線形代数学 I: 第5回講義

ベクトル - 定義と基本操作

中村 知繁

T. Nakamura | Juntendo Univ.

2025/02/08

1. 講義情報と予習ガイド

- **講義回**: 第5回
- **テーマ**: 行列の積
- **関連項目**: 行列積の定義、計算方法、注意点、逆行列の導入
- **予習すべき内容**: 第4回の内容（行列の定義、行列の和、行列のスカラー倍）

2. 学習目標

本講義の終了時には、以下のことができるようになることを目指します：

1. 行列の積の定義を理解し、正確に計算できる
2. 行列の積の性質（結合法則、分配法則など）を説明できる
3. 行列の積の非可換性を理解し、その意味を説明できる
4. 逆行列の概念を理解し、2次の正則行列の逆行列を計算できる
5. データサイエンスにおける行列積の意味と応用例を説明できる

3. 基本概念

3.1 行列積の定義

> **定義 3.1.1（行列積）**
> A を $m \times n$ 行列、B を $n \times p$ 行列とする。このとき、A と B の積 AB は $m \times p$ の行列であり、その (i, j) 成分は以下のように定義される：
>
> $$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

- **重要**: 積 AB が定義されるためには、A の**列数**と B の**行数**が一致する必要がある。
- 結果の行列 AB のサイズは、A の行数 $\times$ B の列数 ($m \times p$) となる。

行列積の定義 - 例 3.1.1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (2×2) と $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ (2×2) の積 AB を計算する。
(A の列数 = B の行数 = 2 なので計算可能。結果は 2×2 行列)

$$(AB)_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \times 5 + 2 \times 7 = 5 + 14 = 19$$
$$(AB)_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 1 \times 6 + 2 \times 8 = 6 + 16 = 22$$
$$(AB)_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 3 \times 5 + 4 \times 7 = 15 + 28 = 43$$
$$(AB)_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 3 \times 6 + 4 \times 8 = 18 + 32 = 50$$

よって、$AB = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

行列積の定義 - 例 3.1.2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ (3 × 2) と $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ (2 × 3) の積 AB を計算する。
(A の列数 = B の行数 = 2 なので計算可能。結果は 3×3 行列)

$$(AB)_{11} = 1 \times 7 + 2 \times 10 = 27$$
$$(AB)_{12} = 1 \times 8 + 2 \times 11 = 30$$
$$(AB)_{13} = 1 \times 9 + 2 \times 12 = 33$$
$$(AB)_{21} = 3 \times 7 + 4 \times 10 = 61$$
$$(AB)_{22} = 3 \times 8 + 4 \times 11 = 68$$
$$(AB)_{23} = 3 \times 9 + 4 \times 12 = 75$$
$$(AB)_{31} = 5 \times 7 + 6 \times 10 = 95$$
$$(AB)_{32} = 5 \times 8 + 6 \times 11 = 106$$
$$(AB)_{33} = 5 \times 9 + 6 \times 12 = 117$$

よって、$AB = \begin{pmatrix} 27 & 30 & 33 \\ 61 & 68 & 75 \\ 95 & 106 & 117 \end{pmatrix}$

行列積の定義 - 例 3.1.3 (非可換性の例)

例 3.1.2 の A と B を使って、積 BA を計算する。

$B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ (2×3) と $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ (3×2)

(B の列数 = A の行数 = 3 なので計算可能。結果は 2×2 行列)

$$(BA)_{11} = 7 \times 1 + 8 \times 3 + 9 \times 5 = 7 + 24 + 45 = 76$$
$$(BA)_{12} = 7 \times 2 + 8 \times 4 + 9 \times 6 = 14 + 32 + 54 = 100$$
$$(BA)_{21} = 10 \times 1 + 11 \times 3 + 12 \times 5 = 10 + 33 + 60 = 103$$
$$(BA)_{22} = 10 \times 2 + 11 \times 4 + 12 \times 6 = 20 + 44 + 72 = 136$$

よって、$BA = \begin{pmatrix} 76 & 100 \\ 103 & 136 \end{pmatrix}$

注意: $AB = \begin{pmatrix} 27 & 30 & 33 \\ 61 & 68 & 75 \\ 95 & 106 & 117 \end{pmatrix}$ (3×3) と $BA = \begin{pmatrix} 76 & 100 \\ 103 & 136 \end{pmatrix}$ (2×2) は、サイズも成分も異なる。一般に $AB \neq BA$ である（非可換性）。

3.2 行列積の幾何学的解釈

- 行列積 AB は、線形変換の**合成**に対応する。
- ベクトル $\mathbf{x}$ に行列 B を作用させると $B\mathbf{x}$ (B による変換)。
- その結果にさらに行列 A を作用させると $A(B\mathbf{x})$ (A による変換)。
- これは、合成された変換を表す行列 AB を $\mathbf{x}$ に作用させるのと同じ： $(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x})$。
  - **注意**: 変換の順序は右から左へ (B が先、次に A)。

行列積の幾何学的解釈 - 例 3.2.1 (回転)

角度 θ の回転を表す行列: $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

ベクトル $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (x軸上の点) に A を作用させる：

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

これは、$(1, 0)$ を原点の周りに θ 回転させた点。

さらに A を作用させる ($A^2\mathbf{x}$)：

$$\begin{aligned} A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) \\ \sin(2\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これは $\mathbf{x}$ を 2θ 回転させた点。行列 A^2 は 2θ の回転を表す。$A^2 = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$

4. 行列積の性質

4.1 行列積の基本的な性質

行列 A, B, C とスカラー c に対して、以下の性質が成り立つ（ただし、各演算が定義されるサイズであるとする）。

> **性質 4.1.1（結合法則）**
> $(AB)C = A(BC)$
> (掛ける順番は変えられないが、どこから計算しても結果は同じ)

> **性質 4.1.2（分配法則）**
> $A(B + C) = AB + AC$
> $(A + B)C = AC + BC$

> **性質 4.1.3（スカラー倍との関係）**
> $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

行列積の基本的な性質 - 例 4.1.1 (分配法則の確認)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ で $A(B+C) = AB + AC$ を確認する。

- **左辺 $A(B+C)$:**
  $B + C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$
  $A(B+C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(6)+2(3) & 1(1)+2(8) \\ 0(6)+3(3) & 0(1)+3(8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 17 \\ 9 & 24 \end{pmatrix}$
- **右辺 $AB + AC$:**
  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$
  $AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$
  $AB + AC = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 17 \\ 9 & 24 \end{pmatrix}$
- **比較:** 左辺 = 右辺 となり、分配法則が成り立っている。

4.2 行列積の非可換性

- 実数の掛け算では $ab = ba$ (可換性)。
- 行列の積では、一般に $AB \neq BA$ (非可換性)。
  - 積 AB が定義できても BA が定義できるとは限らない。
  - 両方定義できても、サイズが異なるとは限らない（例 3.1.2, 3.1.3）。
  - 両方定義でき、サイズが同じでも、成分が異なるとは限らない。

例: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1(4) + 2(2) & 1(1) + 2(5) \\ 3(4) + 0(2) & 3(1) + 0(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 4(1) + 1(3) & 4(2) + 1(0) \\ 2(1) + 5(3) & 2(2) + 5(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 17 & 4 \end{pmatrix}$$

明らかに $AB \neq BA$ である。

4.3 特殊な行列と行列積 - 単位行列

> **定義 4.3（単位行列）**
> n 次の単位行列 I_n (または単に I) は、主対角線上の成分がすべて 1 で、それ以外の成分がすべて 0 である $n \times n$ の正方行列。
>
> $$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

- **性質**: 任意の $m \times n$ 行列 A に対して、$I_m A = A$ かつ $AI_n = A$。
- 単位行列は、行列の積における「単位元」（実数での 1 のような役割）。

例 4.3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$I_2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1)+0(3) & 1(2)+0(4) \\ 0(1)+1(3) & 0(2)+1(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$$AI_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(1)+2(0) & 1(0)+2(1) \\ 3(1)+4(0) & 3(0)+4(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$$

4.4 零行列

- **定義**: すべての成分が 0 である行列を零行列と呼び、O で表す。サイズは文脈による。
  例: $O_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **性質**:
  - 和について: $A + O = O + A = A$ (サイズが A と同じ O)
  - 積について: $AO = O, OA = O$ (積が定義できるサイズの O)
    - 注意: 積の結果の O は、元の O とサイズが異なる場合がある。
    - 例: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
    - 例: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$ (1×1 零行列)
    - 例: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2×2 零行列)

4.5 逆行列

> **定義 4.5（逆行列）**
> n 次正方行列 A に対して、$AB = BA = I_n$ を満たす n 次正方行列 B が存在するとき、B を A の**逆行列**といい、A^{-1} と表す。
>
> $$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

- 逆行列が存在する行列 A を**正則行列** (regular) または**可逆行列** (invertible) という。
- 逆行列が存在しない正方行列は**特異行列** (singular) または**非可逆行列** (non-invertible) という。
- 逆行列は正方行列に対してのみ定義される。

4.5.1 2次の行列の逆行列の計算

> 2次の行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、
>
> - $ad - bc \neq 0$ ならば、A は正則であり、逆行列 A^{-1} が存在する。
> - 逆行列は次の式で与えられる：
>
> $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
>
> - $ad - bc = 0$ ならば、A は特異行列であり、逆行列は存在しない。

2次の行列の逆行列の計算 - 例 4.5.1

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める。

1. **行列式を計算**:
   $ad - bc = 3 \times 2 - 1 \times 2 = 6 - 2 = 4$
2. **逆行列の存在確認**:
   $ad - bc = 4 \neq 0$ なので、A は正則であり、逆行列が存在する。
3. **公式を適用**:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{2}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

検算:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(\frac{1}{2}) + 1(-\frac{1}{2}) & 3(-\frac{1}{4}) + 1(\frac{3}{4}) \\ 2(\frac{1}{2}) + 2(-\frac{1}{2}) & 2(-\frac{1}{4}) + 2(\frac{3}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} \\ 1 - 1 & -\frac{2}{4} + \frac{6}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$A^{-1}A$ も同様に I_2 となる（各自確認）。

4.6 2次行列に対するケーリー・ハミルトンの定理

> **定理 4.5.1 （ケーリー・ハミルトンの定理, Cayley-Hamilton Theorem, CHT）**
> 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、以下の関係式が成り立つ。
>
> $$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I = O$$
>
> ここで、$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は単位行列、$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ は零行列。

ケーリ・ハミルトンの定理 - 例 4.5.1

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ でケーリ・ハミルトンの定理を確認する。

- $a + d = 3 + 2 = 5$
- $ad - bc = 3(2) - 1(2) = 4$

計算：

$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(3) + 1(2) & 3(1) + 1(2) \\ 2(3) + 2(2) & 2(1) + 2(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$

$(a + d)A = 5A = 5 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$

$4I = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$A^2 - 5A + 4I = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 10 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 - 15 + 4 & 5 - 5 + 0 \\ 10 - 10 + 0 & 6 - 10 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

確かに成り立っている。

問題 1-1

以下の行列の積を計算しなさい。

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

問題 1-2

以下の行列の積を計算しなさい。

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

問題 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする。以下の行列の積のうち、計算可能なものをすべて計算せよ。計算不可能な場合はその理由を述べよ。

(a) AB
(b) BA
(c) AC
(d) CA
(e) BC

問題 3

$G = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする。単位行列 $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について、GI および IG を計算しなさい。

問題 4

$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ とする。零行列 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ について、HO および OH を計算しなさい。

問題 5

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ について、A^2 ($= AA$) を計算しなさい。

問題 6

行列 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ について、積 PQ と QP をそれぞれ計算し、$PQ = QP$が成り立つか確かめなさい。

問題 7

行列 $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について、積 XY を計算しなさい。

問題 8

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ について、積 AB を計算しなさい。(結果は何になるか？ A, B は零行列ではないことに注意)

問題 9

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ について、$(A+B)(A-B)$ と $A^2 - B^2$ をそれぞれ計算し、結果を比較しなさい。（実数の場合 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ですが、行列ではどうなるでしょうか？）

問題 10

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が正則（逆行列を持つ）ための必要十分条件は $\det(A) = ad - bc \neq 0$ です。この条件を満たさない（つまり $\det(A) = 0$ となる）$A \neq O$ の例を挙げ、その行列が逆行列を持たないことを、$AB = I$ となる B が存在しないことを示すことで（あるいは他の方法で）確認しなさい。

問題 11

2次の正方行列 A, B が
$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,
$A - B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
を満たすとき、
$A^2 - B^2$ を求めよ。
（ヒント: 問題9の結果を考慮すること。まず A と B を求める必要がある。）

問題 12

2つの正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a & b \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について、$AB = BA$ が成り立つとき、a と bを求めなさい。

問題 13

行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

に対して、$AB = BA$ が成り立つとき、x と y を求めよ。

問題 14

行列 $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ -3 & y \end{pmatrix}$ が $A = A^{-1}$ を満たすとき、x, y を求めよ。
（ヒント: $A = A^{-1} \iff A^2 = I$）

問題 15

行列 $A = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列が $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ b & y \end{pmatrix}$ であるとする。x, yを求めなさい。
（ヒント: A の逆行列の公式を使う）

問題 16 （ケーリ・ハミルトン）

2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について考える。ここで、a, b, c, d は実数とする。また、$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を 2×2 単位行列、$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ を 2×2 零行列とする。

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I = O$$

が成り立つことを、左辺を実際に計算して示しなさい。

問題 17 （ケーリ・ハミルトン）

行列 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ とする。A^3 を $pA + qI$ (ただし p, q は実数) の形で表しなさい。また、A^3 を求めなさい。
（ヒント: まずケーリ・ハミルトンの定理を使って A^2 を A と I で表す）

問題 18 （ケーリ・ハミルトン）

行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ について、A^{10} の $(2, 2)$成分を求めなさい。
（ヒント: ケーリ・ハミルトンの定理から A^2 を求める）

問題 19

$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 \\ -8 & -3 & -8 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ とし、E を 3 次の単位行列とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $A^2 - 10A = -9E$ であることを示せ。

(2) $AB = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -18 \\ 5 & -1 & 18 \\ -4 & 1 & -9 \end{pmatrix}$ を満たす行列 B を求めよ。
（ヒント: (1) の式を利用して A の逆行列（のようなもの）を考える）

問題 20 (ア)（逆行列の有無）

A は 2 次の正方行列であり、$A^2 + A - 2E = O$ を満たす。A は逆行列をもつか。理由を付して答えよ。
（ヒント: $A^2 + A - 2E = O$ を $A(\dots) = E$ または $(\dots)A = E$ の形に変形できないか考える）

問題 20 (イ) （逆行列の有無）

B は 2 次の正方行列であり、$B^2 = O$ を満たす。B は逆行列をもつか。理由を付して答えよ。
（ヒント: もし B が逆行列 B^{-1} を持つと仮定するとどうなるか？）

問題 20 (ウ) （逆行列の有無）

$C = E + B$ とする。ここで B は問題 20 (イ) の行列（$B^2 = O$）とする。C は逆行列をもつか。理由を付して答えよ。
（ヒント: $(E + B)(\ldots) = E$ となる行列を探す。二項展開のような考え方が使えるか？）

演習問題（標準）

標準問題 1

可換な行列の探求:

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ と可換な（つまり $AB = BA$ を満たす） 2×2 行列 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の a, b, c, d が満たすべき条件を求めなさい。

標準問題 2

冪零行列:

$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

(a) N^2 と N^3 を計算しなさい。

(b) $(I - N)(I + N + N^2)$ を計算し、結果が I になることを示しなさい。

標準問題 3

行列のトレースと積の性質:

行列 $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ のトレース $\mathrm{tr}(M)$ とは、その対角成分の和 $\mathrm{tr}(M) = x + w$ のことである。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ を一般的な 2×2 行列とする。

積 AB と BA を計算し、 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ が成り立つことを示しなさい。(この性質は一般の $n \times n$ 行列でも成り立ちます)。

標準問題 4 (a)

行列の n 乗の規則性 (回転行列):

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ （回転行列）とする。

(a) A^2 および A^3 を計算しなさい。（三角関数の加法定理を用いるとよいでしょう）

(b) A^n (n は正の整数) の形を推測し、数学的帰納法を用いてその推測が正しいことを証明しなさい。

標準問題 5

射影行列（Idempotent Matrix）の性質:

ある正方行列 X が $X^2 = X$ を満たすとき、X は冪等行列（idempotent matrix）または射影行列と呼ばれる。
P が冪等行列であるとき、以下のことを証明しなさい。

(a) $I - P$ も冪等行列である（つまり $(I-P)^2 = I - P$ を示す）。

(b) $P(I-P) = (I-P)P = O$（O は零行列）である。

標準問題 6

行列のn乗の探求 1:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。A^2, A^3 を計算しても A^n の規則性は見つけにくい。
しかし、$A = I + N$ となる $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ を考えると、$N^2 = O$（零行列）となることを示せ。これを用いて $(I+N)^n$ を二項展開し、A^n を求めよ。

（ヒント: $(I+N)^n = \binom{n}{0} I^n N^0 + \binom{n}{1} I^{n-1} N^1 + \binom{n}{2} I^{n-2} N^2 + \ldots$ だが、$N^2 = O$ なので...）

標準問題 7

行列のn乗の探求 2:

$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (λ はスカラー) とする。A^n (n は自然数) を推測し、数学的帰納法などを用いて証明せよ。
（ヒント: $A = \lambda I + N$ の形に分解してみる）

標準問題 8 (a)

行列のn乗の探求 3 (対角化の利用):

$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ に対して次の問いに答えなさい。

(a) 行列 U の逆行列 U^{-1} を求めなさい。

標準問題 8 (b)

行列のn乗の探求 3 (対角化の利用):

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, U^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) $B = U^{-1}AU$ とおくとき、B を計算し、自然数 n に対して、行列 B^n を求めなさい。

標準問題 8 (c)

行列のn乗の探求 3 (対角化の利用):

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}, U^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) 自然数 n に対して、行列 A^n を求めなさい。
（ヒント: $B = U^{-1}AU$ より $A = UBU^{-1}$。よって $A^n = (UBU^{-1})^n = UB^nU^{-1}$）

演習問題（少し難しい）

少し難しい問題 1

行列 $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ とする。B の逆行列 B^{-1} を $pB + qI$ (ただし p, q は実数) の形で表しなさい。
（ヒント: ケーリ・ハミルトンの定理を利用する）

少し難しい問題 2

行列 $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。$f(C) = C^4 - C^3 + 4C^2 - 2C + 5I$ の値を計算しなさい。
（ヒント: ケーリ・ハミルトンの定理を利用して、高次の項を次数下げする）

少し難しい問題 3

行列 $D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ とする。$A^6 + 2A^4 + 2A^3 + 2A^2 + 2A + I$ の値を計算しなさい。
（ヒント: ケーリ・ハミルトンの定理と、多項式の割り算を利用する）

少し難しい問題 4

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 97A + 2010I = O$ を満たすとき、$a + d, ad - bc$ の値の組をすべて求めよ。ただし、
$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。
（ヒント: ケーリ・ハミルトンの定理と比較する）

少し難しい問題 5

a を実数とする。行列 $X = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ が $X^2 - 2X + aI = O$ をみたすような実数 x, y を求めよ。ただし、$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。
（ヒント: X についてケーリ・ハミルトンの定理を適用し、与式と比較する）

少し難しい問題 6 (a)

N を $n \times n$ 行列とし、$N^k = O$ (零行列) となる正の整数 k が存在するとする（このような行列 N を冪零行列といいます）。

(a) $I - N$ が正則行列（逆行列を持つ行列）であることを証明しなさい。

(b) $(I - N)^{-1}$ を $I, N, N^2, \dots, N^{k-1}$ を用いて具体的に表しなさい。

（ヒント: $(I - N)(I + N + N^2 + \cdots + N^{k-1})$ を計算してみる）

少し難しい問題 6 (b)

N を $n \times n$ 行列とし、$N^k = O$ となる正の整数 k が存在する。

少し難しい問題 7

a, b, c, d は実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して、等式 $A^2 + BA = 4I, AB + B^2 = 12I$ をみたす行列 B が存在するとき、$a + d$ と $ad - bc$ の値を求めよ。ただし、$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

少し難しい問題 8

2次元ベクトル $A_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ が以下の関係式を満たすとき、A_n を求めよ。

$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$

$$A_{n+2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} A_{n+1} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

演習問題（データサイエンス応用 +β）

DS 問題 1 (a)

線形回帰モデルによる予測値の計算
予測モデル: 予測価格 = $150 + 2.5 \times (\text{広さ}) - 1.5 \times (\text{築年数})$
特徴量行列 X (切片項, 広さ, 築年数) と係数ベクトル β:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 80 & 10 \\ 1 & 120 & 5 \\ 1 & 70 & 20 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 150 \\ 2.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

(a) 行列の積 $Y_{pred} = X\beta$ を計算しなさい。

DS 問題 1 (b)

線形回帰モデルによる予測値の計算

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 80 & 10 \\ 1 & 120 & 5 \\ 1 & 70 & 20 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 150 \\ 2.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

$$Y_{pred} = X\beta = \begin{pmatrix} 335 \\ 442.5 \\ 225 \end{pmatrix} \quad \text{(from (a))}$$

(b) 計算結果のベクトル Y_{pred} の各要素は何を表しているか説明してください。

DS 問題 2 (a)

ソーシャルネットワークにおける「友達の友達」の数

4人のユーザー (A, B, C, D) のフォロー関係を表す隣接行列 A:

(i 行 j 列は $i \to j$ のフォロー関係)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \leftarrow A \\ \leftarrow B \\ \leftarrow C \\ \leftarrow D \end{array}$$

(a) 行列の積 $A^2 = AA$ を計算しなさい。

DS 問題 2 (b)

ソーシャルネットワークにおける「友達の友達」の数

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(from (a))}$$

(b) A^2 の (i, j)成分 $(A^2)_{ij}$ は、ユーザー i からユーザー j へ、ちょうど1人の他のユーザー k を経由していく経路 ($i \to k \to j$) の数を表します。
* $(A^2)_{14}$ の値は何を意味しますか？
* $(A^2)_{22}$ の値は何を意味しますか？

DS 問題 3 (a)

顧客のプラン移行予測 (マルコフ連鎖)
プラン移行確率行列 T (行 i から 列 j への移行確率):

$$T = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{r} \leftarrow \text{無料} \\ \leftarrow \text{基本} \\ \leftarrow \text{プレミアム} \end{array}$$

初期状態分布 $p_0 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$ (無料: 50%, 基本: 30%, プレミアム: 20%)

(a) 1ヶ月後の顧客の状態分布 $p_1 = p_0 T$ を計算しなさい。

DS 問題 3 (b)

顧客のプラン移行予測 (マルコフ連鎖)

$$T = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}, \quad p_0 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$p_1 = p_0 T = \begin{pmatrix} 0.33 & 0.38 & 0.29 \end{pmatrix} \quad (\text{from (a)})$$

(b) 2ヶ月後の顧客の状態分布 $p_2 = p_1 T = p_0 T^2$ を計算しなさい。

8. よくある質問と解答

Q1: 行列の積が定義されるための条件は何ですか？

A1: 行列 A と B の積 AB が定義されるためには、A の**列数**と B の**行数**が一致している必要があります。
すなわち、A が $m \times n$ 行列で B が $p \times q$ 行列のとき、$n = p$ であれば積 AB が定義でき、結果は $m \times q$ 行列になります。

Q2: 行列が正則であることと逆行列が存在することは同じ意味ですか？

A2: はい、同じ意味です。
正方行列 A が**正則**（regular）または**可逆**（invertible）であるとは、その**逆行列** A^{-1} ($AA^{-1} = A^{-1}A = I$ を満たす行列) が存在することを意味します。
2次の行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の場合、$\det(A) = ad - bc \neq 0$ が正則であるための必要十分条件です。
$\det(A) = 0$ の場合、その行列は**特異**（singular）または**非可逆**（non-invertible）と呼ばれ、逆行列は存在しません。