

線形代数学 I: 第4回講義

ベクトル - 定義と基本操作

中村 知繁

1. 講義情報と予習ガイド

- 講義回: 第4回
- 関連項目: ベクトル演算（第2-3回の内容）
- 予習内容: ベクトルの和とスカラー倍、ベクトルの内積の復習
- スライド: [リンク](#)

2. 学習目標

1. 行列の定義を理解し、適切に表記できる
2. 行列の和を正確に計算できる
3. 行列のスカラー倍を正確に計算できる
4. 行列とベクトルの関係性を理解できる

3. 基本概念

3.1 行列の定義

定義: 行列（Matrix）とは、数や記号を縦と横に矩形状に配置したものです。 m 行 n 列の行列 A は次のように表されます：

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ここで、 a_{ij} は i 行 j 列目の要素を表します。

行列のサイズ

サイズ: 行列のサイズは行数×列数で表し、 $m \times n$ 行列などと呼びます。

例:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

この行列 A は 2×3 行列（2行3列の行列）です。

3.2 特殊な形状の行列

1. 正方行列 (**Square Matrix**) : 行数と列数が等しい行列 ($m = n$)

例: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ は 2×2 の正方行列

2. 行ベクトル (**Row Vector**) : 1行 n 列の行列

例: $r = (1 \quad 2 \quad 3)$ は 1×3 の行ベクトル

3. 列ベクトル (**Column Vector**) : m 行 1 列の行列

例: $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ は 3×1 の列ベクトル

3.3 行列の表記法

行列は通常、大文字のアルファベット (A, B, C など) で表します。行列の要素は小文字の添え字付きの文字 (a_{ij} など) で表します。

- A : 行列全体
- a_{ij} : 行列 A の i 行 j 列目の要素
- $A_{i,j}$: 行列 A の i 行 j 列目の要素 (別表記)

4. 計算手法

4.1 行列の和

定義: 同じサイズの行列 A と B の和 $A + B$ は、対応する要素同士を足し合わせた行列です：

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

注意点: 異なるサイズの行列同士は足し合わせることができません。

行列の和の例

- 2×2 行列の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

- 3×2 行列の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

4.2 行列の和の性質

行列の和は以下の性質を持ちます：

1. 交換法則: $A + B = B + A$
2. 結合法則: $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. 単位元: 零行列 O について $A + O = A$
4. 逆元: $-A$ について $A + (-A) = O$

4.3 行列のスカラー倍

定義: 行列 A のスカラー倍 cA は、 A の各要素に c を掛けた行列です：

$$(cA)_{ij} = c \cdot a_{ij}$$

行列のスカラー倍の例

- 2×2 行列の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad c = 3$$

$$cA = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

- 3×2 行列の例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = -2$$

$$cA = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 1 & (-2) \cdot 2 & (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 3 & (-2) \cdot 4 & (-2) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -3 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

4.4 行列のスカラー倍の性質

行列のスカラー倍は以下の性質を持ちます：

$$1. c(A + B) = cA + cB$$

$$2. (c + d)A = cA + dA$$

$$3. c(dA) = (cd)A$$

$$4. 1 \cdot A = A$$

4.5 行列とベクトルの関係

行列は「ベクトルを列に並べたもの」と見ることができます。例えば、 n 次元の列ベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ を考えると、それらを横に並べた行列 A は：

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_m \\ | & | & & | \end{array} \right)$$

同様に、行列を「行ベクトルを縦に積み重ねたもの」と見ることもできます。

例: 列ベクトルから行列を構成

列ベクトル $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ を並べると、

$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

例: 列ベクトルから行列を構成

列ベクトル $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ を並べると、

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

6. 演習問題

1. 次の行列のサイズを答えなさい。

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$(b) B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$(c) C = (13 \quad 14 \quad 15 \quad 16)$$

$$(c) D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

演習問題（続き）

2. 次の行列の和を求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

3. 次の行列のスカラー倍を求めなさい。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad c = -2$$

演習問題（続き）

4. 次の計算をせよ。

$$2A - 3B, \text{ ただし } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

演習問題（続き）

5. 以下の患者データ行列 P があります：

$$P = \begin{pmatrix} 115 & 80 & 90 \\ 130 & 85 & 110 \\ 125 & 75 & 95 \\ 140 & 90 & 125 \end{pmatrix}$$

各行は患者、各列は異なる健康指標（例：血圧、体重、コレステロール値）を表しています。全ての患者データに対して、標準化のために以下の操作を行います：

- 血圧（1列目）から血圧の平均を引く
- 体重（2列目）から体重の平均を引く
- コレステロール値（3列目）からコレステロール値の平均を引く

この操作を行列の計算として表現し、結果の行列を求めなさい。

7. よくある質問と解答

Q1: 行列とベクトルの違いは何ですか？

A1: ベクトルは行列の特殊な場合と考えることができます。列ベクトルは $n \times 1$ 行列、行ベクトルは $1 \times m$ 行列です。行列はベクトルを複数並べたものとも見るすることができます。

よくある質問（続き）

Q2: 行列の和やスカラー倍がデータサイエンスでどのように使われますか？

A2: 行列の和やスカラー倍は、データの正規化、特徴量のスケーリング、複数のデータセットの結合、時系列データの移動平均の計算など、様々なデータ前処理や分析手法で使用されます。また、機械学習アルゴリズムの内部計算（勾配降下法など）でも重要な役割を果たします。

よくある質問（続き）

Q3: 行列の要素を並べる順序は重要ですか？

A3: 非常に重要です。行列では要素の位置（行番号と列番号）が情報を持っています。行と列を入れ替えると、全く異なる行列になります。特に、データサイエンスでは行は通常サンプル（観測値）、列は特徴量（変数）を表すことが多いため、その構造を保つことが重要です。