

線形代数学 I/基礎 練習問題 9

講義担当者: 中村 知繁

演習問題

問 1

次の記述のうち、正しいものをすべて選び、その理由を簡潔に説明しなさい。

1. 逆行列は、任意の行列に対して定義される。
2. ある行列 A の逆行列 A^{-1} は、存在すればただ一つに定まる。
3. 逆行列を持つ行列を**特異行列**と呼ぶ。
4. 2つの正則行列 A, B の積 AB の逆行列は、 $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ である。

問 2

次の行列 A が逆行列を持たない（つまり、正則でない）ような、実数 k の値を求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & k-1 & 1 \\ 1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

問 3

次の行列 C の逆行列 C^{-1} を、**ガウスの消去法**を用いて求めなさい。

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

問 4

次の 4 次正方行列 D の逆行列 D^{-1} を、**ガウスの消去法**を用いて求めなさい。

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

問 5

ある正方行列 A が、 $A^2 - 5A + 4I = O$ という関係を満たしているとする。ここで I は単位行列、 O は零行列である。

1. 行列 A が正則（逆行列を持つ）であることを、逆行列の定義に基づいて示しなさい。また、 A の逆行列 A^{-1} を、 A と I を用いた式で表しなさい。
2. 関係式 $A^2 - 5A + 4I = O$ は、 $(A - I)(A - 4I) = O$ と因数分解できることを、左辺を展開して確認しなさい。
3. もし、行列 $(A - I)$ が正則である（逆行列を持つ）と仮定した場合、行列 A はどのような行列になるか求めなさい。

問 6

実数 a, b を含む次の連立一次方程式について、下の問いに答えなさい。

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = b \\ ax + y + z = 1 \end{cases}$$

1. この連立一次方程式がただ一つの解を持つための、実数 a の条件を求めなさい。
2. $a = -2$ のとき、この連立一次方程式が解を持つための実数 b の条件を求めなさい。また、そのときの解を（任意定数を用いて）すべて求めなさい。
3. $a = 1$ のとき、この連立一次方程式が解を持つための実数 b の条件を求めなさい。また、そのときの解を（任意定数を用いて）すべて求めなさい。