_T$, $y_T = R_T \sin\theta_T$, $x' = R \cos\theta$, $y' = R \sin\theta$ である (図 2.1.1). 直交座標 (x, y) の原点はレーダーにある. この式は, 一様な平均風の場合, V_M と θ_M が一

定^{*4}であるため, $ax + by = c$ という直線の形になる.

(J08-B1) の勾配をとると,

$$\begin{aligned}\nabla(V_d D) &= \left[\frac{\partial}{\partial x}(V_d D) + \frac{\partial}{\partial y}(V_d D) \right] \\ &= (V_M \cos \theta_M, V_M \sin \theta_M),\end{aligned}\tag{J08-B2}$$

が得られる. ゆえにこの勾配ベクトルの方向が θ_M である. 一方, この勾配ベクトルの大きさは V_M である.

ここで (J08-B2) 式は R_T に独立であり, デカルト座標系で表現されていることに注意する. 結果として, $V_d D$ を用いて平均風ベクトルを見積もることは, 任意の流れ場に適用することができ, 大気中の渦だけに制限されない.

^{*4}(原文誤植) 原文では「 θ_T が一定」となっていたが, 一様な平均風については θ_M が一定となるのが正しい.

第3章 ヘルムホルツ分解によるクロージャー (GVTD-X)

1 手法の定式化

これまでのレビューから, 台風渦の循環の推定に GBVTD, GVTD を用いた場合, 推定精度に影響を与えうる問題点は以下になる:

1. 非対称動径風成分の無視による軸対称成分へのエイリアジング.
2. 循環推定結果の精度に対する中心点の推定誤差の厳しさ.

このうち, 問題点 1 を解決するため^{*1}, 彼らと異なるアプローチから非対称動径風成分を考慮し, より高精度な軸対称成分の推定手法を考案する.

考える状況は図 3.1.1 に示される. レーダから台風中心までの距離 R_T を台風中心から点 A までの距離 r で規格化すると,

$$\rho \equiv \frac{R_T}{r}.$$

線分 OA 間の距離 (D_A):

$$D_A = \sqrt{r^2(\rho + \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta}$$

についても r で規格化し,

$$\delta \equiv \frac{D_A}{r} = \sqrt{\rho^2 + 2\rho \cos \theta + 1}.$$

線分 OA の方向ベクトル \mathbf{k} は (x, y) 座標で

$$\mathbf{k} = [\cos \theta_d, \sin \theta_d]. \quad (1)$$

^{*1}構築した後に判明したことであるが, 本手法は中心点推定に誤差がある場合でも他の手法より精度がよく, 問題点 2 についても改良した手法となっている.

る.

(3), (4) 式から, storm-relative なドップラー速度 \mathcal{V}'_d は

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}'_d &\equiv \mathcal{V}_d - \mathcal{V}_S \\
 &= \frac{1}{\delta} (\rho u + u \cos \theta + v \sin \theta) - \frac{1}{\delta} (\rho u_S + u_S \cos \theta + v_S \sin \theta) \\
 &= \frac{1}{\delta} [\rho (u - u_S) + (u - u_S) \cos \theta + (v - v_S) \sin \theta] \\
 &= \frac{1}{\delta} \{-V [\sin \theta (\rho + \cos \theta) - \cos \theta \sin \theta] + U [\cos \theta (\rho + \cos \theta) + \sin \theta \sin \theta]\} \\
 &= \frac{1}{\delta} (-V \rho \sin \theta + U \rho \cos \theta + U).
 \end{aligned} \tag{6}$$

(6) 式より,

$$\mathcal{V}'_d \delta = -V \rho \sin \theta + U \rho \cos \theta + U. \tag{7}$$

GVTD との対応関係を見るため, (J08-7) を本手法の記号で整理すると,

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta}{\rho} \mathcal{V}_d &= \frac{\hat{U}}{\rho} + u_M - \left[\hat{V} - \frac{v_M}{\rho} \right] \sin \theta + \left[\hat{U} + \frac{u_M}{\rho} \right] \cos \theta \\
 &= \frac{\delta}{\rho} \frac{1}{\delta} (v_M \sin \theta + \rho u_M + u_M \cos \theta) + \frac{\hat{U}}{\rho} - \hat{V} \sin \theta + \hat{U} \cos \theta \\
 &= \frac{\delta}{\rho} \mathcal{V}_M + \frac{\hat{U}}{\rho} - \hat{V} \sin \theta + \hat{U} \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{8}$$

ここで $\mathcal{V}_M \equiv \frac{1}{\delta} (v_M \sin \theta + \rho u_M + u_M \cos \theta)$ は平均風のドップラー視線風成分として定義された. よって, $\mathbf{V}_S = \mathbf{V}_M$ なら, GVTD と本手法の U, V は一致する. GVTD は平均風も未知変数としてリトリバブルに組み込んでいるのに対し, 本手法は storm-relative な U, V を storm-relative なドップラー速度 \mathcal{V}'_d からリトリバブルしようとしている. したがって, 本手法は未知変数の個数が GVTD より一つ少ない設定であることに注意する^{*2}.

再び (7) に着目する. 水平風 \mathbf{V} の storm-relative な風 $\mathbf{V}' \equiv \mathbf{V} - \mathbf{V}_S$ はヘルムホルツの分解定理から, 回転風 (\mathbf{V}_{rot}), 発散風 (\mathbf{V}_{div}), 非回転非発散風 (\mathbf{V}_{non}) で

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V}_{\text{non}} + \mathbf{V}_{\text{rot}} + \mathbf{V}_{\text{div}}. \tag{9}$$

と表現できる. 次に, 流線関数 $\Phi(r, \theta)$, 速度ポテンシャル $\Psi(r, \theta)$ を導入すると, $\mathbf{V}_{\text{rot}}, \mathbf{V}_{\text{div}}$ はそれぞれこれらのスカラー変数の空間勾配で表現できる. ただし, (9) 式の \mathbf{V}_{non} は Φ, Ψ のどちらを用いて表現することもできる. そこで本手法では Φ を用いて表すことにする. よって (9) 式は

$$\begin{aligned}
 V &= V_{\text{rot}} + V_{\text{div}}, \\
 U &= U_{\text{rot}} + U_{\text{div}}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

^{*2}GVTD においても, v_M 成分はリトリバブル式からではなく, 別の独立な方法で求めようとしている.

ただし, (10) 式において

$$V_{\text{rot}} = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad (11)$$

$$U_{\text{rot}} = \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta}, \quad (12)$$

$$V_{\text{div}} = -\frac{\partial \Psi}{r \partial \theta}, \quad (13)$$

$$U_{\text{div}} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (14)$$

ここで V_{rot} , U_{rot} は回転風と非回転非発散風の和の接線・動径成分, V_{div} , U_{div} は発散風の接線・動径成分である.

非回転非発散流が流線関数のみで表現されるように, 速度ポテンシャルに制約条件をつける. これには速度ポテンシャルと発散 (D) の関係:

$$\nabla^2 \Psi = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \right] \Psi = D, \quad (15)$$

が用いられる. 上式の基本解はグリーン関数 $G(r, \theta; r', \theta')$ を用いて

$$\Psi = \iint_{S_0} G(r, \theta; r', \theta') D(r', \theta') dS, \quad (16)$$

もし $D = 0$ なら, 上式から $\Psi = \text{const.}$ となる. これは非発散の場合, 速度ポテンシャルが一定値であること, すなわち非回転非発散風成分が速度ポテンシャルに含まれないことを意味する.

Φ , Ψ を具体的に

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{k=0}^N \Phi_k = \Phi_0(r) + \sum_{k=1}^N [\Phi_{S,k}(r) \sin(k\theta) + \Phi_{C,k}(r) \cos(k\theta)], \quad (17)$$

$$\Psi(r, \theta) = \sum_{k=0}^N \Psi_k = \Psi_0(r) + \sum_{k=1}^N [\Psi_{S,k}(r) \sin(k\theta) + \Psi_{C,k}(r) \cos(k\theta)]. \quad (18)$$

と表現する. これらを用いて (11) から (14) 式は

$$V_{\text{rot}}(r, \theta) = V_{\text{rot},0}(r) - \sum_{k=1}^N \left[\frac{\partial \Phi_{S,k}}{\partial r} \sin(k\theta) + \frac{\partial \Phi_{C,k}}{\partial r} \cos(k\theta) \right], \quad (19)$$

$$U_{\text{rot}}(r, \theta) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^N \{k [\Phi_{S,k}(r) \cos(k\theta) - \Phi_{C,k}(r) \sin(k\theta)]\}, \quad (20)$$

$$V_{\text{div}}(r, \theta) = -\frac{\partial}{r \partial \theta} \sum_{k=1}^N \Psi_k, \quad (21)$$

$$U_{\text{div}}(r, \theta) = U_{\text{div},0}(r) - \frac{\partial}{\partial r} \sum_{k=1}^N \Psi_k. \quad (22)$$

となる. ここで

$$V_{\text{rot},0} \equiv -\frac{\partial \Phi_0}{\partial r}, \quad U_{\text{div},0} \equiv -\frac{\partial \Psi_0}{\partial r}. \quad (23)$$

(19) - (23) を用いると, (10) 式は

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{rot}} + V_{\text{div}} \\ &= V_{\text{rot},0} + \sum_{k=1}^N \left\{ -\left[\frac{\partial \Phi_{C,k}}{\partial r} + \frac{k}{r} \Psi_{S,k} \right] \cos(k\theta) + \left[\frac{k}{r} \Psi_{C,k} - \frac{\partial \Phi_{S,k}}{\partial r} \right] \sin(k\theta) \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} U &= U_{\text{rot}} + U_{\text{div}} \\ &= U_{\text{div},0} + \sum_{k=1}^N \left\{ \left[\frac{k}{r} \Phi_{S,k} - \frac{\partial \Psi_{C,k}}{\partial r} \right] \cos(k\theta) - \left[\frac{\partial \Psi_{S,k}}{\partial r} + \frac{k}{r} \Phi_{C,k} \right] \sin(k\theta) \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

(24), (25) 式を用いると, storm-relative な水平風のドップラー視線方向への投影 (7) 式から

$$\begin{aligned} \mathcal{V}'_d \delta &= U_{\text{div},0}(1 + \rho \cos \theta) - V_{\text{rot},0} \rho \sin \theta \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \left\{ -\left[\frac{\partial \Psi_{S,k}}{\partial r} + \frac{k}{r} \Phi_{C,k} \right] \sin(k\theta)(1 + \rho \cos \theta) - \left[\frac{k}{r} \Psi_{C,k} - \frac{\partial \Phi_{S,k}}{\partial r} \right] \sin(k\theta) \rho \sin \theta \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{k}{r} \Phi_{S,k} - \frac{\partial \Psi_{C,k}}{\partial r} \right] \cos(k\theta)(1 + \rho \cos \theta) + \left[\frac{\partial \Phi_{C,k}}{\partial r} + \frac{k}{r} \Psi_{S,k} \right] \cos(k\theta) \rho \sin \theta \right\} \\ &= - \left\{ V_{\text{rot},0}(r) - \sum_{k=1}^N \left[\frac{\partial \Phi_{S,k}}{\partial r} \sin(k\theta) + \frac{\partial \Phi_{C,k}}{\partial r} \cos(k\theta) \right] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^N \left[\frac{k}{r} \Psi_{S,k} \cos(k\theta) - \frac{k}{r} \Psi_{C,k} \sin(k\theta) \right] \right\} \rho \sin \theta \\ &\quad + \left\{ U_{\text{div},0}(r) + \sum_{k=1}^N \left[\frac{k}{r} \Phi_{S,k} \cos(k\theta) - \frac{k}{r} \Phi_{C,k} \sin(k\theta) \right] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^N \left[\frac{\partial \Psi_{S,k}}{\partial r} \sin(k\theta) + \frac{\partial \Psi_{C,k}}{\partial r} \cos(k\theta) \right] \right\} (1 + \rho \cos \theta). \end{aligned} \quad (26)$$

Ψ は (16) 式の積分よりグリーン関数と発散で表現される. (18) 式の形で Ψ を考えると, D は

$$D(r, \theta) = \sum_{n=1}^N [D_{Sn}(r) \sin(n\theta) + D_{Cn}(r) \cos(n\theta)], \quad (27)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D(r, \theta) \begin{Bmatrix} \sin(k\theta) \\ \cos(k\theta) \end{Bmatrix} d\theta \equiv \begin{Bmatrix} D_{Sk}(r) \\ D_{Ck}(r) \end{Bmatrix}. \quad (28)$$

これより, $\Psi_{S,k}(r)$, $\Psi_{C,k}(r)$ は

$$\begin{Bmatrix} \Psi_{S,k}(r) \\ \Psi_{C,k}(r) \end{Bmatrix} = \int_0^\infty r' G_k(r; r') \begin{Bmatrix} D_{Sk}(r') \\ D_{Ck}(r') \end{Bmatrix} dr', \quad (29)$$

グリーン関数 $G(r; r')$ の具体的な形は

$$G_k(r; r') = -\frac{1}{2k} \begin{cases} (r/r')^k, & (r \leq r') \\ (r'/r)^k, & (r > r') \end{cases}, \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (30)$$

ここで $k = 0$ 成分は (26) 式において $U_{\text{div},0}$ として速度で表現されているため, 発散で拘束する必要がないことに注意する (速度ポテンシャルを用いない). (18) 式に (29) 式を代入すると,

$$\Psi(r, \theta) = \Psi_0(r) + \sum_{k=1}^N \left[\int_0^\infty r' G_k(r; r') D_{Sk}(r') dr' \sin(k\theta) + \int_0^\infty r' G_k(r; r') D_{Ck}(r') dr' \cos(k\theta) \right]. \quad (31)$$

(31) と (21), (22) から

$$\begin{aligned} V_{\text{div}} &= -\frac{\partial}{r \partial \theta} \left\{ \sum_{k=1}^N \int_0^\infty [r' G_k(r; r') D_{Sk}(r') \sin(k\theta) + r' G_k(r; r') D_{Ck}(r') \cos(k\theta)] dr' \right\} \\ &= -\sum_{k=1}^N \int_0^\infty \left\{ \frac{kr'}{r} G_k(r; r') [D_{Sk}(r') \cos(k\theta) - D_{Ck}(r') \sin(k\theta)] \right\} dr', \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} U_{\text{div}} &= U_{\text{div},0} - \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \sum_{k=1}^N \int_0^\infty [r' G_k(r; r') D_{Sk}(r') \sin(k\theta) + r' G_k(r; r') D_{Ck}(r') \cos(k\theta)] dr' \right\} \\ &= U_{\text{div},0} - \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \left\{ r' \frac{\partial G_k}{\partial r} [D_{Sk}(r') \sin(k\theta) + D_{Ck}(r') \cos(k\theta)] \right\} dr'. \end{aligned} \quad (33)$$

次に, $(r, \theta) = (r_i, \theta_j)$, $(i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$ と離散化する. r 方向の離散化された格子は Δr で等間隔にとられる. θ 方向は任意の半径で同じ格子点数 (n) で離散化される (すなわち, 外側ほど θ 方向の格子間距離が長い). また風の場合は r_i と半格子ずれた半径 $r_{i+1/2}$, $(i = 1, \dots, m-1)$ で定義され (図 3.1.1 の実線の円上), 流線関数, 速度ポテンシャルは r_i , $(i = 1, \dots, m)$ で定義される (図 3.1.1 の破線の円上). すると, (26), (32), (33) 式

から,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}'_d \delta = & \left\{ -V_{\text{rot},0,i+1/2} + \sum_{k=1}^N \left[\frac{\Phi_{S,k,i+1} - \Phi_{S,k,i}}{\Delta r} \sin(k\theta_j) + \frac{\Phi_{C,k,i+1} - \Phi_{C,k,i}}{\Delta r} \cos(k\theta_j) \right] \right. \\
& + \frac{1}{r_{i+1/2}} \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \left\{ kr' G_k(r_{i+1/2}; r') [D_{Sk}(r') \cos(k\theta_j) - D_{Ck}(r') \sin(k\theta_j)] \right\} dr' \Big\} \\
& \times \rho_{i+1/2} \sin \theta_j \\
& + \left\{ U_{\text{div},0,i+1/2} - \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \left\{ r' \frac{G_{k,i+1} - G_{k,i}}{\Delta r} [D_{Sk}(r') \sin(k\theta_j) + D_{Ck}(r') \cos(k\theta_j)] \right\} dr' \right. \\
& + \frac{1}{r_{i+1/2}} \sum_{k=1}^N \left\{ k [\Phi_{S,k,i+1/2} \cos(k\theta_j) - \Phi_{C,k,i+1/2} \sin(k\theta_j)] \right\} \Big\} (1 + \rho_{i+1/2} \cos \theta_j) \\
\approx & \left\{ -V_{\text{rot},0,i+1/2} + \sum_{k=1}^N \left[\frac{\Phi_{S,k,i+1} - \Phi_{S,k,i}}{\Delta r} \sin(k\theta_j) + \frac{\Phi_{C,k,i+1} - \Phi_{C,k,i}}{\Delta r} \cos(k\theta_j) \right] \right. \\
& + \frac{\Delta r}{r_{i+1/2}} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^m \left\{ \varepsilon_l k r'_l G_{k,i+1/2,l} [D_{S,k,l} \cos(k\theta_j) - D_{C,k,l} \sin(k\theta_j)] \right\} \Big\} \\
& \times \rho_{i+1/2} \sin \theta_j \\
& + \left\{ U_{\text{div},0,i+1/2} - \Delta r \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^m \left\{ \varepsilon_l r'_l \frac{G_{k,i+1,l} - G_{k,i,l}}{\Delta r} [D_{S,k,l} \sin(k\theta_j) + D_{C,k,l} \cos(k\theta_j)] \right\} \right. \\
& + \sum_{k=1}^N \left[k \frac{\Phi_{S,k,i+1} + \Phi_{S,k,i}}{2r_{i+1/2}} \cos(k\theta_j) - k \frac{\Phi_{C,k,i+1} + \Phi_{C,k,i}}{2r_{i+1/2}} \sin(k\theta_j) \right] \Big\} \\
& \times (1 + \rho_{i+1/2} \cos \theta_j). \tag{34}
\end{aligned}$$

ここで, 点 i で定義される変数 x_i に対する, 点 $i + 1/2$ での値 $x_{i+1/2}$ は

$$x_{i+1/2} \equiv \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

と定義され, 変数 $f(r)$ の r 方向の積分演算は離散変数 $f(r_i) \equiv f_i$ に対して, 台形積分

$$\int_0^\infty f(r) dr \approx \frac{\Delta r}{2} \left[f_1 + f_m + 2 \sum_{i=2}^{m-1} f_i \right] = \Delta r \sum_{i=1}^m \varepsilon_i f_i, \quad \varepsilon_i \equiv \begin{cases} 1/2, & (i = 1, m) \\ 1, & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で近似される.

ドップラー風速の観測 \mathcal{V}_d^o からこれらの未知変数を求めるための拘束条件として,

$$\mathcal{R} \equiv \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{m-1} [\mathcal{V}_d^o \delta - \mathcal{V}'_d \delta]^2, \quad (\mathcal{V}_d^o \equiv \mathcal{V}_d^o - \mathcal{V}_S) \tag{35}$$

となる残差 \mathcal{R} を最小とする変数の組み合わせを求める (すなわち, 最小二乗法推定).

$\mathcal{V}'_d \delta$ は全ての未知変数に対して線形な演算なので格子点 $(i + 1/2, j)$ 上での値を便宜上

$$(\mathcal{V}'_d \delta)_l = \sum_{k=1}^P \alpha_k f_{k,l} \quad (36)$$

と表記する. ここで l は 2 次元の格子点 (i, j) を 1 次元に並べた際のインデックス, $f_{k,l}$ は未知変数 α_k の格子点 l 上での係数である. α_k の具体的な定義は

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= V_{\text{rot},0,3/2}, \quad \alpha_2 = U_{\text{div},0,3/2}, \\ \alpha_{2+1} &= \Phi_{S,1,2}, \quad \dots, \quad \alpha_{2+N} = \Phi_{S,N,2}, \\ \alpha_{2+N+1} &= \Phi_{C,1,2}, \quad \dots, \quad \alpha_{2+2N} = \Phi_{C,N,2}, \\ \alpha_{2+2N+1} &= D_{S,1,2}, \quad \dots, \quad \alpha_{2+2N+M} = D_{S,M,2}, \\ \alpha_{2+2N+2M+1} &= D_{C,1,2}, \quad \dots, \quad \alpha_{2+2N+2M} = D_{C,M,2}, \\ &\vdots \\ \alpha_{(2+2N+2M)(i-1)+1} &= V_{\text{rot},0,i+1/2}, \quad \alpha_{(2+2N+2M)(i-1)+2} = U_{\text{div},0,i+1/2}, \\ \dots, \quad \alpha_{(2+2N+2M)(i-1)+2+k} &= \Phi_{S,k,i+1}, \quad \dots, \quad \alpha_{(2+2N+2M)(i-1)+2+N+k} = \Phi_{C,k,i+1}, \\ \dots, \quad \alpha_{(2+2N+2M)(i-1)+2+2N+l} &= D_{S,l,i+1}, \quad \dots, \quad \alpha_{(2+2N+2M)(i-1)+2+2N+M+l} = D_{C,l,i+1}, \\ &\vdots \\ \dots, \quad \alpha_{(2+2N+2M)(m-1)} &= D_{C,M,m}, \quad \alpha_{(2+2N+2M)(m-1)+1} = D_{S,1,1}, \\ \dots, \quad \alpha_{(2+2N+2M)(m-1)+M} &= D_{S,M,1}, \quad \dots, \quad \alpha_{(2+2N+2M)(m-1)+2M} = D_{C,M,1}. \end{aligned} \quad (37)$$

このとき, \mathcal{R} を最小にする α_k の組み合わせは,

$$\left[\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \alpha_k}, \dots, \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \alpha_P} \right]^T = \mathbf{0}. \quad (38)$$

(38) 式の α_k についての具体的な式は (35), (36) から

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \alpha_k} = \sum_{l=1}^L f_{k,l} \left[\sum_{q=1}^P \alpha_q f_{q,l} - (\mathcal{V}'_d \delta)_l \right] = \sum_{l=1}^L \left[\sum_{q=1}^P \alpha_q f_{q,l} f_{k,l} - (\mathcal{V}'_d \delta)_l f_{k,l} \right] = 0.$$

ただし, $L = n(m-1)$. よって,

$$\sum_{q=1}^P \left[\alpha_q \sum_{l=1}^L f_{q,l} f_{k,l} \right] = \sum_{l=1}^L (\mathcal{V}'_d \delta)_l f_{k,l}. \quad (39)$$

これを α_k , $k = 1, \dots, P$ についての連立方程式として解けばよい. あるいは,

$$\mathbf{x} \equiv [\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_P]^T, \quad (40)$$

$$A \equiv \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,P} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{P,1} & \dots & a_{P,P} \end{bmatrix}, \quad a_{k,q} \equiv \sum_{l=1}^L f_{k,l} f_{q,l}, \quad (41)$$

$$\mathbf{b} \equiv [b_1, \dots, b_k, \dots, b_P]^T, \quad b_k \equiv \sum_{l=1}^L (\mathcal{V}_d^o \delta)_{kl} f_{k,l} \quad (42)$$

と定義すると, (38) 式が作る未知変数についての連立方程式は

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (43)$$

に等しい. 行列 A , ベクトル \mathbf{b} はレーダ観測からわかる既知の情報である. よって上の関係から未知変数群 \mathbf{x} を求めるには, A の逆行列を求めればよい. ただし, 次章以降で述べられるとおり, このままでは A は正則にならないため逆行列が存在しない. 実際には条件 (38) 式に加えて, 各変数間に線形の関係が必要になる. そのような場合, 各変数が互いに独立であるという最小二乗法の条件が満たされなくなる. したがって, 実際の問題ではラグランジュの未定乗数法を用いて解くことになるが, 形式的には最小二乗法の条件式に追加の拘束条件が線形に追加された形になるため, 以降も本手法の求解には (制約付き) 最小二乗法という表現を用いる.

以下では f の具体的な式を求める. 一度全ての f が得られれば, (39) を構築できる. (34)

式から

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^P \alpha_k f_{k,l} \\
= & -V_{\text{rot},0,i+1/2} \rho_{i+1/2} \sin \theta_j + U_{\text{div},0,i+1/2} (1 + \rho_{i+1/2} \cos \theta_j) \\
& + \sum_{k=1}^N \left[\frac{\Phi_{S,k,i+1} - \Phi_{S,k,i}}{\Delta r} \sin(k\theta_j) + \frac{\Phi_{C,k,i+1} - \Phi_{C,k,i}}{\Delta r} \cos(k\theta_j) \right] \rho_{i+1/2} \sin \theta_j \\
& + \sum_{k=1}^N \left[k \frac{\Phi_{S,k,i+1} + \Phi_{S,k,i}}{2r_{i+1/2}} \cos(k\theta_j) - k \frac{\Phi_{C,k,i+1} + \Phi_{C,k,i}}{2r_{i+1/2}} \sin(k\theta_j) \right] (1 + \rho_{i+1/2} \cos \theta_j) \\
& + \sum_{k=1}^M \sum_{p=1}^m \left\{ \varepsilon_p \frac{kr'_p(\Delta r)G_{k,i+1/2,p}}{r_{i+1/2}} [D_{S,k,p} \cos(k\theta_j) - D_{C,k,p} \sin(k\theta_j)] \right\} \rho_{i+1/2} \sin \theta_j \\
& - \Delta r \sum_{k=1}^M \sum_{p=1}^m \left\{ \varepsilon_p r'_p \frac{G_{k,i+1,p} - G_{k,i,p}}{\Delta r} [D_{S,k,p} \sin(k\theta_j) + D_{C,k,p} \cos(k\theta_j)] \right\} (1 + \rho_{i+1/2} \cos \theta_j) \\
= & -V_{\text{rot},0,i+1/2} \underbrace{\rho_{i+1/2} \sin \theta_j}_{(=f_{(2+2N+2M)(i-1)+1,l})} + U_{\text{div},0,i+1/2} \underbrace{(1 + \rho_{i+1/2} \cos \theta_j)}_{(=f_{(2+2N+2M)(i-1)+2,l})} \\
& + \sum_{k=1}^N \underbrace{\Phi_{S,k,s} \left[\frac{\delta_{s,i+1} - \delta_{s,i}}{\Delta r} \sin(k\theta_j) \rho_{i+1/2} \sin \theta_j + k \frac{\delta_{s,i+1} + \delta_{s,i}}{2r_{i+1/2}} \cos(k\theta_j) (1 + \rho_{i+1/2} \cos \theta_j) \right]}_{(=f_{(2+2N+2M)(s-1)+2+k,l})} \\
& + \sum_{k=1}^N \underbrace{\Phi_{C,k,s} \left[\frac{\delta_{s,i+1} - \delta_{s,i}}{\Delta r} \cos(k\theta_j) \rho_{i+1/2} \sin \theta_j - k \frac{\delta_{s,i+1} + \delta_{s,i}}{2r_{i+1/2}} \sin(k\theta_j) (1 + \rho_{i+1/2} \cos \theta_j) \right]}_{(=f_{(2+2N+2M)(s-1)+2+N+k,l})} \\
& + \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^M D_{S,k,p} \\
& \quad \times \underbrace{\varepsilon_p r'_p \left[\frac{k(\Delta r)G_{k,i+1/2,p}}{r_{i+1/2}} \cos(k\theta_j) \rho_{i+1/2} \sin \theta_j - (\Delta G_{k,i,p}) \sin(k\theta_j) (1 + \rho_{i+1/2} \cos \theta_j) \right]}_{(=f_{(2+2N+2M)(p-2)+2+2N+k,l}, (p>1), \quad f_{(2+2N+2M)(m-1)+k,l}, (p=1))} \\
& - \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^M D_{C,k,p} \\
& \quad \times \underbrace{\varepsilon_p r'_p \left[\frac{k(\Delta r)G_{k,i+1/2,p}}{r_{i+1/2}} \sin(k\theta_j) \rho_{i+1/2} \sin \theta_j + (\Delta G_{k,i,p}) \cos(k\theta_j) (1 + \rho_{i+1/2} \cos \theta_j) \right]}_{(=f_{(2+2N+2M)(p-2)+2+2N+M+k,l}, (p>1), \quad f_{(2+2N+2M)(m-1)+M+k,l}, (p=1))}.
\end{aligned} \tag{44}$$

ただし, $\delta_{i,j}$ はクロネッカーのデルタであり,

$$\Delta G_{k,i,p} \equiv G_{k,i+1,p} - G_{k,i,p}. \tag{45}$$

$G_{k,i,p}$ の具体的な形は (30) 式から

$$G_{k,i,p} = -\frac{1}{2k} \begin{cases} (r_i/r'_p)^k, & (r_i \leq r'_p) \\ (r'_p/r_i)^k, & (r_i > r'_p) \end{cases}, \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (46)$$

(40)-(43) を解く場合, 実際の実装ではインデックス l については総和演算内のダミーインデックスとしてのみ現れる. よって, 具体的に $(i, j) \rightarrow l$ に置き換える必要はなく, 要素 $f_{k,l} f_{q,l}$ の総和は

$$\sum_{l=1}^L f_{k,l} f_{q,l} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{m-1} c_{k,i,j} c_{q,i,j}, \quad (f_{k,l} = c_{k,i,j}, f_{q,l} = c_{q,i,j})$$

で計算が可能である. これを利用して, (44) 式から得られる具体的な係数 $f_{k,l}$ を $c_{k,i,j}$ と読み替えても問題ない. これは (42) 式の

$$\sum_{l=1}^L (\mathcal{V}_d'^o \delta)_l f_{k,l} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{m-1} (\mathcal{V}_d'^o \delta)_{i+1/2,j} c_{k,i,j}, \quad (f_{k,l} = c_{k,i,j}, (\mathcal{V}_d'^o \delta)_l = (\mathcal{V}_d'^o \delta)_{i+1/2,j})$$

も同様である.

2 方程式系の不定性とエイリアジング

2.1 基本的な議論

単一レーダによるドップラー速度は、レーダから対象物に電磁波を照射し、対象物で反射され、ドップラーシフトした電磁波の周波数から求められる。これは対象物がある周辺の水平風によって移動すると仮定することで、対象物周辺の水平風を観測していることになる。対象物からの電磁波の反射を観測するため、ドップラー速度として観測できるのは、対象物のレーダビームに沿った方向（以降、視線方向）の移動速度のみである。この事実は、ドップラー速度データ \mathcal{V}_d^o の分布から水平風を推定する際、必ずレーダビームと直交する方向に不定性が生じることを意味する。本節では、本手法をドップラー速度分布に適用する際に生じる不定性を把握し、その不定性を回避する方法を記述する。

GVTD と同様に、 U, V をフーリエ級数で表示すると、

$$\begin{aligned} U &= \sum_{k=1}^N U_{S,k} \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^N U_{C,k} \cos(k\theta), \\ V &= \sum_{k=1}^N V_{S,k} \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^N V_{C,k} \cos(k\theta). \end{aligned} \quad (47)$$

よって (7) 式は

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_d^o \delta &= \sum_{k=1}^N [U_{S,k} \sin(k\theta)(1 + \rho \cos \theta) - V_{S,k} \sin(k\theta) \rho \sin \theta] \\ &\quad + \sum_{k=0}^N [U_{C,k} \cos(k\theta)(1 + \rho \cos \theta) - V_{C,k} \cos(k\theta) \rho \sin \theta] \\ &= \sum_{k=1}^N [U_{S,k} \sin(k\theta) + \rho U_{S,k} \sin(k\theta) \cos \theta - \rho V_{S,k} \sin(k\theta) \sin \theta] \\ &\quad + \sum_{k=0}^N [U_{C,k} \cos(k\theta) + \rho U_{C,k} \cos(k\theta) \cos \theta - \rho V_{C,k} \cos(k\theta) \sin \theta]. \end{aligned} \quad (48)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
U_{C,0} &= -\frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = U_{\text{div},0}, \\
U_{C,k} &= \left[\frac{k}{r} \Phi_{S,k} - \frac{\partial \Psi_{C,k}}{\partial r} \right], \\
U_{S,k} &= -\left[\frac{\partial \Psi_{S,k}}{\partial r} + \frac{k}{r} \Phi_{C,k} \right], \\
V_{C,0} &= -\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} = V_{\text{rot},0}, \\
V_{C,k} &= -\left[\frac{\partial \Phi_{C,k}}{\partial r} + \frac{k}{r} \Psi_{S,k} \right], \\
V_{S,k} &= \left[\frac{k}{r} \Psi_{C,k} - \frac{\partial \Phi_{S,k}}{\partial r} \right].
\end{aligned} \tag{49}$$

三角関数の積と和の関係:

$$\begin{aligned}
\sin(k\theta) \cos \theta &= \frac{1}{2} [\sin(k+1)\theta + \sin(k-1)\theta], \\
\sin(k\theta) \sin \theta &= \frac{1}{2} [-\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta], \\
\cos(k\theta) \cos \theta &= \frac{1}{2} [\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta], \\
\cos(k\theta) \sin \theta &= \frac{1}{2} [\sin(k+1)\theta - \sin(k-1)\theta],
\end{aligned}$$

を用いると, (48) 式は

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}'_d \delta &= \sum_{k=1}^N \left[U_{S,k} \sin(k\theta) + \frac{\rho}{2} U_{S,k} [\sin(k+1)\theta + \sin(k-1)\theta] - \frac{\rho}{2} V_{S,k} [-\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta] \right] \\
&\quad + \sum_{k=0}^N \left[U_{C,k} \cos(k\theta) + \frac{\rho}{2} U_{C,k} [\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta] - \frac{\rho}{2} V_{C,k} [\sin(k+1)\theta - \sin(k-1)\theta] \right] \\
&= \sum_{k=1}^N U_{S,k} \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^N U_{C,k} \cos(k\theta) \\
&\quad + \frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^N [U_{S,k} \sin(k+1)\theta + V_{S,k} \cos(k+1)\theta] + \frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^N [U_{S,k} \sin(k-1)\theta - V_{S,k} \cos(k-1)\theta] \\
&\quad + \frac{\rho}{2} \sum_{k=0}^N [U_{C,k} \cos(k+1)\theta - V_{C,k} \sin(k+1)\theta] + \frac{\rho}{2} \sum_{k=0}^N [U_{C,k} \cos(k-1)\theta + V_{C,k} \sin(k-1)\theta] \\
&= \sum_{k=1}^N U_{S,k} \sin(k\theta) + \sum_{k=0}^N U_{C,k} \cos(k\theta) \\
&\quad + \frac{\rho}{2} \sum_{k=2}^{N+1} [U_{S,k-1} \sin(k\theta) + V_{S,k-1} \cos(k\theta)] + \frac{\rho}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [U_{S,k+1} \sin(k\theta) - V_{S,k+1} \cos(k\theta)] \\
&\quad + \frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^{N+1} [U_{C,k-1} \cos(k\theta) - V_{C,k-1} \sin(k\theta)] + \frac{\rho}{2} \sum_{k=-1}^{N-1} [U_{C,k+1} \cos(k\theta) + V_{C,k+1} \sin(k\theta)]
\end{aligned}$$

上式を各波数で整理し,

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_d' \delta &= U_{S,1} \sin \theta + \sum_{k=2}^{N-1} U_{S,k} \sin(k\theta) + U_{S,N} \sin(N\theta) \\
&\quad + U_{C,0} + U_{C,1} \cos \theta + \sum_{k=2}^{N-1} U_{C,k} \cos(k\theta) + U_{C,N} \cos(N\theta) \\
&\quad + \frac{\rho}{2} \sum_{k=2}^{N-1} [U_{S,k-1} \sin(k\theta) + V_{S,k-1} \cos(k\theta)] \\
&\quad + \frac{\rho}{2} [U_{S,N-1} \sin(N\theta) + V_{S,N-1} \cos(N\theta)] + \frac{\rho}{2} [U_{S,N} \sin(N+1)\theta + V_{S,N} \cos(N+1)\theta] \\
&\quad + \frac{\rho}{2} [-V_{S,1}] + \frac{\rho}{2} [U_{S,2} \sin \theta - V_{S,2} \cos \theta] + \frac{\rho}{2} \sum_{k=2}^{N-1} [U_{S,k+1} \sin(k\theta) - V_{S,k+1} \cos(k\theta)] \\
&\quad + \frac{\rho}{2} [U_{C,0} \cos \theta - V_{C,0} \sin \theta] + \frac{\rho}{2} \sum_{k=2}^{N-1} [U_{C,k-1} \cos(k\theta) - V_{C,k-1} \sin(k\theta)] \\
&\quad + \frac{\rho}{2} [U_{C,N-1} \cos(N\theta) - V_{C,N-1} \sin(N\theta)] + \frac{\rho}{2} [U_{C,N} \cos(N+1)\theta - V_{C,N} \sin(N+1)\theta] \\
&\quad + \frac{\rho}{2} [U_{C,0} \cos \theta - V_{C,0} \sin \theta] + \frac{\rho}{2} [U_{C,1}] + \frac{\rho}{2} [U_{C,2} \cos \theta + V_{C,2} \sin \theta] \\
&\quad + \frac{\rho}{2} \sum_{k=2}^{N-1} [U_{C,k+1} \cos(k\theta) + V_{C,k+1} \sin(k\theta)] \\
&= U_{C,0} + \frac{\rho}{2} (U_{C,1} - V_{S,1}) \\
&\quad + \left[U_{C,1} + \frac{\rho}{2} (-V_{S,2} + U_{C,0} + U_{C,0} + U_{C,2}) \right] \cos \theta \\
&\quad + \left[U_{S,1} + \frac{\rho}{2} (U_{S,2} - V_{C,0} - V_{C,0} + V_{C,2}) \right] \sin \theta \\
&\quad + \sum_{k=2}^{N-1} \left\{ \left[U_{C,k} + \frac{\rho}{2} (V_{S,k-1} - V_{S,k+1} + U_{C,k-1} + U_{C,k+1}) \right] \cos(k\theta) \right\} \\
&\quad + \sum_{k=2}^{N-1} \left\{ \left[U_{S,k} + \frac{\rho}{2} (U_{S,k-1} + U_{S,k+1} - V_{C,k-1} + V_{C,k+1}) \right] \sin(k\theta) \right\} \\
&\quad + \left[U_{C,N} + \frac{\rho}{2} (V_{S,N-1} + U_{C,N-1}) \right] \cos(N\theta) \\
&\quad + \left[U_{S,N} + \frac{\rho}{2} (U_{S,N-1} - V_{C,N-1}) \right] \sin(N\theta) \\
&\quad + \frac{\rho}{2} (V_{S,N} + U_{C,N}) \cos(N+1)\theta \\
&\quad + \frac{\rho}{2} (U_{S,N} - V_{C,N}) \sin(N+1)\theta. \tag{50}
\end{aligned}$$

(50) 式は, GVTD のリトリバーバル式における $\mathcal{V}_d(\delta/\rho)$ をフーリエ級数で表示したものと (係数 ρ を除いて) 同じである. つまり, 右辺の各モードは互いに独立なフーリエ級数の線形結合で構成されている. ドップラー視線風に反映しない (不定性を引き起こしうる) 成

分は (50) 式の右辺各項がゼロになるときである:

$$\begin{aligned}
(k=0) : U_{C,0} + \frac{\rho}{2} (U_{C,1} - V_{S,1}) &= 0, \\
(k=1) : U_{C,1} + \frac{\rho}{2} (-V_{S,2} + U_{C,0} + U_{C,0} + U_{C,2}) &= 0, \\
(k=1) : U_{S,1} + \frac{\rho}{2} (U_{S,2} - V_{C,0} - V_{C,0} + V_{C,2}) &= 0, \\
(2 \leq k \leq N-1) : U_{C,k} + \frac{\rho}{2} (V_{S,k-1} - V_{S,k+1} + U_{C,k-1} + U_{C,k+1}) &= 0, \\
(2 \leq k \leq N-1) : U_{S,k} + \frac{\rho}{2} (U_{S,k-1} + U_{S,k+1} - V_{C,k-1} + V_{C,k+1}) &= 0, \\
(k=N) : U_{C,N} + \frac{\rho}{2} (V_{S,N-1} + U_{C,N-1}) &= 0, \\
(k=N) : U_{S,N} + \frac{\rho}{2} (U_{S,N-1} - V_{C,N-1}) &= 0, \\
(k=N+1) : V_{S,N} + U_{C,N} &= 0, \\
(k=N+1) : U_{S,N} - V_{C,N} &= 0,
\end{aligned} \tag{51}$$

(49) 式から Φ, Ψ で書き換えると, (51) 式は

$$(k=0) : -\frac{\partial \Psi_0}{\partial r} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{r} \Phi_{S,1} - \frac{\partial \Psi_{C,1}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Psi_{C,1} + \frac{\partial \Phi_{S,1}}{\partial r} \right) = 0, \quad (52)$$

$$(k=1) : \frac{1}{r} \Phi_{S,1} - \frac{\partial \Psi_{C,1}}{\partial r} - \rho \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} + \frac{\rho}{2} \left(-\frac{2}{r} \Psi_{C,2} + \frac{\partial \Phi_{S,2}}{\partial r} + \frac{2}{r} \Phi_{S,2} - \frac{\partial \Psi_{C,2}}{\partial r} \right) = 0, \quad (53)$$

$$(k=1) : -\frac{\partial \Psi_{S,1}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Phi_{C,1} + \rho \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{\rho}{2} \left(-\frac{\partial \Psi_{S,2}}{\partial r} - \frac{2}{r} \Phi_{C,2} - \frac{\partial \Phi_{C,2}}{\partial r} - \frac{2}{r} \Psi_{S,2} \right) = 0, \quad (54)$$

$$(2 \leq k \leq N-1) : \frac{k}{r} \Phi_{S,k} - \frac{\partial \Psi_{C,k}}{\partial r} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{k-1}{r} \Psi_{C,k-1} - \frac{\partial \Phi_{S,k-1}}{\partial r} + \frac{k-1}{r} \Phi_{S,k-1} - \frac{\partial \Psi_{C,k-1}}{\partial r} \right) \\ - \frac{\rho}{2} \left(\frac{k+1}{r} \Psi_{C,k+1} - \frac{\partial \Phi_{S,k+1}}{\partial r} - \frac{k+1}{r} \Phi_{S,k+1} + \frac{\partial \Psi_{C,k+1}}{\partial r} \right) = 0, \quad (55)$$

$$(2 \leq k \leq N-1) : -\frac{\partial \Psi_{S,k}}{\partial r} - \frac{k}{r} \Phi_{C,k} + \frac{\rho}{2} \left(-\frac{\partial \Psi_{S,k-1}}{\partial r} - \frac{k-1}{r} \Phi_{C,k-1} + \frac{\partial \Phi_{C,k-1}}{\partial r} + \frac{k-1}{r} \Psi_{S,k-1} \right) \\ - \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \Psi_{S,k+1}}{\partial r} + \frac{k+1}{r} \Phi_{C,k+1} + \frac{\partial \Phi_{C,k+1}}{\partial r} + \frac{k+1}{r} \Psi_{S,k+1} \right) = 0, \quad (56)$$

$$(k=N) : \frac{N}{r} \Phi_{S,N} - \frac{\partial \Psi_{C,N}}{\partial r} \\ + \frac{\rho}{2} \left(\frac{N-1}{r} \Psi_{C,N-1} - \frac{\partial \Phi_{S,N-1}}{\partial r} + \frac{N-1}{r} \Phi_{S,N-1} - \frac{\partial \Psi_{C,N-1}}{\partial r} \right) = 0, \quad (57)$$

$$(k=N) : -\frac{\partial \Psi_{S,N}}{\partial r} - \frac{N}{r} \Phi_{C,N} \\ - \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \Psi_{S,N-1}}{\partial r} + \frac{N-1}{r} \Phi_{C,N-1} - \frac{\partial \Phi_{C,N-1}}{\partial r} - \frac{N-1}{r} \Psi_{S,N-1} \right) = 0, \quad (58)$$

$$(k=N+1) : \frac{N}{r} \Psi_{C,N} - \frac{\partial \Phi_{S,N}}{\partial r} + \frac{N}{r} \Phi_{S,N} - \frac{\partial \Psi_{C,N}}{\partial r} = 0, \quad (59)$$

$$(k=N+1) : -\frac{\partial \Psi_{S,N}}{\partial r} - \frac{N}{r} \Phi_{C,N} + \frac{\partial \Phi_{C,N}}{\partial r} + \frac{N}{r} \Psi_{S,N} = 0. \quad (60)$$

(52) - (60) 式を全て満たす解は $\mathcal{V}'_d \delta = 0$ であり視線風に反映されない (不定性を引き起こさうる).

この不定性を引き起こす具体的な Φ, Ψ の形を調べる. まず, (52) - (60) 式における方程式の個数は, 最大波数 N で波数展開した場合, $2N+3$ 個存在する. 一方で未知変数の個数は $\Phi_0, \Phi_{C,1}, \Phi_{S,1}, \dots, \Phi_{C,N}, \Phi_{S,N}, \Psi_0, \Psi_{C,1}, \dots, \Psi_{S,N}$ と $4N+2$ 個存在する. 具体的な不定性の形を求めるには, 未知変数を方程式の個数に合わせる必要がある. 新手法では流線関数を未知変数として主に用いるため, $\Psi_0, \Psi_{C,1}$ 以外の $\Psi_{C,k}, \Psi_{S,k}$ をゼロとして

考える^{*3}. 以上より, 未知変数の個数は, Φ を構成する各未知変数 $2N + 1$ 個と Ψ の軸対称成分と波数 1 成分の 1 つで方程式の個数と一致する. すると, 先の方程式 (52) - (60) は

$$(k = 0) : -\frac{\partial \Psi_0}{\partial r} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{r} \Phi_{S,1} - \frac{\partial \Psi_{C,1}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Psi_{C,1} + \frac{\partial \Phi_{S,1}}{\partial r} \right) = 0, \quad (61)$$

$$(k = 1) : \frac{1}{r} \Phi_{S,1} - \frac{\partial \Psi_{C,1}}{\partial r} - \rho \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \Phi_{S,2}}{\partial r} + \frac{2}{r} \Phi_{S,2} \right) = 0, \quad (62)$$

$$(k = 1) : -\frac{1}{r} \Phi_{C,1} + \rho \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} + \frac{\rho}{2} \left(-\frac{2}{r} \Phi_{C,2} - \frac{\partial \Phi_{C,2}}{\partial r} \right) = 0, \quad (63)$$

$$(k = 2) : \frac{2}{r} \Phi_{S,2} + \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{r} \Psi_{C,1} - \frac{\partial \Phi_{S,1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \Phi_{S,1} - \frac{\partial \Psi_{C,1}}{\partial r} \right) - \frac{\rho}{2} \left(-\frac{\partial \Phi_{S,3}}{\partial r} - \frac{3}{r} \Phi_{S,3} \right) = 0, \quad (64)$$

$$(3 \leq k \leq N-1) : \frac{k}{r} \Phi_{S,k} + \frac{\rho}{2} \left(-\frac{\partial \Phi_{S,k-1}}{\partial r} + \frac{k-1}{r} \Phi_{S,k-1} \right) - \frac{\rho}{2} \left(-\frac{\partial \Phi_{S,k+1}}{\partial r} - \frac{k+1}{r} \Phi_{S,k+1} \right) = 0, \quad (65)$$

$$(2 \leq k \leq N-1) : -\frac{k}{r} \Phi_{C,k} + \frac{\rho}{2} \left(-\frac{k-1}{r} \Phi_{C,k-1} + \frac{\partial \Phi_{C,k-1}}{\partial r} \right) - \frac{\rho}{2} \left(\frac{k+1}{r} \Phi_{C,k+1} + \frac{\partial \Phi_{C,k+1}}{\partial r} \right) = 0, \quad (66)$$

$$(k = N) : \frac{N}{r} \Phi_{S,N} + \frac{\rho}{2} \left(-\frac{\partial \Phi_{S,N-1}}{\partial r} + \frac{N-1}{r} \Phi_{S,N-1} \right) = 0, \quad (67)$$

$$(k = N) : -\frac{N}{r} \Phi_{C,N} - \frac{\rho}{2} \left(\frac{N-1}{r} \Phi_{C,N-1} - \frac{\partial \Phi_{C,N-1}}{\partial r} \right) = 0, \quad (68)$$

$$(k = N+1) : -\frac{\partial \Phi_{S,N}}{\partial r} + \frac{N}{r} \Phi_{S,N} = 0, \quad (69)$$

$$(k = N+1) : -\frac{N}{r} \Phi_{C,N} + \frac{\partial \Phi_{C,N}}{\partial r} = 0. \quad (70)$$

実際にリトリバールで求められる流線関数は離散化された格子点上で定義されるが, ここでは r についての連続関数の形で不定性をまず求める. (69), (70) 式はそれぞれ $\Phi_{S,N}$ と $\Phi_{C,N}$ についての斉次微分方程式であり, その解は

$$\Phi_{S,N} = C_{S,N} r^N, \quad \Phi_{C,N} = C_{C,N} r^N \quad (71)$$

と得られる. $C_{S,N}$, $C_{C,N}$ は任意定数. すなわち, 半径について上の構造をもつ流線関数が $\mathcal{V}'_d \delta = 0$ となる不定性を引き起こしうる. 同様に, (67), (68) 式の構造を考える. これらは (69), (70) 式と異なり, $\Phi_{S,N-1}$ と $\Phi_{C,N-1}$ についての非斉次微分方程式となっている. よって, その一般解はそれぞれの微分方程式の斉次形における一般解

$$\Phi_{S,N-1} = C_{S,N-1} r^{N-1}, \quad \Phi_{C,N-1} = C_{C,N-1} r^{N-1} \quad (72)$$

と ($C_{S,N-1}$, $C_{C,N-1}$ は任意定数), もとの非斉次形での特解の線形結合となる. (71) 式と同様に, $\Phi_{S,N-1}$ と $\Phi_{C,N-1}$ において $\mathcal{V}'_d \delta = 0$ となる不定性を引き起こすのは (72) の一般

^{*3}発散成分の波数 1 のうち, $\Psi_{C,1}$ を未知変数として採用し, $\Psi_{S,1}$ を採用しない理由は次節にて示す.

解の部分である．以下同様に, $3 \leq k \leq N-1$ の範囲で (65), (66) 式の解を考えると, これらの式も $\Phi_{S,N-1}$ と $\Phi_{C,N-1}$ と同様の非斉次形なので, $\mathcal{V}'_d \delta = 0$ となる不定性は一般解

$$\Phi_{S,k-1} = C_{S,k-1} r^{k-1}, \quad \Phi_{C,k-1} = C_{C,k-1} r^{k-1}, \quad (73)$$

によって引き起こされうる ($C_{S,k-1}$, $C_{C,k-1}$ は任意定数). この r^k に比例する構造は, 流体力学の教科書でよくとり上げられる淀み点周りのポテンシャル流と同じ構造である. これはすなわち, $\mathcal{V}'_d \delta = 0$ を引き起こす不定な構造は, \mathbf{V}_{non} であることを意味する. よって, r の最外半径で $C_{S,N} = C_{C,N} = \dots = C_{S,2} = C_{C,2} = 0$ となるように任意定数 $C_{S,N}, \dots, C_{C,2}$ を指定する. 具体的にはこれまでの任意定数をゼロとする選択肢がある. このようにして不定性を回避することが可能となる.

$k = 2$ では (64), (66) 式から一般解は

$$\Phi_{S,1} + \Psi_{C,1} = C_{S,1} r, \quad \Phi_{C,1} = C_{C,1} r, \quad (74)$$

$C_{S,1}$, $C_{C,1}$ は任意定数. $\Psi_{C,1}$ は発散を用いて (31) 式で定義されており, $G_1(r; r')$ が $r < r'$ では r に比例する構造をもつ. 本手法では非回転非発散流は流線関数で表現するとしているので, Ψ_1 に領域全体で r に比例する構造が含まれることを許さない. そのため, 最外半径より外側で発散がゼロという制限を課すことで (74) 式の $\Psi_{C,1}$ を r に比例しない構造にする. この点に注意すると, (74) 式はもはや速度ポテンシャルが関連せず,

$$\Phi_{S,1} = C_{S,1} r, \quad \Phi_{C,1} = C_{C,1} r, \quad (75)$$

と表現できる. 上式の $\Phi_{S,1}$ の具体的な形を (61), (62) 式に代入して ($C_{S,2}$, $C_{C,2}$ は上の議論からゼロとする),

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = \rho C_{S,1}, \quad (76)$$

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = \frac{1}{\rho} C_{S,1}. \quad (77)$$

$\frac{\partial \Psi_0}{\partial r} \neq 0$ となる (すなわち不定な構造となる) $C_{S,1}$ が, (76) 式と (77) 式を同時に満たす $C_{S,1}$ は $\rho = 1$ を除いて以外に存在しない. これより自動的に $C_{S,1} = 0$ となり, $\Phi_{S,1}$ に不定性をもたらす構造は存在しないことが示される. 以上より, 波数 1 の流線関数は $\Phi_{C,1}$ のみ, (75) の構造をもつ不定性が存在する^{*4}. $k > 1$ についての流線関数には不定性を除去するために, 外側境界でゼロとなる制約を与えたが, 一方で後述するように, 半径に比例する流線関数の構造は渦なし非発散の一樣流も表現する. そのため, 波数 1 の流線関数は境界で一樣流を表すように境界条件を設定することもできる^{*5}.

^{*4} $\Phi_{S,1}$ との対応関係で考えると, (76), (77) 式に対応する $\Phi_{C,1}$ についての関係を構築する場合, (63) 式に對となる関係式が存在しないため, $C_{C,1}$ を同定できず不定性が残ることになる.

^{*5} 同様に, もし外側境界での $k > 1$ の流線関数の構造が同定できるのであれば, それを $C_{S,N}, \dots, C_{C,1}$ に設定することもできる.

2.2 波数 1 発散成分

速度ポテンシャルは軸対称成分 Ψ_0 と波数 1 成分の片方のみをリトリバーの未知変数として用いることができる. ここでは, 波数 1 成分のどちら: $\Psi_{S,1}$, $\Psi_{C,1}$ を用いればよいかについて議論する. まず, $\Psi_{S,1} = 0$ で $\Psi_{C,1}$ をリトリバーに含めた場合, $\mathcal{V}_d'\delta$ のフーリエ成分 $k = 2$ では (64), (66) 式の一般解 (74) が不定性をもつ構造となる. 今, $\Phi_{S,1}$, $\Psi_{C,1}$ については境界条件を考えずに式 (74) を維持する. このとき $\Phi_{S,1}$, $\Psi_{C,1}$ と軸対称成分の関係は (52) 式と (53) 式の 2 つある. 両者に (74) 式を代入して $\Psi_{C,1}$ を消去すると,

$$-\frac{\partial \Psi_0}{\partial r} + \rho \left(\frac{1}{r} \Phi_{S,1} - C_{S,1} + \frac{\partial \Phi_{S,1}}{\partial r} \right) = 0, \quad (78)$$

$$\frac{1}{r} \Phi_{S,1} - C_{S,1} + \frac{\partial \Phi_{S,1}}{\partial r} - \rho \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = 0. \quad (79)$$

これらより,

$$(1 - \rho^2) \frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = 0.$$

すなわち, $\rho \neq 1$ で

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial r} = 0. \quad (80)$$

が得られる. これは $\Psi_{C,1}$ を未知変数として採用した場合, $\Phi_{S,1}$ に外側で境界条件を与える ($C_{S,1}$ を一意に決める) と, 軸対称成分は不定な構造を生じないことを示す.

一方, $\Psi_{C,1} = 0$ で $\Psi_{S,1}$ をリトリバーに含めた場合, 速度ポテンシャルも含めた $\mathcal{V}_d'\delta$ の $k = 2$ フーリエ成分 (55), (56) は

$$\frac{2}{r} \Phi_{S,2} + \frac{\rho}{2} \left(-\frac{\partial \Phi_{S,1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \Phi_{S,1} \right) - \frac{\rho}{2} \left(-\frac{\partial \Phi_{S,3}}{\partial r} - \frac{3}{r} \Phi_{S,3} \right) = 0, \quad (81)$$

$$-\frac{2}{r} \Phi_{C,2} + \frac{\rho}{2} \left(-\frac{\partial \Psi_{S,1}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Phi_{C,1} + \frac{\partial \Phi_{C,1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \Psi_{S,1} \right) - \frac{\rho}{2} \left(\frac{3}{r} \Phi_{C,3} + \frac{\partial \Phi_{C,3}}{\partial r} \right) = 0. \quad (82)$$

先と同様に, $\Phi_{S,k} = \Phi_{C,k} = 0$, ($k > 1$) なので, (81), (82) 式は

$$\frac{\rho}{2} \left(-\frac{\partial \Phi_{S,1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \Phi_{S,1} \right) = 0, \quad (83)$$

$$\frac{\rho}{2} \left(-\frac{\partial \Psi_{S,1}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Phi_{C,1} + \frac{\partial \Phi_{C,1}}{\partial r} + \frac{1}{r} \Psi_{S,1} \right) = 0. \quad (84)$$

これから,

$$\Phi_{S,1} = C_{S,1}r, \quad (85)$$

$$\Phi_{C,1} - \Psi_{S,1} = C_{C,1}r. \quad (86)$$

先と同様に $\Phi_{C,1}$ については境界条件を与えずに, 式 (86) のままで考える. このとき $\Phi_{C,1}$, $\Psi_{S,1}$ と軸対称成分の関係は (54) 式の 1 つしかない. これが $\Psi_{C,1}$ をリトリバ

ル変数として採用したときとの違いである．(53) 式に (86) 式を代入して $\Psi_{S,1}$ を消去すると，

$$-C_{C,1} - \frac{\partial \Phi_{C,1}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Phi_{C,1} + \rho \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} = 0. \quad (87)$$

この式はこれ以上整理することはできず，たとえ $\Phi_{C,1}$ に外側境界条件を与えたとしても，(86) 式と (87) 式から，軸対称接線風について $\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} = 0$ を満たすことができない^{*6}．実際に $\Psi_{S,1}$ を未知変数として ($\Psi_{C,1} = 0$) リトリバブルを行った際， $\Phi_{C,1}$ が外側半径でゼロであるにも関わらず，ドップラー速度に反映されずに解析領域内側で構造をもつ推定が行われる．

^{*6}例えば， $\Psi_{S,1} \neq 0$ を許す状況で， $C_{C,1} = 0$ を外側境界で設定した場合，(86) 式から $\Phi_{C,1} = \Psi_{S,1}$ が成り立つ．そのため (87) 式は

$$-\frac{\partial \Phi_{C,1}}{\partial r} - \frac{1}{r} \Phi_{C,1} + \rho \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} = 0$$

となり， $\frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \neq 0$ が維持される．すなわち，軸対称接線風に不定性が残ることになる．

3 不定性を除去するための追加の外側拘束

非対称流線関数 (未知変数) における不定性を解消するために, 特定の半径で未知変数の値を指定する. これは微分方程式の求解における境界条件の指定と類似するため, 以降この未知変数の値の指定を境界条件の指定と表記する.

3.1 波数 p 流線関数

波数 p ($p > 1$) の流線関数は (71) - (73) より, 最高波数 N で r^N に比例する不定性を持ち, 以降の波数 ($N > p > 1$) においても r^p に比例する不定性をもつ. 不定性項が r^p に比例するため, 不定性をもたらす推定誤差は観測範囲の中心より外縁において大きくなる. 一方, 外縁半径にて波数 1 より大きな波数の流線関数の値を具体的に推定することは困難である^{*7}. よって, 波数 $p > 1$ の流線関数は速度が定義される外縁半径 (離散化座標の場合, $r = r_{m-1/2}$) において,

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial r} = \frac{\partial \Phi_p}{r \partial \theta} = 0. \quad (88)$$

という境界条件を設定する. これは波数 p の非軸対称風が外縁半径でゼロと設定することと同値である. (88) 式を離散化して表現すると, 外縁半径 $r_{m-1/2}$ において

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{S,p,m} - \Phi_{S,p,m-1}}{\Delta r} &= 0, & \frac{\Phi_{C,p,m} - \Phi_{C,p,m-1}}{\Delta r} &= 0, \\ \frac{\Phi_{S,p,m} + \Phi_{S,p,m-1}}{2r_{m-1/2}} &= 0, & \frac{\Phi_{C,p,m} + \Phi_{C,p,m-1}}{2r_{m-1/2}} &= 0. \end{aligned} \quad (89)$$

これをまとめると,

$$\Phi_{S,p,m} = \Phi_{S,p,m-1} = 0, \quad \Phi_{C,p,m} = \Phi_{C,p,m-1} = 0. \quad (90)$$

よって (44) 式の流線関数に関する項は, 半径 $r_{m-1/2}$ において未知変数にならず, 境界条件で完全に決まる. また波数 1 と同様に $\Phi_{S,p,m-1}$, $\Phi_{C,p,m-1}$ も $r_{m-3/2}$ での (44) 式の評価に関連する. よって (90) 式を $r_{m-3/2}$ での追加の拘束条件として, この条件を満たす中で残差 \mathcal{R} を最小にする解を求める.

3.2 波数 1 流線関数

波数 1 の流線関数 $\Phi_{C,1}$ は (75) 式より r に比例する不定性をもつ. まず, この不定性は渦周辺の水平一様流と関連することを示す. 任意の storm-relative な水平一様風 \mathbf{V}_h は,

^{*7}先述のとおり, もし具体的に推定する手法があるならそちらを用いることが推奨される. すなわち, この境界条件は数学的に求まるものではなく, 経験的にリトリバル誤差が少ないと考えられる方法で設定される (少なくとも現状は).

図 3.1.1 と (4) 式に従い,

$$\begin{bmatrix} U_h \\ V_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_h \\ v_h \end{bmatrix}. \quad (91)$$

u_h, v_h, U_h, V_h は \mathbf{V}_h のデカルト座標系, 円筒座標形での成分である. 水平一様風は非発散であるため, 流線関数 Φ によって (11), (12) 式のように表現される. これらの式と (91) 式を用いると,

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -u_h \sin \theta + v_h \cos \theta, \quad (92)$$

$$\frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} = u_h \cos \theta + v_h \sin \theta, \quad (93)$$

上式から Φ は

$$\Phi = r u_h \sin \theta - r v_h \cos \theta, \quad (94)$$

が得られる. よって, 水平一様風に対する流線関数は

$$\Phi_{S,1} = r u_h, \quad \Phi_{C,1} = -r v_h, \quad (95)$$

と対応付けられる. したがって, 任意の水平一様風は波数 1 の流線関数によって表現できる. もし, u_h, v_h が r, θ について定数であれば, 上式から

$$\frac{\partial \Phi_{S,1}}{\partial r} = \frac{\Phi_{S,1}}{r} = u_h, \quad \frac{\partial \Phi_{C,1}}{\partial r} = \frac{\Phi_{C,1}}{r} = -v_h, \quad (96)$$

であることは明らかである.

これを踏まえて, (92), (93) を u_h, v_h について表すと,

$$\begin{aligned} u_h &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} \cos \theta \\ &= \frac{\partial \Phi_{S,1}}{\partial r} \sin^2 \theta + \frac{\Phi_{S,1}}{r} \cos^2 \theta + \frac{\partial \Phi_{C,1}}{\partial r} \cos \theta \sin \theta - \frac{\Phi_{C,1}}{r} \sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (97)$$

$$\begin{aligned} v_h &= -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} \sin \theta \\ &= -\frac{\partial \Phi_{S,1}}{\partial r} \sin \theta \cos \theta + \frac{\Phi_{S,1}}{r} \cos \theta \sin \theta - \frac{\partial \Phi_{C,1}}{\partial r} \cos^2 \theta - \frac{\Phi_{C,1}}{r} \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (98)$$

とある半径 r 上で上式の周平均をとると,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_h d\theta (\equiv \bar{u}_M) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Phi_{S,1}}{\partial r} + \frac{\Phi_{S,1}}{r} \right], \quad (99)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_h d\theta (\equiv \bar{v}_M) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \Phi_{C,1}}{\partial r} + \frac{\Phi_{C,1}}{r} \right]. \quad (100)$$

(96), (99), (100) 式から,

$$\bar{u}_M = \frac{\partial \Phi_{S,1}}{\partial r}, \quad \bar{u}_M = \frac{\Phi_{S,1}}{r}, \quad (101)$$

$$\bar{v}_M = -\frac{\partial \Phi_{C,1}}{\partial r}, \quad \bar{v}_M = -\frac{\Phi_{C,1}}{r}. \quad (102)$$

この関係に基づき、風速の最外半径 $r_{m-1/2}$ 上での (予め中心渦の移動速度を除いた) 平均風^{*8}を用いて $r_{m-1/2}$ での $\Phi_{C,1}$ の境界条件を (102) と設定する^{*9}。これを離散化すると、

$$\frac{\Phi_{C,1,m} - \Phi_{C,1,m-1}}{\Delta r} = -\bar{v}_{M,m-1/2}, \quad \frac{\Phi_{C,1,m} + \Phi_{C,1,m-1}}{2r_{m-1/2}} = -\bar{v}_{M,m-1/2}. \quad (103)$$

(103) 式を解くと、

$$\Phi_{C,1,m} = -\frac{\Delta r + 2r_{m-1/2}}{2}\bar{v}_{M,m-1/2}, \quad \Phi_{C,1,m-1} = -\frac{2r_{m-1/2} - \Delta r}{2}\bar{v}_{M,m-1/2}. \quad (104)$$

(103) 式を用いて、半径 $r_{m-1/2}$ における (44) 式の流線関数に関する項は、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^P \alpha_k f_{k,l} = \dots \\ & + \Phi_{S,1,s} \left[\underbrace{\frac{\delta_{s,m} - \delta_{s,m-1}}{\Delta r} \sin \theta_j \rho_{m-1/2} \sin \theta_j + \frac{\delta_{s,m} + \delta_{s,m-1}}{2r_{m-1/2}} \cos \theta_j (1 + \rho_{m-1/2} \cos \theta_j)}_{(=f_{(2+2N+2M)(s-1)+2+1,l})} \right] \\ & + \underbrace{\left[-\bar{v}_{M,m-1/2} \cos \theta_j \rho_{m-1/2} \sin \theta_j + \bar{v}_{M,m-1/2} \sin \theta_j (1 + \rho_{m-1/2} \cos \theta_j) \right]}_{(=f_{(2+2N+2M)(m-2)+2+N+1,l})} \dots \\ & = \dots + \Phi_{S,1,s} \left[\underbrace{\frac{\delta_{s,m} - \delta_{s,m-1}}{\Delta r} \sin \theta_j \rho_{m-1/2} \sin \theta_j + \frac{\delta_{s,m} + \delta_{s,m-1}}{2r_{m-1/2}} \cos \theta_j (1 + \rho_{m-1/2} \cos \theta_j)}_{(=f_{(2+2N+2M)(s-1)+2+1,l})} \right] \dots \\ & + \bar{v}_{M,m-1/2} \sin \theta_j \end{aligned} \quad (105)$$

と表現される。(105) 式の最終項は、(35) 式より、半径 $r_{m-1/2}$ での \mathcal{V}_d^{lo} から除される。同時に、 $r_{m-1/2}$ では $\Phi_{C,1,m}$, $\Phi_{C,1,m-1}$ は未知変数にならず、境界条件で完全に決まる。

さらに (44) 式あるいは (104) 式から $\Phi_{C,1,m-1}$ は $r_{m-1/2}$ だけではなく、1 つ内側の半径 $r_{m-3/2}$ でもドップラー速度に関連する。しかし $r_{m-3/2}$ で成り立つ境界条件は存在せず、 $r_{m-1/2}$ で行ったような変数の置き換えはできない。そこで、 $r_{m-3/2}$ では (104) 式を最小二乗法の追加拘束として用い、(38) 式と同時に解を求める (制約付き最小二乗法、詳しくは次節)。

2.1 節の議論を用いると、この一様流によって軸対称接線風の推定がどの程度影響を受けるか見積もることもできる。 \mathcal{V}_d^{lo} の不定性を引き起こす関係式のうち、 $k=1$ のフーリエ成分 (63) 式に着目すると、 $\Phi_{C,2}$ は境界条件でゼロとなっているので、

$$-\frac{1}{r}\Phi_{C,1} + \rho \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} = 0. \quad (106)$$

^{*8}例えば、JRA55 などの再解析データから台風周辺の水平平均風を渦の移動速度分引いたものが用いられる。

^{*9}(76), (77) 式での議論より、 $\Phi_{S,1}$ は不定性が存在せず、境界条件を設定する必要はない。

(102) 式から \bar{v}_M を用いて上式を表現すると,

$$\frac{r}{R_T} \bar{v}_M = V_{\text{rot},0}. \quad (107)$$

すなわち, 解析する半径の遠方ほど \bar{v}_M によって軸対称接線風 ($V_{\text{rot},0}$) の推定に影響が出ることが予想される (逆にいうと, 中心付近の軸対称接線風推定値は storm-relative な平均風の影響を受けにくい).

4 制約付き最小二乗法

最小二乗法に基づき, (35) 式で定義される残差を最小にする未知変数の組 \mathbf{x} を求める際, 条件 (36) 式以外に, 未知変数間に

$$B\mathbf{x} = \mathbf{y}' \quad (108)$$

という線形の関係があるとする. ここで B は $Q \times P$ の既知の行列, \mathbf{y}' は Q 行の既知の列ベクトルである. この場合, (36) 式のように残差 R を最小にするのではなく, (108) 式を追加拘束として

$$R + 2\boldsymbol{\lambda}^T (B\mathbf{x} - \mathbf{y}') \quad (109)$$

を最小にする \mathbf{x} の組を求めることになる (制約付き最小二乗法). $\boldsymbol{\lambda}$ は Q 行の列ベクトルであり, ラグランジュの未定乗数である. (36) 式と同様に (109) を最小にする条件は

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [2\boldsymbol{\lambda}^T (B\mathbf{x} - \mathbf{y}')] = \mathbf{0}, \quad (110)$$

かつ

$$\frac{\partial R}{\partial \boldsymbol{\lambda}} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\lambda}} [2\boldsymbol{\lambda}^T (B\mathbf{x} - \mathbf{y}')] = \mathbf{0}. \quad (111)$$

(40) 式から $\mathbf{x} = [\alpha_1, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_P]^T$ なので, (110) 式左辺第一項は (38) 式左辺と同様に

$$\frac{\partial R}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial R}{\partial \alpha_k}, \dots, \frac{\partial R}{\partial \alpha_P} \right]^T = 2(A\mathbf{x} - \mathbf{b}). \quad (112)$$

ここで, k 成分は (41), (42) 式の定義を用いて

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_k} = 2 \sum_{l=1}^L f_{k,l} \left[\sum_{q=1}^P \alpha_q f_{q,l} - V'_{d,l} \right] = 2 \left[\sum_{q=1}^P \alpha_q a_{k,q} - b_k \right]. \quad (113)$$

であることに注意する. よって (110), (111) 式は

$$2(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) + 2B^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad (114)$$

$$2(B\mathbf{x} - \mathbf{y}') = \mathbf{0}. \quad (115)$$

これらを区分行列の形で表現すると,

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{y}' \end{bmatrix}, \quad (116)$$

ここで O は Q 次ゼロ行列である. 上式を満たす $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = (\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}^* \\ \boldsymbol{\lambda}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} - A^{-1}B^T(BA^{-1}B^T)^{-1}BA^{-1} & A^{-1}B^T(BA^{-1}B^T)^{-1} \\ (BA^{-1}B^T)^{-1}BA^{-1} & (-BA^{-1}B^T)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{y}' \end{bmatrix}, \quad (117)$$

ここで, $A, (BA^{-1}B^T)$ は正則行列である^{*10}. (117) 式から

$$\mathbf{x}^* = A^{-1}\mathbf{b} + A^{-1}B^T [BA^{-1}B^T]^{-1} (\mathbf{y}' - BA^{-1}\mathbf{b}). \quad (118)$$

右辺第一項は (43) 式の解と一致することを思い出すと, \mathbf{x}^* は追加拘束をしない場合の解に, 追加拘束による線形の補正項が加わる形になっている. 追加拘束をしない場合の解を \mathbf{x}_{LSM} と表記すると, (118) 式は

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_{\text{LSM}} + A^{-1}B^T [BA^{-1}B^T]^{-1} (\mathbf{y}' - B\mathbf{x}_{\text{LSM}}). \quad (119)$$

本リトリバーバル手法での具体的な B, \mathbf{y}' を考える. \mathbf{x} を

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}. \quad (120)$$

と表記し, \mathbf{x}_1 に境界条件と関係しない未知変数, \mathbf{x}_2 に境界条件と関係する変数, すなわち r_{m-1} での波数 p 流線関数を割り当てる:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= [V_{\text{rot},0,3/2}, \dots, \Phi_{S,N,m-2}]^T, \\ \mathbf{x}_2 &= [\Phi_{C,1,m-1}, \Phi_{S,2,m-1}, \Phi_{S,2,m-1}, \dots, \Phi_{C,N,m-1}, \Phi_{S,N,m-1}]^T, \end{aligned} \quad (121)$$

\mathbf{x}_2 は $2N-1$ 行の列ベクトルである. このとき, B, \mathbf{y}' は波数 p ($p > 0$) の流線関数についての外側境界条件 (104), (90) 式から以下のように与えられる:

$$B = [O \mid E], \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} -r_{m-1/2}\bar{v}_{M,m-1/2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (122)$$

B は $(2N-1) \times P$ 行列, \mathbf{y}' は $2N-1$ 行の列ベクトル, E は $2N-1$ 次の単位行列, O は $(2N-1) \times (P - (2N-1))$ のゼロ行列, $\mathbf{0}$ は $2N-2$ 行のゼロベクトルを表す. A^{-1} を

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & A_{12}^{-1} \\ \hline A_{21}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{array} \right]. \quad (123)$$

と区分する. $A_{11}^{-1}, A_{12}^{-1}, A_{21}^{-1}, A_{22}^{-1}$ はそれぞれ, $P - (2N-1)$ 次正方行列, $(P - (2N-1)) \times (2N-1)$ 行列, $(2N-1) \times (P - (2N-1))$ 行列, $2N-1$ 次正方行列である. これらの表記を用いると,

$$A^{-1}B^T = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}^{-1} & A_{12}^{-1} \\ \hline A_{21}^{-1} & A_{22}^{-1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} O^T \\ E \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} A_{11}^{-1}O^T + A_{12}^{-1}E \\ A_{21}^{-1}O^T + A_{22}^{-1}E \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} A_{12}^{-1} \\ A_{22}^{-1} \end{array} \right],$$

^{*10}区分行列

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

の逆行列は

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BS^{-1} \\ -S^{-1}CA^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}.$$

ただし, A, S は正則であり, $S = D - CA^{-1}B$ である.

$$BA^{-1}B^T = [O \mid E] \begin{bmatrix} A_{12}^{-1} \\ A_{22}^{-1} \end{bmatrix} = OA_{11}^{-1} + EA_{22}^{-1} = A_{22}^{-1},$$

$$B\mathbf{x} = [O \mid E] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = O\mathbf{x}_1 + E\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2,$$

となるので, (119) 式は

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{x}_{\text{LSM}} + \begin{bmatrix} A_{12}^{-1} \\ A_{22}^{-1} \end{bmatrix} [A_{22}^{-1}]^{-1} (\mathbf{y}' - \mathbf{x}_{2\text{LSM}}) \\ &= \mathbf{x}_{\text{LSM}} + \begin{bmatrix} A_{12}^{-1} [A_{22}^{-1}]^{-1} \\ E \end{bmatrix} (\mathbf{y}' - \mathbf{x}_{2\text{LSM}}). \end{aligned} \quad (124)$$

上式は (121) 式より

$$\mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}_{1\text{LSM}} + A_{12}^{-1} [A_{22}^{-1}]^{-1} (\mathbf{y}' - \mathbf{x}_{2\text{LSM}}), \quad (125)$$

$$\mathbf{x}_2^* = \mathbf{x}_{2\text{LSM}} + (\mathbf{y}' - \mathbf{x}_{2\text{LSM}}) = \mathbf{y}'. \quad (126)$$

ここで, $\mathbf{x}_{1\text{LSM}}, \mathbf{x}_{2\text{LSM}}$ は \mathbf{x}_{LSM} の $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 成分を表す. \mathbf{x}_2 は $r_{m-1/2}$ で境界条件と関係する変数で構成され, (126) 式が境界条件そのものになっている. (125) 式は境界条件と関連しない変数についての解であるが, 追加拘束なしで得た最小二乗法解 $\mathbf{x}_{1\text{LSM}}$ に $A_{12}^{-1} [A_{22}^{-1}]^{-1}$ の重みを付けた外側境界の関係を線形結合した形になっていることがわかる. すなわち, 外側境界での流線関数の境界条件が, 内側領域での他の未知変数に影響を与えるように推定できている.

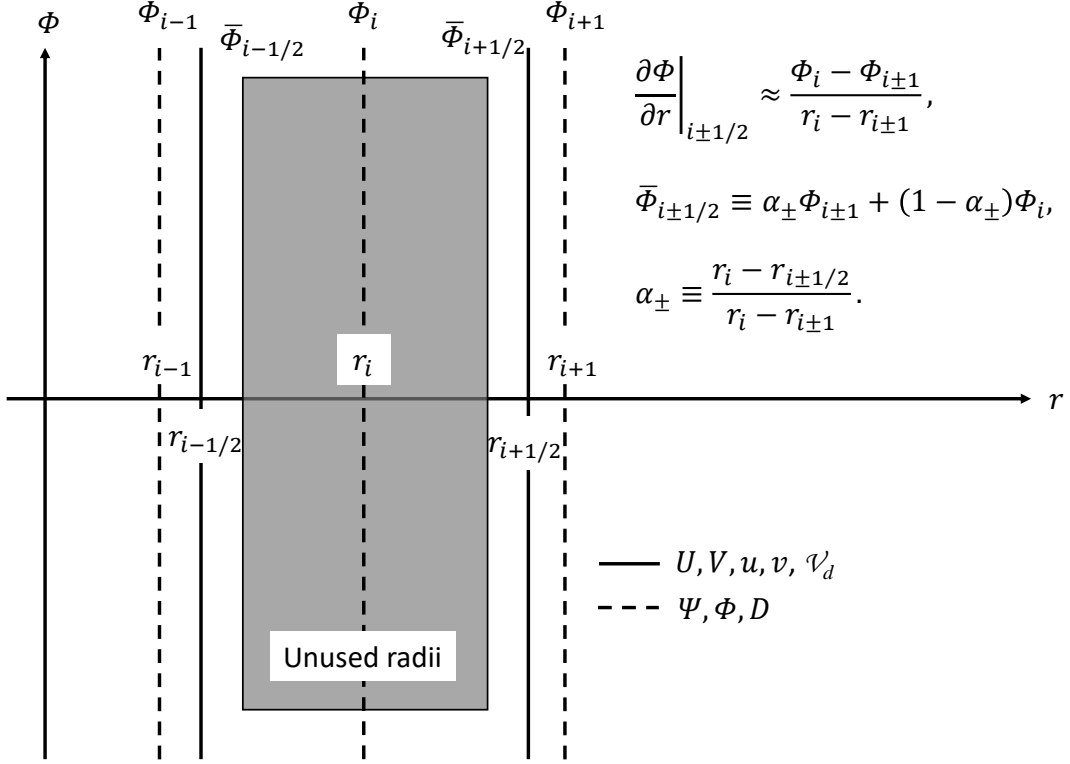


図 3.5.2: 動径方向に等間隔なドップラー風速観測の一部が欠損している場合の定式化概念図. 黒の縦線は各物理量が定義される半径であり, 実線が風速, 破線が流線関数の定義される半径を表す. ただし, 半径のインデックス i はドップラー風速観測が欠損している半径を除いて不等間隔にした後のインデックスとなっている. 本文の記述と合わせると, $r_{i1-1} = r_{i-1/2}$, $r_{i2+1} = r_{i+1/2}$ となる. 動径方向に不等間隔なドップラー風速観測もこれと同一に考えられる.

5 動径方向が不等間隔の場合

これまでは動径方向の離散化を等間隔で行ったが, 実際の観測では動径方向にデータが等間隔にあるとは限らない. また等間隔でサンプリングされていても, 方位角方向にデータが充分得られなければ, その半径はあえて推定に用いず, 不等間隔にする必要がある. なぜなら 1 つの半径で最小二乗法によって風速をリトリートする GBVTD や GVTD と異なり, 本手法は流線関数の動径方向の構造を含めて最小二乗法推定しなければならないためである. すなわち物理的に意味のある風速のリトリートを行うには, 最内半径と最外半径の間は, 連続で微分可能な流線関数にならなければならない. 本節では動径方向に不等間隔なドップラー速度の場合における, リトリートの定式化を述べる.

動径方向に等間隔 ($r_{i+1/2}$) なドップラー風速観測を考える. 半径 $r_{i1} \leq r \leq r_{i2}$, ($i1 \leq i2$) において方位角方向に充分なデータが得られない場合, その半径を推定に用いず, 半径 r_{i1-1}

物理量	等間隔	不等間隔
$f_{i\pm 1/2}$	$\frac{f_{i\pm 1} + f_i}{2}$	$\mu_{\pm} f_{i\pm 1} + (1 - \mu_{\pm}) f_i$
$\left. \frac{\partial f}{\partial r} \right _{i\pm 1/2}$	$\pm \frac{f_{i\pm 1} - f_i}{\Delta r}$	$\frac{f_{i\pm 1} - f_i}{r_{i\pm 1} - r_i}$
$\int_0^{\infty} f(r) dr$	$\Delta r \sum_{i=1}^m \varepsilon_i f_i$	$\sum_{i=1}^{m-1} (r_{i+1} - r_i)(f_{i+1} + f_i)/2$

表 3.5.1: 風速が定義される点 $r_{i\pm 1/2}$ における, 半径を変数にもつ関数 $f(r_i) = f_i$ に関連する物理量を動径等間隔と不等間隔座標で表現したときの違い.

と r_{i2+1} の中点に流線関数の定義点 r_i を図 3.5.2 のように配置する:

$$r_i \equiv \frac{r_{i1-1} + r_{i2+1}}{2}, \quad r_{i-1/2} \equiv r_{i1-1}, \quad r_{i+1/2} \equiv r_{i2+1}. \quad (127)$$

この点では流線関数が定義される. 最小二乗法に用いられる $r_{i-1/2}$, $r_{i+1/2}$ での物理量は以下のように表現される:

$$\Phi_{i\pm 1/2} \equiv \mu_{\pm} \Phi_{i\pm 1} + (1 - \mu_{\pm}) \Phi_i, \quad \mu_{\pm} \equiv \frac{r_i - r_{i\pm 1/2}}{r_i - r_{i\pm 1}}, \quad (128)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{i\pm 1/2} \approx \frac{\Phi_i - \Phi_{i\pm 1}}{r_i - r_{i\pm 1}}. \quad (129)$$

上式は動径方向に不等間隔な観測についても適用できる. 等間隔な定式化との対応は表 3.5.1 のようになる. (34) 式の対応部分を機械的に置き換えると, 不等間隔でのドップラー

速度への投影:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}'_d \delta \approx & \left\{ -V_{\text{rot},0,i+1/2} + \sum_{k=1}^N \left[\frac{\Phi_{S,k,i+1} - \Phi_{S,k,i}}{r_{i+1} - r_i} \sin(k\theta_j) + \frac{\Phi_{C,k,i+1} - \Phi_{C,k,i}}{r_{i+1} - r_i} \cos(k\theta_j) \right] \right. \\
& + \frac{1}{r_{i+1/2}} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{m-1} \left\{ k \frac{r_{l+1} - r_l}{2} [r'_{l+1} G_{k,i+1/2,l+1} D_{S,k,l+1} + r'_l G_{k,i+1/2,l} D_{S,k,l}] \cos(k\theta_j) \right\} \\
& - \frac{1}{r_{i+1/2}} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{m-1} \left\{ k \frac{r_{l+1} - r_l}{2} [r'_{l+1} G_{k,i+1/2,l+1} D_{C,k,l+1} + r'_l G_{k,i+1/2,l} D_{C,k,l}] \sin(k\theta_j) \right\} \Bigg\} \\
& \times \rho_{i+1/2} \sin \theta_j \\
& + \left\{ U_{\text{div},0,i+1/2} \right. \\
& - \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{m-1} \left\{ \frac{r_{l+1} - r_l}{2} \frac{G_{k,i+1,l+1} - G_{k,i,l+1}}{r_{i+1} - r_i} r'_{l+1} [D_{S,k,l+1} \sin(k\theta_j) + D_{C,k,l+1} \cos(k\theta_j)] \right\} \\
& - \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{m-1} \left\{ \frac{r_{l+1} - r_l}{2} \frac{G_{k,i+1,l} - G_{k,i,l}}{r_{i+1} - r_i} r'_l [D_{S,k,l} \sin(k\theta_j) + D_{C,k,l} \cos(k\theta_j)] \right\} \\
& + \sum_{k=1}^N \frac{k}{r_{i+1/2}} [(\mu_i \Phi_{S,k,i+1} + (1 - \mu_i) \Phi_{S,k,i}) \cos(k\theta_j) - (\mu_i \Phi_{C,k,i+1} + (1 - \mu_i) \Phi_{C,k,i}) \sin(k\theta_j)] \Bigg\} \\
& \times (1 + \rho_{i+1/2} \cos \theta_j)
\end{aligned} \tag{130}$$

が得られる.

さらに, スカラ一点 r_i での渦度 ζ_i の評価は, Φ_i について離散化された格子点で以下のよう
に計算すればよい:

$$\begin{aligned}
\zeta_i & \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \Big|_i + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_i - \sum_{k=1}^N \frac{k^2}{r_i^2} [\Phi_{C,k,i} \cos(k\theta_j) + \Phi_{S,k,i} \sin(k\theta_j)], \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \Big|_i & \approx \frac{2}{r_{i+1} - r_{i-1}} \left(\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{r_{i+1} - r_i} + \frac{\Phi_{i-1} - \Phi_i}{r_i - r_{i-1}} \right), \\
\frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_i & \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{r_{i+1} - r_i} - \frac{\Phi_{i-1} - \Phi_i}{r_i - r_{i-1}} \right).
\end{aligned} \tag{131}$$

付録: グリーン関数導出

Ψ は (16) 式の積分よりグリーン関数と発散で表現される. ここではグリーン関数の具体的な形を導出する. (15) 式に今考えている Ψ の形 (18) 式を入れると,

$$\sum_{k=1}^M \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} \right] \Psi_k = D, \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (132)$$

上式の各 $\Psi_{S,k}(r)$, $\Psi_{C,k}(r)$ についての r 方向の微分方程式は三角関数の直交性を用いて

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{k^2}{r^2} \right] \begin{cases} \Psi_{S,k}(r) \\ \Psi_{C,k}(r) \end{cases} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D \begin{cases} \sin(k\theta) \\ \cos(k\theta) \end{cases} d\theta \equiv \begin{cases} D_{Sk}(r) \\ D_{Ck}(r) \end{cases}. \quad (133)$$

よって, D は

$$D(r, \theta) = \sum_{n=1}^M [D_{Sn}(r) \sin(n\theta) + D_{Cn}(r) \cos(n\theta)]. \quad (134)$$

変数 r について, 以下の 1 次元微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r^2} \right] \phi = D(r), \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (135)$$

のグリーン関数を導出する. 上式は

$$\left[r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - k^2 \right] \phi = r^2 D(r). \quad (136)$$

と整理すると, 変数変換 $r = e^z$ から

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right] \phi = e^{2z} D(z). \quad (137)$$

上式は Sturm-Liouville 型なので, グリーン関数は

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right] G(z; z') = -\delta(z - z'), \quad (138)$$

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} G(z; z') = 0, \quad (139)$$

$$G(z; z')|_{z \rightarrow z' - 0} = G(z; z')|_{z \rightarrow z' + 0}, \quad (140)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{dG}{dz'} \Big|_{z-\varepsilon}^{z+\varepsilon} = -1. \quad (141)$$

を満たす. (138) 式を $z \neq z'$ について解くと,

$$G(z; z') = A e^{kz} + B e^{-kz}. \quad (142)$$

条件 (139) から, 上の物理的な一般解は

$$G(z; z') = \begin{cases} A_{z \leq z'} e^{kz}, & (z \leq z') \\ B_{z > z'} e^{-kz}, & (z > z') \end{cases} \quad (143)$$

条件 (140), (141) から

$$A_{z \leq z'} = -(1/2k)e^{-kz'}, \quad B_{z > z'} = -(1/2k)e^{kz'}. \quad (144)$$

よって

$$G(z; z') = \begin{cases} -(1/2k)e^{k(z-z')}, & (z \leq z') \\ -(1/2k)e^{-k(z-z')}, & (z > z') \end{cases}. \quad (145)$$

(137) の解は

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z; z') e^{2z'} D(z') dz'. \quad (146)$$

もとの変数 r で表すと, (145), (146) はそれぞれ,

$$G(r; r') = \begin{cases} -(1/2k)(r/r')^k, & (r \leq r') \\ -(1/2k)(r'/r)^k, & (r > r') \end{cases}, \quad (147)$$

$$\phi(r) = \int_0^{\infty} G(r; r') r' D(r') dr'. \quad (148)$$

以上より, (133) 式の各 k についてのグリーン関数 $G_k(r; r')$ は

$$G_k(r; r') = -\frac{1}{2k} \begin{cases} (r/r')^k, & (r \leq r') \\ (r'/r)^k, & (r > r') \end{cases} \quad (149)$$

よって $\Psi_{S,k}$, $\Psi_{C,k}$ の解は (16) 式から

$$\begin{cases} \Psi_{S,k}(r) \\ \Psi_{C,k}(r) \end{cases} = \int_0^{\infty} r' G_k(r; r') \begin{cases} D_{Sk}(r') \\ D_{Ck}(r') \end{cases} dr'. \quad (150)$$