第四章　根轨迹法

A 一般题

A4-1 已知单位反馈系统的开环传递函数为$G(s)=\frac{K_r(s+1)}{s^2(s+a)}$分别画出$a=5, a=9, \alpha=10$的根轨迹草图，并计算根轨迹在实轴上的分离点（或会合点），根轨迹渐近线与实轴的夹角和交点。

解:

1.　由题可知,根轨迹有 3 条分支.。

当 a=5 时,根轨迹的起点分别是 p_1=0, p_2=0, p_3= -5.一条终止于 z_1= -1,另两条趋向无穷远.

当 a=9 时,根轨迹的起点分别是 p_1=0, p_2=0, p_3= -9.一条终止于 z_1= -1,另两条趋向无穷远.

当 a=10 时,根轨迹的起点分别是 p_1=0, p_2=0, p_3= -10.一条终止于 z_1= -1,另两条趋向无穷远.

2.　根据实轴上的根轨迹判断规则,其右边实轴上的零点和极点之和为奇数.

当 a=5 时,实轴的[-5，-1]段是根轨迹;

当 a=9 时,实轴的[-9，-1]段是根轨迹;

当 a=10 时,实轴的[-10，-1]段是根轨迹;

3.　求渐近线与实轴的夹角和交点.

渐近线和实轴的夹角是:

$$\rho=\frac{(2\lambda+1)\pi}{2}, \lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\lambda=0,\quad \rho=\frac{\pi}{2},\qquad \lambda=1,\quad \rho=\frac{3\pi}{2};$$

a=5 时.

渐近线与实轴的交点为:　$\sigma=\frac{(-5)-(-1)}{2}=-2$.

a=9 时.

渐近线与实轴的交点为:　$\sigma=\frac{(-9)-(-1)}{2}=-4$.

a=10 时.

渐近线与实轴的交点为:　$\sigma=\frac{(-10)-(-1)}{2}=-4.5$.

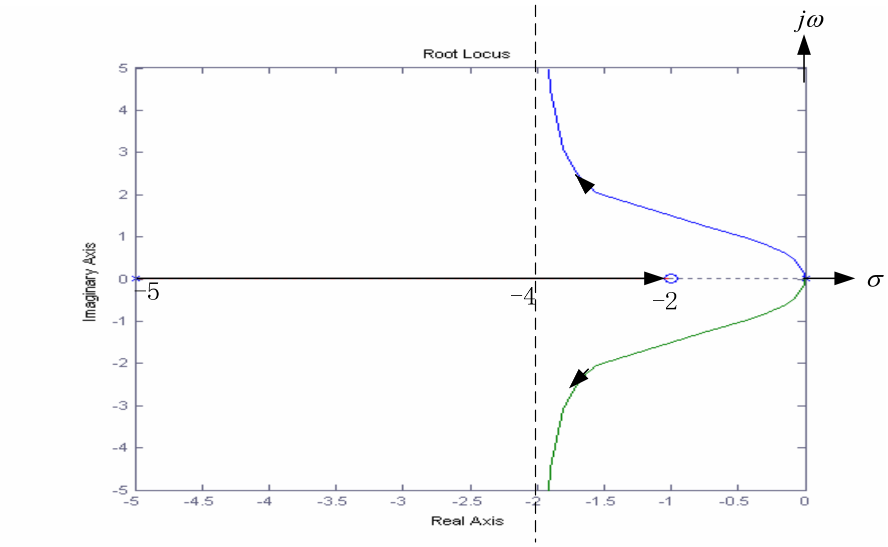
4.　计算根轨迹在实轴上的分离点(会合点).

a=5 时,由计算分离点和会合点的公式得到：

$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(2s^3+8s^2+10s)=0$$

求解上式的根，得到为: s_1=0, $s_{2,3}$=-2±i

将以上方程的根代入式 $K_r=-\frac{P(s)}{Z(s)}$,有 s_1=0 时, K_r=0, $s_{2,3}$= -2±i 时，K_r 为负值，根轨迹的分离点为 s_1=0.



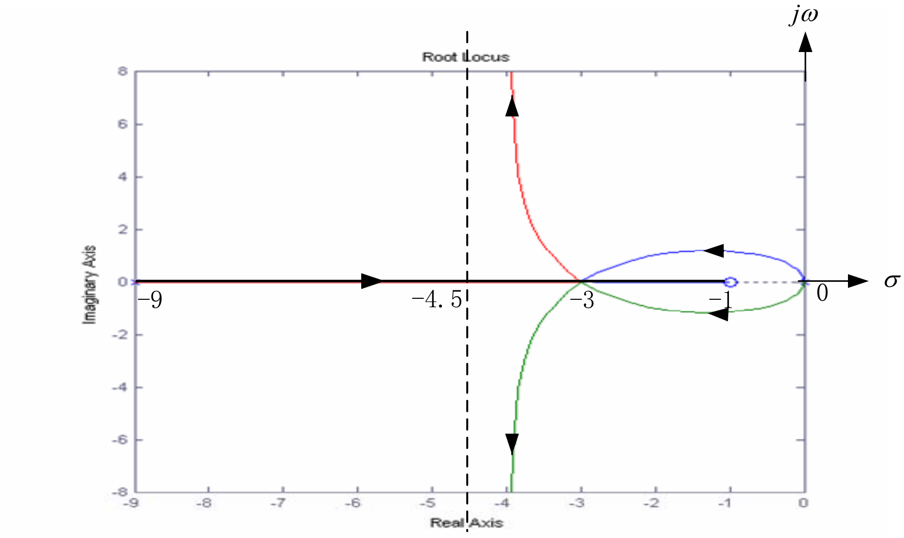
a=5 时的根轨迹图形

a=9 时,

$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(2s^3+12s^2+18s)=0$$

求解上式的根，得到为: s_1=0, s_2=-3.

将以上方程的根代入式 $K_r=-\dfrac{P(s)}{Z(s)}$,有 s_1=0 时, K_r =0, s_2=-3 时, K_r =27,根轨迹的分离点为 s_1=0. 会合点为 s_2=-3.



a=9 时的根轨迹图形

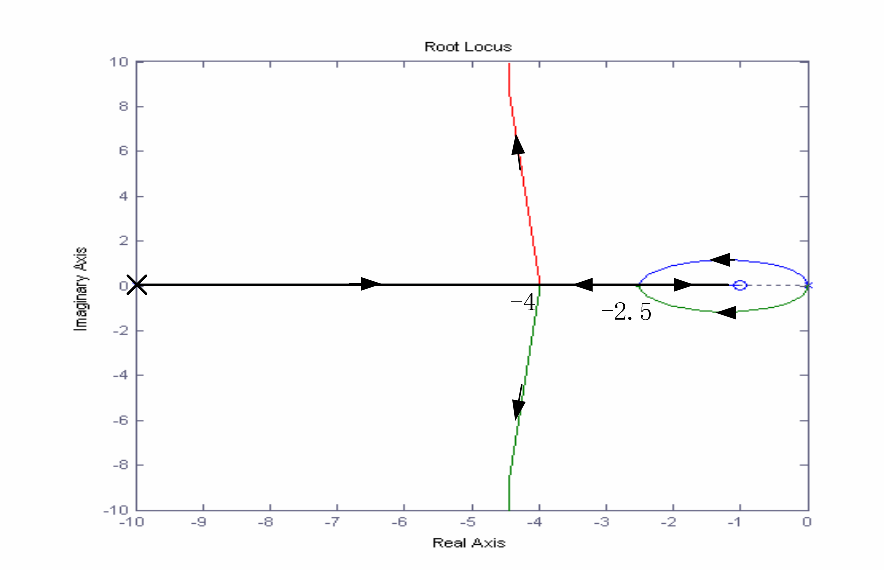
a=10 时,

$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(2s^3+13s^2+20s)=0$$

求解上式的根，得到为: s_1=0, s_2=-2.5, s_3=-4.

将以上方程的根代入式 $K_r=-\dfrac{P(s)}{Z(s)}$,有 s_1=0 时, K_r=0, s_2=-2.5, s_3=-4 时, K_r 均取正值, 根轨迹的分离点为 s_1=0, s_3=-4.会合点为 s_2=-2.5

由上分别绘制根轨迹图形如下所示.



a=10 时的根轨迹图形

A4-2 在工业过程控制中广泛应用 PID 控制器，这种控制器的传递函数为

$$G_c(s)=K_p+\frac{K_I}{s}+K_Ds \tag{A4—1}$$

式中， K_P 为比例增益， K_I 为积分增益， K_D 为微分增益。假设控制器的输入信号为 $e(t)$，输出信号为 $u(t)$，则

$$u(t)=K_Pe(t)+K_I\int e(t)dt+K_D\frac{de(t)}{dt} \tag{A4—2}$$

即控制器的输出中包含有输入信号的比例、积分和微分项，故称为 PID 控制器。

若 $K_D=0$，就是比例加积分（ PI ）控制器

$$G_c(s)=K_p+\frac{K_I}{s} \tag{A4—3}$$

若 $K_I=0$，就是比例加微分（ PD ）控制器

$$G_c(s)=K_p+K_Ds \tag{A4—4}$$

PID 控制器为过程控制提供了一种便于调节的通用控制器，对于不同控制对象，设定不同的比例增益 K_P、积分增益 K_I 和微分增益 K_D，便可获得良好的控制效果。式（A4—1）可改写为

$$G_c(s)=\frac{K_Ds^2+K_ps+K_I}{s}$$

或

$$G_c(s)=\frac{K_D(s^2+\alpha s+\beta)}{s}$$

式中，$\alpha=\dfrac{K_P}{K_D},\beta=\dfrac{K_I}{K_D}$。

考虑控制对象

$$G(s)=\frac{1}{(s+0.5)(s+1.5)}$$

应用 *PID* 控制器的系统方块图（图 A4－1）。

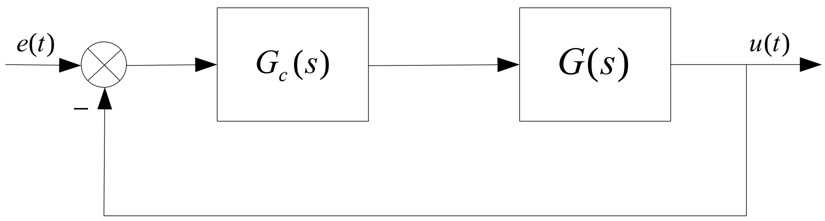


图 A4－1 带 *PID* 控制器的系统方块图

⑴ 绘制原系统（$G_c(s)=1$）的根轨迹草图，并求闭环系统的特征根及单位阶跃响应的超调量和 2% 准则的调节时间 t_s；

⑵ 引入 *PID* 控制器 $G_c(s)$：$K_P=12$，$K_I=20$，$K_D=2$，绘制闭环系统的根轨迹草图，并求闭环系统的特征根及单位阶跃响应的超调量和 2% 准则的调节时间 t_s；

⑶ 讨论在 *PID* 控制器中 K_P、K_I 和 K_D 对闭环系统性能的影响，说明其原理。

解:

（1） 根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点，开环极点为 p_1= -0.5, p_2= -1.5, 无开环零点。

实轴上的 [-1.5，-0.5] 段是根轨迹.

渐近线和实轴的夹角：

$$\rho=\frac{(2\lambda+1)\pi}{2},\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\lambda=0,\rho=\frac{\pi}{2},\qquad \lambda=1,\rho=\frac{3\pi}{2};$$

渐近线与实轴的交点:

$$\sigma=\frac{(-1.5)+(-0.5)}{2}=-1.$$

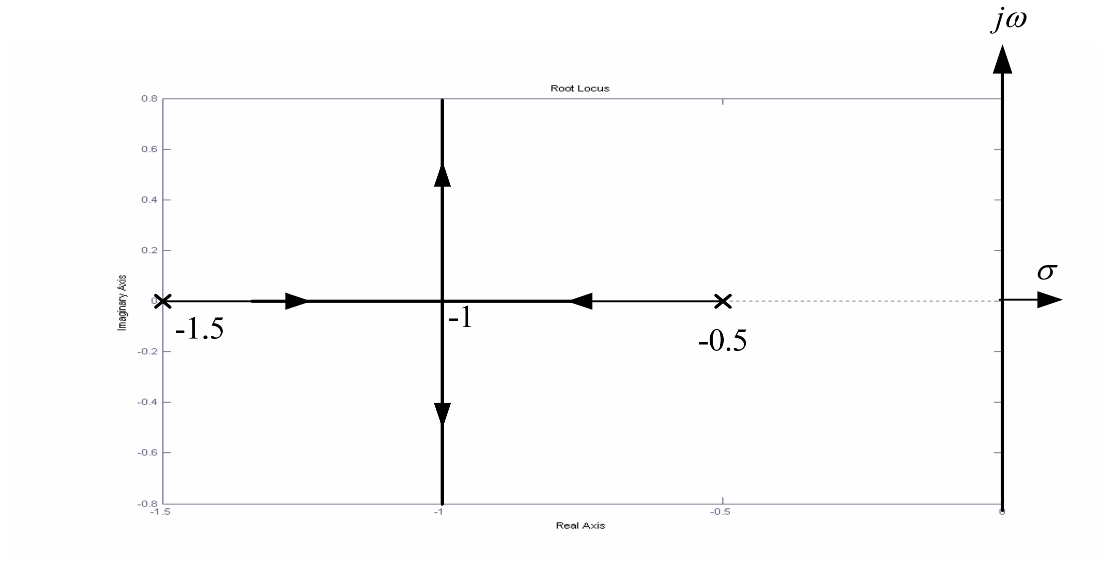
计算根轨迹在实轴上的分离点(会合点).

$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(2s+2)=0$$

求解上式的根，得到为: s_1=-1.

将以上方程的根代入式 $K_r=-\dfrac{P(s)}{Z(s)}$，得到 s_1=-1 时, K_r =0.25,根轨迹的分离点为 s_1=-1.

绘制原系统根轨迹图如下所示：



系统的特征方程为: $s^2 + 2s + 1.75 = 0$

闭环系统特征根：-1.0000 ± 0.8660i, 即 $\varsigma\omega_n = 1,\ \omega_n\sqrt{1-\varsigma^2} = 0.866$，

可求 $\omega_n = 1.323$, $\zeta = 0.756$.

于是单位阶跃响应的超调量为 $M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\%$ =2.65%

2%误差准则的调整时间为 $t_s = \dfrac{4}{\xi\omega_n}$ =4s

（2） 引入 PID 控制器后,系统的开环传递函数变为:

$$G(s)G_c(s) = \frac{2s^2 + 12s + 20}{s(s+0.5)(s+1.5)}$$

开环极点为 $p_1=0$, $p_2= -0.5$, $p_3= -1.5$, 开环零点 $z_{1,2}= -3 \pm i$.

实轴上的[-0.5，0]段和（$-\infty$，-1.5]段是根轨迹.（令根轨迹增益 0－∞）
渐近线和实轴的夹角:

$$\rho = \frac{(2\lambda+1)\pi}{1}, \lambda = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

$$\lambda = 0, \rho = \pi .$$

即实轴就是渐近线。

计算根轨迹在实轴上的分离点和会合点

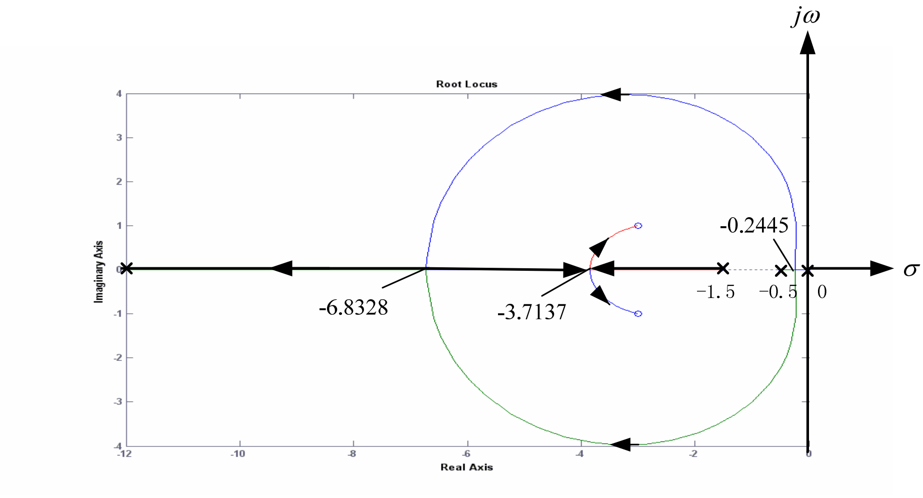
$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(2s^4 + 24s^3 + 82s^2 + 80s + 15) = 0$$

该方程根为: s_1= -6.8328,　　s_2=-3.7137

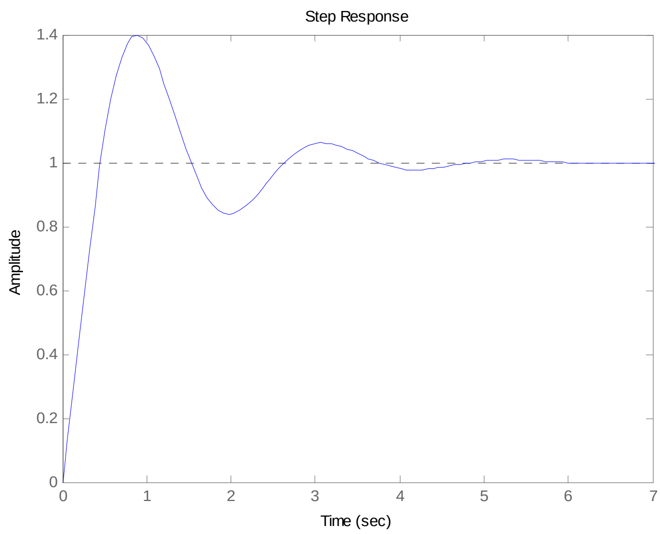
s_3=-1.2090,　　s_4=-0.2445

将以上方程的根代入式 $K_r=-\dfrac{P(s)}{Z(s)}$，当 s_1= -6.8328, s_2=-3.7137, s_4=-0.2445 时, K_r 取正值, s_3= -1.2090 不在根轨迹上，根轨迹的分离点为 s_2=-3.7137，s_4=-0.2445,,会合点为 s_1= -6.8328

系统根轨迹如下：



该系统的闭环传递函数为: $\Phi(s)=\dfrac{2s^2+12s+20}{s^3+4s^2+12.75s+20}$，闭环系统的特征根为: -0.8664 ±2.8409i，-2.2672。系统的阶跃响应为:



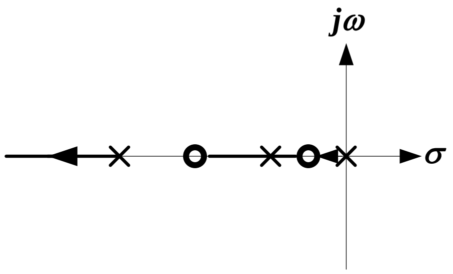
由上图可知,超调量 M_p =39.8%,2%准则调整时间 t_s =4.38s.

（3） 闭环传递函数为

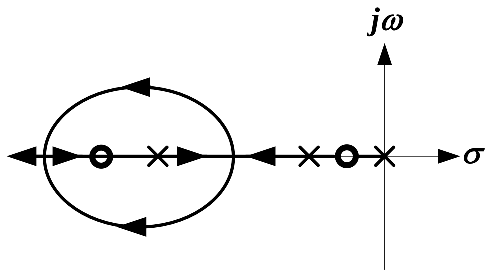
$$\frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s(s+0.5)(s+1.5)}$$

a. 在串.联了 PID 控制后，开环在原点增加了一个极点，提高了系统的型号，增强了系统的抗干扰能力。

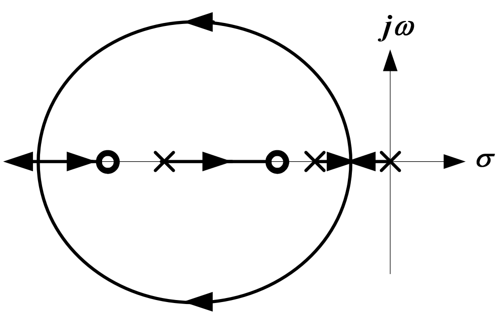
b. 在串联了 PID 控制后，开环增加了两个零点。为 $\frac{-K_P \pm \sqrt{K_P^2 - 4K_D K_I}}{2K_D}$。根轨迹存在如下几种变形：



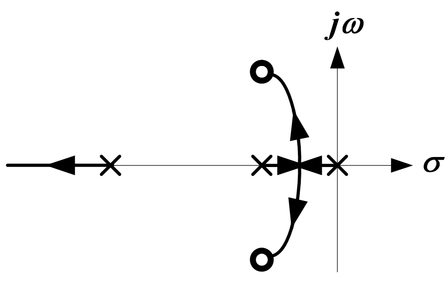
a



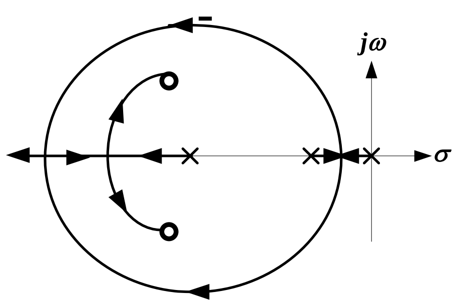
b



c



d



e

从根轨迹的形状看，（c）和（d）可以通过选择根轨迹增益得到比较理想的闭环极点。

从参数范围看，当 K_I 和 K_D 不变时，增大 K_P 使得零点靠近实轴，最后一个零点趋于负无穷大，一个趋向 0，但如果太大，可能导致系统的稳定性变差；K_I 是积分增益，K_P 和 K_D

不变时，增大 K_I，使得开环增益提高，减小稳态误差，但会使开环零点的虚部绝对值增大，震荡的频率加快；K_D 是微分增益，当 K_I 和 K_P 不变时，增大 K_D 能加快系统响应速度，但同时会增大超调量，降低系统的稳定性。

A4-3 已知系统的开环传递函数为：

$$G(s)H(s)=\frac{K_r}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$

绘出系统的根轨迹图，并求根轨迹在实轴上的分离点和根轨迹的渐近线。

解：由题可知,根轨迹有 4 条分支.开环极点是 $p_1=0$, $p_2=-2$, $p_{3,4}=-1\pm i$，开环无有限零点。

. 实轴上的根轨迹是[-2，0];

渐近线和实轴的夹角为：

$$\rho=\frac{(2\lambda+1)\pi}{4},\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\lambda=0,\rho=\frac{\pi}{4},\quad \lambda=1,\rho=\frac{3\pi}{4};\ \lambda=2,\rho=\frac{5\pi}{4};\ \lambda=3,\rho=\frac{7\pi}{4};$$

渐近线与实轴的交点为:

$$\sigma=\frac{(-2)+(-1)+(-1)}{4}=-1.$$

计算根轨迹在实轴上的分离点.

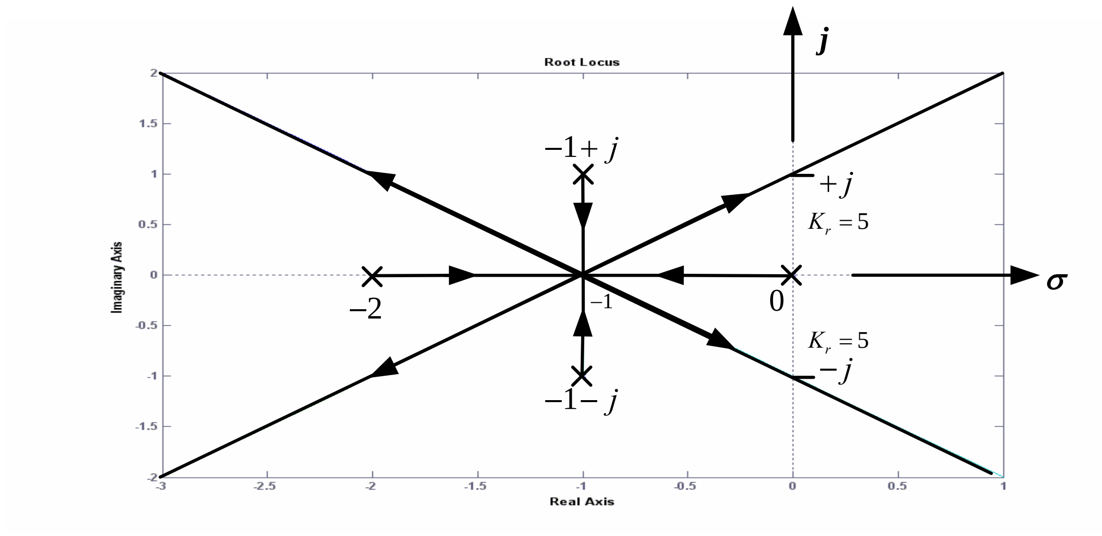
$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(4s^3+12s^2+12s+4)=0$$

该方程的根为: $s_{1,2,3}=-1$. 将 s= -1 代入式 $K_r=-\dfrac{P(s)}{Z(s)}$, 得 $K_r=1$, 根轨迹的分离点为 s= -1.

闭环的特征方程是 $s^4+4s^3+6s^2+4s+K_r=0$，用 Routh 判据得到

$$\begin{array}{llll}
s^4 & 1 & 6 & K_r \\
s^3 & \cancel{4}1 & \cancel{4}1 & (\text{约去}4) \\
s^2 & 5 & K_r & \\
s & 5-K_r & & (\text{乘以}5) \\
s^0 & K_r & &
\end{array}$$

当 $K_r=5$ 时临界稳定，由上行辅助方程得根轨迹与虚轴的交点为 $s_{1,2}=\pm i$。



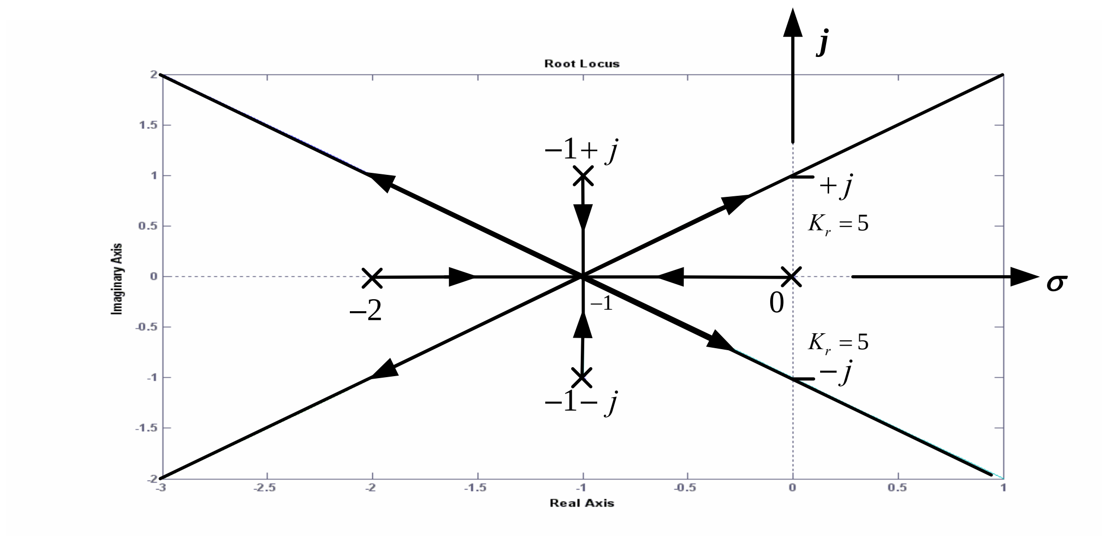
A4-4 求上题闭环系统的重极点，及相应的系统增益K_r。

解：闭环系统的重极点就是根轨迹的交点,即分离点和会合点,由上题的根轨迹可知,闭环系统的重极点是-1, 那是 4 重极点。此时 $K_r = -\dfrac{P(s)}{Z(s)}$=1.

A4-5 绘制下列开环传递函数的根轨迹草图：

⑴ $G(s) = \dfrac{K_r}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$

解：此题与 A4-3 的根轨迹相同,步骤详见 A4-3,根轨迹如下:



⑵ $G(s) = \dfrac{K_r}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

解：　由题可知,根轨迹有 3 条分支,开环极点为 p_1=-1, p_2=-2, p_3= -3，开环无零点。

实轴的[-2，-1]段和（$-\infty$，-3]段是根轨迹;

渐近线和实轴的夹角：

$$\rho=\frac{(2\lambda+1)\pi}{3},\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\lambda=0,\rho=\frac{\pi}{3},\quad \lambda=1,\rho=\pi;\ \lambda=2,\rho=\frac{5\pi}{3};$$

渐近线与实轴的交点为:

$$\sigma=\frac{(-1)+(-2)+(-3)}{3}=-2.$$

计算根轨迹在实轴上的分离点.

$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(3s^2+12s+11)=0$$

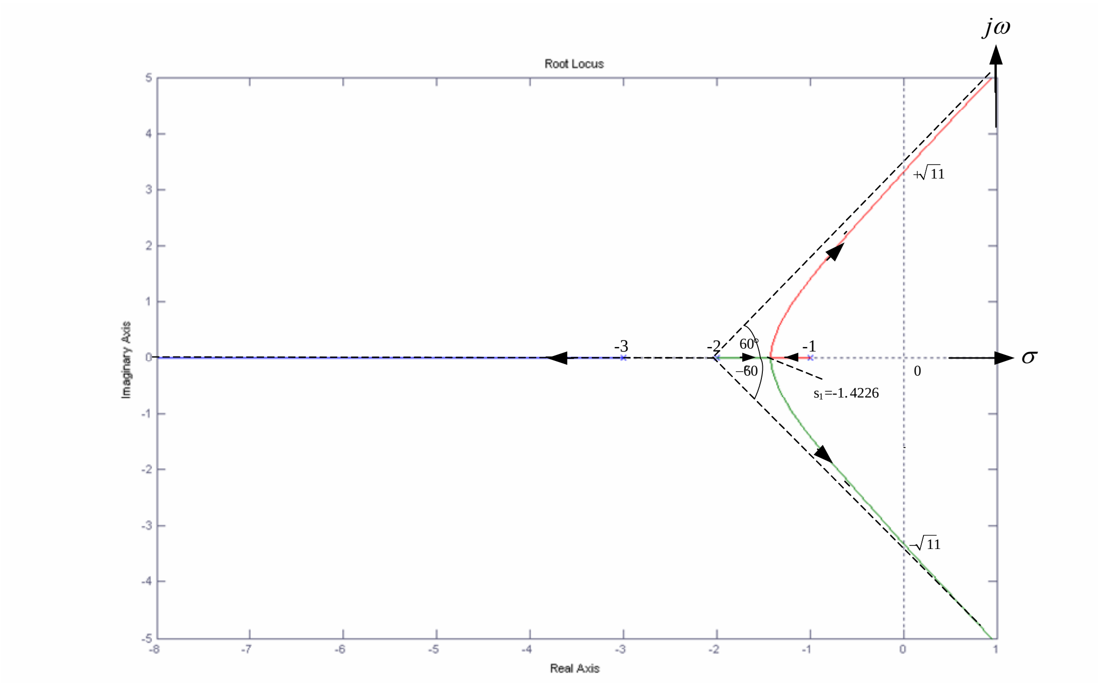
该方程的根为: s_1=-1.4226 ，s_2=-2.5774

将以上方程的根代入式 $K_r=-\dfrac{P(s)}{Z(s)}$,有 s_1= -1.4226 时,K_r取正值，s_2=-2.5774 不在根轨迹上，根轨迹的分离点为 s_1=-1.4226.

求根轨迹与虚轴的交点。由特征方程

1+G(jω)=0. 解得根轨迹与虚轴的交点 $\omega=\pm\sqrt{11}$ 。

根轨迹图形如下所示.



⑶ $G(s)=\dfrac{K_r(s+2)}{s(s+1)(s+3)}$

解：由题可知,根轨迹有 3 条分支,开环极点是 $p_1=0$, $p_2=-1$, $p_3=-3$,开环零点 $z_1=-2$

实轴的[-1，0]段和[-3，-2]段是根轨迹。

渐近线和实轴的夹角：

$$\rho=\frac{(2\lambda+1)\pi}{2},\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\lambda=0,\rho=\frac{\pi}{2},\qquad \lambda=1,\rho=\frac{3\pi}{2};$$

渐近线与实轴的交点为:

$$\sigma=\frac{(-1)+(-3)-(-2)}{2}=-1.$$

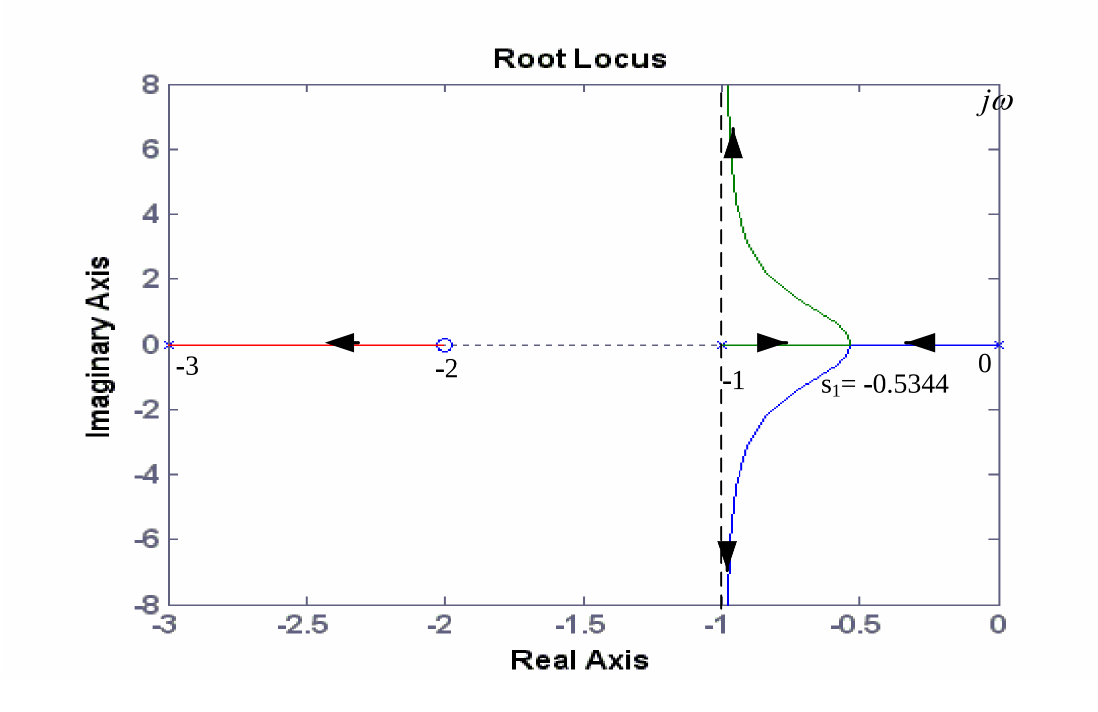
计算根轨迹在实轴上的分离点.

$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(2s^3+10s^2+16s+6)=0$$

该方程的根为：$s_1=-0.5344$， $s_{2,3}=-2.2328\pm0.7926i$， 将以上方程的根代入式 $K_r=-\dfrac{P(s)}{Z(s)}$,只有 $s_1=-0.5344$ 时, K_r 取正值，根轨迹的分离点为 $s_1=-0.5344$.

根轨迹与虚轴无交点。

绘制根轨迹图形如下所示.



⑷ $G(s)=\dfrac{K_r(s+3)(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+5)(s+6)}$

解:由题可知,根轨迹有 5 条分支,开环极点为：$p_1=0$, $p_2=-1$, $p_3=-2$,$p_4=-5$, $p_5=-6$.开环零点为

z_1=-3, z_2=-4.

实轴的[-1，0]段、[-3，-2]段、[-5，-4]段和（$-\infty$，-6]段是根轨迹;

渐近线和实轴的夹角:

$$\rho=\frac{(2\lambda+1)\pi}{3},\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\lambda=0,\rho=\frac{\pi}{3},\quad \lambda=1,\rho=\pi;\ \lambda=2,\rho=\frac{5\pi}{3};$$

渐近线与实轴的交点为:

$$\sigma=\frac{(-1)+(-2)+(-5)+(-6)-(-3)-(-4)}{3}=-\frac{7}{3}.$$

计算根轨迹在实轴上的分离点.

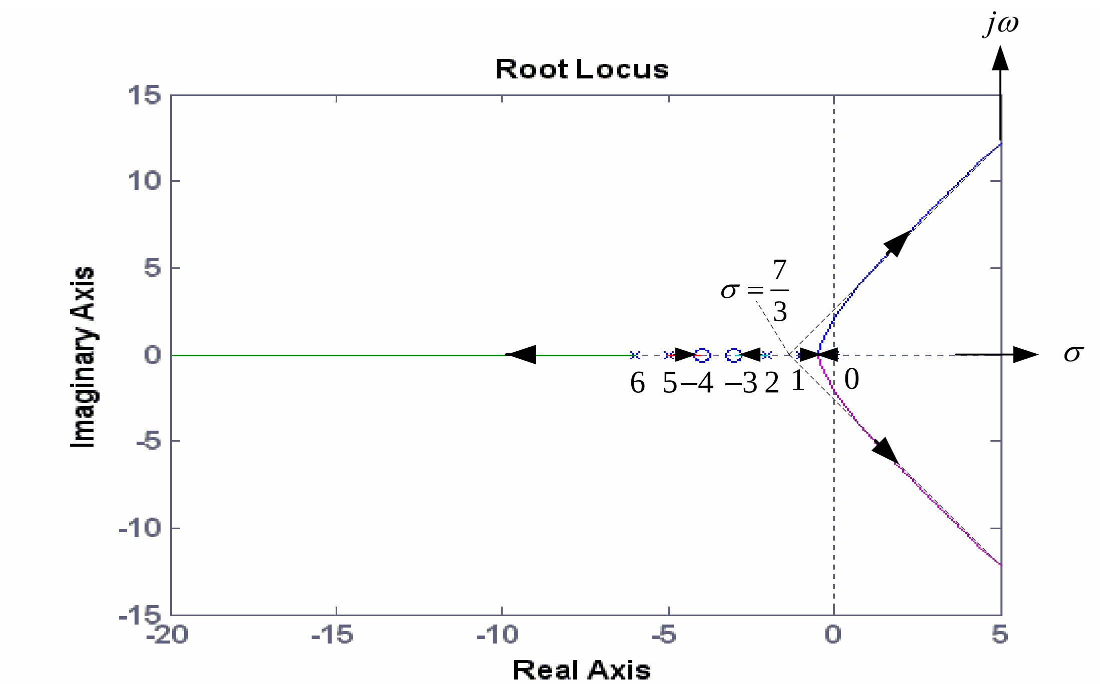
$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(3s^6+56s^5+419s^4+1582s^3+3064s^2+2688s+720)=0$$

该方程的根为: s_1=-0.4539 , s_2=-1.6427，s_3=-3.4578，s_4=-5.4506，$s_{5,6}$=-3.8309 ±1.5508i ,

将以上方程的根代入式 $K_r=-\dfrac{P(s)}{Z(s)}$,只有当 s_1=-0.4539 时, K_r 取正值, 其它值时, K_r 取负值，根轨迹的分离点为 s_1=-0.4539.

将 s=jω 代入特征方程，即 1+G(jω)=0，解得根轨迹与虚轴的交点 $\omega_{1,2}$=±2.06。

绘制根轨迹图形如下所示.



⑸ $G(s)=\dfrac{K(0.5s+1)}{s^2(0.25s+1)(0.1s+1)}$

解：由题可知,根轨迹有 4 条分支。将时间常数形式的开环传递函数整理成零极点形式，

根轨迹的起点分别是 $p_{1,2}=0$, $p_3=-4$, $p_4=-10$.开环零点为 $z_1=-2$.

实轴的[-4，-2]段和（$-\infty$，-10]段是根轨迹;

渐近线和实轴的夹角:

$$\rho=\frac{(2\lambda+1)\pi}{3},\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\lambda=0,\rho=\frac{\pi}{3},\quad \lambda=1,\rho=\pi;\ \lambda=2,\rho=\frac{5\pi}{3};$$

渐近线与实轴的交点为:

$$\sigma=\frac{(-4)+(-10)-(-2)}{3}=-4.$$

计算根轨迹在实轴上的分离点.

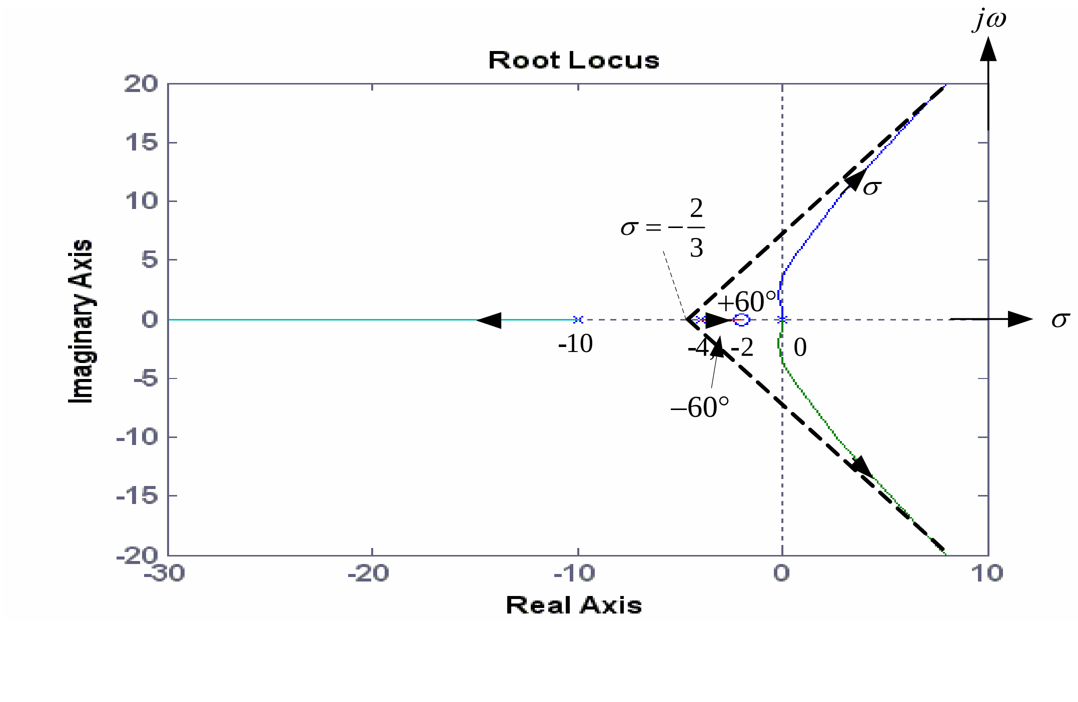
$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(0.0375s^4+0.45s^3+1.55s^2+2s)=0$$

该方程的根为: $s_1=0$, $s_2=-7.3771$, $s_{3,4}=-2.3115\pm1.3736i$

将以上方程的根代入式 $K_r=-\dfrac{P(s)}{Z(s)}$,只有 $s_1=0$ 时, $K_r=0$, 其它值时, K_r 取负值, 根轨迹的分离点为 $s_1=0$.

将 s=jω 代入特征方程，即 1+G(jω)=0. 解得与虚轴的交点 $\omega_1=0$, $\omega_{2,3}=\pm2\sqrt{3}$。

绘制根轨迹图形如下所示.



⑹ $G(s)=\dfrac{K}{s^2(0.5s+1)}$

解：由题可知,根轨迹有 3 条分支,开环极点分别是 $p_{1,2}=0$, $p_3=-2$, 没有开环零点。

实轴的（$-\infty$，-2）段是根轨迹;

渐近线和实轴的夹角:

$$\rho=\frac{(2\lambda+1)\pi}{3},\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\lambda=0,\rho=\frac{\pi}{3},\quad \lambda=1,\rho=\pi;\ \lambda=2,\rho=\frac{5\pi}{3};$$

渐近线与实轴的交点为:

$$\sigma=\frac{(-2)}{3}=-\frac{2}{3}.$$

计算根轨迹在实轴上的分离点.

$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(1.5s^2+2s)=0$$

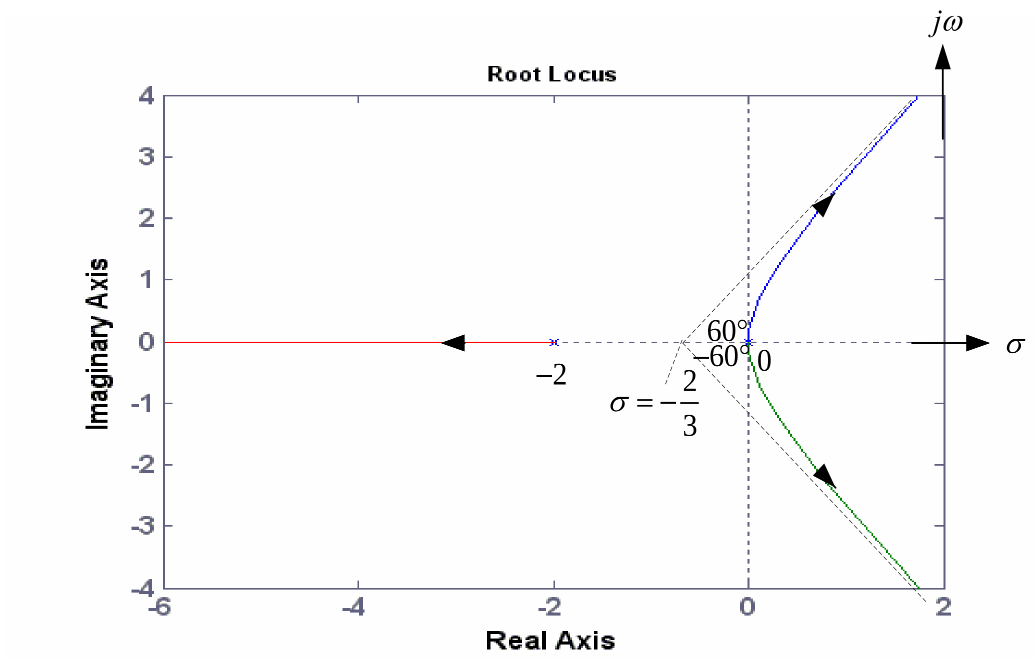
该方程的根为: s_1=0 , s_2= 4/3

将以上方程的根代入式 $K_r=-\frac{P(s)}{Z(s)}$,只有 s_1=0 时, K_r=0, s_2=4/3 不在实轴根轨迹上，

s_1=0 是根轨迹的分离点.

根轨迹与虚轴的交点在原点处。

绘制根轨迹图形如下所示.



⑺ $G(s)=\frac{K(s+1)}{s^2(0.5s+1)}$

解： 由题可知,根轨迹有 3 条分支,开环极点是 $p_{1,2}$=0, p_3 =-2 .开环零点 z_1= -1

实轴的[-2,-1]段是根轨迹;

渐近线和实轴的夹角:

$$\rho = \frac{(2\lambda+1)\pi}{2}, \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

$$\lambda = 0, \rho = \frac{\pi}{2}, \qquad \lambda = 1, \rho = \frac{3\pi}{2};$$

渐近线与实轴的交点为:

$$\sigma = \frac{(-2)-(-1)}{2} = -0.5.$$

计算根轨迹在实轴上的分离点.

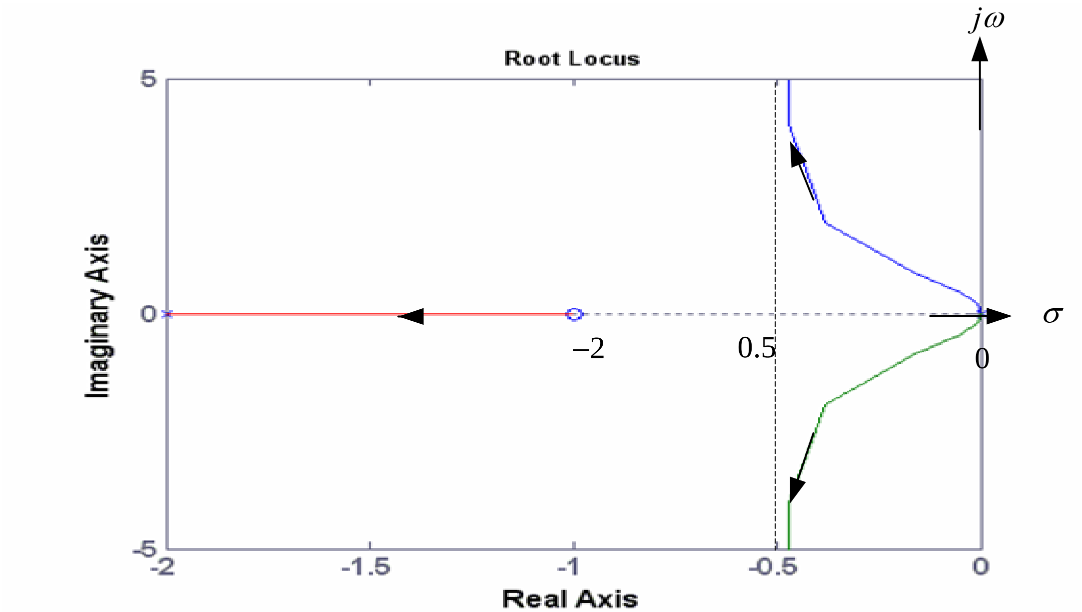
$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(s^3 + 2.5s^2 + 2s) = 0$$

该方程的根为: $s_1=0$, $s_{2,3}= -1.2500 \pm 0.6614i$

将以上方程的根代入式 $K_r = -\dfrac{P(s)}{Z(s)}$,只有 $s_1=0$ 时, $K_r=0$, 其它值时, K_r 取负值,根轨迹的分离点为 $s_1=0$.

根轨迹与虚轴的交点在原点处。

绘制根轨迹图形如下所示.



⑻ $G(s) = \dfrac{K}{s^2}$

解:由题可知,根轨迹有 2 条分支,根轨迹的开环极点是 $p_{1,2}=0$, 开环无零点.

实轴上没有根轨迹.

渐近线和实轴的夹角:

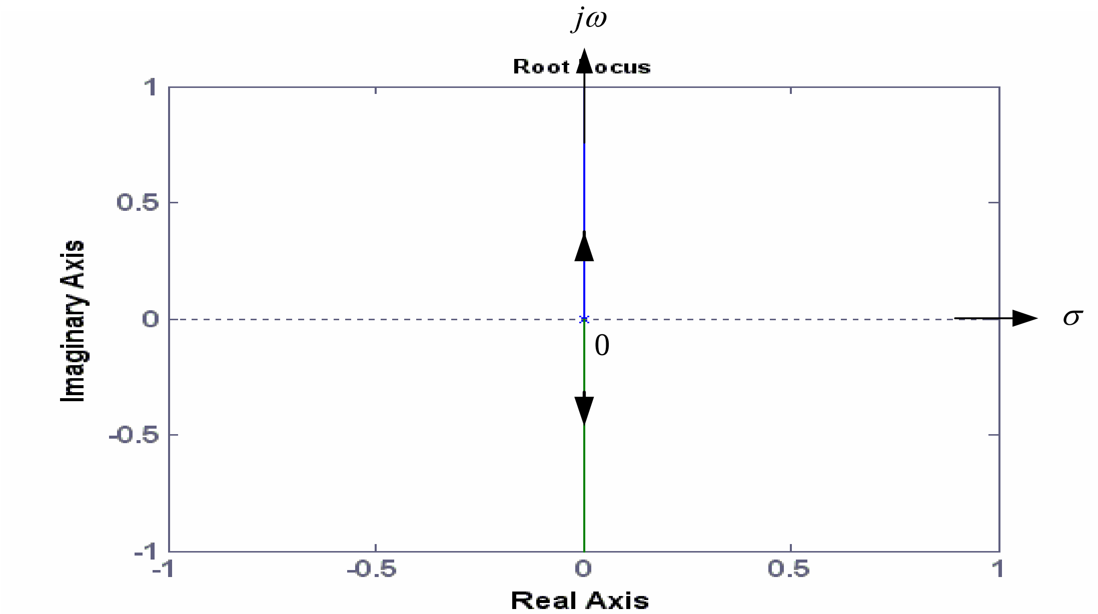
$$\rho=\frac{(2\lambda+1)\pi}{2},\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\lambda=0,\rho=\frac{\pi}{2},\qquad \lambda=1,\rho=\frac{3\pi}{2};$$

渐近线与实轴的交点为:

$$\sigma=\frac{0+0}{2}=0.$$

绘制根轨迹图形如下所示.



⑼ $G(s)=\dfrac{K}{s^3}$

解：由题可知,根轨迹有 3 条分支,开环极点为 $p_{1,2,3}=0$, 无开环零点.

实轴上的（$-\infty$，0）段是根轨迹，并且实轴上没有分离点和会合点。

渐近线和实轴的夹角:

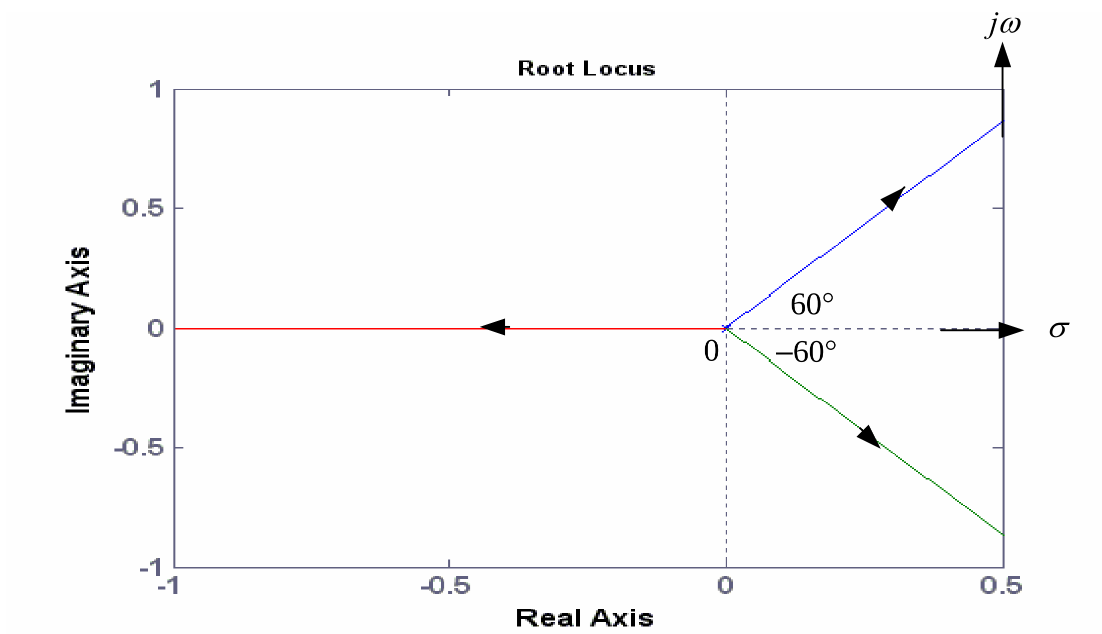
$$\rho=\frac{(2\lambda+1)\pi}{3},\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\lambda=0,\rho=\frac{\pi}{3},\qquad \lambda=1,\rho=\pi;\ \ \lambda=2,\rho=\frac{5\pi}{3};$$

渐近线与实轴的交点为:

$$\sigma=\frac{0+0+0}{3}=0.$$

绘制根轨迹图形如下所示.



A4-6 绘制下列开环传递函数的根轨迹

$$G(s)H(s)=\frac{K_r(s+1)(s+3)}{s^3}$$

并计算使系统稳定的 K_r 的取值范围，以及系统在速度输入时的稳态误差 e_{ss} 。

解：由题可知,根轨迹有 3 条分支,开环极点为 $p_{1,2,3}=0$,开环零点为 $z_1=-1$.

实轴上的[-1，0]段和（$-\infty$， -3]段是根轨迹;

渐近线和实轴的夹角:

$$\rho=\frac{(2\lambda+1)\pi}{3-2},\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$\lambda=0,\rho=\pi$;即渐近线为实轴

计算根轨迹在实轴上的分离点.

$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(s^4+8s^3+9s^2)=0$$

该方程的根为: $s_{1,2}=0$, $s_3=-6.6458$, $s_4=-1.3542$

将以上方程的根代入式 $K_r=-\dfrac{P(s)}{Z(s)}$,$s_{1,2}=0$ 时, $K_r=0$, $s_3=-6.6458$ 时, $K_r=14.3$,

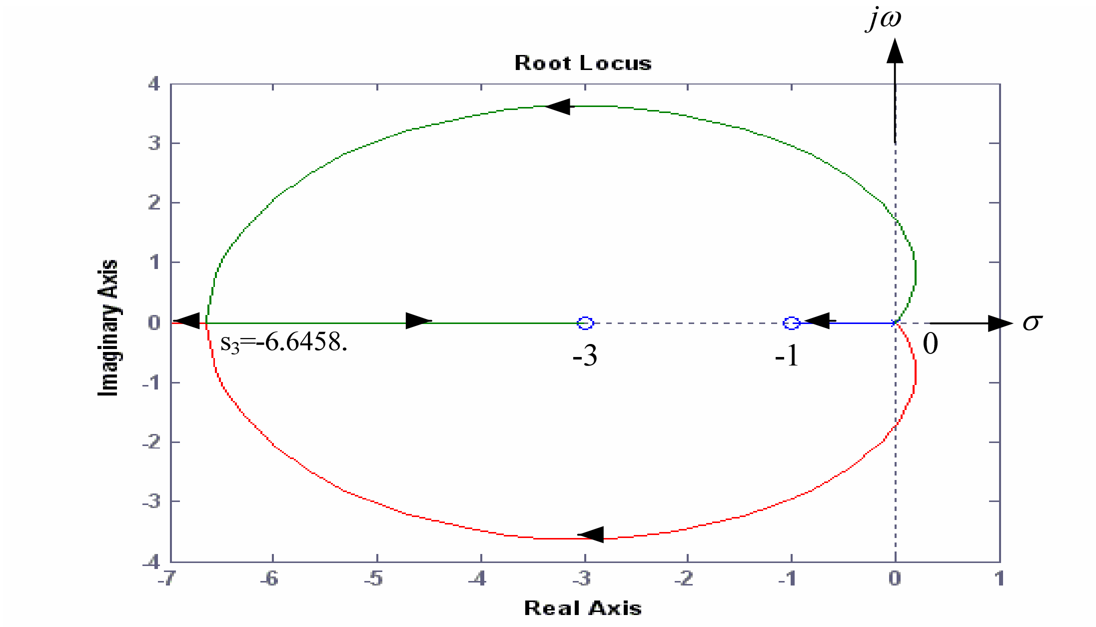
$s_4=-1.3542$ 不在根轨迹上，根轨迹的分离点为 $s_1=0$,会合点为 $s_3=-6.6458$.

求根轨迹与虚轴的交点。将 s=jω 代入特征方程，即

$1+G(j\omega)H(j\omega)=(j\omega)^3+K_r(j\omega+1)(j\omega+3)=0$. 解得与虚轴的交点 $\omega_{1,2}=\pm\sqrt{3}$,

ω_3=0，对应 $\omega_{1,2}=\pm\sqrt{3}$ 时 K_r =0.75；当 ω_3=0 时 K_r =0. 由根轨迹图可以看出，K_r >0.75 时特征根全在左半平面,系统稳定。

绘制根轨迹图形如下所示.



该系统为III型系统，故速度输入时的稳态误差 e_{ss} =0。

A4-7 某单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K_r(s^2+4s+8)}{s^2(s+4)}$$

用根轨迹法证明：若系统期望主导极点的阻尼比 $\varsigma=0.5$，则满足要求的 $K_r=7.35$ 及主导极点为 $s=-1.3\pm 2.2j$。

解：先作出根轨迹图形.

该系统根轨迹有 3 条分支,开环极点分别是 $p_{1,2}$=0,p_3 =-4 .开环零点为 $z_{1,2}$=-2±2i

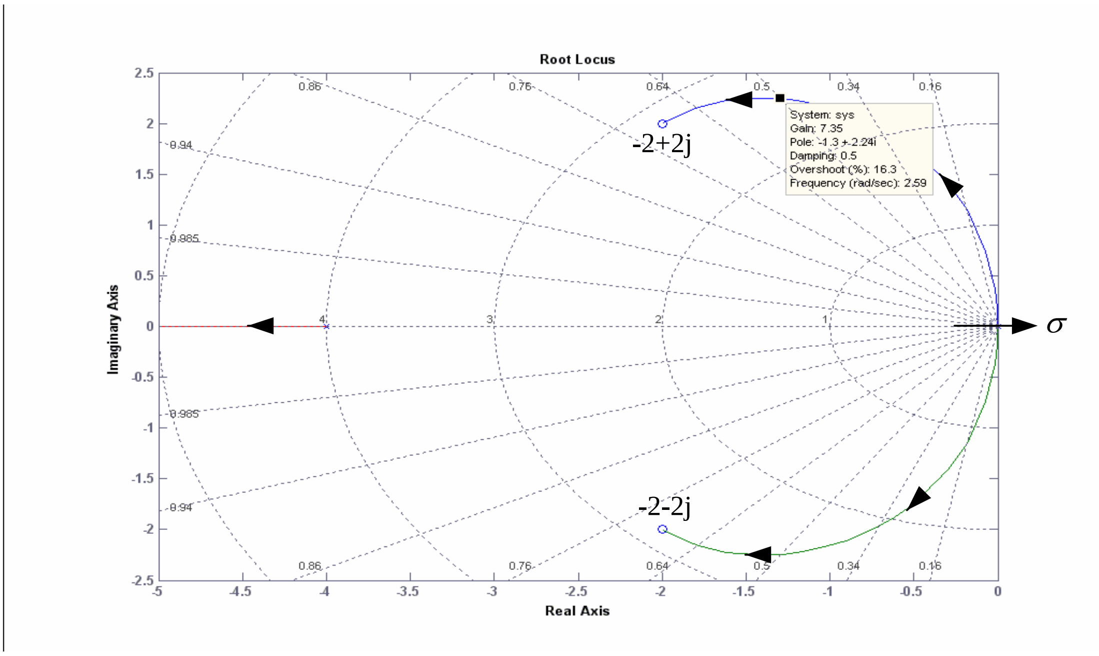
实轴上的（$-\infty$，-4]是根轨迹;

渐近线为负实轴。

计算根轨迹在实轴上的分离点.

$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(s^4+8s^3+40s^2+64s)=0$$

求解上式的根，得到 s_1=0, s_2= -2.4136, $s_{3,4}$= -2.7932±4.3261. 显然根轨迹在实轴的分离点为 s_1=0,由此绘制根轨迹图形如下所示.并在根轨迹图形上绘制连续根轨迹的等ζ线.



从图中可以读出，$\varsigma=0.5$ 的直线与根轨迹相交于两点，此两点即是满足阻尼比 $\varsigma=0.5$ 的主导极点：$-1.3\pm 2.2j$。此时的根轨迹增益 K_r=7.35。

A4-8：单位反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{K_r(s+1.5)}{(s+1)(s+2)(s+4)(s+8)}$$

⑴ 绘制根轨迹草图；

⑵ 求 K_r 等于 400，500，600 时闭环系统的特征根；

⑶ 若取其复极点为主导极点，求上述三种 K_r 下，阶跃响应的超调量；

⑷ 求准确的阶跃响应时的超调量，与⑶的结果作比较。

解：

（1）由题可知,根轨迹有 4 条分支,开环极点分别是 p_1=-1, p_2=-2, p_3=-4, p_4=-8 .开环零点为 z_1=-1.5

实轴的（-1.5，-1）段、（-4，-2）段和（$-\infty$，-8）是根轨迹;

渐近线和实轴的夹角:

$$\rho=\frac{(2\lambda+1)\pi}{3},\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\lambda=0,\rho=\frac{\pi}{3},\quad \lambda=1,\rho=\pi;\ \lambda=2,\rho=\frac{5\pi}{3};$$

渐近线与实轴的交点为:

$$\sigma=\frac{(-1)+(-2)+(-4)+(-8)-(-1.5)}{3}=-4.5.$$

计算根轨迹在实轴上的分离点.

$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(3s^4+36s^3+137.5s^2+210s+116)=0$$

该方程的根为: s_1= -2.8053，s_2= -6.4001，$s_{3,4}$= -1.3973 ±0.4485i

将以上方程的根代入式 $K_r=-\dfrac{P(s)}{Z(s)}$,s_1=-2.8053 时,K_r=6.94, 在 s_2= -6.4001，$s_{3,4}$=

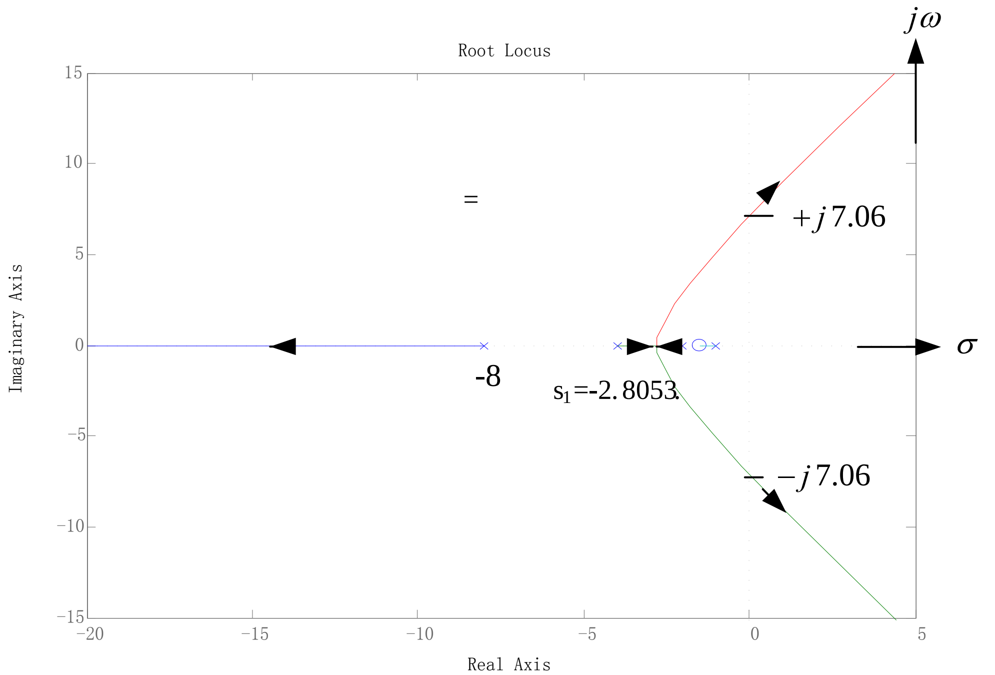
-1.3973 ±0.4485i 处,K_r 取负值，故根轨迹的分离点为 s_1=-2.8053.

计算根轨迹与虚轴的交点。将 s=jω 带入特征方程，即

$1+G(j\omega)H(j\omega)=(j\omega)^4+15(j\omega)^3+70(j\omega)^2+(120+K_r)j\omega+(64+1.5K_r)=0$.

解得与虚轴的交点 $\omega=\pm 7.06$,此时 K_r =627.7。

绘制根轨迹图形如下所示.



（2）K_r=400 时闭环系统特征方程为:

$$s^4+15s^3+70s^2+520s+664=0$$

特征根为：-12.3885，-1.4898，-0.5608 ±5.9718i

K_r=500 时闭环系统统特征方程为

$$s^4+15s^3+70s^2+620s+814=0$$

特征根为：-12.9189，-1.4918，-0.2946 ± 6.4922i

K_r=600 时闭环系统特征方程为:

$$s^4+15s^3+70s^2+720s+964=0$$

特征根为：-13.3868，-1.4932，-0.0600 ± 6.9442i

（3）以复极点为主导极点，

当 K_r=400 时，主导极点为-0.5608 ±5.9718，则

$$\tan\theta=\frac{5.9718}{0.5608}=10.6487,\quad \zeta=\cos\theta=0.0935$$

此时的超调量为 $M_p=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\times 100\%$ =74.5%

当 K_r=500 时，主导极点为 -0.2946 ± 6.4922i，

$$\tan\theta=\frac{6.4922}{0.2946}=22.0373,\quad \zeta=\cos\theta=0.0453$$

此时的超调量为 $M_p=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\times 100\%$ =86.7%

当 K_r=600 时，主导极点为 -0.0600 ± 6.9442i，

$$\tan\theta=\frac{6.9442}{0.0600}=115.7367,\quad \zeta=\cos\theta=0.0086$$

此时超调量为 $M_p=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\times 100\%$ =97.32%

（4）求出系统阶跃响应的准确解，进一步求出超调量：

K_r=400 时，超调量为 50%

K_r=500 时，超调量为 63%

K_r=600 时，超调量为 73%

由此可以看出，用主导极点求出的计算结果和实际系统的精确结果还是有差别的，这种差别一般在在工程上是允许的。

B4-1：设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K_r}{s(s-1)}$$

⑴ 求使闭环系统稳定的 K_r 取值范围；

⑵ 在前向通道串联一控制器 $G_c(s)$，其传递函数为：

$$G_c(s)=\frac{(s+2)}{s(s+p)}$$

若 $p=20$，再求系统稳定的 K_r 取值范围；

⑶ **设 $K_r=10$，绘制 p 自 0 变到 ∞，系统的根轨迹图；**

⑷ **讨论 $G_c(s)$ 的零、极点的位置对系统性能的影响。**

解：

（1）该闭环系统的特征方程为 $s^2-s+K_r=0$，由劳斯判据稳定性的必要条件知道，无论 K_r 取何值，系统始终不稳定。

（2）系统串联控制器 $G_c(s)$后，闭环系统的特征方程为 $s^4+19s^3-20s^2+K_rs+2K_r=0$

由劳斯判据稳定性的必要条件知道,无论 K_r 取何值，系统始终不稳定。

（3）当 K_r=10 时，串联控制器后系统的开环传递函数为 G(S) $G_c(s)=\dfrac{10(s+2)}{s^2(s-1)(s+p)}$

闭环特征方程式：$s^4+(p-1)s^3-ps^2+10s+20=0$

整理上式可得：$\dfrac{p(s^3-s^2)}{s^4-s^3+10s+20}+1=0$

所以等效系统的开环传递函数为$\dfrac{p(s^3-s^2)}{s^4-s^3+10s+20}$

该系统的根轨迹有 4 条分支,系统的开环极点是 $p_{1,2}=1.8581\pm1.9834i$, $p_{3,4}=1.3581\pm0.9291i$. 开环零点是 $z_{1,2}=0$, $z_3=1$.

实轴的（$-\infty$，1）是根轨迹;

渐近线为负实轴

计算根轨迹在实轴上的分离点.

$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(s^6-2s^5+s^4-20s^3-50s^2+40s)=0$$

该方程的根为: $s_1=0$, $s_2=-1.9317$, $s_3=0.6379$, $s_4=3.8190$, $s_{5,6}=-0.2626\pm2.9036i$，将以上方程的根代入式 $K_r=-\dfrac{P(s)}{Z(s)}$,当 $s_2=-1.9317$, $s_3=0.6379$ 时, K_r 取正值，取其它值时, K_r 为负值，根轨迹的会合点为,$s_2=-1.9317$, $s_3=0.6379$.

求复数开环极点 1.8581 + 1.9834i 的出射角：

$$\begin{aligned}\theta_{p1}&=(2k+1)\pi+\angle(p_1-z_1)+\angle(p_1-z_2)+\angle(p_1-z_3)-\angle(p_1-p_2)-\angle(p_1-p_3)-\angle(p_1-p_4)\\&=(2k+1)\pi+46.87^\circ+46.87^\circ+66.60^\circ-90^\circ-18.15^\circ-42.16^\circ\\&=190.03^\circ\end{aligned}$$

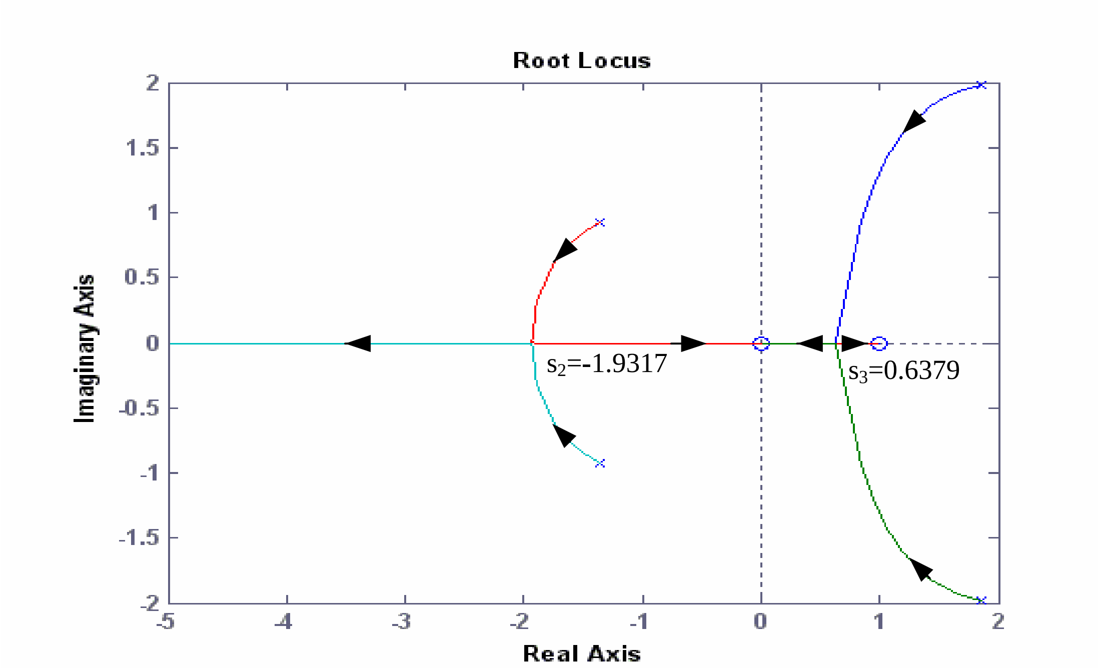
故在开环极点 1.8581 - 1.9834i 的出射角为 -190.03°

复数开环极点-1.3581 + 0.9291i 的出射角

$$\theta_{p3}=(2k+1)\pi+\angle(p_3-z_1)+\angle(p_3-z_2)+\angle(p_3-z_3)-\angle(p_3-p_1)-\angle(p_3-p_2)-\angle(p_3-p_4)$$
$$=(2k+1)\pi+145.62^{\circ}+145.62^{\circ}+158.50^{\circ}-(-161.85^{\circ})-137.84^{\circ}-90^{\circ}$$
$$=203.75^{\circ}$$

故为数开环极点-1.3581 - 0.9291i 的出射角 -203.75

根轨迹图如下.



（4）当极点向右移动相当于某些惯性环节的时间常数减小，响应速度加快，稳定性变差。零点向右移动相当于某些惯性或振荡环节时间常数增大，响应速度减慢，稳定性增强。

B4-2：对于如图 B4-1 所示的系统：

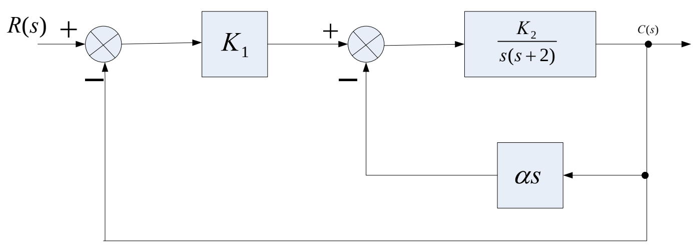


图 B4-1 题 B4-2 系统

(1) 绘制 $\alpha=0$ 时之根轨迹图；

(2) 绘制 $K_1=5, K_2=2$ 时， $0\le\alpha\le\infty$ 的根轨迹；

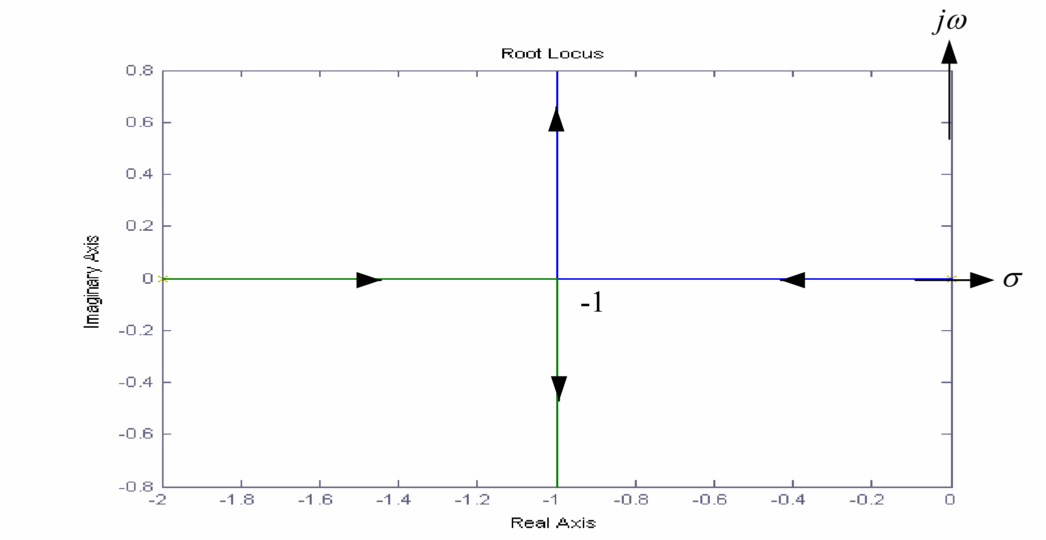
⑶ 求⑵题的临界阻尼时的 α 值；

⑷ 讨论局部反馈 αs 对系统性能的影响。

解：

（1） $\alpha = 0$ 时，开环传递函数为:

$$G = \frac{K_1 K_2}{s(s+2)} = \frac{K_r}{s(s+2)}$$,绘制根轨迹图如下.



（2） $K_1 = 5, K_2 = 2$ 时，系统的开环传递函数为： $\dfrac{10}{s^2 + (2\alpha + 2)s}$

闭环特征方程： $s^2 + (2\alpha + 2)s + 10 = 0$ ， $\dfrac{2\alpha s}{s^2 + 2s + 10} + 1 = 0$

所以等效开环传递函数为： $\dfrac{2\alpha s}{s^2 + 2s + 10}$

等效系统的根轨迹有 2 条分支,开环极点分别是 $p_{1,2}$= -1±3i. 开环零点 z_1=0.

负实轴是根轨迹;

渐近线是负实轴。

计算根轨迹在实轴上的汇合点.

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -2s^2 + 20s = 0$$

该方程的根为:$s_{1,2}$=$\pm\sqrt{10}$.将方程的根代入式 $K_r = -\dfrac{P(s)}{Z(s)}$,当 s_1=-3.16 时, K_r 取正值,

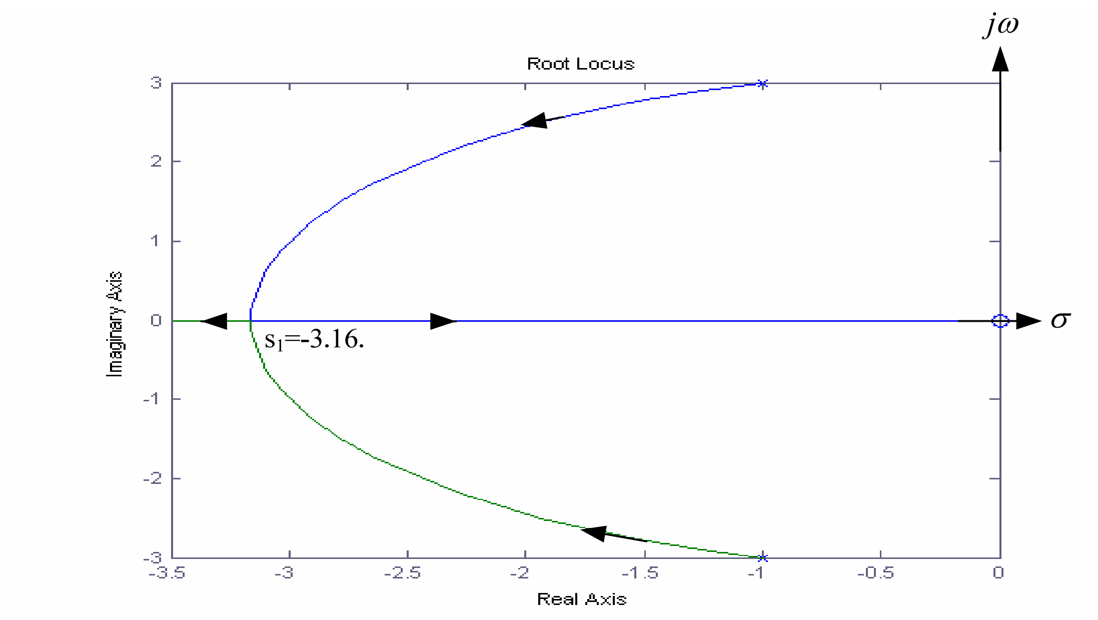
s_2=3.16 不在根轨迹上,根轨迹的会合点为 s_1=-3.16.

求复数开环极点 p_1=-1+3i 的出射角：

$$\theta_{p1} = (2k+1)\pi + \angle(p_1 - z_1) - \angle(p_1 - p_2)$$
$$= (2k+1)\pi + 108.43^\circ - 90^\circ$$
$$= 198.43^\circ \quad (k=0)$$

类似地，开环极点 p_1=-1-3i 的出射角为 -198.43°。

当 $0 \le \alpha < \infty$ 时，根轨迹图为：



（3）临界稳定时,闭环系统的特征根在虚轴上,由根轨迹可见,s=0 时临界稳定,此时 $\alpha = \infty$.

（4）局部反馈能使根轨迹向左移动，改善了系统的稳定性。

B4-3：已知系统如图 B4-2 所示。

⑴ 当 $a = 2$ 时，作 K_r 从 $0 \to \infty$ 的根轨迹，并确定系统无超调时的 K_r 取值范围及系统临界稳定时的 K_r 值；

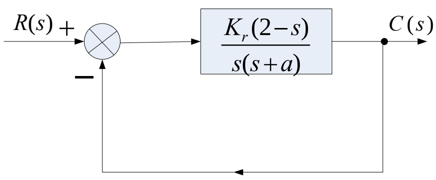


图 B4-2 题 B4-3 系统

⑵ 当 $K_r = 2$ 时，作 a 从 $0 \to \infty$ 的根轨迹，并确定系统阻尼比 $\varsigma = 0.707$ 时的 a 值。

解：

（1）该系统的根轨迹有 2 条分支,开环极点分别是 p_1=0, p_2 = -2 .开环零点 z_1=2.

此时由于开环传递函数分子多项式最高项系数为负,这是一个补根轨迹问题。所以实轴上的根轨迹,其右边实轴上的零点和极点之和为偶数,实轴的[-2，0]段和[2， +∞ ）段是根轨迹;.

计算根轨迹在实轴上的分离点和汇合点。.

$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=s^2-4s-4=0$

该方程的根为: s_1=-0.8284, s_2=4.8284,

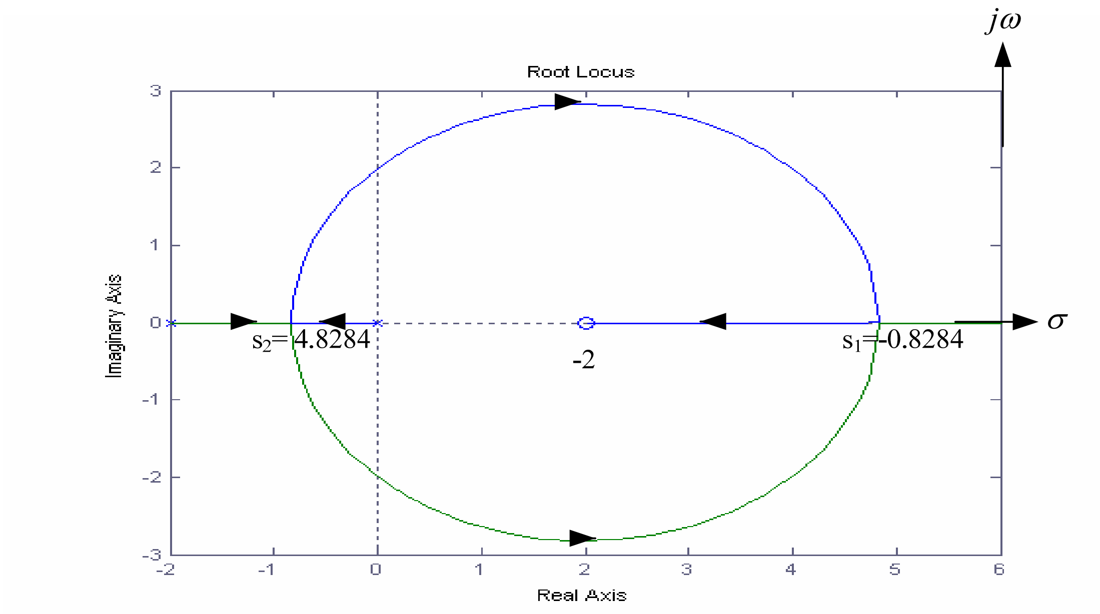
将以上方程的根代入式 $K_r=-\dfrac{P(s)}{Z(s)}$，当 s_1=-0.8284 时，K_r =0.343, s_2=4.8284,

时，K_r =11.66, 根轨迹的分离点为 s_1=-0.8284,会合点为 s_2= 4.8284.

求根轨迹与虚轴的交点。将 s=jω代入特征方程，即

1+G(jω)=0. 解得与虚轴的交点$\omega_{1,2}=\pm 2$,此时 K_r =2

绘制根轨迹图形如下所示.



当系统的特征值为实数时,输出响应无振荡,此时无超调;特征值位于右半平面时,输出响应无界。综上,无超调时，K_r的取值范围是（0, 0.343]，系统临界稳定时，K_r=2。

（2）K_r=2 时，系统特征方程为：$s^2+as+4-2s=0$。

等效开环传递函数为：$\dfrac{as}{s^2-2s+4}$，

该系统中根轨迹有 2 条分支,开环极点分别是 $p_{1,2}=1\pm1.732i$. 开环零点 $z_1=0$.

实轴上的（$-\infty$，0]段是根轨迹.

渐近线为负实轴.

计算根轨迹在实轴上的会合点.

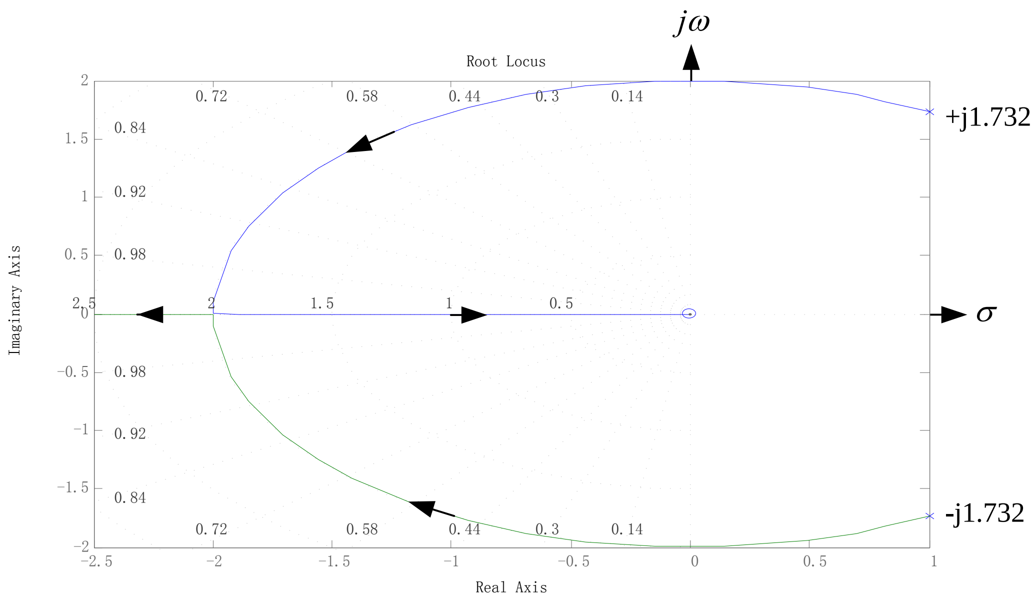
$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-s^2+4=0$$

该方程的根为: $s_1=2$, $s_2=-2$

将以上方程的根代入式 $K_r=-\dfrac{P(s)}{Z(s)}$,$s_1=-2$ 时,$K_r=6$, $s_2=2$ 不在根轨迹上,根轨迹会合点为 $s_1=-2$

求根轨迹与虚轴的交点。将 $s=j\omega$ 代入特征方程，即 $1+G(j\omega)=0$. 解得与虚轴的交点 $\omega_{1,2}=\pm 2$, $\omega_3=0$

绘制根轨迹图形如下所示.



从图中作出等ς曲线，与根轨迹相交的点就是所求点。此时的 a=4.82。

B4-4 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{Ke^{-sT}}{s+1}$$

(1) 证明：e^{-sT} 的近似表达式为

$$e^{-sT}\cong\frac{\dfrac{2}{T}-s}{\dfrac{2}{T}+s}$$

(2) 设 $T=0.1s$，则

$$e^{-0.1s}\cong\frac{20-s}{20+s}$$

$$G(s) \cong \frac{K(20-s)}{(s+1)(s+20)}$$

绘制 K 从 $0 \to \infty$ 的根轨迹，并确定使系统稳定的 K 值范围。

解：

（1） 证明：$e^{-Ts} = \dfrac{e^{-\frac{T}{2}s}}{e^{\frac{T}{2}s}}$

分子和分母分别做级数展开，得

$$e^{-Ts} = \frac{e^{-\frac{T}{2}s}}{e^{\frac{T}{2}s}} = \frac{1-\frac{T}{2}s+\frac{1}{2!}(\frac{T}{2}s)^2-\frac{1}{3!}(\frac{T}{2}s)^3+\ldots}{1+\frac{T}{2}s+\frac{1}{2!}(\frac{T}{2}s)^2+\frac{1}{3!}(\frac{T}{2}s)^3+\ldots}$$

取上式的一次近似，得

$$e^{-Ts} \approx \frac{1-\frac{T}{2}s}{1+\frac{T}{2}s} = \frac{\frac{2}{T}-s}{\frac{2}{T}+s}$$

证毕。

（2）该系统的根轨迹有 2 条分支,开环极点分别是 p_1=-1,p_2 =-20 .开环零点 z_1=20.

此时,由于开环传递函数分子多项式最高项系数为负,这是一个补根轨迹问题。所以实轴上的根轨迹,其右边实轴上的零点和极点之和为偶数,实轴的[-20，-1]段和[20， +∞ ）段是根轨迹.

渐近线为正实轴.

计算根轨迹在实轴上的分离点和会合点。.

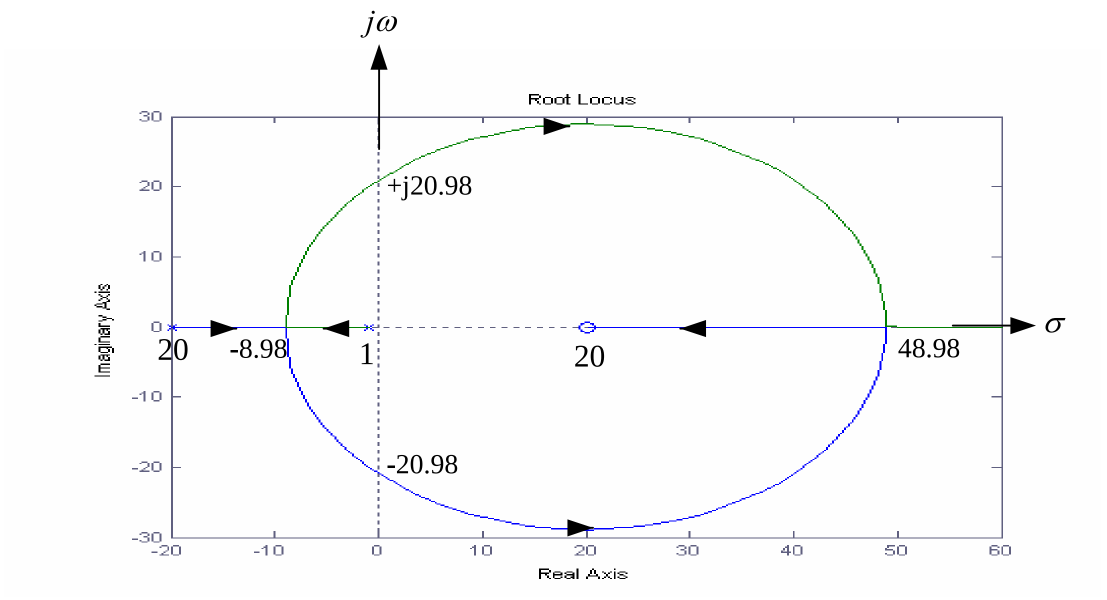
$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=s^2-40s-440=0$$

该方程的根为: s_1= -8.98, s_2= 48.98,将以上方程的根代入式 $K_r = -\dfrac{P(s)}{Z(s)}$，$K_r$ 都为正值，根轨迹的分离点为 s_1= -8.98,会合点为 s_2= 48.98.

求根轨迹与虚轴的交点。将 s=jω 代入特征方程，即

1+G(jω)=0. 解得与虚轴的交点 $\omega_{1,2}$=±20.98,此时 K_r =21

绘制根轨迹图形如下所示.



从根轨迹图可以得到，当 $0<K_r<21$ 时，系统稳定

B4-5　某单位反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{K_r(s+1)}{s(s-3)}$$

(1) 绘制 K_r 自 $0\to\infty$ 的根轨迹，并由根轨迹求使系统稳定的 K_r 值范围；

(2) 设 $K_r=5$，按主导极点计算系统单位阶跃响应的超调量和按 2% 准则的调整时间；

(3) 由系统实际的单位阶跃响应求超调量和调整时间，并与(2)的结果进行比较，说明原因。

解：（1）该系统中根轨迹有 2 条分支,开环极点分别是 $p_1=0$, $p_2=3$.开环零点 $z_1=-1$.

实轴上的[0，3]段和（$-\infty$，-1]段是根轨迹.

渐近线为负实轴.

计算根轨迹在实轴上的分离点.

$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-s^2-2s+3=0$$

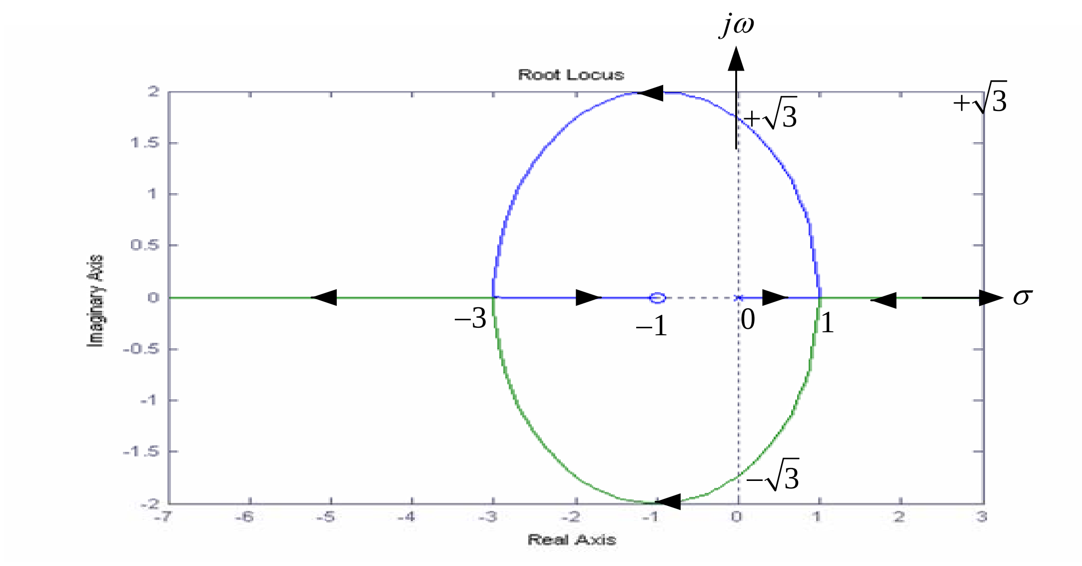
该方程的根为: $s_1=1$, $s_2=-3$，将以上方程的根代入式 $K_r=-\dfrac{P(s)}{Z(s)}$，K_r 都为正值,所以

根轨迹的分离点为 $s_1=1$,会合点为 $s_2=-3$.

求根轨迹与虚轴的交点。将 $s=j\omega$ 代入特征方程，即

$1+G(j\omega)=0$. 解得与虚轴的交点 $\omega_0=0,\ \omega_{2,3}=\pm\sqrt{3}$,此时 K_r 分别为 0 和 3

绘制根轨迹图形如下所示.



从根轨迹图可以得出，当 $K_r>3$ 时,特征根都在左半平面，系统稳定.

（2）$K_r=5$ 时，系统的特征方程为:

$$s^2+2s+5=0$$

主导极点为-1±2i，$\omega_n=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$，$\zeta\omega_n=1$，所以 $\zeta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 使用公式求出超调量

$M_p=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\times 100\%$ =20.8%，调整时间 t=4s $(\Delta=2\%)$.

（3）系统实际的阶跃响应超调量为 90.7%，调整时间为 4.5s。因为该系统中实零点与复极点的实部数值相当,对系统动态响应有较大影响.高阶系统没有零点,且距离虚轴最近的极点比其他极点距虚轴的距离小 5 倍以上时,采用主导极点比较准确.

C4-1：在控制系统设计中，常用校正装置来改善系统的性能。串联校正装置有三种类型：超前校正装置、滞后校正装置和超前－滞后校正装置。它们是用 *RC* 网络或由运算放大器和电阻电容组成的电子电路构成。通常是在前向通道中与控制对象串连，如图 C4-1 所示。

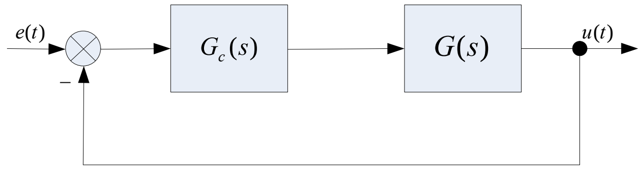


图 **C4-1** 串连校正装置在系统中的连接

超前校正装置的传递函数为：

$$G_c(s)=K_c\cdot\frac{\alpha Ts+1}{Ts+1} \qquad \text{(C4-1)}$$

式中，$\alpha>1$。超前校正可以提高系统的动态性能。

现有单位反馈系统，其开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{K_r}{s(s+10)(s+25)}$$

⑴ 绘制系统的根轨迹图。若原闭环系统的超调量$M_p=60\%$，求原系统主导极点的阻尼比ς和无阻尼振荡角频率ω_n，以及根轨迹增益K_r和在单位速度输入$r(t)=tu(t)$时，系统的稳态误差e_{ss}；

⑵ 引入超前校正装置

$$G_c(s)=\frac{(s+3)}{(s+3.93)}$$

求：引入超前校正装置后系统的特征根；

若以一对复根为主导极点，求其阻尼比ς和无阻尼振荡角频率ω_n及超调量M_p和按 2% 误差准则的调整时间t_s；

⑶ 求系统准确的单位阶跃响应，将实际的超调量M_p和按 2% 误差准则的调整时间t_s与前面计算结果进行比较，并说明二者存在差别的原因。

解：

（1）由题可知,根轨迹有 3 条分支,开环极点分别是 $p_1=0$, $p_2=-10$, $p_3=-25$. 开环无零点.
实轴上的[-10，0]段和（$-\infty$，-25]段是根轨迹.

渐近线和实轴的夹角:

$$\rho=\frac{(2\lambda+1)\pi}{3},\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\lambda=0,\rho=\frac{\pi}{3},\quad \lambda=1,\rho=\pi;\ \lambda=2,\rho=\frac{5\pi}{3};$$

渐近线与实轴的交点为:

$$\sigma=\frac{(-10)+(-25)}{3}=-\frac{35}{3}.$$

计算根轨迹在实轴上的分离点.

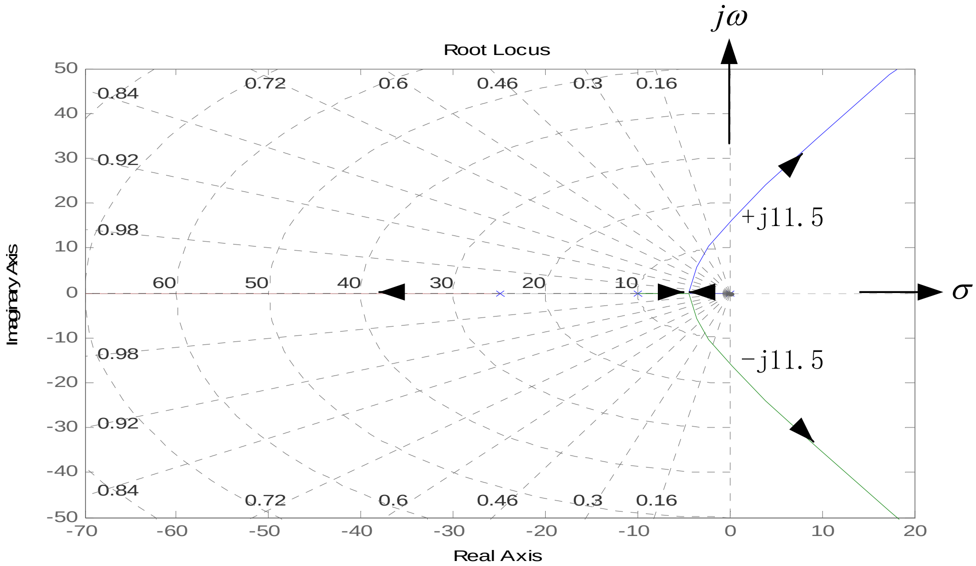
$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(3s^2+70s+250)=0$$

该方程的根为: $s_1=-4.4018$ $s_2=-18.9315$，.将以上方程的根代入式 $K_r=-\frac{P(s)}{Z(s)}$,只有 $s_1=-4.4018$ 时, K_r 为正值，$s_2=-18.9315$ 不在根轨迹上，因此根轨迹的分离点为 $s_1=-4.4018$.

求根轨迹与虚轴的交点。将 s=jω代入特征方程，即

1+G(jω)=0. 解得与虚轴的交点$\omega_1=0,\omega_{2,3}=\pm\sqrt{250}=\pm15.81$.

绘制根轨迹图形如下所示.



$M_p=60\%$时，由 $M_p=e^{-\varsigma\pi/\sqrt{1-\varsigma^2}}*100\%$ 求得 ς=0.161，在根轨迹上可得出主导极点为 -1.85±11.3i，即 $\varsigma\omega_n=1.85,\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}=11.3$，可求 ω_n=11.5，经幅值条件计算,根轨迹增益 K_r=4108.7 或从根轨迹图读取根轨迹增益 K_r=4140，此时开环增益为

$$K=\frac{K_r\prod_{i=1}^{m}z_i}{\prod_{j=1}^{n}p_j}=\frac{4140}{10\times25}=16.56$$

该系统为 I 型系统,单位速度输入下，e_{ss}=1/K=0.0603.

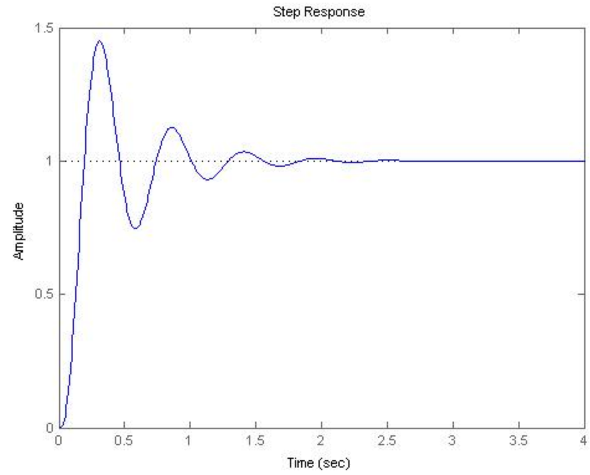
（2）引入超前校正后，系统的开环传递函数为：$G(s)G_c(s)=\frac{K_r}{s(s+10)(s+25)}\cdot\frac{(s+3)}{(s+3.93)}$

当 K_r=4108.7 时,系统的特征多项式为: $s^4+39s^3+388s^2+5122s+12420=0$

系统特征根为：$s_{1,2}$=-2.3488±11.4368i， s_3=-31.3479， s_4=-2.8845.

若以复根 $s_{1,2}$=-2.3488±11.4368i 为主导极点，则 ω_n =11.7， ς =0.2，超调量 $M_p=e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}}\times100\%$ =52.7%，2%误差准则的调整时间 $t_s=\frac{4}{\zeta\omega_n}$=1.7s

（3）系统准确的单位阶跃响应如图：



实际超调量为 45%,调整时间为 1.5s。可见用主导极点计算的结果和实际的结果有一定差别,因为有另一个极点 s_4=-2.8845 对系统的影响也很大,所以用主导极点计算会有偏差。

C4-2 为提高系统的控制精度（稳态性能），可采用滞后校正装置，其传递函数为

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{Ts+1}{\beta Ts+1}$$

式中，$\beta > 1$。考虑单位反馈系统

$$G(s) = \frac{1}{s^2+5s+6}$$

⑴ 绘制系统的根轨迹图，并求闭环系统的极点、阻尼比ς和无阻尼振荡角频率ω_n及超调量M_p；

⑵ 求系统的稳态误差系数K_p， K_v和K_a；

⑶ 若希望将系统的稳态误差系数增大到原来的 10 倍，又不使闭环系统的主导极点有明显的变化，引入滞后校正装置

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{s+0.05}{s+0.005}$$

绘制校正后系统的根轨迹图，校正后闭环系统的极点是否发生变化，为什么？

⑷ 求校正装置的K_c。

⑸ 若以闭环复极点为主导极点，求校正系统的单位阶跃响应。

⑹ 求校正系统准确的单位阶跃响应，与⑸的结果进行比较，说明出现差别的原因。

解：（1）该系统有两条根轨迹分支,开环极点分别为 p_1=-2, p_2=-3,开环无零点。

在实轴上的[-3，-2]段是根轨迹.

渐近线和实轴的夹角:

$$\rho = \frac{(2\lambda+1)\pi}{2}, \lambda = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

$$\lambda = 0, \rho = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda = 1, \rho = \frac{3\pi}{2};$$

渐近线与实轴的交点为:

$$\sigma = \frac{(-2)+(-3)}{2} = -2.5.$$

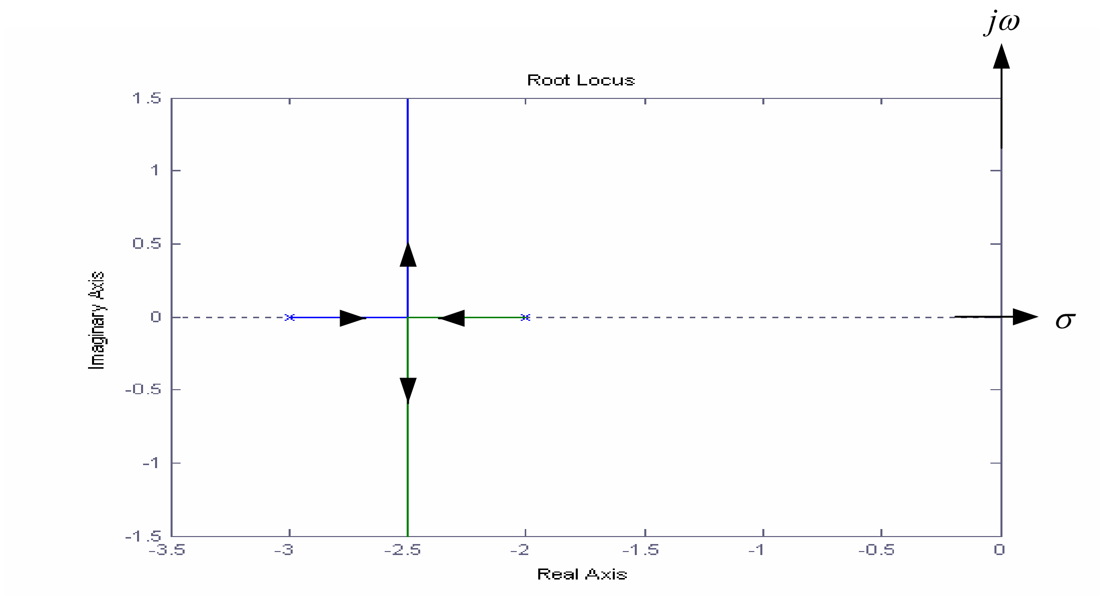
计算根轨迹在实轴上的分离点(会合点).

$$P(s)Z'(s) - P'(s)Z(s) = -(2s+5) = 0$$

该方程的根为: s_1=-2.5.

将以上方程的根代入式 $K_r = -\frac{P(s)}{Z(s)}$,有 s_1=-2.5 时, K_r =0.25,所以根轨迹的分离点为 s_1=-2.5.

绘制原系统根轨迹图如下所示：



当 K_r=1 时，闭环系统的传递函数是: $\Phi(s) = \frac{1}{s^2+5s+7}$

所以闭环极点为：-2.5±0.866i，即 $\zeta\omega_n = 2.5$，$\omega_n = \sqrt{(-2.5)^2 + (0.866)^2}$ =2.65，ζ =0.945,

求得 $M_p = e^{-\pi\xi/\sqrt{1-\xi^2}} \times 100\%$ =0.012%

（2）当 K_r=1 时，开环增益为 1/6。因为系统是零型系统，故有

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = K = \frac{1}{6}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) = 0$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)H(s) = 0$$

（3）校正后系统的开环传递函数为： $G_c(s)G(s) = K_c \cdot \frac{s+0.05}{s+0.005} \cdot \frac{1}{s^2+5s+6}$

该系统的开环极点为 p_1=-2,p_2=-3, p_3=-0.005, 开环零点为 z_1=-0.05.

实轴上的[-3，-2]段和[-0.05,-0.005]段是根轨迹.

渐近线和实轴的夹角:

$$\rho=\frac{(2\lambda+1)\pi}{2},\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\lambda=0,\rho=\frac{\pi}{2},\qquad \lambda=1,\rho=\frac{3\pi}{2};$$

渐近线与实轴的交点为:

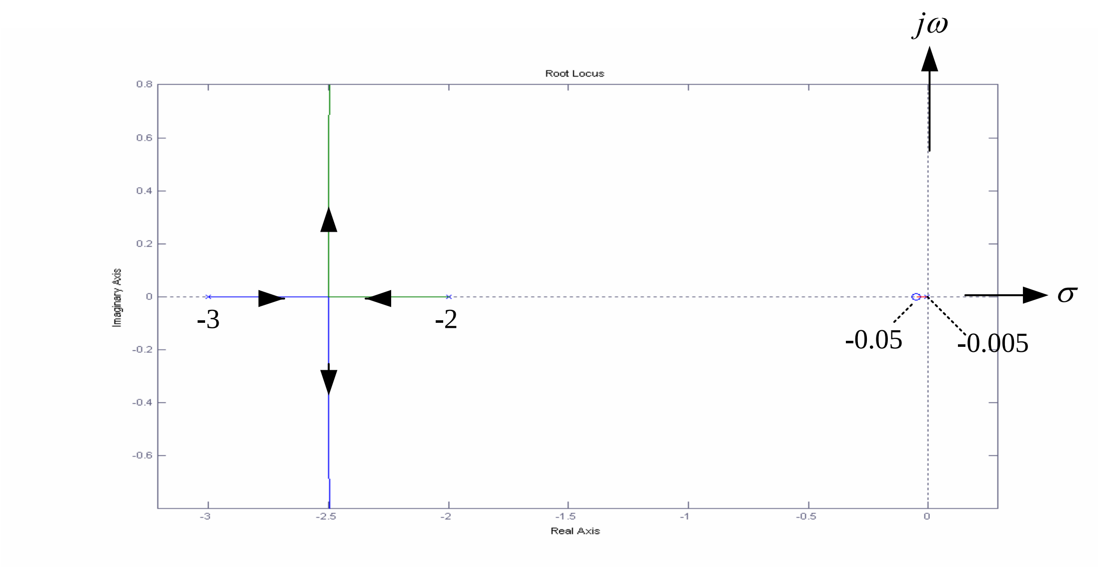
$$\sigma=\frac{(-2)+(-3)+(-0.05)-(-0.005)}{2}=-2.5225.$$

计算根轨迹在实轴上的分离点.

$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(2s^3+5.155s^2+0.5005s+0.2712)=0$$

该方程的根为: s_1= -2.4991, $s_{2,3}$=-0.0392±0.2296i ，当 $s_{2,3}$=-0.0392±0.2296i 时，对应的 K_r 为负值，故根轨迹的分离点为 s_1= -2.4991

绘制原系统根轨迹图如下所示：



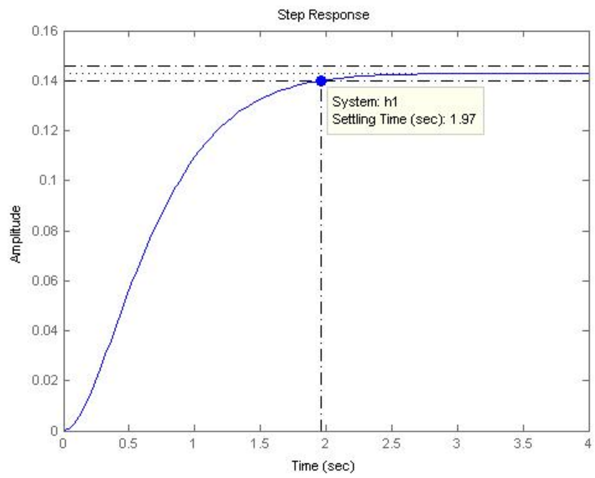
比较校正前和校正后的根轨迹图可知，校正后闭环系统的根轨迹几乎没有发生变化，因为滞后环节加入的零点和极点相距很近，构成了一对偶极子，且远离其他的极点，他们对系统的作用相互抵消,故原系统的根轨迹形状几乎没有改变。

（4）将滞后校正装置化成时间常数形式可知，校正环节提供的增益为 10，若 K_r=1，可以保证校正后系统的开环增益提高了 10 倍，即校正后系统的稳态误差系数增大到原来的 10 倍。

（5）以（1）所求的共轭极点为主导极点，可得到系统的闭环传递函数为

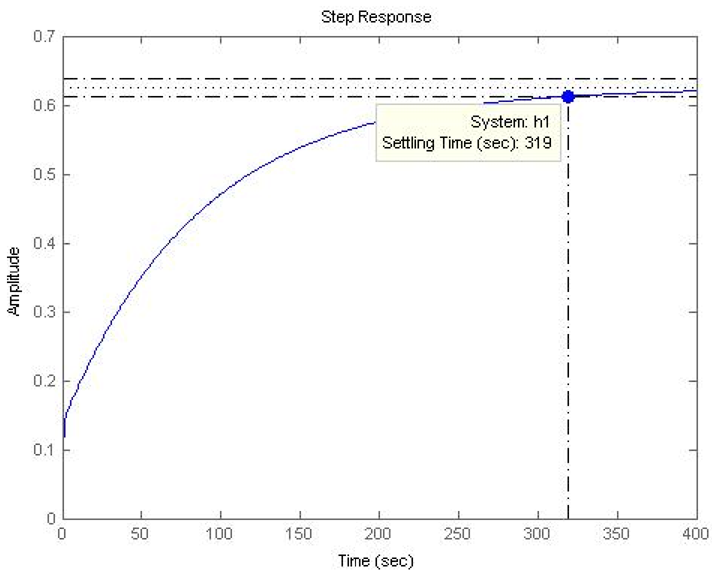
$$\Phi_1(s)=\frac{K_1}{s^2+2\varsigma\omega_n s+\omega_n^2}=\frac{K_1}{s^2+5s+7}$$ ，注意到调整时间与 K_r 无关。

其阶跃响应为：



（6）校正后系统的闭环传递函数为 $\Phi_2(s)=\dfrac{K_2(s+0.05)}{(s+0.005)\cdot(s^2+5s+6)+(s+0.05)}$

准确的单位阶跃响应为：



可以看出，准确的单位阶跃响应曲线与主导极点的响应曲线变化不大，稳态偏差都很小,但是调整时间变的很长，这是由于准确系统中还存在两个很靠近虚轴的零点和极点,由于他们的存在使动态过程很慢.一般主导极点离虚轴越远动态性能越好,离虚轴越近,动态性能越差。

C4-3 若既要改善系统的动态性能，又要提高系统的稳态性能，可以用超前滞后校正装置

$$G_c(s)=K_c\frac{(\alpha T_1 s+1)(T_2 s+1)}{(T_1 s+1)(\beta T_2 s+1)}$$

式中，α、$\beta>1$。现考虑单位反馈系统，其开环传递函数为

$$G(s)=\frac{3}{s(s+1)}$$

现要求既加大稳态误差系数，又减小系统的超调量，引入超前滞后校正装置

$$G_c(s)=\frac{(s+1)(s+0.1)}{(s+1.42)(s+0.008)}$$

⑴ 绘制原系统的根轨迹图，并求闭环系统的极点，以及阻尼比ς，无阻尼振荡角频率ω_n和速度误差系数K_v；

⑵ 求原系统的单位阶跃响应；

⑶ 绘制引入校正装置后系统的根轨迹图，并求闭环系统的主导极点，以及阻尼比ς，无阻尼振荡角频率ω_n和速度误差系数K_v；

⑷ 求校正后系统的单位阶跃响应，并与⑵的结果进行比较，说明校正装置的作用。

解：（1）原系统根轨迹有 2 条分支,开环极点分别是 $p_1=0$, $p_2=-1$,开环无零点.

实轴上的[-1，0]段是根轨迹，实轴上的分离点为-1 和 0 的几何中心，即分离点为-0.5

渐近线和实轴的夹角:

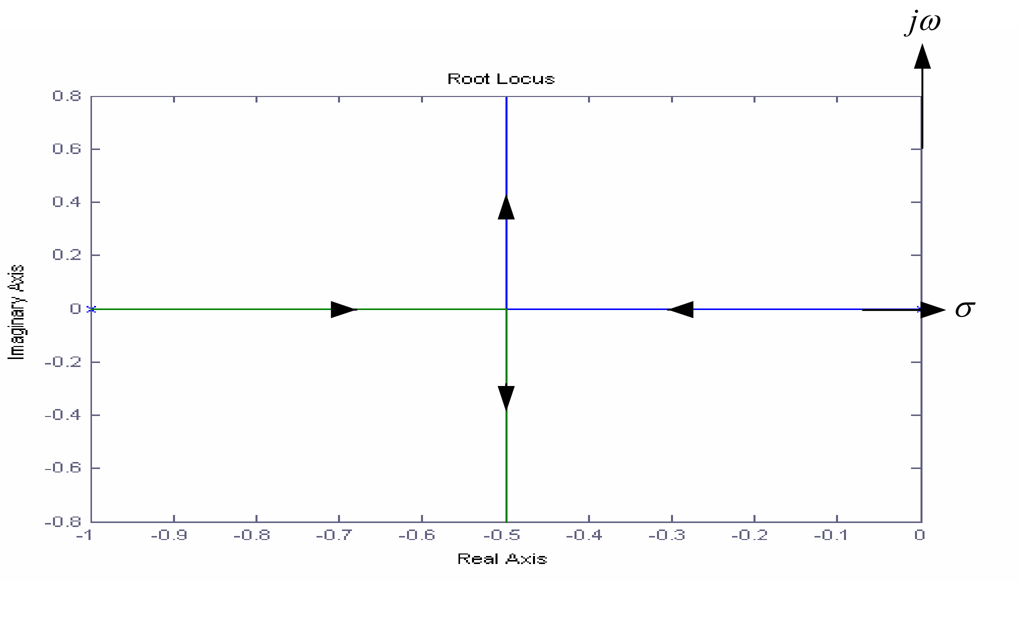
$$\rho=\frac{(2\lambda+1)\pi}{2},\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\lambda=0,\rho=\frac{\pi}{2},\qquad \lambda=1,\rho=\frac{3\pi}{2};$$

渐近线与实轴的交点为:

$$\sigma=\frac{-1+0}{2}=-0.5$$

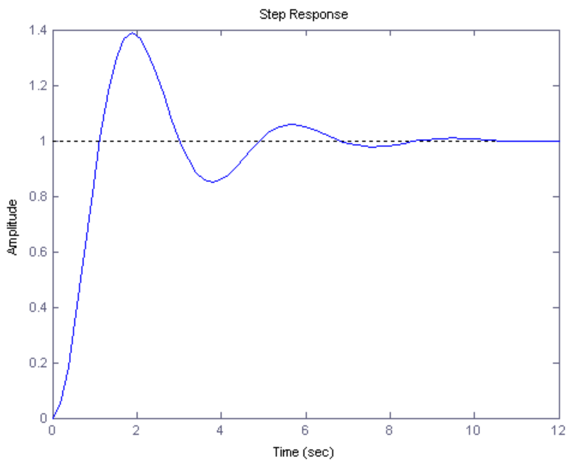
绘制.根轨迹如下图：



闭环系统的传递函数为：$\Phi(s)=\dfrac{3}{s^2+s+3}$

由闭环传递函数可求闭环极点：$s_{1,2}$=−0.5000±1.6583i，无阻尼自然振荡频率 $\omega_n=\sqrt{3}$。由 $\zeta\omega_n=0.5$，得到 ζ=0.29，由开环传递函数可求速度误差系数 $K_v=\lim\limits_{s\to 0}sG(s)H(s)=3$

（2）原系统阶跃响应如图：进一步可求得超调量 $M_p=38.8\%$，调整时间为 7.87s



（3）引入校正后，消去分子和分母的相同项（s+1）不影响根轨迹的形状，系统开环传递函数为：$G(s)G_c(s)=\dfrac{3(s+0.1)}{s(s+1.25)(s+0.008)}$，

根轨迹有 3 条分支,开环极点分别是 $p_1=0$, $p_2=-1.25$, $p_3=-0.008$,开环零点为 $z_1=-0.1$.

实轴上的[-0.008，0]段和[-1.25，-0.1]段是根轨迹

渐近线和实轴的夹角:

$$\rho=\frac{(2\lambda+1)\pi}{2},\lambda=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$\lambda=0,\rho=\frac{\pi}{2},\qquad \lambda=1,\rho=\frac{3\pi}{2};$$

渐近线与实轴的交点为:

$$\sigma=\frac{(-1.25)+(-0.008)-(-0.1)}{2}=-0.579$$

.

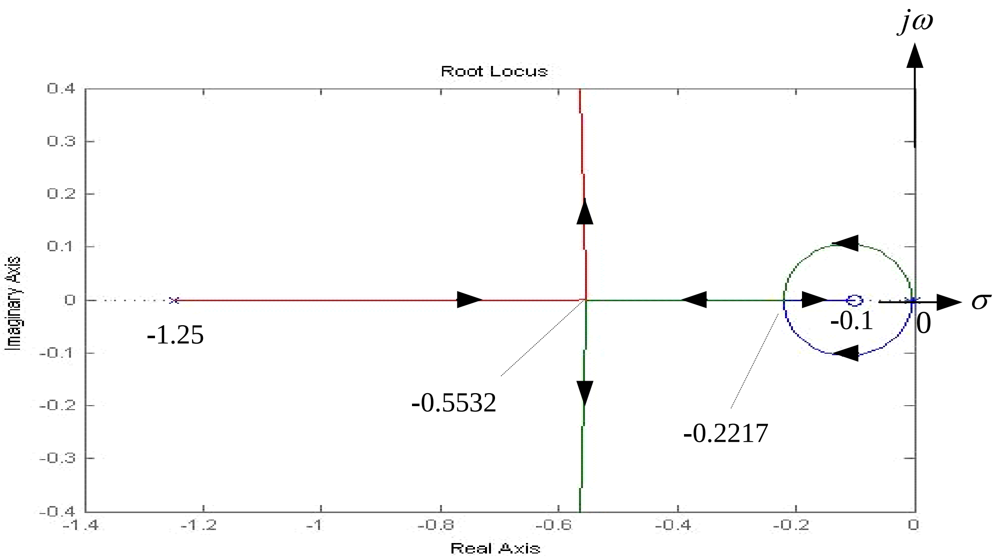
计算根轨迹在实轴上的分离点和汇合点.

$$P(s)Z'(s)-P'(s)Z(s)=-(2s^3+1.558s^2+0.2516s+0.001)=0$$

该方程的根为：$s_1=-0.0041$，$s_2=-0.5532$，$s_3=-0.2217$，将以上方程的根代入式

$K_r = -\dfrac{P(s)}{Z(s)}$，$K_r$ 都取正值，根轨迹的分离点为-0.0041 和-0.5532,会合点为-0.2217.

绘制根轨迹图形如下所示.



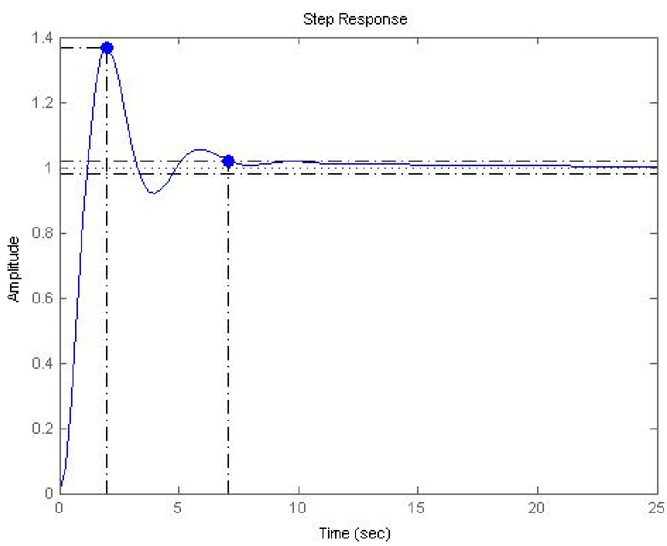
闭环系统的传递函数为: $\Phi(s) = \dfrac{3s+0.3}{s^3+1.258s^2+3.01s+0.3}$

闭环极点为：$s_{1,2}$=−0. 5771±j1. 5991，s_3=−0. 1038。由于 s_3=−0. 1038 和系统零点 s=−0. 1 非常接近，组成偶极子，因此系统可以近似为极点是 $s_{1,2}$=−0. 5771±j1. 5991 的二阶系统。

由此，$\varsigma\omega_n = 0.5771$，$\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2} = 1.5991$

解得：$\varsigma = 0.339$，$\omega_n = 1.702$　速度误差系数 $K_v = \lim\limits_{s\to 0} sG(s)H(s) = 30$

（4）校正后系统的单位阶跃响应如图：



校正后阶跃响应的超调量为 36.6%，调整时间为 7.06s，校正前系统的超调量为 38.8%，调整时间为 7.87s。由此可以比较出，对系统使用了超前-滞后校正控制器后，系统的动态指标有所改善，同时，由于速度误差系数增大了，速度稳态误差就减小了许多。因此，超前-滞后校正能同时改善系统的稳态和动态性能。

D4-1：用 MATLAB 绘制下列系统的根轨迹图：

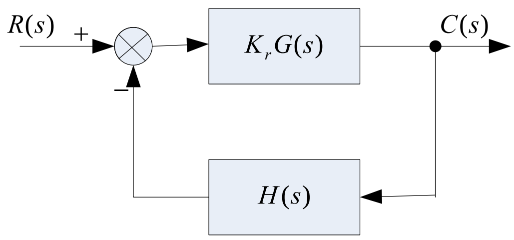


图 D4-1 题 D4-1 系统图

(1) $G(s)=\dfrac{1}{s^3+3s^2+4s+5}$， $H(s)=1$；

(2) $G(s)=\dfrac{s+10}{s^4+5s^3+2s+1}$，$H(s)=s+5$；

(3) $G(s)=\dfrac{s^5+6s^4+3s^3+2s^2+5s+8}{s^6+6s^5+3s^4+7s^3+2s^2+9s}$，$H(s)=1$；

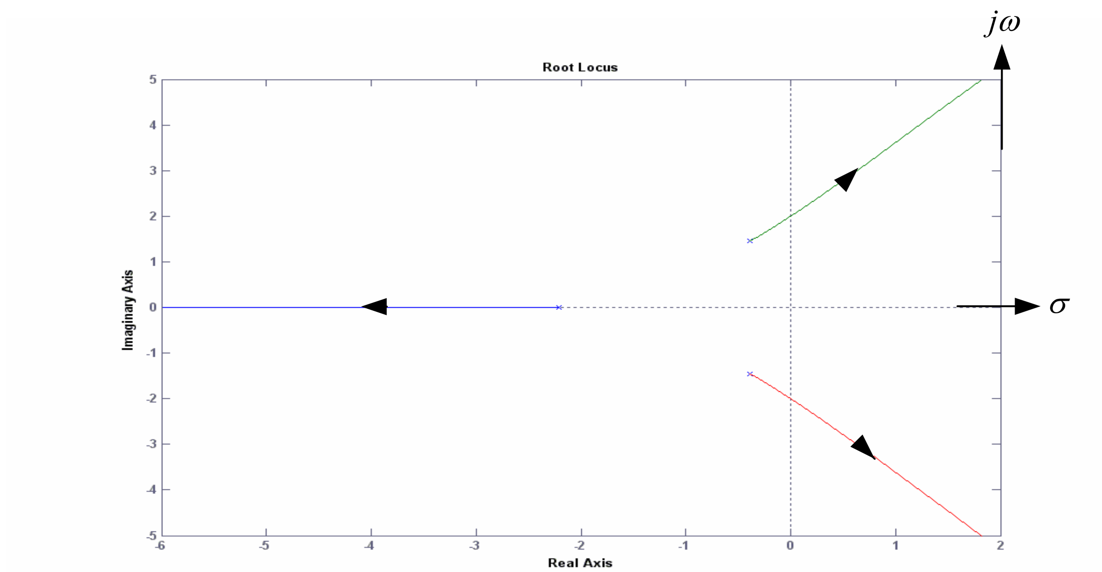
(4) $G(s)=\dfrac{s^2+2s+2}{s^2+3s+2}$，$H(s)=1$；

(5) $G(s)=\dfrac{s+1}{s^3+2s+5}$，$H(s)=5s$。

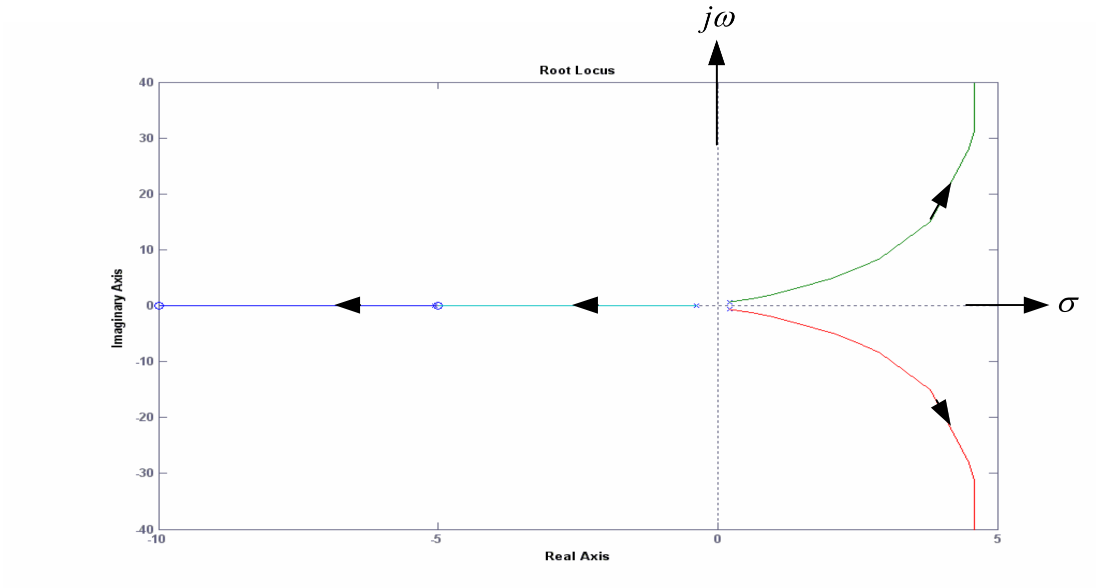
解：

在 MATLAB 中调用命令 rlocus 绘制根轨迹图形如下.

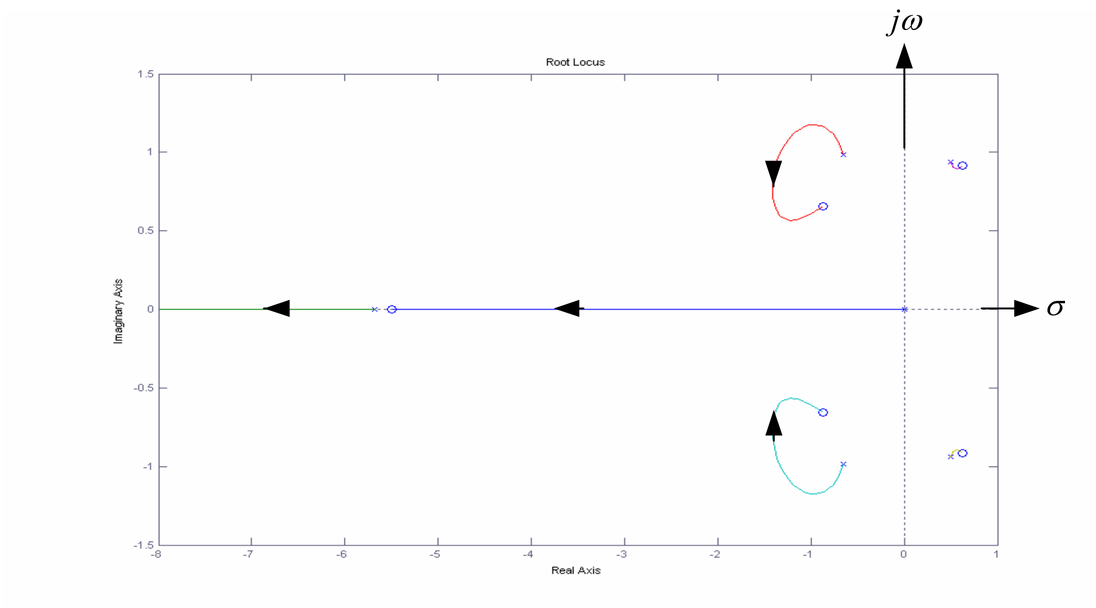
（1）



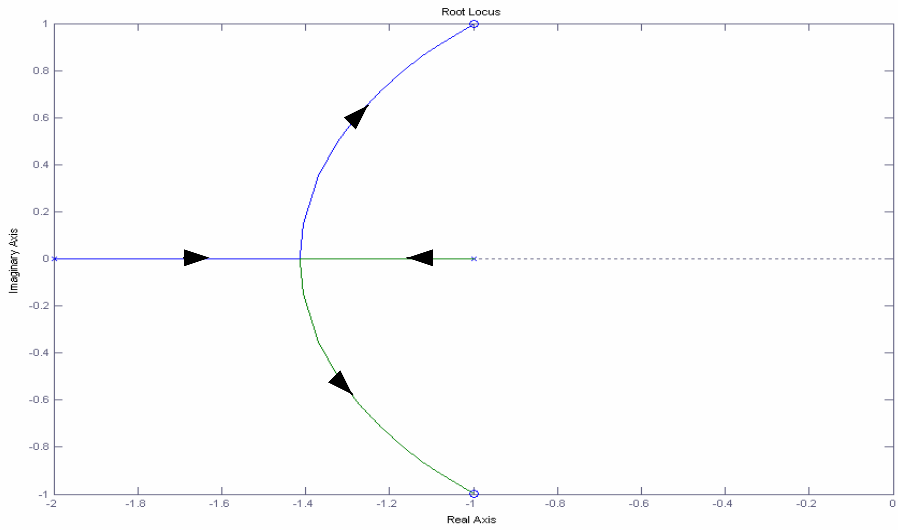
（2）


$j\omega$
Root Locus
σ
Imaginary Axis
Real Axis
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-10
-5
0
5

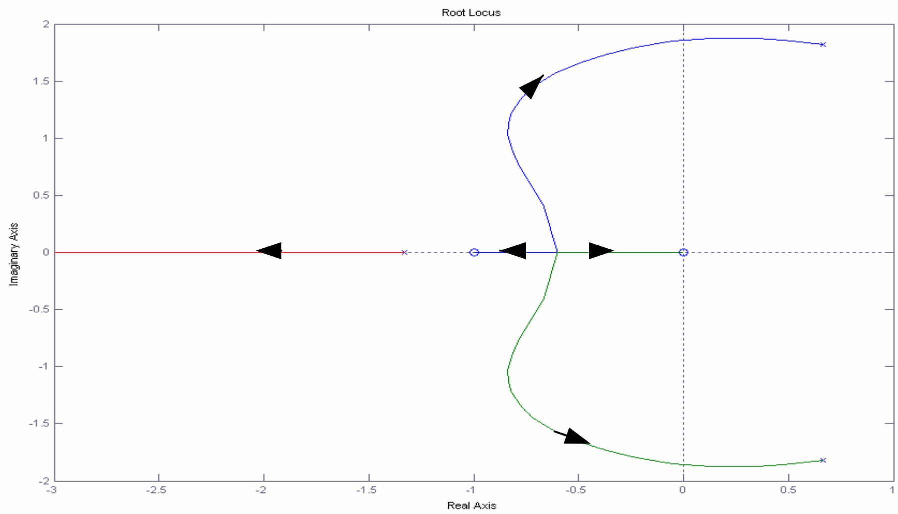
（3）


$j\omega$
Root Locus
σ
Imaginary Axis
Real Axis
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1

（4）



（5）



D4-2：某单位反馈系统的开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{K_r}{s(s^2+2s+2)}$$

用 MATLAB 求：

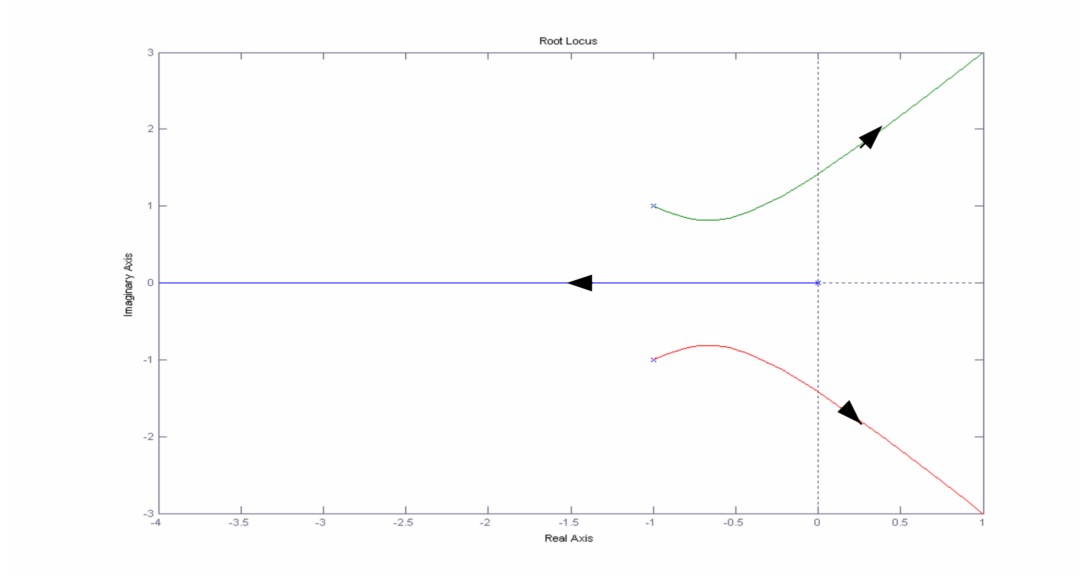
⑴ 系统稳定的增益 K_r；

⑵ 闭环系统主导极点为 $\varsigma=0.5$ 时的增益 K_r。

解：

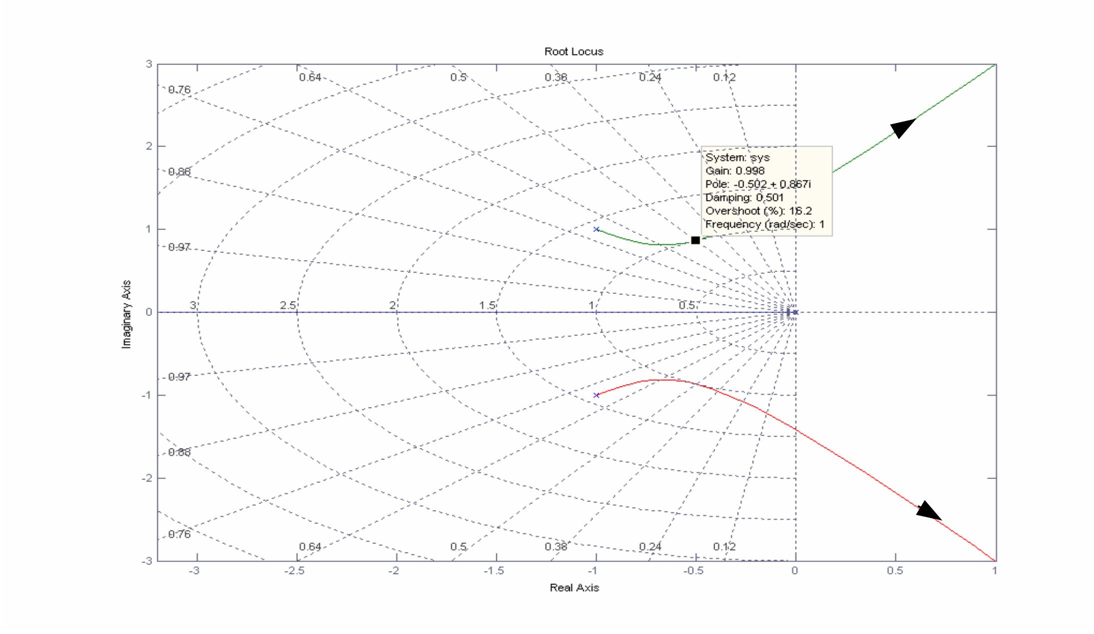
（1）系统的根轨迹如图：

解：



由根轨迹图读出根轨迹与虚轴的交点处 K_r =4, 所以当 0<K_r<4 时系统稳定

（2）在根轨迹图中做 $\varsigma = 0.5$ 的直线，与根轨迹相交处就是系统的主导极点。此处的 K_r=1



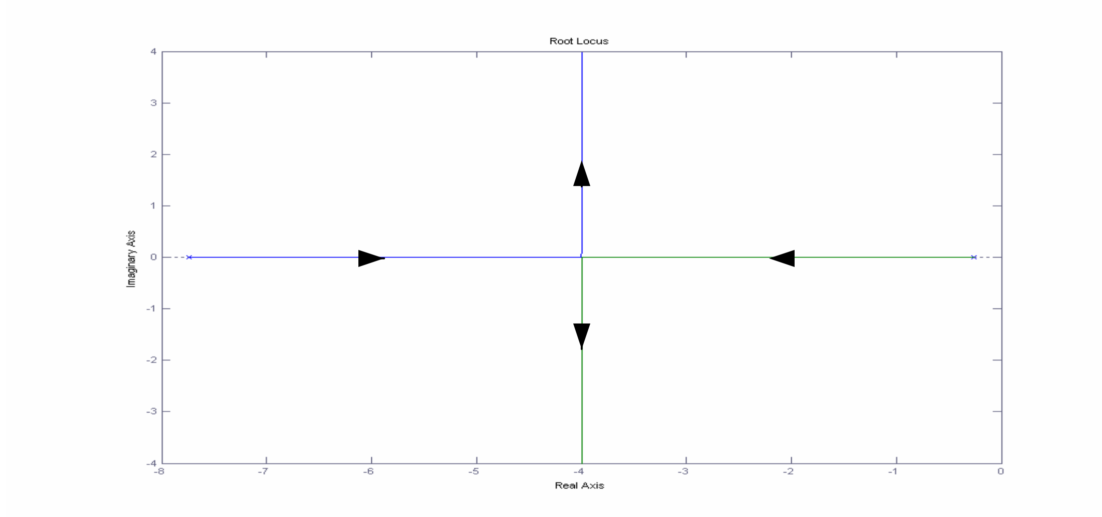
D4-3：用 MATLAB 求下列单位反馈系统，以 a 为变量的根轨迹图：

$$G(s) = \frac{5s + a}{s^2 + 3s + 2}$$

解：

系统闭环特征方程为：$s^2 + 8s + a + 2 = 0$

所以等效的开环传递函数为：$\dfrac{a}{s^2+8s+2}$，以 a 为变量的根轨迹如图：



D4-4：对图 A4-1（题 A4-2）的系统，设：

(1) $G_c(s)=K_r$（比例控制）；

(2) $G_c(s)=\dfrac{K_r}{s}$（积分控制）；

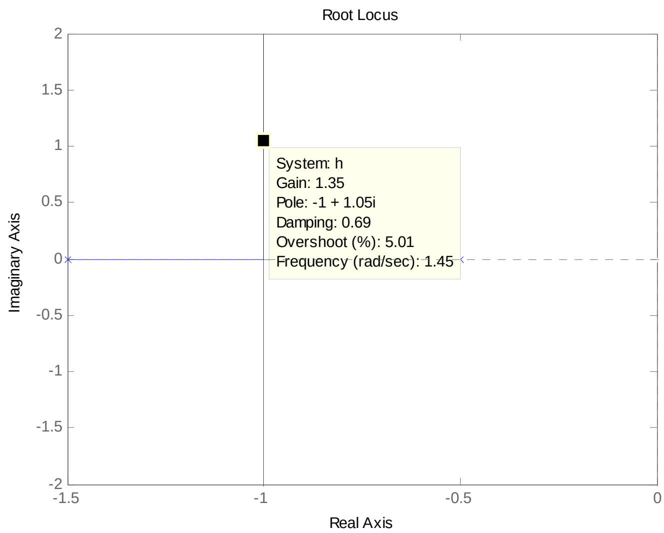
(3) $G_c(s)=K_r(1+\dfrac{1}{s})$（比例积分控制）

(4) $G_c(s)=K_r(5+s)$（比例微分控制）

用 MATLAB 分别绘制(1)—(4)四种情况下，$0\le K_r<\infty$ 的根轨迹图；求取 $M_p\le 5\%$ 的 K_r 值；比较四种控制下系统的稳态误差和瞬态响应指标，并讨论比例、积分和微分控制对系统性能的影响。

解：

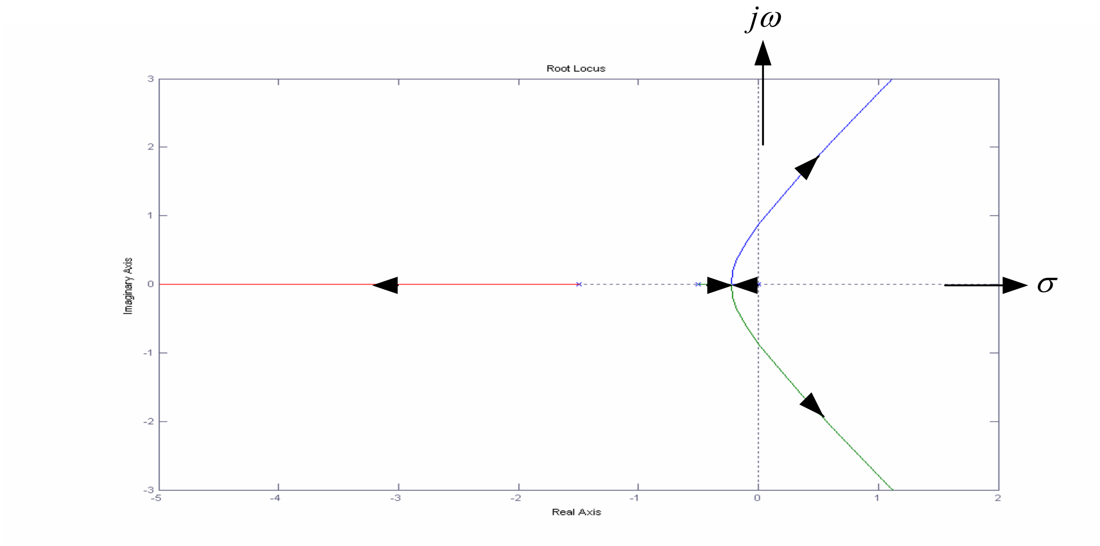
（1）根轨迹图：



利用 MATLAB，可以从 MATLAB 运行的工作空间的图中读出，当 $M_p \le 5\%$ 时，$K_r \leqslant 1.35$ ，

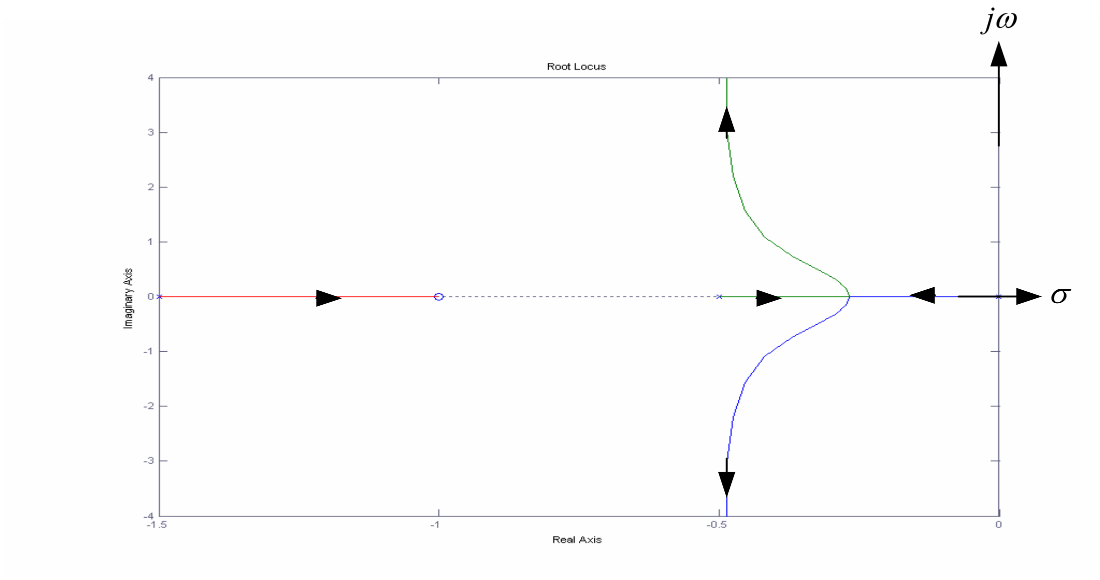
K_r=1 时，利用 MATLAB 求出阶跃响应，可得超调量 $M_p = 2.66\%$，调整时间为 4.3s，位置误差系数为 4/3

（2）



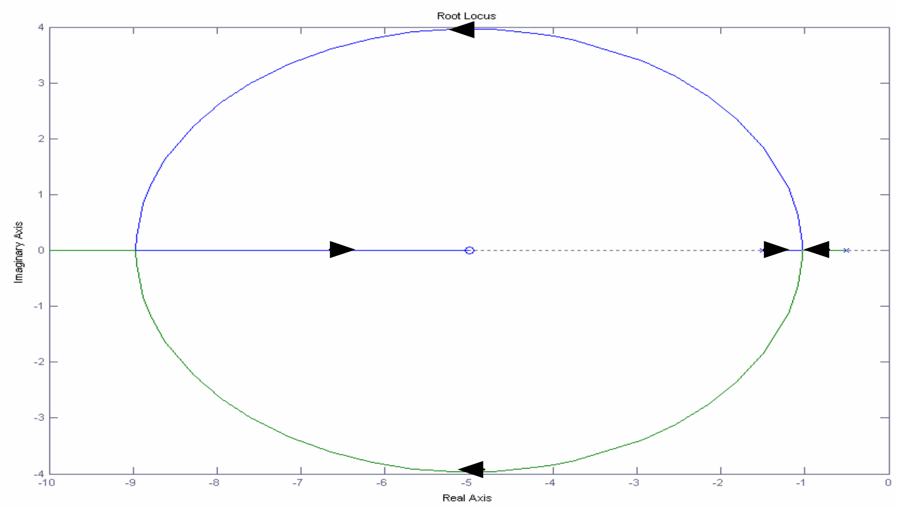
在图上读取当 $M_p \le 5\%$ 时， $K_r \leqslant 0.143$， K_r=1 时，同样可求得 $M_p = 72.3\%$，调整时间为 65.9s，位置误差系数为∞，即阶跃信号作用下稳态误差为 0。

（3）



在图上读取当 $M_p \le 5\%$ 时， $K_r \leqslant 0.252$， K_r=1 时，同样可求得 $M_p = 26.7\%$，调整时间为 9.25s，位置误差系数为∞，即阶跃信号作用下稳态误差为 0。

（4）



在图上读取当$M_p \le 5\%$时，K_r≤0.535 或≥4.92，K_r=1 时，同样可求得$M_p = 9.47\%$,调整时间为 2.28s，位置误差系数为 20/3.

由以上四种情况可以看出，比例调节能调节系统的根轨迹增益；积分使得根轨迹朝右偏，闭环极点右移，动态响应变差，即超调量和调整时间均增加了，但是系统的型号提高了，跟踪能力提高了；比例积分调节增加了开环一对零极点，根轨迹渐近线左移，系统稳定性可望改善，而且系统的型号提高了，也提高了跟踪能力；而微分作用增加了系统的一个零点，根轨迹左偏，能改善系统的动态性能，使系统响应变快，但是系统型号未变，跟踪能力没有改善。