Esercizi Distribuzioni

Tommaso Pedroni

Esercizio 1F

Si consideri la sequenza di funzioni $u_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ definita dalla relazione $u_j(x) = e^{ijx}$. Si dimostri che la sequenza converge puntualmente solo se $x = 2k\pi$ con k intero, mentre è sempre convergente in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Soluzione. Analizziamo separatamente la convergenza puntuale e la convergenza nel senso delle distribuzioni.

Convergenza Puntuale. Fissiamo $x \in \mathbb{R}$. Dobbiamo studiare il comportamento del limite:

$$\lim_{j\to\infty} e^{ijx}.$$

Distinguiamo due casi:

1. Sia $x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. In tal caso, per ogni $j \in \mathbb{N}$:
$$u_j(2k\pi) = e^{ij(2k\pi)} = (e^{i2\pi})^{jk} = 1^j = 1.$$
La successione numerica è costante e quindi converge a 1.

2. Sia $x \neq 2k\pi$. Consideriamo la successione complessa $z_j = e^{ijx}$. Si osserva che $z_{j+1} = e^{ix} z_j$. Se il limite $L = \lim_{j\to\infty} z_j$ esistesse finito, allora dovrebbe soddisfare:
$$L = \lim_{j\to\infty} z_{j+1} = \lim_{j\to\infty} e^{ix} z_j = e^{ix} L \implies L(1 - e^{ix}) = 0.$$
Poiché $x \neq 2k\pi$, si ha $e^{ix} \neq 1$, dunque deve essere $L = 0$. Tuttavia, $|z_j| = |e^{ijx}| = 1$ per ogni j, il che implica $|L| = 1$. Abbiamo raggiunto una contraddizione $(0 = 1)$, pertanto la successione non converge.

Concludiamo che la convergenza puntuale si ha se e solo se $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Convergenza in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Dobbiamo verificare se esiste un limite per la successione $\{u_j\}$ nella topologia debole-* di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_c^\infty(\mathbb{R})$ una funzione test arbitraria. Valutiamo l'azione di u_j su ϕ:

$$\langle u_j, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u_j(x)\phi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ijx}\phi(x)\, dx.$$

Riconosciamo nell'integrale la trasformata di Fourier di ϕ, definita come $\hat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\phi(x)\, dx$, valutata in $\xi = -j$:

$$\langle u_j, \phi \rangle = \hat{\phi}(-j).$$

Poiché $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (spazio di Schwartz), anche la sua trasformata di Fourier $\hat{\phi}$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. In particolare, $\hat{\phi}(\xi)$ decade all'infinito più rapidamente di qualsiasi potenza inversa di $|\xi|$. Possiamo invocare il **Lemma di Riemann-Lebesgue**, il quale assicura che:

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{\phi}(\xi) = 0.$$

Pertanto, passando al limite per $j \to \infty$:

$$\lim_{j\to\infty} \langle u_j, \phi \rangle = \lim_{j\to\infty} \hat{\phi}(-j) = 0 = \langle 0, \phi \rangle.$$

Poiché questo vale per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, concludiamo che:

$$u_j \to 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Esercizio 2F

Sia $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si mostri che la restrizione di u a $\mathcal{D}(\Omega)$ identifica un elemento di $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Soluzione. Sia $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Questo significa che per ogni successione $\phi_j \to 0$ in $\mathcal{E}(\Omega)$, si ha $\langle u, \phi_j \rangle \to 0$.

Consideriamo la restrizione di u alle funzioni test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Poiché $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$, l'espressione $\langle u, \phi \rangle$ è ben definita. La linearità è ovvia. Dobbiamo dimostrare la **continuità** rispetto alla convergenza in $\mathcal{D}(\Omega)$ (che chiamiamo convergenza $\mathcal{D}$).

Ricordiamo la definizione di convergenza in $\mathcal{D}(\Omega)$: una successione $\phi_j \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ se:

1. Esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $\operatorname{supp}(\phi_j) \subset K$ per ogni j.
2. Per ogni multi-indice α, $\partial^\alpha \phi_j \to 0$ uniformemente su K.

Ricordiamo ora la definizione di convergenza in $\mathcal{E}(\Omega)$ (convergenza $\mathcal{E}$): una successione $\psi_j \to 0$ in $\mathcal{E}(\Omega)$ se:

1. Per *ogni* compatto $H \subset \Omega$ e per ogni α, $\partial^\alpha \psi_j \to 0$ uniformemente su H.

Passaggio chiave: Se una successione ϕ_j converge a 0 nel senso di $\mathcal{D}$, essa converge a 0 anche nel senso di $\mathcal{E}$. Infatti, se $\phi_j \to 0$ in $\mathcal{D}$, le derivate convergono uniformemente sul compatto fisso K. Poiché le funzioni sono nulle fuori da K, la convergenza uniforme è garantita su qualsiasi altro compatto H (poiché su $H \setminus K$ le funzioni sono identicamente nulle).

Dunque abbiamo l'implicazione:

$$\phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \implies \phi_j \xrightarrow{\mathcal{E}} 0.$$

Poiché u è continuo su $\mathcal{E}$ per ipotesi ($u \in \mathcal{E}'$), sappiamo che $\phi_j \xrightarrow{\mathcal{E}} 0$ implica $\langle u, \phi_j \rangle \to 0$. Combinando le due cose:

$$\phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \implies \langle u, \phi_j \rangle \to 0.$$

Questo dimostra che u è sequenzialmente continuo su $\mathcal{D}(\Omega)$, e quindi definisce una distribuzione in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Identificazione (Densità). Resta da chiarire perché tale elemento è "identificato" univocamente. Ciò deriva dal fatto che $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $\mathcal{E}(\Omega)$. Due funzionali continui su $\mathcal{E}(\Omega)$ che coincidono sul sottoinsieme denso $\mathcal{D}(\Omega)$ devono coincidere ovunque. Pertanto, l'operazione di restrizione è iniettiva e possiamo vedere $\mathcal{E}'(\Omega)$ come un sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Esercizio 3F

Si risolvano separatamente in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ le seguenti equazioni:

$$1) \quad xu' = 1 \qquad \text{e} \qquad 2) \quad (x^3 - 3x + 2)u = 0.$$

Soluzione. 1) Equazione $xu' = 1$.

Poniamo $v = u' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. L'equazione diventa $xv = 1$. Sappiamo che una soluzione particolare di questa equazione algebrica è la distribuzione Valore Principale di $1/x$, denotata con $\mathrm{PV}(1/x)$. Infatti, $x\,\mathrm{PV}(1/x) = 1$ nel senso delle distribuzioni. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata $xv_h = 0$ è data da $v_h = C_1\delta$, dove δ è la delta di Dirac e C_1 una costante arbitraria. Pertanto, la derivata di u ha la forma:

$$u' = \mathrm{PV}\left(\frac{1}{x}\right) + C_1\delta.$$

Per trovare u, dobbiamo trovare una primitiva di ciascun termine.

- Una primitiva di $\mathrm{PV}(1/x)$ è $\ln|x|$. Infatti, $(\ln|x|)' = \mathrm{PV}(1/x)$.
- Una primitiva di δ è la funzione di Heaviside $\Theta(x)$ (definita come 1 per $x > 0$ e 0 per $x < 0$).

Aggiungendo una costante di integrazione arbitraria C_2 (che rappresenta la soluzione dell'equazione $u' = 0$), otteniamo la soluzione generale:

$$u(x) = \ln|x| + C_1\Theta(x) + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Si può anche provare che sia quella la soluzione semplicemente scaricando su una test funzione.

2) Equazione $(x^3 - 3x + 2)u = 0$.

Scomponiamo il polinomio coefficiente $P(x) = x^3 - 3x + 2$. Si nota che $P(1) = 1 - 3 + 2 = 0$. Eseguendo la divisione polinomiale o Ruffini, otteniamo:

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^2(x+2).$$

L'equazione è dunque:

$$(x-1)^2(x+2)u = 0.$$

Una distribuzione u che soddisfa $f(x)u = 0$, con $f \in C^\infty$, deve avere supporto contenuto nell'insieme degli zeri di f, ovvero $Z(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$. In questo caso, $\operatorname{supp}(u) \subseteq \{1, -2\}$.

In base al Teorema di struttura delle distribuzioni con supporto puntuale (cfr. Hörmander o Friedlander), se una distribuzione è annullata da una potenza $(x - x_0)^k$, essa deve essere una combinazione lineare della delta in x_0 e delle sue derivate fino all'ordine $k - 1$.

Possiamo scrivere $u = u_1 + u_2$, dove $\operatorname{supp}(u_1) \subseteq \{1\}$ e $\operatorname{supp}(u_2) \subseteq \{-2\}$. Poiché i supporti sono disgiunti, l'equazione deve valere localmente attorno a ciascun punto.

- **Intorno a $x = 1$:** Il fattore rilevante è $(x-1)^2$. Poiché $(x+2)$ non si annulla in un intorno di 1, possiamo dividere per esso (localmente è una funzione C^∞ invertibile), riducendo l'equazione a $(x-1)^2 u_1 = 0$. La soluzione generale è una combinazione lineare di $\delta(x-1)$ e $\delta'(x-1)$:

$$u_1 = c_0\delta(x-1) + c_1\delta'(x-1).$$

- **Intorno a $x = -2$:** Il fattore rilevante è $(x+2)$ con molteplicità 1. Analogamente, $(x-1)^2$ è invertibile attorno a -2. L'equazione ridotta è $(x+2)u_2 = 0$. La soluzione è proporzionale a $\delta(x+2)$:

$$u_2 = d_0\delta(x+2).$$

Complessivamente, la soluzione generale in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è:

$$u(x) = c_0\delta(x-1) + c_1\delta'(x-1) + d_0\delta(x+2), \quad c_0, c_1, d_0 \in \mathbb{C}.$$

Esercizio 4F

Sia $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si mostri che:

$$\tau_a(u \star v) = (\tau_a u) \star v = u \star (\tau_a v).$$

Soluzione. Basta applicare le definizioni e osservare come agisce la traslazione sull'argomento della funzione test.

Ricordiamo che per definizione $\langle u \star v, \phi\rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi(x+y)\rangle$.

Valutiamo l'azione dei tre termini su una generica $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

1. **Termine $\tau_a(u \star v)$:**

$$\langle \tau_a(u \star v), \phi\rangle = \langle u \star v, \tau_{-a}\phi\rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi(x+y+a)\rangle.$$

2. **Termine $(\tau_a u) \star v$:** Sfruttando la definizione di convoluzione e spostando la traslazione dalla distribuzione alla funzione test:

$$\langle (\tau_a u) \star v, \phi\rangle = \langle (\tau_a u)_x \otimes v_y, \phi(x+y)\rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi((x+a)+y)\rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi(x+y+a)\rangle.$$

3. **Termine $u \star (\tau_a v)$:** Analogamente:

$$\langle u \star (\tau_a v), \phi\rangle = \langle u_x \otimes (\tau_a v)_y, \phi(x+y)\rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi(x+(y+a))\rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi(x+y+a)\rangle.$$

Poiché tutte e tre le espressioni portano allo stesso risultato $\langle u_x \otimes v_y, \phi(x+y+a)\rangle$ per ogni ϕ, l'uguaglianza è dimostrata.

Esercizio 5 (Lemma di Riemann-Lebesgue) F

Si dimostri che se $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora

$$\lim_{|k|\to\infty} \hat{\phi}(k) = 0.$$

(Suggerimento: si parta da $n = 1$ e si consideri la sequenza di funzioni caratteristiche).

Soluzione. Utilizziamo la densità delle funzioni semplici in $L^1(\mathbb{R}^n)$. La dimostrazione si articola in tre passi logici.

Passo 1: Calcolo per una funzione caratteristica in $\mathbb{R}^1$. Sia $n = 1$. Consideriamo la funzione caratteristica di un intervallo limitato $I = [a, b]$, definita come $\chi_I(x) = 1$ se $x \in [a, b]$ e 0 altrimenti. La sua trasformata di Fourier è:

$$\hat{\chi}_I(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_I(x)e^{-ikx}\,dx = \int_a^b e^{-ikx}\,dx.$$

Se $k \neq 0$, integriamo direttamente:

$$\hat{\chi}_I(k) = \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik}\right]_a^b = \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{ik}.$$

Passando al modulo:

$$|\hat{\chi}_I(k)| = \frac{|e^{-ika} - e^{-ikb}|}{|k|} \leq \frac{|e^{-ika}| + |e^{-ikb}|}{|k|} = \frac{2}{|k|}.$$

È evidente che $\lim_{|k|\to\infty} |\hat{\chi}_I(k)| = 0$.

Passo 2: Estensione alle funzioni semplici. Una funzione semplice ψ (a supporto compatto) è definita come una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di intervalli (o rettangoli in $\mathbb{R}^n$). Sia:

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^{M} c_j \chi_{I_j}(x), \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Per la linearità della trasformata di Fourier:

$$\hat{\psi}(k) = \sum_{j=1}^{M} c_j \hat{\chi}_{I_j}(k).$$

Poiché il limite è un operatore lineare e la somma è finita, segue dal Passo 1 che:

$$\lim_{|k|\to\infty} \hat{\psi}(k) = \sum_{j=1}^{M} c_j \lim_{|k|\to\infty} \hat{\chi}_{I_j}(k) = 0.$$

(Nota: In $\mathbb{R}^n$, si considerano rettangoli $R = \prod[a_i, b_i]$. La trasformata è il prodotto delle trasformate monodimensionali. Se $|k| \to \infty$, almeno una componente $|k_j| \to \infty$, portando a zero l'intero prodotto).

Passo 3: Approssimazione per densità in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Sia ora $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Poiché le funzioni semplici sono dense in $L^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste una funzione semplice ψ_ϵ tale che:

$$\|\phi - \psi_\epsilon\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ricordiamo la stima fondamentale per la trasformata di Fourier ($L^1 \to L^\infty$):

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}.$$

Valutiamo ora $|\hat{\phi}(k)|$ utilizzando la disuguaglianza triangolare:

$$|\hat{\phi}(k)| = |\hat{\phi}(k) - \hat{\psi}_\epsilon(k) + \hat{\psi}_\epsilon(k)| \leq |\widehat{\phi - \psi_\epsilon}(k)| + |\hat{\psi}_\epsilon(k)|.$$

Il primo termine è maggiorato dalla norma L^1 della differenza:

$$|\widehat{\phi - \psi_\epsilon}(k)| \leq \|\phi - \psi_\epsilon\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dunque abbiamo:

$$|\hat{\phi}(k)| < \frac{\epsilon}{2} + |\hat{\psi}_\epsilon(k)|.$$

Poiché ψ_ϵ è una funzione semplice, per il risultato del Passo 2 sappiamo che $\hat{\psi}_\epsilon(k) \to 0$. Esiste quindi un $R > 0$ tale che per ogni $|k| > R$ si ha $|\hat{\psi}_\epsilon(k)| < \frac{\epsilon}{2}$.

In conclusione, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $R > 0$ tale che per $|k| > R$:

$$|\hat{\phi}(k)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Questo dimostra che $\lim_{|k|\to\infty} \hat{\phi}(k) = 0$.

Esercizio 1

Sia $\Box = -\partial_t^2 + \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2$ l'operatore d'onda su $\mathbb{R}^4$. Si stabilisca se esistono dei valori di $\kappa \in \mathbb{C}$ per cui

$$G^- = \kappa \Theta(t) \delta(t^2 - |x|^2)$$

è soluzione fondamentale per $\Box$.

Soluzione. Consideriamo l'espressione formale $\delta(t^2 - |x|^2)$. Per definire rigorosamente questa distribuzione, osserviamo l'argomento della delta come funzione della variabile radiale $r = |x|$. Poniamo $g(r) = t^2 - r^2$. Poiché il supporto di G^- è limitato a $t > 0$ e operiamo con coordinate radiali $r \geq 0$, l'unica radice rilevante di $g(r) = 0$ è $r = t$. Fattorizzando l'argomento abbiamo $t^2 - r^2 = (t + r)(t - r)$. Nell'intorno della radice $r = t$, il fattore $(t + r)$ è strettamente positivo e pari a $2t$ (o equivalentemente $2r$ sul supporto). Utilizzando la proprietà di scalamento della delta $\delta(hy) = \frac{1}{|h|}\delta(y)$, otteniamo la decomposizione radiale:

$$\delta(t^2 - |x|^2) = \frac{\delta(t - r)}{t + r} = \frac{\delta(t - r)}{2r}.$$

Possiamo quindi scrivere l'azione di G^- su una funzione test $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^4)$ come un integrale su $\mathbb{R}^3$ dove la variabile temporale è vincolata a $|x|$:

$$\langle G^-, \phi \rangle = \frac{\kappa}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|} \phi(|x|, x)\, dx.$$

Coordinate sferiche e funzione ausiliaria. Per calcolare l'azione del D'Alembertiano, è conveniente passare a coordinate polari sferiche per la parte spaziale. Introduciamo la **media sferica** della funzione test, definita come:

$$\tilde{\phi}(t, r) := \int_{S^2} \phi(t, y_r)\, d\sigma,$$

dove l'integrale è calcolato sulla superficie della sfera unitaria S^2 e y_r indica il punto sulla sfera di raggio r. Introduciamo inoltre la funzione ausiliaria pesata:

$$\Psi(t, r) := r\, \tilde{\phi}(t, r).$$

Sfruttando la decomposizione della misura di Lebesgue $dx = r^2 dr\, d\sigma$, l'azione della distribuzione diventa un funzionale univariato nella variabile radiale:

$$\langle G^-, \phi \rangle = \frac{\kappa}{2} \int_0^{+\infty} dr\, r^2 \frac{1}{r} \tilde{\phi}(r, r) = \frac{\kappa}{2} \int_0^{+\infty} \Psi(r, r)\, dr.$$

Applicazione dell'operatore d'onda. Per verificare la condizione di soluzione fondamentale, calcoliamo $\langle \Box G^-, \phi \rangle = \langle G^-, \Box \phi \rangle$. In coordinate sferiche, il Laplaciano in $\mathbb{R}^3$ si decompone in una parte radiale e una angolare:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2},$$

dove Δ_{S^2} è l'operatore di Laplace-Beltrami sulla sfera unitaria (che contiene solo derivate rispetto agli angoli θ, φ).

Consideriamo ora la media sferica della funzione $\Delta\phi$:

$$\widetilde{(\Delta\phi)}(t,r) = \int_{S^2} \left(\partial_r^2 \phi + \frac{2}{r}\partial_r \phi + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}\phi \right) d\sigma.$$

Poiché l'integrazione avviene solo sulle variabili angolari, le derivate radiali ∂_r possono essere portate fuori dall'integrale. Il termine cruciale è l'integrale del Laplaciano angolare:

$$\int_{S^2} \Delta_{S^2}\phi \, d\sigma = 0.$$

Questo integrale è nullo per il teorema della divergenza sulla varietà chiusa senza bordo S^2 (o equivalentemente perché le armoniche sferiche di grado zero sono costanti, e l'integrale di Δ_{S^2} contro una costante è nullo).

Di conseguenza, la media sferica del D'Alembertiano agisce solo tramite la parte radiale e temporale:

$$\widetilde{(\Box\phi)}(t,r) = \left(-\partial_t^2 + \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r \right) \tilde{\phi}(t,r).$$

Per semplificare ulteriormente, utilizziamo l'identità operatoriale valida per funzioni radiali:

$$\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r \right) f(r) = \frac{1}{r}\partial_r^2 \big(r f(r) \big).$$

Moltiplicando l'espressione della media per r per passare alla funzione ausiliaria $\Psi(t,r) = r\tilde{\phi}(t,r)$, otteniamo:

$$r\,\widetilde{(\Box\phi)}(t,r) = -r\partial_t^2\tilde{\phi} + \frac{1}{r}\partial_r^2(r\tilde{\phi}) \cdot r = (-\partial_t^2 + \partial_r^2)\Psi(t,r).$$

Questo passaggio è chiave: riduce l'operatore d'onda radiale in 3D (che ha il termine $2/r$) all'operatore d'onda 1D standard (senza termini del primo ordine) applicato alla funzione pesata Ψ. Sostituendo questo risultato nell'integrale di definizione di G^-:

$$\langle G^-, \Box\phi \rangle = \frac{\kappa}{2} \int_0^{+\infty} \left[(\partial_r^2 - \partial_t^2)\Psi(t,r) \right]_{t=r} dr.$$

Riduzione a derivata totale. Sfruttiamo la fattorizzazione dell'operatore d'onda unidimensionale $(\partial_r^2 - \partial_t^2) = (\partial_r + \partial_t)(\partial_r - \partial_t)$. Osserviamo che la derivata totale rispetto a r valutata lungo la caratteristica $t = r$ è data da $\frac{d}{dr} = \partial_r + \partial_t$. Pertanto, l'integrando è una derivata totale esatta:

$$[(\partial_r + \partial_t)(\partial_r - \partial_t)\Psi(t,r)]_{t=r} = \frac{d}{dr} [(\partial_r\Psi - \partial_t\Psi)(t,r)]_{t=r}.$$

L'azione diventa:

$$\langle \Box G^-, \phi \rangle = \frac{\kappa}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dr} \left((\partial_r\Psi - \partial_t\Psi)(r,r) \right) dr.$$

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo, il valore dell'integrale è la differenza della funzione valutata agli estremi.

1. Per $r \to +\infty$: ϕ è a supporto compatto, quindi Ψ e le sue derivate sono nulle.

2. Per $r \to 0$: dobbiamo valutare il limite $L = \lim_{r\to 0} -\frac{\kappa}{2}(\partial_r\Psi - \partial_t\Psi)(r,r)$.

Valutazione al bordo $r = 0$. Ricordando che $\Psi(t,r) = r\tilde{\phi}(t,r)$, calcoliamo le derivate:

$$\partial_t \Psi = r\partial_t \tilde{\phi} \xrightarrow{r\to 0} 0,$$

$$\partial_r \Psi = \tilde{\phi} + r\partial_r \tilde{\phi} \xrightarrow{r\to 0} \tilde{\phi}(0,0).$$

La media sferica nell'origine coincide con il valore della funzione nel punto, moltiplicato per l'area della sfera unitaria:

$$\tilde{\phi}(0,0) = \int_{S^2} \phi(0,0)\, d\sigma = 4\pi\phi(0,0).$$

Quindi il termine di bordo vale:

$$-\frac{\kappa}{2}(4\pi\phi(0,0)) = -2\pi\kappa\phi(0,0) = -2\pi\kappa\langle\delta,\phi\rangle.$$

Imponendo la condizione $\Box G^- = \delta$, otteniamo l'equazione $-2\pi\kappa = 1$, da cui il valore cercato:

$$\kappa = -\frac{1}{2\pi}.$$

Esercizio 2

Detti H_n i polinomi di Hermite e sapendo che vale la formula di Mehler:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\rho^n}{2^n n!} H_n(x)H_n(y)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(\frac{4xy\rho - (1+\rho^2)(x^2+y^2)}{2(1-\rho^2)}\right),$$

si mostri che la funzione

$$K(x,y,t) = \frac{\Theta(t)}{\sqrt{2\pi i \sin(2t)}} \exp\left(-i\cot(2t)\frac{x^2+y^2}{2} + i\frac{xy}{\sin(2t)}\right)$$

è soluzione fondamentale dell'equazione di Schrödinger dell'oscillatore armonico $L = i\partial_t + \partial_x^2 - x^2$.

Soluzione. Per dimostrare che $K(x,y,t)$ è soluzione fondamentale, dobbiamo verificare l'azione dell'operatore L sulla distribuzione K. Procediamo identificando la struttura in serie di autofunzioni della parte regolare di K, per poi calcolare la derivata distribuzionale.

Identificazione spettrale del nucleo. Consideriamo le autofunzioni dell'oscillatore armonico (normalizzate in $L^2(\mathbb{R})$):

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}},$$

relative agli autovalori $\lambda_n = 2n+1$ dell'operatore Hamiltoniano $H = -\partial_x^2 + x^2$ (nota: l'operatore nel testo è $L = i\partial_t - H$).

Analizziamo la parte regolare di K per $t > 0$. Poniamo nel parametro della formula di Mehler $\rho = e^{-2it}$. Osserviamo preliminarmente che con tale sostituzione il prefattore diventa:

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^{-4it}}} = \frac{1}{\sqrt{e^{-2it}(e^{2it}-e^{-2it})}} = \frac{e^{it}}{\sqrt{2i\sin(2t)}}.$$

Sostituendo $\rho = e^{-2it}$ nella formula di Mehler e moltiplicando entrambi i membri per $\frac{e^{-it}}{\sqrt{\pi}}$, il lato sinistro diventa:

$$\sum_{n\geq 0} e^{-it}\frac{(e^{-2it})^n}{\sqrt{\pi}2^n n!} H_n(x)H_n(y)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \sum_{n\geq 0} e^{-i(2n+1)t}\psi_n(x)\psi_n(y).$$

Il lato destro, con semplici manipolazioni algebriche sull'esponente, riproduce esattamente la funzione esponenziale definita in $K(x,y,t)$ (divisa per $\sqrt{\pi}$, che si elide col fattore $\sqrt{\pi}$ introdotto al denominatore del nucleo). Possiamo quindi scrivere la distribuzione K nella forma spettrale:

$$K(x,y,t) = \Theta(t)\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-iE_n t}\psi_n(x)\psi_n(y), \quad \text{con } E_n = 2n+1.$$

Calcolo della derivata distribuzionale. Applichiamo l'operatore $L = i\partial_t + \partial_x^2 - x^2$ alla distribuzione K. Osserviamo che l'operatore spaziale agisce solo sulla serie. Poiché ψ_n è autofunzione di $-\partial_x^2 + x^2$ con autovalore E_n, si ha:

$$(\partial_x^2 - x^2)\psi_n(x) = -E_n\psi_n(x).$$

Per la regola di Leibniz sulla derivata del prodotto con la funzione di Heaviside ($\partial_t\Theta(t) = \delta(t)$), la derivata temporale vale:

$$\partial_t K = \delta(t)\sum_{n=0}^{+\infty}\psi_n(x)\psi_n(y) + \Theta(t)\sum_{n=0}^{+\infty}(-iE_n)e^{-iE_nt}\psi_n(x)\psi_n(y).$$

Valutazione dell'operatore completo. Sommando i contributi:

$$\begin{aligned} LK = i&\left(\delta(t)\sum_n \psi_n(x)\psi_n(y) + \Theta(t)\sum_n(-iE_n)e^{-iE_nt}\psi_n\psi_n\right) \\ &+ \Theta(t)\sum_n e^{-iE_nt}(-E_n)\psi_n(x)\psi_n(y). \end{aligned}$$

Analizziamo i termini per $t > 0$ (proporzionali a $\Theta(t)$):

$$\Theta(t)\sum_n [i(-iE_n) - E_n]\, e^{-iE_nt}\psi_n(x)\psi_n(y) = \Theta(t)\sum_n(E_n - E_n)(\dots) = 0.$$

La distribuzione è dunque supportata nel solo istante $t = 0$. Rimane il termine singolare:

$$LK = i\delta(t)\sum_{n=0}^{+\infty}\psi_n(x)\psi_n(y).$$

Riconosciamo nella sommatoria la **relazione di completezza** (risoluzione dell'identità) per la base ortonormale di Hermite in $L^2(\mathbb{R})$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\psi_n(x)\psi_n(y) = \delta(x - y).$$

Pertanto, nel senso delle distribuzioni:

$$LK(x, y, t) = i\delta(t)\delta(x - y).$$

Osservazione. A meno del fattore moltiplicativo i (che dipende dalla convenzione di normalizzazione dell'operatore o della funzione di Green), abbiamo mostrato che LK è una delta di Dirac nello spaziotempo, verificando che K è la soluzione fondamentale (propagatore ritardato) dell'equazione data.

Esercizio 3

Si calcoli il seguente limite in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\ln(x - i\epsilon)}{x - i\epsilon}.$$

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che l'espressione all'interno del limite può essere riscritta come la derivata complessa di una funzione più regolare. Nello specifico:

$$\frac{\ln(x - i\epsilon)}{x - i\epsilon} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln^2(x - i\epsilon)\right).$$

Sia $T_\epsilon \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribuzione regolare associata alla funzione $f_\epsilon(x) = \frac{\ln(x-i\epsilon)}{x-i\epsilon}$. Vogliamo calcolare il limite $T = \lim_{\epsilon\to 0^+} T_\epsilon$ nella topologia debole-* di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Per ogni funzione test $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \langle T_\epsilon, \phi\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln^2(x - i\epsilon)\right)\phi(x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln^2(x - i\epsilon)\phi'(x)\,dx, \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo integrato per parti scaricando la derivata sulla funzione test (i termini di bordo si annullano poiché ϕ ha supporto compatto).

Passaggio al limite puntuale. Studiamo il limite puntuale della funzione $g_\epsilon(x) = \ln^2(x - i\epsilon)$ per $\epsilon \to 0^+$. Utilizziamo la determinazione principale del logaritmo con taglio lungo il semiasse reale negativo. Poiché $\epsilon > 0$, il numero complesso $z = x - i\epsilon$ si trova nel semipiano inferiore.

- Per $x > 0$: $\lim_{\epsilon\to 0^+}(x - i\epsilon) = x$. L'argomento è nullo, quindi $\ln(x - i\epsilon) \to \ln(x)$.
- Per $x < 0$: $\lim_{\epsilon\to 0^+}(x - i\epsilon) = x$. L'argomento tende a $-\pi$ (avvicinandosi al taglio da sotto). Quindi $\ln(x - i\epsilon) \to \ln|x| - i\pi$.

Ne segue che, puntualmente quasi ovunque:

$$g(x) := \lim_{\epsilon\to 0^+} \ln^2(x - i\epsilon) = \begin{cases} \ln^2(x) & x > 0 \\ (\ln|x| - i\pi)^2 = \ln^2|x| - \pi^2 - 2i\pi \ln|x| & x < 0. \end{cases}$$

Giustificazione dello scambio limite-integrale. Per applicare il Teorema della Convergenza Dominata di Lebesgue all'integrale parametrico

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2(x - i\epsilon)\phi'(x)\, dx,$$

dobbiamo determinare una funzione dominante $G \in L^1(\mathbb{R})$ tale che, per ogni $\epsilon \in (0, 1)$, valga la maggiorazione:

$$\left|\ln^2(x - i\epsilon)\phi'(x)\right| \le G(x) \quad \text{per quasi ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Sia $K = \operatorname{supp}(\phi)$ il supporto compatto della funzione test e sia $R > 0$ tale che $K \subset [-R, R]$. Sia inoltre $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi'(x)|$.

Consideriamo il modulo del termine logaritmico. Ricordando che $\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)$, si ha:

$$|\ln(x - i\epsilon)| \le |\ln|x - i\epsilon|| + |\arg(x - i\epsilon)|.$$

Poiché $x - i\epsilon$ giace nel semipiano inferiore, l'argomento è limitato da π. Il modulo è $\sqrt{x^2 + \epsilon^2}$. Dunque:

$$|\ln(x - i\epsilon)| \le \left|\frac{1}{2}\ln\big(x^2 + \epsilon^2\big)\right| + \pi.$$

Per costruire la dominante, analizziamo il termine $L_\epsilon(x) := \frac{1}{2}\ln\big(x^2 + \epsilon^2\big)$ distinguendo due casi per $x \in K$:

1. **Regione dove l'argomento è grande ($x^2 + \epsilon^2 \ge 1$):**
   In questo caso $L_\epsilon(x) \ge 0$. Poiché $x \in [-R, R]$ e $\epsilon < 1$, abbiamo $x^2 + \epsilon^2 \le R^2 + 1$. Dunque:
   $$|L_\epsilon(x)| = L_\epsilon(x) \le \frac{1}{2}\ln\big(R^2 + 1\big).$$
   Il termine è limitato da una costante C_1.
2. **Regione dove l'argomento è piccolo ($x^2 + \epsilon^2 < 1$):**
   In questo caso $0 < x^2 + \epsilon^2 < 1$, quindi il logaritmo è negativo: $L_\epsilon(x) < 0$. Sfruttando la monotonia del logaritmo, poiché $x^2 \le x^2 + \epsilon^2$, vale:
   $$\ln\big(x^2\big) \le \ln\big(x^2 + \epsilon^2\big) < 0.$$
   Passando ai valori assoluti (che inverte la disuguaglianza per numeri negativi), otteniamo:
   $$|L_\epsilon(x)| = -\frac{1}{2}\ln\big(x^2 + \epsilon^2\big) \le -\frac{1}{2}\ln\big(x^2\big) = |\ln|x||.$$

Unendo i due casi, per ogni $x \in K$ e $\epsilon \in (0, 1)$, vale la maggiorazione uniforme:

$$|\ln(x - i\epsilon)| \le |\ln|x|| + C,$$

dove $C = \frac{1}{2}\ln\big(R^2 + 1\big) + \pi$. Elevando al quadrato (usando $(a + b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$):

$$|\ln^2(x - i\epsilon)| \le 2\ln^2|x| + 2C^2.$$

Possiamo quindi definire la funzione dominante come:

$$G(x) = M \cdot \big(2\ln^2|x| + 2C^2\big) \cdot \chi_K(x),$$

dove χ_K è la funzione caratteristica del supporto di ϕ. Poiché la singolarità logaritmica è integrabile attorno allo zero ($\int_0^1 \ln^2 x\, dx < \infty$), si ha $G \in L^1(\mathbb{R})$. Le ipotesi del Teorema della Convergenza Dominata sono soddisfatte.

Calcolo della distribuzione limite. Possiamo ora portare il limite sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned}\langle T, \phi\rangle &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\phi'(x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0}(\ln^2|x| - \pi^2 - 2i\pi\ln|x|)\phi'(x)\,dx + \int_0^{+\infty}\ln^2 x\,\phi'(x)\,dx\right].\end{aligned}$$

Raggruppiamo i termini per analizzarli separatamente:

$$\langle T, \phi\rangle = \underbrace{-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\ln^2|x|\phi'(x)\,dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{\pi^2}{2}\int_{-\infty}^{0}\phi'(x)\,dx}_{I_2} + \underbrace{i\pi\int_{-\infty}^{0}\ln|x|\phi'(x)\,dx}_{I_3}.$$

Analisi di I_1: Riconosciamo la derivata distribuzionale della funzione localmente integrabile $\ln^2|x|$:

$$I_1 = \left\langle \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\ln^2|x|), \phi\right\rangle.$$

Calcolando la derivata nel senso delle distribuzioni, si ha $\frac{d}{dx}(\ln^2|x|) = 2\frac{\ln|x|}{x}$. Poiché $\frac{\ln|x|}{x}$ non è in L^1_{loc} attorno all'origine ma è dispari, la sua regolarizzazione canonica è il valore principale:

$$I_1 = \left\langle \mathrm{PV}\left(\frac{\ln|x|}{x}\right), \phi\right\rangle.$$

Analisi di I_2: L'integrale è immediato:

$$I_2 = \frac{\pi^2}{2}\Big[\phi(x)\Big]_{-\infty}^{0} = \frac{\pi^2}{2}(\phi(0) - 0) = \left\langle \frac{\pi^2}{2}\delta, \phi\right\rangle.$$

Analisi di I_3: Consideriamo la distribuzione $S = \Theta(-x)\ln|x|$. La sua derivata distribuzionale agisce come:

$$\langle S', \phi\rangle = -\langle S, \phi'\rangle = -\int_{-\infty}^{0}\ln|x|\phi'(x)\,dx.$$

Il nostro integrale I_3 è esattamente $-i\pi\langle S', \phi\rangle$. La derivata S' corrisponde, a meno del segno, alla parte finita di $1/|x|$ sul semiasse negativo, indicata spesso con $\mathrm{Pf}(x_-^{-1})$. Formalmente, manteniamo la notazione derivata per rigore:

$$I_3 = \left\langle -i\pi\frac{d}{dx}\big(\Theta(-x)\ln|x|\big), \phi\right\rangle = \left\langle i\pi\,\mathrm{Pf}(x_-^{-1}), \phi\right\rangle.$$

Conclusione. Sommando i contributi I_1, I_2, I_3, il limite distribuzionale cercato è:

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\frac{\ln(x - i\epsilon)}{x - i\epsilon} = \mathrm{PV}\left(\frac{\ln|x|}{x}\right) + \frac{\pi^2}{2}\delta + i\pi\,\mathrm{Pf}(x_-^{-1}).$$

Esercizio 4

Sia $C^\infty_\alpha(\mathbb{R}^+) \doteq \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \mid f(0) + \alpha f'(0) = 0\}$ con $\mathbb{R}^+ \doteq [0,\infty)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Detto $C^\infty_D(\mathbb{R}^+) \doteq \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \mid f(0) = 0\}$, sia

$$T : C^\infty_\alpha(\mathbb{R}^+) \to C^\infty_D(\mathbb{R}^+), \quad f \mapsto T(f) \doteq h = f + \alpha\frac{df}{dx}.$$

Si discuta se la restrizione di T a $C^\infty_\alpha(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$ è invertibile e, nel caso, si esibisca l'inversa.

Soluzione. Definiamo lo spazio di partenza (dominio ristretto) come $\mathcal{D}_\alpha \doteq C^\infty_\alpha(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$ e osserviamo che l'immagine sarà contenuta in uno spazio di funzioni a supporto compatto. Studiamo l'equazione $T(f) = h$ per $h \in C^\infty_D(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$.

Distinguiamo due casi in base al valore del parametro α.

Caso $\alpha = 0$. In questo caso, la definizione degli spazi e dell'operatore si semplifica:

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^+) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \mid f(0) = 0\} = C_D^\infty(\mathbb{R}^+).$$

L'operatore diventa l'identità $T(f) = f$. La restrizione è quindi banalmente invertibile e $T^{-1} = I$.

Caso $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del primo ordine:

$$f(x) + \alpha f'(x) = h(x) \iff f'(x) + \frac{1}{\alpha} f(x) = \frac{1}{\alpha} h(x).$$

1. Iniettività. Sia $h \equiv 0$. L'equazione omogenea associata è $f' + \frac{1}{\alpha} f = 0$, la cui soluzione generale è:

$$f(x) = ce^{-x/\alpha}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Poiché stiamo cercando soluzioni in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$ (a supporto compatto), deve esistere un $K > 0$ tale che $f(x) = 0$ per ogni $x > K$. Dato che la funzione esponenziale non si annulla mai, l'unica possibilità è che la costante c sia nulla. Dunque $f \equiv 0$, il che implica $\ker(T|_{\mathcal{D}_\alpha}) = \{0\}$. L'operatore è iniettivo.

2. Suriettività e calcolo dell'inversa. Per $h \in C_D^\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$, risolviamo l'equazione non omogenea utilizzando il fattore integrante $e^{x/\alpha}$:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)e^{x/\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} h(x) e^{x/\alpha}.$$

Integrando su $[0, x]$:

$$f(x)e^{x/\alpha} - f(0) = \frac{1}{\alpha}\int_0^x h(t)e^{t/\alpha}\,\mathrm{d}t \implies f(x) = e^{-x/\alpha}\left(f(0) + \frac{1}{\alpha}\int_0^x h(t)e^{t/\alpha}\,\mathrm{d}t\right).$$

Dobbiamo determinare $f(0)$ affinché f abbia supporto compatto. Sia $K > 0$ tale che $\operatorname{supp}(h) \subset [0, K]$. Per $x > K$, $h(x) = 0$ e l'integrale diventa costante ($\int_0^x = \int_0^\infty$). Per $x > K$ si ha:

$$f(x) = e^{-x/\alpha}\left(f(0) + \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty h(t)e^{t/\alpha}\,\mathrm{d}t\right).$$

Affinché $f(x)$ si annulli per x grandi (condizione necessaria per appartenere a $\mathcal{E}'$), il termine in parentesi deve essere nullo. Questo vincola univocamente il valore iniziale:

$$f(0) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty h(t)e^{t/\alpha}\,\mathrm{d}t\,.$$

Sostituendo questo valore nell'espressione di $f(x)$ e usando la proprietà $\int_0^x - \int_0^\infty = -\int_x^\infty$, otteniamo l'espressione dell'inversa:

$$f(x) = -\frac{1}{\alpha}e^{-x/\alpha}\int_x^\infty h(t)e^{t/\alpha}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\alpha}\int_x^\infty h(t)e^{(t-x)/\alpha}\,\mathrm{d}t\,.$$

Verifica delle condizioni al bordo. Dobbiamo infine verificare che la funzione trovata appartenga al dominio, ovvero che soddisfi $f(0)+\alpha f'(0) = 0$. Dall'equazione differenziale sappiamo che $f(x)+\alpha f'(x) = h(x)$. Valutando in $x = 0$:

$$f(0) + \alpha f'(0) = h(0).$$

Poiché $h \in C_D^\infty(\mathbb{R}^+)$, per definizione $h(0) = 0$. Pertanto la condizione $f(0) + \alpha f'(0) = 0$ è soddisfatta.

Conclusione. La restrizione è invertibile e l'operatore inverso $T^{-1} : C_D^\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+) \to C_\alpha^\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$ è dato da:

$$T^{-1}(h)(x) = -\frac{1}{\alpha}\int_x^\infty e^{\frac{t-x}{\alpha}} h(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Esercizio 5

Si consideri per ogni funzione $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ la funzione

$$H_f(t) \doteq \frac{1}{\pi} \,\mathrm{PV} \int_{\mathbb{R}} d\tau \frac{f(\tau)}{t-\tau},$$

dove PV è il valor principale di Cauchy. Si mostri che $H_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e che H_f è estendibile ad un operatore limitato su $L^2(\mathbb{R})$.

Soluzione. L'integrale definito nel testo corrisponde alla convoluzione tra la funzione test f e la distribuzione temperata $T = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{PV}\left(\frac{1}{t}\right)$. Possiamo quindi scrivere:

$$H_f = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{PV}\left(\frac{1}{\cdot}\right) * f.$$

Per analizzare le proprietà di H_f, passiamo allo spazio delle frequenze utilizzando la trasformata di Fourier. Ricordiamo che la trasformata di Fourier trasforma la convoluzione in un prodotto.

1. Calcolo del moltiplicatore di Fourier (non dovuto perchè fatto in classe) Determiniamo innanzitutto la trasformata di Fourier della distribuzione T. Consideriamo la funzione segno, $\mathrm{sgn}(t)$, la quale è una distribuzione temperata. La sua derivata nel senso delle distribuzioni è:

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{sgn}(t) = 2\delta(t).$$

Applicando la trasformata di Fourier $\mathcal{F}$ ad ambo i membri e usando la proprietà $\mathcal{F}[u'](\xi) = i\xi\widehat{u}(\xi)$, otteniamo:

$$i\xi\widehat{\mathrm{sgn}}(\xi) = 2.$$

La soluzione di questa equazione nell'algebra delle distribuzioni, considerando che sgn è una funzione dispari (e quindi la sua trasformata deve essere dispari, escludendo termini proporzionali a $\delta(\xi)$), è:

$$\widehat{\mathrm{sgn}}(\xi) = \frac{2}{i}\,\mathrm{PV}\left(\frac{1}{\xi}\right).$$

Per le proprietà di dualità e simmetria della trasformata di Fourier, si ricava la trasformata del valor principale:

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{PV}\left(\frac{1}{t}\right)\right](\xi) = -i\pi\,\mathrm{sgn}(\xi).$$

2. Appartenenza a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e limitatezza su $L^2(\mathbb{R})$. Tornando al nostro operatore H_f, la trasformata di Fourier è data da:

$$\widehat{H_f}(\xi) = \frac{1}{\pi}\underbrace{\mathcal{F}\left[\mathrm{PV}\left(\frac{1}{t}\right)\right](\xi)}_{-i\pi\,\mathrm{sgn}(\xi)}\cdot\widehat{f}(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi).$$

Osserviamo che:

- Poiché $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, allora $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e di conseguenza $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- La funzione $m(\xi) = -i\,\mathrm{sgn}(\xi)$ è limitata ($|m(\xi)| = 1$ quasi ovunque).

Il prodotto di una funzione limitata per una funzione di Schwartz appartiene a $L^2(\mathbb{R})$. Poiché $L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, ne segue che $\widehat{H_f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e, per isomorfismo della trasformata di Fourier su $\mathcal{S}'$, anche $H_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Per mostrare la limitatezza su $L^2(\mathbb{R})$, calcoliamo la norma L^2 usando il teorema di Plancherel (che afferma l'isometria della trasformata di Fourier, a meno di costanti di normalizzazione che qui assumiamo unitarie per semplicità notazionale, o coerenti con la definizione):

$$\|H_f\|_{L^2} = \left\|\widehat{H_f}\right\|_{L^2} = \left\|-i\,\mathrm{sgn}(\cdot)\widehat{f}\right\|_{L^2}.$$

Poiché $|-i\,\mathrm{sgn}(\xi)| = 1$ per quasi ogni $\xi \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\int_{\mathbb{R}} \left|-i\,\mathrm{sgn}(\xi)\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2.$$

Dunque $\|H_f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. L'operatore conserva la norma (è un'isometria su L^2) ed è quindi limitato con norma operatoriale pari a 1.

Esercizio 6

Per ogni $s \in \mathbb{R}$ sia $H^s(\mathbb{R}^n) \doteq \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \langle k \rangle^s \widehat{u}(k) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$, $n \geq 1$, dove $\langle k \rangle$ è la parentesi giapponese di k. Si mostri se, dato $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ con $\widehat{u} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, allora, detto Δ l'operatore laplaciano su $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta u \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n).$$

Soluzione. Preliminarmente, fissiamo la definizione standard (cfr. Friedlander-Joshi) per la *parentesi giapponese* e per la norma di Sobolev, al fine di garantire la coerenza dimensionale tra l'ordine di derivazione e l'indice dello spazio. Poniamo $\langle k \rangle := (1 + |k|^2)^{1/2}$. Di conseguenza, la condizione di appartenenza a $H^s(\mathbb{R}^n)$ è data dalla finitezza della seguente norma:

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^s |\widehat{u}(k)|^2 \, \mathrm{d}k < \infty.$$

Ricordiamo inoltre che, nello spazio di Fourier, l'azione del Laplaciano corrisponde alla moltiplicazione per $-|k|^2$, ovvero $\widehat{\Delta u}(k) = -|k|^2 \widehat{u}(k)$.

L'esercizio richiede di verificare la validità della doppia implicazione.

Implicazione $\Longleftarrow$ ($u \in H^{s+2} \implies \Delta u \in H^s$): Assumiamo che $\|u\|_{H^{s+2}} < \infty$. Dobbiamo stimare la norma H^s di Δu:

$$\|\Delta u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^s \left| -|k|^2 \widehat{u}(k) \right|^2 \mathrm{d}k = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^s |k|^4 |\widehat{u}(k)|^2 \, \mathrm{d}k\,.$$

Poiché vale la disuguaglianza banale $|k|^2 < 1 + |k|^2$, abbiamo $|k|^4 < (1 + |k|^2)^2$. Sostituendo nell'integrale:

$$\|\Delta u\|_{H^s}^2 < \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^s (1 + |k|^2)^2 |\widehat{u}(k)|^2 \, \mathrm{d}k = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^{s+2} |\widehat{u}(k)|^2 \, \mathrm{d}k = \|u\|_{H^{s+2}}^2.$$

Essendo il termine a destra finito per ipotesi, concludiamo che $\Delta u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Implicazione $\implies$ ($\Delta u \in H^s \implies u \in H^{s+2}$): Assumiamo $\Delta u \in H^s$. Dobbiamo mostrare che l'integrale

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^{s+2} |\widehat{u}(k)|^2 \, \mathrm{d}k$$

è finito. Spezziamo l'integrale in due regioni: la palla unitaria $B = \{k \in \mathbb{R}^n : |k| \leq 1\}$ (basse frequenze) e il suo complemento B^c (alte frequenze).

$$I = \underbrace{\int_B (1 + |k|^2)^{s+2} |\widehat{u}(k)|^2 \, \mathrm{d}k}_{I_1} + \underbrace{\int_{B^c} (1 + |k|^2)^{s+2} |\widehat{u}(k)|^2 \, \mathrm{d}k}_{I_2}.$$

- **Analisi di I_1 :** Sull'insieme compatto B, la funzione peso $(1 + |k|^2)^{s+2}$ è continua e limitata (maggiorata da 2^{s+2}). Poiché per ipotesi $\widehat{u} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, l'integrale di $|\widehat{u}|^2$ su un compatto è finito. Dunque $I_1 < \infty$.
- **Analisi di I_2 :** Nella regione $|k| > 1$, vale la stima $1 < |k|^2$, da cui segue $1 + |k|^2 < 2|k|^2$. Possiamo quindi maggiorare il peso:

  $$(1 + |k|^2)^{s+2} = (1 + |k|^2)^s (1 + |k|^2)^2 \leq (1 + |k|^2)^s (2|k|^2)^2 = 4(1 + |k|^2)^s |k|^4.$$

  Inserendo questa stima in I_2:

  $$I_2 \leq 4 \int_{B^c} (1 + |k|^2)^s |k|^4 |\widehat{u}(k)|^2 \, \mathrm{d}k = 4 \int_{B^c} (1 + |k|^2)^s \left| \widehat{\Delta u}(k) \right|^2 \mathrm{d}k\,.$$

  L'ultimo integrale è maggiorato da $4\|\Delta u\|_{H^s}^2$, che è finito per ipotesi.

Poiché $I = I_1 + I_2 < \infty$, concludiamo che $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$.

L'equivalenza è dunque **dimostrata**.

Osservazione. È fondamentale notare che la definizione standard $\langle k \rangle = (1+|k|^2)^{1/2}$ è necessaria affinché l'enunciato sia vero. Se avessimo interpretato letteralmente il testo (omettendo l'esponente frazionario nella definizione della parentesi giapponese, i.e., ponendo $\langle k \rangle_{alt} = 1 + |k|^2$), l'implicazione $\Longrightarrow$ sarebbe risultata **falsa**.

Infatti, con tale definizione alternativa, la condizione $\Delta u \in H^s$ controllerebbe il comportamento asintotico di $|\widehat{u}|^2$ con un peso $\sim |k|^{4s+4}$, mentre l'appartenenza a H^{s+2} richiederebbe un controllo con peso $\sim |k|^{4(s+2)} = |k|^{4s+8}$. Il divario di fattore $|k|^4$ permetterebbe di costruire controesempi (ad esempio in dimensione $n = 1$ con $s = 0$, la funzione $\widehat{u}(k) = \chi_{\{|k|>1\}}|k|^{-3}$ renderebbe vera l'ipotesi ma falsa la tesi).

Esercizio 7

Si consideri un punto $y \in \mathbb{R}^3$ e sia $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione tale che

$$v_j(x) = \frac{x_j - y_j}{\|x - y\|^3}, \quad j = 1, 2, 3$$

dove il pedice j indica la componente del vettore lungo una delle tre direzioni cartesiane, mentre $\|\cdot\|$ rappresenta la norma euclidea su $\mathbb{R}^3$. Si mostri che

$$\mathrm{div}(v) = 4\pi\delta_y.$$

Soluzione. Il campo vettoriale $v(x)$ presenta una singolarità in $x = y$. Procediamo in due passi: prima calcoliamo la divergenza classica per $x \neq y$, poi calcoliamo la divergenza distribuzionale.

1. Calcolo puntuale per $x \neq y$ Poniamo $r = \|x - y\|$. Il campo può essere scritto in notazione vettoriale come:

$$v(x) = \frac{x - y}{r^3}.$$

Calcoliamo la divergenza classica $\nabla \cdot v$. Utilizzando la regola di derivazione del prodotto $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = \nabla f \cdot \mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{A})$ con $f = r^{-3}$ e $\mathbf{A} = (x - y)$, otteniamo:

$$\nabla \cdot \left(\frac{x - y}{r^3}\right) = \nabla(r^{-3}) \cdot (x - y) + \frac{1}{r^3}\nabla \cdot (x - y).$$

Sapendo che $\nabla r = \frac{x-y}{r}$ e $\nabla \cdot (x - y) = 3$, calcoliamo i termini:

- $\nabla(r^{-3}) = -3r^{-4}\nabla r = -3r^{-4}\frac{x-y}{r} = -3\frac{x-y}{r^5}$;
- Quindi il primo termine è: $-3\frac{x-y}{r^5} \cdot (x - y) = -3\frac{\|x-y\|^2}{r^5} = -3\frac{r^2}{r^5} = -\frac{3}{r^3}$.

Sommando i contributi:

$$\nabla \cdot v(x) = -\frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^3}(3) = 0 \quad \forall x \neq y.$$

Dunque la divergenza è nulla ovunque tranne che nella singolarità.

2. Calcolo nel senso delle distribuzioni Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ una funzione test arbitraria. Per definizione di derivata distribuzionale:

$$\langle \mathrm{div}(v), \varphi \rangle = -\langle v, \nabla\varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}^3} v(x) \cdot \nabla\varphi(x)\, dx.$$

Poiché v è singolare in y, isoliamo la singolarità considerando il dominio $\Omega_\epsilon = \mathbb{R}^3 \setminus B_\epsilon(y)$, dove $B_\epsilon(y)$ è la palla di raggio ϵ centrata in y. Possiamo scrivere l'integrale come limite:

$$\langle \mathrm{div}(v), \varphi \rangle = -\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\Omega_\epsilon} v(x) \cdot \nabla\varphi(x)\, dx.$$

Usiamo l'identità vettoriale $v \cdot \nabla\varphi = \nabla \cdot (\varphi v) - \varphi(\nabla \cdot v)$. Sostituendo nell'integrale:

$$\int_{\Omega_\epsilon} v \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \cdot (\varphi v)\, dx - \int_{\Omega_\epsilon} \varphi \underbrace{(\nabla \cdot v)}_{=0}\, dx.$$

Il secondo termine è nullo per quanto calcolato al punto 1. Per il primo termine, applichiamo il Teorema della Divergenza (di Gauss):

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla \cdot (\varphi v)\, dx = \int_{\partial\Omega_\epsilon} \varphi v \cdot n\, dS,$$

dove n è il versore normale **uscente** da Ω_ϵ. Poiché $\partial\Omega_\epsilon$ è la superficie della sfera $\partial B_\epsilon(y)$, la normale uscente dal dominio "esterno" punta verso l'interno della sfera, cioè verso y. Quindi:

$$n = -\frac{x-y}{\|x-y\|} = -\frac{x-y}{\epsilon}.$$

Valutiamo il prodotto scalare $v \cdot n$ sulla superficie ($\|x-y\| = \epsilon$):

$$v(x) \cdot n = \frac{x-y}{\epsilon^3} \cdot \left(-\frac{x-y}{\epsilon}\right) = -\frac{\|x-y\|^2}{\epsilon^4} = -\frac{\epsilon^2}{\epsilon^4} = -\frac{1}{\epsilon^2}.$$

Tornando all'espressione della distribuzione:

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{div}(v), \varphi \rangle &= -\lim_{\epsilon\to 0} \left(\oint_{\partial B_\epsilon(y)} \varphi(x) \left(-\frac{1}{\epsilon^2}\right) dS \right) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon^2} \oint_{\partial B_\epsilon(y)} \varphi(x)\, dS.\end{aligned}$$

L'integrale di superficie può essere risolto usando coordinate sferiche e il teorema della media considerando che per $\epsilon \to 0$, $\varphi(x) \approx \varphi(y)$ è costante sulla sfera:

$$\oint_{\partial B_\epsilon(y)} \varphi(x)\, dS \sim \varphi(y) \cdot \mathrm{Area}(\partial B_\epsilon) = \varphi(y) \cdot 4\pi\epsilon^2.$$

Sostituendo nel limite:

$$\langle \mathrm{div}(v), \varphi \rangle = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon^2}(4\pi\epsilon^2 \varphi(y)) = 4\pi\varphi(y).$$

Ricordando la definizione della delta di Dirac $\langle \delta_y, \varphi \rangle = \varphi(y)$, abbiamo dimostrato che:

$$\mathrm{div}(v) = 4\pi\delta_y.$$

Esercizio 8

Si mostri che, per ogni $v \in H^2(\mathbb{R})$ esiste $C \geq 0$ tale che

$$\|v \star \rho_\epsilon - v\|_{H^1} \leq C\epsilon \|v\|_{H^2},$$

dove $\rho_\epsilon = \epsilon^{-1}\rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} dx \rho = 1$.

Soluzione. Utilizziamo la definizione di norma nello spazio di Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ tramite la trasformata di Fourier. Ricordiamo che per $u \in H^s(\mathbb{R})$:

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2\, d\xi, \quad \text{dove } \langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}.$$

Consideriamo la quantità $\|v \star \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2$. Applicando la trasformata di Fourier e sfruttando la proprietà della convoluzione ($\mathcal{F}(f \star g) = \hat{f}\hat{g}$), otteniamo:

$$\mathcal{F}(v \star \rho_\epsilon - v)(\xi) = \hat{v}(\xi)\widehat{\rho_\epsilon}(\xi) - \hat{v}(\xi) = \hat{v}(\xi)\left(\widehat{\rho_\epsilon}(\xi) - 1\right).$$

Ricordando la definizione di $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}\rho(x/\epsilon)$, la proprietà di scalatura della trasformata di Fourier implica:

$$\widehat{\rho_\epsilon}(\xi) = \hat{\rho}(\epsilon\xi).$$

Possiamo quindi riscrivere il quadrato della norma H^1 come:

$$\|v \star \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)|\hat{v}(\xi)|^2 \left|\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1\right|^2 d\xi. \tag{1}$$

Stima del moltiplicatore. Dato che $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, la sua trasformata $\hat{\rho}$ appartiene allo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Inoltre, per ipotesi $\int \rho\,dx = 1$, il che implica $\hat{\rho}(0) = 1$. Applicando il Teorema del Valor Medio (o un'espansione di Taylor al primo ordine) alla funzione $\hat{\rho}$ attorno all'origine, per ogni $\eta \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$\hat{\rho}(\eta) - 1 = \hat{\rho}(\eta) - \hat{\rho}(0) = \eta \cdot \hat{\rho}'(\zeta),$$

per un certo ζ compreso tra 0 e η. Poiché $\hat{\rho} \in \mathcal{S}$, la sua derivata prima è uniformemente limitata su $\mathbb{R}$. Definiamo $K := \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\hat{\rho}'(\xi)| < \infty$. Otteniamo la stima puntuale:

$$|\hat{\rho}(\eta) - 1| \leq K|\eta|.$$

Sostituendo $\eta = \epsilon\xi$, abbiamo:

$$|\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1| \leq K\epsilon|\xi|.$$

Conclusione. Inseriamo la stima appena ottenuta nell'integrale (1):

$$\|v \star \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2 \leq \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)|\hat{v}(\xi)|^2 \cdot (K\epsilon|\xi|)^2\,d\xi = K^2\epsilon^2 \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)|\xi|^2|\hat{v}(\xi)|^2\,d\xi.$$

Osserviamo ora che per ogni $\xi \in \mathbb{R}$, vale banalmente $|\xi|^2 \leq 1 + |\xi|^2$. Moltiplicando ambo i membri per la quantità positiva $(1 + |\xi|^2)$, otteniamo la disuguaglianza algebrica:

$$(1 + |\xi|^2)|\xi|^2 \leq (1 + |\xi|^2)^2 = \langle\xi\rangle^4.$$

Utilizzando questa maggiorazione nell'integrale:

$$\|v \star \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2 \leq K^2\epsilon^2 \int_{\mathbb{R}} \langle\xi\rangle^4|\hat{v}(\xi)|^2\,d\xi.$$

L'integrale a destra coincide esattamente con la definizione della norma $\|v\|_{H^2}^2$. Pertanto:

$$\|v \star \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2 \leq K^2\epsilon^2\|v\|_{H^2}^2.$$

Estraendo la radice quadrata, otteniamo la tesi con $C = K = \sup|\hat{\rho}'|$:

$$\|v \star \rho_\epsilon - v\|_{H^1} \leq C\epsilon\|v\|_{H^2}.$$

Osservazione. Nella dimostrazione abbiamo usato la definizione di norma H^2 tramite potenziali di Bessel ($\langle\xi\rangle^s$), che equivale a:

$$\|v\|_{H^2}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + 2\|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2}^2.$$

Questa norma è equivalente, ma non isometrica, alla norma standard definita come somma delle norme delle derivate ($\sum_{|\alpha|\leq 2} \|D^\alpha v\|_{L^2}^2$), che manca del fattore 2 sul termine misto. Ai fini della stima asintotica in ϵ, questa distinzione è irrilevante in quanto assorbita dalle costanti, ma è fondamentale per la precisione formale sugli spazi di Hilbert.

Esercizio 9

Si calcolino le soluzioni fondamentali di Δ^2 in $\mathbb{R}^3$ dove Δ è l'operatore di Laplace.

Soluzione. Cerchiamo una distribuzione $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ tale che:

$$\Delta^2 E = \delta \quad \text{in } \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

Possiamo riscrivere l'equazione come l'azione iterata del Laplaciano:

$$\Delta(\Delta E) = \delta.$$

Ricordiamo che la soluzione fondamentale del Laplaciano in $\mathbb{R}^3$, denotata con E_Δ, soddisfa $\Delta E_\Delta = \delta$ ed è data da:

$$E_\Delta(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}.$$

Ponendo $u = \Delta E$, l'equazione (2) si riduce al sistema:

$$\begin{cases} \Delta E = u \\ \Delta u = \delta \end{cases} \implies u = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}.$$

Dobbiamo ora risolvere $\Delta E = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$. Data la simmetria radiale del termine noto, cerchiamo una soluzione radiale $E = E(r)$ con $r = |\mathbf{x}|$.

L'operatore di Laplace per funzioni a simmetria radiale in $\mathbb{R}^3$ si scrive come:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right).$$

L'equazione diventa (per $r > 0$):

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dE}{dr}\right) = -\frac{1}{4\pi r}.$$

Moltiplicando per r^2 e integrando una prima volta rispetto a r:

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dE}{dr}\right) = -\frac{r}{4\pi} \implies r^2 \frac{dE}{dr} = -\frac{r^2}{8\pi} + C_1.$$

Dividendo per r^2 e integrando nuovamente:

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{1}{8\pi} + \frac{C_1}{r^2} \implies E(r) = -\frac{r}{8\pi} - \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Analizziamo i termini ottenuti:

- Il termine C_2 è una costante armonica ($\Delta C_2 = 0$).
- Il termine $-C_1/r$ è proporzionale alla soluzione fondamentale del Laplaciano (che mappa in δ tramite un Laplaciano, e quindi in $\Delta\delta$ tramite il bilaplaciano, ma noi cerchiamo solo δ). Possiamo porre $C_1 = 0$ per trovare la soluzione particolare.
- Il termine $-\frac{r}{8\pi}$ è il candidato per la soluzione fondamentale cercata.

Verifichiamo rigorosamente nel senso delle distribuzioni che $E(\mathbf{x}) = -\frac{|\mathbf{x}|}{8\pi}$ sia la soluzione corretta. Calcoliamo $\Delta|\mathbf{x}|$ in $\mathbb{R}^3$. Poiché $|\mathbf{x}|$ è una funzione continua e differenziabile ovunque tranne nell'origine, e la singolarità in 0 è debole (localmente integrabile insieme alle sue derivate prime), possiamo calcolare il Laplaciano in senso classico per $r \neq 0$:

$$\Delta r = \frac{2}{r}.$$

Non ci sono contributi deltaformi al primo passo perché la funzione r non è abbastanza singolare. Ora applichiamo il secondo Laplaciano:

$$\Delta^2\left(-\frac{|\mathbf{x}|}{8\pi}\right) = \Delta\left(-\frac{1}{8\pi}\Delta|\mathbf{x}|\right) = \Delta\left(-\frac{1}{8\pi}\frac{2}{|\mathbf{x}|}\right) = -\frac{1}{4\pi}\Delta\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right).$$

Utilizzando l'identità nota $\Delta(1/|\mathbf{x}|) = -4\pi\delta$, otteniamo:

$$-\frac{1}{4\pi}(-4\pi\delta) = \delta.$$

La soluzione fondamentale del bilaplaciano in $\mathbb{R}^3$ è dunque:

$$E(\mathbf{x}) = -\frac{|\mathbf{x}|}{8\pi}.$$

Esercizio 10

Sia $\Box = -\partial_t^2 + \partial_x^2$ l'operatore d'onda su $\mathbb{R}^2$. Si mostri che, detta Θ la funzione di Heaviside, sono soluzioni fondamentali per l'operatore d'onda:

$$G^+ = \Theta(t)\frac{\Theta(t^2 - x^2)}{2} \quad \text{e} \quad G^- = -\Theta(-t)\frac{\Theta(t^2 - x^2)}{2}.$$

Soluzione. Per verificare che G^+ sia soluzione fondamentale, dobbiamo mostrare che $\Box G^+ = \delta$ nel senso delle distribuzioni. Analizziamo innanzitutto il supporto della distribuzione per definire correttamente l'integrale di accoppiamento con una funzione test $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Definizione del dominio di integrazione. La distribuzione G^+ è definita dal prodotto di due funzioni gradino:

1. $\Theta(t)$ impone che la distribuzione sia non nulla solo per $t > 0$.
2. $\Theta(t^2 - x^2)$ impone $t^2 - x^2 > 0$, ovvero $t^2 > x^2$. Poiché $t > 0$, estraendo la radice otteniamo $|x| < t$, che equivale a $-t < x < t$.

L'intersezione di queste condizioni definisce il cono luce futuro. Pertanto, l'azione di G^+ su ϕ è data dall'integrale di Lebesgue limitato a questo dominio:

$$\langle G^+, \phi \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dt \int_{-t}^{t} \phi(t, x)\, dx.$$

Calcolo del D'Alembertiano. Per definizione di derivata nel senso delle distribuzioni, calcoliamo $\langle \Box G^+, \phi \rangle = \langle G^+, \Box\phi \rangle$. Sostituendo $\Box\phi = (-\partial_t^2 + \partial_x^2)\phi$:

$$\langle \Box G^+, \phi \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dt \left(\int_{-t}^{t} \partial_x^2 \phi(t, x)\, dx - \int_{-t}^{t} \partial_t^2 \phi(t, x)\, dx \right).$$

Analisi del termine spaziale. Per il primo integrale interno, applichiamo il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale nella variabile x:

$$\int_{-t}^{t} \partial_x^2 \phi(t, x)\, dx = \big[\partial_x \phi(t, x)\big]_{x=-t}^{x=t} = \partial_x \phi(t, t) - \partial_x \phi(t, -t).$$

Analisi del termine temporale e derivate totali. Per gestire il secondo termine, utilizziamo la regola di Leibniz per la derivazione sotto segno di integrale. Sia $I(t) = \int_{-t}^{t} \partial_t \phi(t, x)\, dx$. Derivando totalmente rispetto a t:

$$\frac{d}{dt} \int_{-t}^{t} \partial_t \phi(t, x)\, dx = \int_{-t}^{t} \partial_t^2 \phi(t, x)\, dx + \partial_t \phi(t, t) \cdot (1) - \partial_t \phi(t, -t) \cdot (-1).$$

Da cui ricaviamo l'espressione per l'integrale della derivata seconda temporale:

$$-\int_{-t}^{t} \partial_t^2 \phi(t, x)\, dx = -\frac{d}{dt} \int_{-t}^{t} \partial_t \phi(t, x)\, dx + \partial_t \phi(t, t) + \partial_t \phi(t, -t).$$

Sintesi. Sommando i contributi spaziali e temporali, l'integrando in dt diventa:

$$(\partial_x \phi(t, t) + \partial_t \phi(t, t)) - (\partial_x \phi(t, -t) - \partial_t \phi(t, -t)) - \frac{d}{dt} \int_{-t}^{t} \partial_t \phi\, dx.$$

Riconosciamo nei primi termini le derivate totali della funzione ϕ valutata lungo le caratteristiche $x = t$ e $x = -t$:

$$\frac{d}{dt}[\phi(t, t)] = \partial_t \phi(t, t) + \partial_x \phi(t, t), \qquad \frac{d}{dt}[\phi(t, -t)] = \partial_t \phi(t, -t) - \partial_x \phi(t, -t).$$

Quindi l'intero argomento dell'integrale in dt è una derivata totale esatta:

$$\langle \Box G^+, \phi \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(\phi(t, t) + \phi(t, -t) - \int_{-t}^{t} \partial_t \phi(t, x)\, dx \right) dt.$$

Integrando tra 0 e $+\infty$ otteniamo il valore al bordo (poiché a $+\infty$ la funzione test a supporto compatto si annulla):

$$-\frac{1}{2} \left[\phi(0, 0) + \phi(0, 0) - \int_0^0 \partial_t \phi(0, x)\, dx \right] = -\frac{1}{2}(2\phi(0, 0)) = -\phi(0, 0) = -\langle \delta, \phi \rangle.$$

Dunque $\Box G^+ = -\delta$.

Il caso G^-. Per G^- il ragionamento è del tutto analogo e si può ottenere velocemente osservando la simmetria temporale. G^- è supportata nel cono luce passato ($t < -|x| \leq 0$). Effettuando il cambio di variabile $t \to -t$ nell'integrale, l'azione su una funzione test si riconduce alla forma precedente, ma con un segno globale differente derivante dalla definizione di G^- (che ha un meno davanti) e dagli estremi di integrazione. La struttura delle derivate totali lungo le caratteristiche rimane invariata, portando nuovamente ad una singolarità nell'origine che restituisce la delta di Dirac.