線形代数学 I: 第4回講義

ベクトル - 定義と基本操作

中村 知繁

T. Nakamura | Juntendo Univ.

2025/02/08

1. 講義情報と予習ガイド

- **講義回**: 第4回
- **関連項目**: ベクトル演算（第2-3回の内容）
- **予習内容**: ベクトルの和とスカラー倍、ベクトルの内積の復習
- **スライド**: [リンク]

2. 学習目標

1. 行列の定義を理解し、適切に表記できる
2. 行列の和を正確に計算できる
3. 行列のスカラー倍を正確に計算できる
4. 行列とベクトルの関係性を理解できる

3. 基本概念

3.1 行列の定義

定義: 行列（Matrix）とは、数や記号を縦と横に矩形状に配置したものです。m行n列の行列Aは次のように表されます：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ここで、a_{ij}はi行j列目の要素を表します。

行列のサイズ

サイズ: 行列のサイズは行数×列数で表し、$m \times n$行列などと呼びます。

例:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

この行列Aは2×3行列（2行3列の行列）です。

3.2 特殊な形状の行列

1. **正方行列（Square Matrix）**：行数と列数が等しい行列（$m = n$）

   例: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ は2×2の正方行列

2. **行ベクトル（Row Vector）**：1行n列の行列

   例: $r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ は1×3の行ベクトル

3. **列ベクトル（Column Vector）**：m行1列の行列

   例: $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は3×1の列ベクトル

3.3 行列の表記法

行列は通常、大文字のアルファベット（A, B, Cなど）で表します。行列の要素は小文字の添え字付きの文字（a_{ij}など）で表します。

- A: 行列全体
- a_{ij}: 行列Aのi行j列目の要素
- $A_{i,j}$: 行列Aのi行j列目の要素（別表記）

4. 計算手法

4.1 行列の和

定義: 同じサイズの行列AとBの和$A + B$は、対応する要素同士を足し合わせた行列です：

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

注意点: 異なるサイズの行列同士は足し合わせることができません。

行列の和の例

- 2×2 行列の例

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}
$$

$$
A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}
$$

- 3×2 行列の例

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}
$$

$$
A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}
$$

4.2 行列の和の性質

行列の和は以下の性質を持ちます：

1. **交換法則**: $A + B = B + A$
2. **結合法則**: $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. **単位元**: 零行列 O について $A + O = A$
4. **逆元**: $-A$ について $A + (-A) = O$

4.3 行列のスカラー倍

定義: 行列Aのスカラー倍cAは、Aの各要素にcを掛けた行列です：

$$(cA)_{ij} = c \cdot a_{ij}$$

行列のスカラー倍の例

- 2×2 行列の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = 3$$

$$cA = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

- 3×2 行列の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = -2$$

$$cA = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 1 & (-2) \cdot 2 & (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 3 & (-2) \cdot 4 & (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

4.4 行列のスカラー倍の性質

行列のスカラー倍は以下の性質を持ちます：

1. $c(A+B) = cA + cB$
2. $(c+d)A = cA + dA$
3. $c(dA) = (cd)A$
4. $1 \cdot A = A$

4.5 行列とベクトルの関係

行列は「ベクトルを列に並べたもの」と見ることができます。例えば、n次元の列ベクトル$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$を考えると、それらを横に並べた行列$A$は：

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

同様に、行列を「行ベクトルを縦に積み重ねたもの」と見ることもできます。

例: 列ベクトルから行列を構成

列ベクトル $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ を並べると、

$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Pythonによる実装

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# 行列の定義
A = np.array([[1, 2], [3, 4]])
B = np.array([[5, 6], [7, 8]])

print("行列 A:")
print(A)
print("\n行列 B:")
print(B)

# 行列の和
C = A + B
print("\nA + B =")
print(C)

# 行列のスカラー倍
scalar = 3
D = scalar * A
print(f"\n{scalar} × A =")
print(D)
```

5.2 行列の可視化

```python
def plot_matrix(matrix, title):
    plt.figure(figsize=(6, 6))
    plt.imshow(matrix, cmap='viridis')
    plt.colorbar(label='値')
    plt.title(title)

    # 値を表示
    rows, cols = matrix.shape
    for i in range(rows):
        for j in range(cols):
            plt.text(j, i, f'{matrix[i, j]}',
                     ha='center', va='center', color='white')

    plt.tight_layout()
    plt.show()

# 行列の可視化
plot_matrix(A, '行列 A')
plot_matrix(B, '行列 B')
```

5.3 行列とベクトルの関係の可視化

```python
# ベクトルから行列を構成
v1 = np.array([1, 3])
v2 = np.array([2, 4])

# 列ベクトルとして結合
A_from_columns = np.column_stack((v1, v2))
print("列ベクトルから構成した行列:")
print(A_from_columns)

# 行ベクトルとして結合
row1 = np.array([1, 2])
row2 = np.array([3, 4])
A_from_rows = np.vstack((row1, row2))
print("\n行ベクトルから構成した行列:")
print(A_from_rows)
```

6. 演習問題

1. 次の行列のサイズを答えなさい。
   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
   (b) $B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$
   (c) $C = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

演習問題（続き）

2. 次の行列の和を求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

3. 次の行列のスカラー倍を求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad c = -2$$

演習問題（続き）

4. 次の計算をせよ。

$$2A - 3B, \text{ただし } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

演習問題（続き）

5. 以下の患者データ行列 P があります：

$$P = \begin{pmatrix} 115 & 80 & 90 \\ 130 & 85 & 110 \\ 125 & 75 & 95 \\ 140 & 90 & 125 \end{pmatrix}$$

各行は患者、各列は異なる健康指標（例：血圧、体重、コレステロール値）を表しています。全ての患者データに対して、標準化のために以下の操作を行います：

- 血圧（1列目）から血圧の平均を引く
- 体重（2列目）から体重の平均を引く
- コレステロール値（3列目）からコレステロール値の平均を引く

この操作を行列の計算として表現し、結果の行列を求めなさい。

7. よくある質問と解答

Q1: 行列とベクトルの違いは何ですか？

A1: ベクトルは行列の特殊な場合と考えることができます。列ベクトルは$n \times 1$行列、行ベクトルは$1 \times m$行列です。行列はベクトルを複数並べたものとも見ることができます。

よくある質問（続き）

Q2: 行列の和やスカラー倍がデータサイエンスでどのように使われますか？

A2: 行列の和やスカラー倍は、データの正規化、特徴量のスケーリング、複数のデータセットの結合、時系列データの移動平均の計算など、様々なデータ前処理や分析手法で使用されます。また、機械学習アルゴリズムの内部計算（勾配降下法など）でも重要な役割を果たします。

よくある質問（続き）

Q3: 行列の要素を並べる順序は重要ですか？

A3: 非常に重要です。行列では要素の位置（行番号と列番号）が情報を持っています。行と列を入れ替えると、全く異なる行列になります。特に、データサイエンスでは行は通常サンプル（観測値）、列は特徴量（変数）を表すことが多いため、その構造を保つことが重要です。