

# 線形代数学 I: 第4回講義

## 行列 - 定義と和の計算

中村 知繁

# 1. 講義情報と予習ガイド

- 講義回: 第4回
- 関連項目: ベクトル演算（第2-3回の内容）
- 予習内容: ベクトルの和とスカラー倍、ベクトルの内積の復習
- スライド: [リンク](#)

## 2. 学習目標

1. 行列の定義を理解し、適切に表記できる
2. 行列の和を正確に計算できる
3. 行列のスカラー倍を正確に計算できる
4. 行列とベクトルの関係性を理解できる

## 3. 基本概念

### 3.1 行列の定義

**定義:** 行列（Matrix）とは、数や記号を縦と横に矩形状に配置したものです。 $m$ 行 $n$ 列の行列 $A$ は次のように表されます：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ここで、 $a_{ij}$ は $i$ 行 $j$ 列目の要素を表します。

## 行列のサイズ

**サイズ:** 行列のサイズは行数×列数で表し、 $m \times n$ 行列などと呼びます。

**例:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

この行列  $A$  は  $2 \times 3$  行列（2行3列の行列）です。

## 3.2 特殊な形状の行列

1. 正方行列 (**Square Matrix**) : 行数と列数が等しい行列 ( $m = n$ )

例:  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  は  $2 \times 2$  の正方行列

2. 行ベクトル (**Row Vector**) : 1行  $n$  列の行列

例:  $r = (1 \quad 2 \quad 3)$  は  $1 \times 3$  の行ベクトル

3. 列ベクトル (**Column Vector**) :  $m$  行 1 列の行列

例:  $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  は  $3 \times 1$  の列ベクトル

### 3.3 行列の表記法

行列は通常、大文字のアルファベット ( $A, B, C$  など) で表します。行列の要素は小文字の添え字付きの文字 ( $a_{ij}$  など) で表します。

- $A$ : 行列全体
- $a_{ij}$ : 行列  $A$  の  $i$  行  $j$  列目の要素
- $A_{i,j}$ : 行列  $A$  の  $i$  行  $j$  列目の要素 (別表記)

## 4. 計算手法

### 4.1 行列の和

定義: 同じサイズの行列  $A$  と  $B$  の和  $A + B$  は、対応する要素同士を足し合わせた行列です：

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

注意点: 異なるサイズの行列同士は足し合わせることができません。



## 行列の和の例

- $2 \times 2$  行列の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

- $3 \times 2$  行列の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

## 4.2 行列の和の性質

行列の和は以下の性質を持ちます：

1. 交換法則:  $A + B = B + A$
2. 結合法則:  $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. 単位元: 零行列  $O$  について  $A + O = A$
4. 逆元:  $-A$  について  $A + (-A) = O$

## 4.3 行列のスカラー倍

定義: 行列  $A$  のスカラー倍  $cA$  は、 $A$  の各要素に  $c$  を掛けた行列です：

$$(cA)_{ij} = c \cdot a_{ij}$$

## 行列のスカラー倍の例

- $2 \times 2$  行列の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = 3$$

$$cA = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

- $3 \times 2$  行列の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = -2$$

$$cA = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 1 & (-2) \cdot 2 & (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 3 & (-2) \cdot 4 & (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

## 4.4 行列のスカラー倍の性質

行列のスカラー倍は以下の性質を持ちます：

$$1. c(A + B) = cA + cB$$

$$2. (c + d)A = cA + dA$$

$$3. c(dA) = (cd)A$$

$$4. 1 \cdot A = A$$

## 4.5 行列とベクトルの関係

行列は「ベクトルを列に並べたもの」と見ることができます。例えば、 $n$ 次元の列ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ を考えると、それらを横に並べた行列 $A$ は：

$$A = \left( \begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m \\ | & | & & | \end{array} \right)$$

同様に、行列を「行ベクトルを縦に積み重ねたもの」と見ることもできます。

## 例: 列ベクトルから行列を構成

列ベクトル  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  を並べると、

$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

## 例: 列ベクトルから行列を構成

列ベクトル  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  を並べると、

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$



## 6. 演習問題

1. 次の行列のサイズを答えなさい。

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(b) B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$(c) C = (13 \quad 14 \quad 15 \quad 16)$$

$$(c) D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

## 演習問題（続き）

2. 次の行列の和を求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

3. 次の行列のスカラー倍を求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad c = -2$$

## 演習問題（続き）

4. 次の計算をせよ。

$$2A - 3B, \text{ ただし } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

## 演習問題（続き）

5. 以下の患者データ行列  $P$  があります：

$$P = \begin{pmatrix} 105 & 60 & 90 \\ 120 & 85 & 110 \\ 125 & 75 & 95 \\ 110 & 80 & 125 \end{pmatrix}$$

各行は患者、各列は異なる健康指標（例：血圧、体重、コレステロール値）を表しています。全ての患者データに対して、標準化のために以下の操作を行います：

- 血圧（1列目）から血圧の平均を引く
- 体重（2列目）から体重の平均を引く
- コレステロール値（3列目）からコレステロール値の平均を引く

この操作を行列の計算として表現し、結果の行列を求めなさい。

## 7. よくある質問と解答

**Q1:** 行列とベクトルの違いは何ですか？

**A1:** ベクトルは行列の特殊な場合と考えることができます。列ベクトルは  $n \times 1$  行列、行ベクトルは  $1 \times m$  行列です。行列はベクトルを複数並べたものとも見るすることができます。

## よくある質問（続き）

**Q2: 行列の和やスカラー倍がデータサイエンスでどのように使われますか？**

A2: 行列の和やスカラー倍は、データの正規化、特徴量のスケーリング、複数のデータセットの結合、時系列データの移動平均の計算など、様々なデータ前処理や分析手法で使用されます。また、機械学習アルゴリズムの内部計算（勾配降下法など）でも重要な役割を果たします。

## よくある質問（続き）

**Q3: 行列の要素を並べる順序は重要ですか？**

A3: 非常に重要です。行列では要素の位置（行番号と列番号）が情報を持っています。行と列を入れ替えると、全く異なる行列になります。特に、データサイエンスでは行は通常サンプル（観測値）、列は特徴量（変数）を表すことが多いため、その構造を保つことが重要です。