Appendici

Meccanica Quantistica

Indice

1 Appendici matematiche

1.1 Definizione di prodotto tensore

Definizione (Spazio vettoriale libero)

Dato un insieme qualunque S possiamo definire lo spazio vettoriale libero su un campo $\mathbb{K}$ *l'insieme*

$$\mathbb{K}(S) := \{f : S \to \mathbb{K} | f \neq 0 \text{ su un numero finito di elementi di } S \}$$

Definizione (Funzione caratteristica)

Definisco una funzione $\chi : S \to \mathbb{K}(S)$ *in modo che un elemento di un qualunque insieme S sia in relazione con la* $f \in \mathbb{K}(S)$ *che fa 1 su quell'elemento e fa 0 su tutti gli altri.*

Abbiamo quindi trovato una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{K}(S)$ che è l'insieme delle funzioni caratteristiche dell'insieme S tale che $\mathcal{B} \subset \mathbb{K}(S)$. Quindi ci sono elementi di $\mathbb{K}(S)$ che non sono funzione caratteristica di nessun elemento in S però possiamo sempre scrivere per un certo $k \in \mathbb{K}(S)$

$$k = \sum \lambda_i k_i = \sum \lambda_i \chi(s_i)$$

dove $k_i \in \mathcal{B}$.
Identifichiamo ora S con il prodotto cartesiano di una serie di spazi vettoriali $U_1, ..., U_n$ su un campo $\mathbb{K}$.
Definiamo inoltre un sottoinsieme $\mathcal{R} \subset \mathbb{K}(S)$ nel seguente modo:

- $q \in \mathcal{R} \iff$ dato un certo $\lambda \in \mathbb{K}$ e un certo $j \in \mathbb{N}$ esistano due elementi in S, $s_1 = (v_1, ..., v_n)$ e $s_2 = (v_1, ..., \lambda v_j, ..., v_n)$ tale che
$$q = \lambda \chi(s_1) - \chi(s_2)$$
- $q \in \mathcal{R} \iff$ dato $j \in \mathbb{N}$ esistano tre elementi in S, $s_1 = (v_1, ..., v_n)$, $s_2 = (v_1, ..., v'_j, ..., v_n)$ e $s_3 = (v_1, ..., v_j + v'_j, ..., v_n)$ tale che
$$q = \chi(s_1) + \chi(s_2) - \chi(s_3)$$

Ora possiamo quozientare su questo insieme definendo $U_T := \mathbb{K}(S)/\mathcal{R}$ e una mappa di proiezione $T : S \to U_T$ che associa ad ogni elemento la sua classe di equivalenza (definita per esempio associando ogni elemento di S alla classe di equivalenza di cui fa parte $\chi(s)$).

Teorema

La mappa T soddisfa la proprietà di universalità cioè per ogni spazio vettoriale W e per ogni mappa multilineare $f : U_1 \times ... \times U_n \to W$ *esiste un'unica mappa lineare* $f^T : U_T \to W$ *che fa commutare il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd}
U_1 \times \cdots \times U_n \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f"'] & U_T \arrow[d, "f^T"] \\
& W
\end{tikzcd}$$

Quindi U_T *è lo spazio prodotto tensore* $U_T = U_1 \otimes ... \otimes U_n$

Dimostrazione. Definiamo l'applicazione $\tilde{f} : \mathbb{K}(U_1 \times \cdots \times U_n) \to W$ in modo che, dopo aver fissato la base $\{k_i\}$, e preso un $k = \sum_i a_i k_i$

$$\tilde{f}(k) := \sum_i a_i f(\chi^{-1}(k_i))$$

dato che l'inversa di χ esiste per gli elementi della base. Ora, posso prendere f^T come $f^T([k]) := \tilde{f}(k)$ dove $[k]$ è la classe di equivalenza dell'elemento $k \in \mathbb{K}(S)$ di cui k è un rappresentativo. Troviamo infatti che in questo modo $f = f^T \circ T$ che fa commutare il diagramma.
f^T è lineare, infatti

$$f^T(a[v] + b[w]) = f^T([av] + [bw]) = f^T([av + bw]) = f(av + bw) = af(a) + bf(w) = af^T([v]) + vf^T([w])$$

per le proprietà di linearità del modulo e di f.
Inoltre se io avessi f^T e g^T entrambe con le proprietà dimostrate sopra avrei che $f = f^T \circ T = g^T \circ T$ quindi che

$$(f^T \circ T)(s) = f^T([\chi(s)]) = f^T([k]) = f(s) = (g^T \circ T)(s) = g^T([k])$$

quindi sono uguali in un sistema di generatori per U_T, in quanto le classi di equivalenza che contengono almeno un rappresentativo della base sono un sistema di generatori per tutto U_T. Per risultati di algebra lineare si trova che se le due mappe sono uguali su un sistema di generatori allora lo sono per tutto lo spazio. $\square$

Notazione In meccanica quantistica

$$[\chi(v_1, ..., v_n)] =: |v_1\rangle|v_2\rangle...|v_n\rangle$$

1.2 Dualità e Riflessività negli Spazi Normati

Per comprendere appieno il framework matematico della meccanica quantistica, dobbiamo introdurre i concetti di spazio duale e riflessività.

Definizione (Spazio Duale Topologico)

Dato uno spazio normato X sul campo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), il suo ***duale topologico****, denotato con $X^\star$, è lo spazio di tutti i funzionali lineari* ***continui*** *(o equivalentemente, limitati) $f : X \to \mathbb{K}$.*

Possiamo iterare questo processo. Il duale di $X^\star$ è $X^{\star\star} = (X^\star)^\star$, chiamato **biduale topologico** di X.

Esiste un'applicazione "canonica" (naturale) $\hat{J} : X \to X^{\star\star}$ che mappa ogni vettore $x \in X$ in un funzionale lineare continuo su $X^\star$. Questo funzionale, $\hat{J}(x)$, agisce su un elemento $f \in X^\star$ nel seguente modo:

$$(\hat{J}(x))(f) = f(x)$$

Si può dimostrare che $\hat{J}$ è un'isometria (cioè conserva la norma: $||\hat{J}(x)||_{X^{\star\star}} = ||x||_X$).

Definizione (Riflessività)

Uno spazio normato X è detto ***riflessivo*** *se l'immersione canonica $\hat{J} : X \to X^{\star\star}$ è* ***surgettiva****, cioè se $\hat{J}(X) = X^{\star\star}$.*

In termini semplici, uno spazio è riflessivo se il suo biduale topologico "non è più grande" dello spazio stesso. Ogni elemento di $X^{\star\star}$ (ogni funzionale lineare continuo sui funzionali lineari continui su X) è, di fatto, solo l'immagine di un vettore $x \in X$ originale.

Condizioni per la Riflessività

La riflessività è una proprietà potente ma non universale.

Spazi Riflessivi (Sì):

- **Tutti gli spazi di Hilbert.** Questo è il risultato più importante per la meccanica quantistica, come vedremo, ed è una conseguenza diretta del Teorema di Riesz-Fréchet.
- Tutti gli spazi normati di dimensione finita.
- Gli spazi $L^p(\Omega)$ e l^p per $1 < p < \infty$.

Spazi Non Riflessivi (No):

- Lo spazio $L^1(\Omega)$. Il suo duale è $L^\infty(\Omega)$, ma il duale di $L^\infty(\Omega)$ è uno spazio molto più vasto (lo spazio delle misure di Borel finitamente additive) di $L^1(\Omega)$.
- Lo spazio $L^\infty(\Omega)$.
- Lo spazio $C(K)$ delle funzioni continue su un insieme compatto K.
- Lo spazio c_0 delle successioni che tendono a zero (il suo duale è l^1, ma il suo biduale è l^∞).

Il motivo per cui gli spazi di Hilbert ($\mathcal{H}$) sono così speciali e "ben comportati" è codificato nel seguente teorema fondamentale.

Teorema (di Rappresentazione di Riesz-Fréchet)
Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert. Per ogni funzionale lineare continuo $f \in Hspace^\star$, esiste un ***unico*** *vettore $y_f \in \mathcal{H}$ tale che:*

$$f(x) = \langle y_f, x \rangle \quad \textit{per ogni } x \in \mathcal{H}$$

Inoltre, $||f||_{\mathcal{H}^\star} = ||y_f||_{\mathcal{H}}$.

(Nota: se il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è antilineare nel primo argomento, come in fisica, l'isomorfismo è antilineare. Se è antilineare nel secondo, è lineare).

Conseguenze per la Riflessività: Questo teorema stabilisce un isomorfismo (anti-lineare) tra $\mathcal{H}$ e il suo duale $\mathcal{H}^\star$. Poiché $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^\star$, segue banalmente che $\mathcal{H}^\star \cong \mathcal{H}^{\star\star}$. Combinando i due, $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^{\star\star}$. Si può dimostrare che questo isomorfismo è esattamente l'immersione canonica $\hat{J}$. **Pertanto, ogni spazio di Hilbert è riflessivo.**

1.3 La Notazione di Dirac in uno Spazio di Hilbert

La notazione di Dirac è un modo geniale per sfruttare la riflessività di $\mathcal{H}$.

1. **Kets:** Un vettore ψ nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ (ad esempio, $L^2(\mathbb{R})$) è denotato da un "ket": $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$.
2. **Bras:** Un funzionale lineare continuo $f \in \mathcal{H}^\star$ è denotato da un "bra": $\langle f|$.
3. **Il Teorema di Riesz in azione:** Grazie a Riesz, per ogni ket $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$, esiste un unico bra $\langle\psi| \in \mathcal{H}^\star$ (il funzionale $f_\psi(\cdot) = \langle \psi, \cdot \rangle$) e viceversa. C'è una corrispondenza biunivoca tra kets e bras.
4. **Il Bracket:** L'azione del bra $\langle\phi| \in \mathcal{H}^\star$ sul ket $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ è scritta come $\langle\phi|\psi\rangle$. Matematicamente, questo è:
$$\langle\phi|\psi\rangle \equiv f_\phi(|\psi\rangle) \equiv \langle \phi, \psi \rangle$$
Il risultato è uno scalare (un numero complesso). La notazione "bracket" è la chiusura di un "bra" e un "ket".

La notazione di Dirac brilla per la sua gestione delle "basi continue", come la base della posizione $\{|x\rangle\}_{x\in\mathbb{R}}$. Qui sorgono le sottigliezze.

L'oggetto $|x\rangle$ dovrebbe essere l'autovettore dell'operatore posizione $\hat{X}$, tale che $\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$. Se lavoriamo in $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, dove $\hat{X}$ agisce come $(\hat{X}\psi)(y) = y \cdot \psi(y)$, la "funzione d'onda" di $|x\rangle$ sarebbe $\psi_x(y) = \delta(y - x)$, la delta di Dirac. **Problema:** La delta di Dirac non è una funzione e non è in $L^2(\mathbb{R})$.

$$\int_{\mathbb{R}} |\delta(y - x)|^2 dy = \infty$$

Quindi, $|x\rangle$ non è un vettore nel nostro spazio di Hilbert $\mathcal{H}$.

1.3.1 Duali Algebrici vs. Topologici

Il prompt solleva un punto cruciale: la distinzione tra duale *algebrico* e *topologico*.

- **Duale Algebrico ($\mathcal{L}(X)$):** Lo spazio di *tutti* i funzionali lineari $f : X \to \mathbb{K}$, senza alcun requisito di continuità.
- **Duale Topologico ($X^\star$):** Il sottospazio $X^\star \subset X^*$ che contiene solo i funzionali lineari *continui.*

Sempre $X^\star \subseteq \mathcal{L}(X)$, e $X^{\star\star} \subseteq \mathcal{L}(X)^*$ (biduali).

Consideriamo il funzionale "valutazione nel punto x":

$$E_x : \psi \mapsto \psi(x)$$

Questo funzionale E_x è lineare. Ma è continuo sulla norma L^2? No. Si può costruire una successione di funzioni $\psi_n \in L^2(\mathbb{R})$ tale che $||\psi_n||_{L^2} \to 0$ (converge a zero in norma), ma $\psi_n(x) \to \infty$ (diverge nel punto x). Poiché il funzionale mappa una successione convergente (a 0) in una non convergente, E_x è **non continuo** (non limitato) sulla topologia di L^2.

Dunque, $|x\rangle$ (o più precisamente, il bra $\langle x|$ che implementa E_x) **non è in** $\mathcal{H}^\star$. Risiede nello spazio molto più ampio $\mathcal{L}(X)$ (il duale algebrico).

Bisogna quindi vedere $|x\rangle$ come un elemento del **biduale algebrico** $\mathcal{L}(X)^*$. In questo caso, $|x\rangle$ è un funzionale $F_x : \mathcal{H}^\star \to \mathbb{C}$ che agisce su un bra $\langle y| \in \mathcal{H}^\star$. Se $|x\rangle$ è non limitato, allora la sua azione su un elemento $\langle y| \in \mathcal{H}^\star$ non è ben definita in termini semplici.

1.4 Gli Spazi di Hilbert Attrezzati (Rigged Hilbert Spaces)

La fisica risolve questo problema in modo più elegante, non usando l'ingestibile duale algebrico (che indicheremo con $\mathcal{L}(X)$ per uno spazio X), ma introducendo una struttura più fine nota come **Spazio di Hilbert Attrezzato** o **Triade di Gelfand**.

Definizione (Spazio di Hilbert Attrezzato (Gelfand Triple))

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert (ad esempio, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$). Uno ***Spazio di Hilbert Attrezzato*** *è una terna di spazi $(\Phi, \mathcal{H}, \Phi^\star)$ con le seguenti proprietà:*

1. *Φ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{H}$ che è* ***denso*** *in $\mathcal{H}$.*

2. *Φ è dotato di una sua topologia (spesso derivante da una norma $||\cdot||_\Phi$) che è* ***più fine*** *(più forte) della topologia indotta da $\mathcal{H}$.*
   (Ciò significa che $||v||_\mathcal{H} \leq C||v||_\Phi$ per qualche C, e quindi ogni successione che converge in Φ, converge anche in $\mathcal{H}$).

3. *$\Phi^\star$ è il* ***duale topologico*** *di Φ rispetto alla topologia di Φ.*

L'esempio canonico è prendere $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (lo spazio delle funzioni C^∞ a decrescenza rapida) e $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$. La topologia di $\mathcal{S}$ è più fine di quella L^2.

Questa costruzione porta a una "triade" di inclusioni canoniche:

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^\star$$

Spieghiamo la seconda inclusione, $\mathcal{H} \subset \Phi^\star$:

- Grazie al Teorema di Riesz, identifichiamo $\mathcal{H}$ con il suo duale topologico $\mathcal{H}^\star$. Quindi $\Phi \subset \mathcal{H} \cong \mathcal{H}^\star$.
- L'inclusione $\Phi \subset \mathcal{H}$ è continua (come visto al punto 2 della definizione).
- Per proprietà generali degli spazi duali, questo implica un'inclusione continua "al contrario" per i loro duali topologici: $\mathcal{H}^\star \subset \Phi^\star$.
- Combinando i passaggi, otteniamo la catena di inclusioni: $\Phi \subset \mathcal{H} \cong \mathcal{H}^\star \subset \Phi^\star$.

Lo spazio $\Phi^\star$ è lo spazio delle **distribuzioni temperate** $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, che è molto più grande di $L^2(\mathbb{R})$ ma molto più "gestibile" del duale algebrico $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Conseguenze per la Notazione di Dirac Questo formalismo ci permette di collocare rigorosamente ogni oggetto:

- I **"veri" kets** (stati fisici normalizzabili) $|\psi\rangle$ sono in $\mathcal{H}$. Gli stati "particolarmente belli" (es. funzioni d'onda C^∞ e a decrescenza rapida) sono in Φ.
- I **"kets generalizzati"** (autostati non normalizzabili) come $|x\rangle$ **sono elementi di** $\Phi^\star$.

Il bracket $\langle y|x\rangle$, che coinvolge due "kets generalizzati" appartenenti entrambi al duale topologico $\Phi^\star$ (ad esempio $|x\rangle = \delta_x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$), non può essere interpretato come un prodotto scalare (definito su $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$) né come l'azione di un funzionale su un vettore test (definita su $\Phi^\star \times \Phi$). Il suo significato emerge invece operazionalmente considerando la *risoluzione dell'identità*, $\mathbb{I} = \int dx|x\rangle\langle x|$. Se applichiamo questa identità a un vettore test $|\psi\rangle \in \Phi$ e poi proiettiamo sul "bra" $\langle y| \in \Phi^\star$, otteniamo un'identità: $\langle y|\psi\rangle = \langle y|\mathbb{I}\psi\rangle$. Sviluppando il lato destro, assumendo la linearità per scambiare l'integrale con il bracket (un'operazione che richiede il rigore della teoria delle distribuzioni), abbiamo $\langle y|\mathbb{I}\psi\rangle = \langle y| \left(\int dx|x\rangle\langle x|\right) \psi\rangle = \int dx\langle y|x\rangle\langle x|\psi\rangle$.

La rigorosità menzionata è fondamentale perché l'operazione non è banale: $\langle y|$ è essa stessa una distribuzione ($\delta_y \in \Phi^\star$), non un funzionale continuo su $\mathcal{H}$, e l'integrale $\int dx|x\rangle\psi(x)$ è un integrale "debole" (o integrale di Bochner generalizzato), poiché l'integrando $|x\rangle$ appartiene a $\Phi^\star$, non a $\mathcal{H}$. L'atto di "portare il bra dentro l'integrale" (scambiare $\langle y| \int \dots \rangle \to \int \langle y| \dots \rangle$) è uno scambio tra un funzionale e un'integrazione, analogo allo scambio tra un limite e un integrale, che non è universalmente lecito. Il **Teorema del Nucleo (Kernel Theorem) di Schwartz** fornisce il framework matematico rigoroso per definire tali integrali a valori operatoriali e per giustificare questa procedura, stabilendo che un operatore lineare (come l'Identità) da Φ a $\Phi^\star$ può essere rappresentato da un "nucleo" $K(y,x)$ (una distribuzione in due variabili) tale che la sua azione $\psi(y)$ è data proprio da $\int dx K(y,x)\psi(x)$.

Poiché $\langle y|\psi\rangle = \psi(y)$ e $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$, l'equazione diventa $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}} dx \langle y|x\rangle \psi(x)$. Questa relazione definisce $\langle y|x\rangle$ non come uno scalare, ma come il **nucleo (kernel)** $K(y,x)$ dell'operatore identità. L'unico oggetto matematico che soddisfa questa proprietà per ogni funzione test ψ è la **distribuzione delta di Dirac** $\delta(y-x)$, che è una distribuzione (un funzionale lineare continuo) definita sullo spazio delle funzioni test in due variabili (es. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$), non uno scalare.

1.4.1 La Decomposizione di un Vettore di $\mathcal{H}$

Consideriamo ora la decomposizione di un "vero" ket $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ sulla base continua:

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx |x\rangle\langle x|\psi\rangle$$

- $|\psi\rangle \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$.
- $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$. Questa è la "funzione d'onda", una funzione in $L^2(\mathbb{R})$. È uno scalare (complesso) per ogni x.
- $|x\rangle \in \Phi^\star$. È una distribuzione.

L'integrale è quindi:

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx |x\rangle \psi(x)$$

Questa non è un'integrazione di Riemann o Lebesgue. È un **integrale debole**. È l'oggetto $|\Psi\rangle \in \Phi'$ definito dalla sua azione su un qualsiasi "bra test" $\langle\phi| \in \Phi$:

$$\langle\phi|\Psi\rangle := \int_{\mathbb{R}} dx \langle\phi|x\rangle\psi(x) = \int_{\mathbb{R}} dx\, \overline{\phi(x)}\psi(x)$$

L'ultimo termine è semplicemente il prodotto scalare L^2: $\langle\phi,\psi\rangle_{\mathcal{H}}$.

1.4.2 Perché l'Integrale "Torna" in $\mathcal{H}$?

Qui sta il punto cruciale. Abbiamo definito un oggetto $|\Psi\rangle$ (l'integrale) che agisce come un funzionale f_ψ su tutti gli elementi $\phi \in \Phi$:

$$f_\psi(\phi) = \langle\phi|\Psi\rangle = \langle\phi,\psi\rangle_{\mathcal{H}}$$

Questo funzionale f_ψ è definito su Φ. Ma è continuo anche sulla norma di $\mathcal{H}$? Sì. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, per ogni $\phi \in \mathcal{H}$:

$$|f_\psi(\phi)| = |\langle\phi,\psi\rangle| \le ||\phi||_{\mathcal{H}} \cdot ||\psi||_{\mathcal{H}}$$

Poiché $\psi \in \mathcal{H}$, $||\psi||_{\mathcal{H}}$ è finito. Dunque f_ψ è un funzionale lineare **continuo sull'intero spazio di Hilbert $\mathcal{H}$**.
Questo significa che l'oggetto $|\Psi\rangle$ (l'integrale) **è un elemento di $\mathcal{H}^\star$**, il duale topologico di $\mathcal{H}$. Infine, per il **Teorema di Riesz-Fréchet**, ogni elemento di $\mathcal{H}^\star$ corrisponde a un unico vettore in $\mathcal{H}$. E quale vettore in $\mathcal{H}$ genera il funzionale $f_\psi(\cdot) = \langle\cdot,\psi\rangle$? Per l'unicità garantita da Riesz, è proprio il vettore $|\psi\rangle$ da cui eravamo partiti.

1. Decomponiamo $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ usando kets "cattivi" $|x\rangle \in \Phi^\star$ e coefficienti "buoni" $\psi(x) \in L^2$.
2. L'integrale $\int dx|x\rangle\psi(x)$ è definito in senso debole (distribuzionale).

3. Questo integrale definisce un funzionale lineare f_ψ che, grazie al fatto che $\psi(x) \in L^2$, risulta essere **continuo su $\mathcal{H}$**.

4. L'integrale, quindi, "collassa" da Φ' (distribuzioni) a $\mathcal{H}^\star$ (duale topologico di $\mathcal{H}$).

5. Poiché $\mathcal{H}$ è **riflessivo** (via Riesz, $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^\star$), questo elemento $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^\star$ è identificato con un unico elemento in $\mathcal{H}$, che è esattamente il $|\psi\rangle$ originale.

La riflessività dello spazio di Hilbert è la garanzia matematica che la decomposizione di un vettore L^2 lungo una "base" di distribuzioni, pesata con i coefficienti L^2 (la funzione d'onda), ricostruisce fedelmente il vettore L^2 di partenza.

1.5 PVMs

Definizione (Misura complessa)

Sia $\Sigma(X)$ una σ-algebra su un insieme X, allora $\mu : \Sigma(X) \to \mathbb{C}$ è una misura complessa if $\mu(\emptyset) = 0$ e se vale la σ-addittività in modo che la somma converga nonostante l'ordine (converge assolutamente).

Definizione (Variazione)

La variazione $|\mu| : \Sigma(X) \to [0, +\infty)$ è una misura positiva σ-additiva definita come

$$|\mu|(E) := \sup \left\{ \sum_{F \in P(E)} |\mu(F)| \middle| P(E) \subset \Sigma(X) \textit{al più partizione numerabile di } E \right\}$$

Si dimostra che la variazione totale $||\mu|| := |\mu|(X)$ è sempre finita.

Teorema (Radon-Nikodym)

Data una misura complessa, esiste una funzione misurabile $h : X \to \mathbb{C}$ con $|h(x)| = 1$ rispetto a $|\mu|$ q.o. che è unica a meno di set di misura nulla, tale che

$$\mu(E) = \int_E h d|\mu| \qquad \forall E \in \Sigma(X)$$

Definizione (Integrale di una funzione misurabile)

la nozione di integrale rispetto a μ è riservata a funzioni misurabili che sono assolutamente μ-integrabili definito come

$$\int_X f d\mu := \int_X f h d|\mu|$$

tutte le proprietà della misura positiva possono essere trasportate a misure complesse.

Definizione (PVMs)

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\Sigma(X)$ una σ-algebra su X. Una PVM su X è una mappa $P : \Sigma(X) \ni E \mapsto P_E \in \mathcal{P}(H)$ dove $\mathcal{P}(H)$ è lo spazio dei proiettori su $\mathcal{H}$ tale che

1. $P_X = \mathbb{I}$

2. $P_E P_F = P_{E \cap F}$

3. *Si sommano per famiglie di insiemi disgiunte numerabili*

L'ultima proprietà ha senso, in quanto si nota con la disuguaglianza di Bessel, che quella somma converge sempre.
Prendiamo ora $x, y \in \mathcal{H}, \Sigma(X) \ni E \mapsto \langle x|P_E y\rangle =: \mu^{(P)}_{xy}(E)$, si noti che è una misura complessa con le seguenti proprietà

- $\mu^{(P)}_{xy}(\cup_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^{(P)}_{xy}(E_n)$ per le proprietà del prodotto interno

- $\mu^{(P)}_{xy}(X) = \langle x|\rangle$

- $\mu^{(P)}_{xx}$ è sempre positiva e finita

Se consideriamo ora una funzione semplice s e denotiamo con h la funzione relativa al teorema di Radon vista precedentemente possiamo scrivere

$$\int_X s d\mu_{xy} := \int_X shd|\mu_{xy}| = \sum s_k \int_{E_k} hd|\mu_{xy}| = \left\langle x \middle| \sum_k s_k P_{E_k} y \right\rangle$$

a questo punto possiamo finalmente definire

$$\int_X s(\lambda) dP(\lambda) := \sum s_k P_{E_k}$$

e quindi abbiamo che

$$\int_X s d\mu_{xy} = \left\langle x \middle| \int_X s(\lambda) dP(\lambda) y \right\rangle$$

Esempio di PVM con proiettori numerabili

Se ponessimo che $\mathcal{H} = \bigoplus_{j\in J} H_j$ e prendessimo come σ-algebra $\Sigma(J)$ allora avrei che per $E \in \Sigma(J)$

$$P_E z = \sum_{j\in E} Q_j z$$

con Q_j proiettore su H_j, si può dimostrare che P_E sono una PVM. In particolare se $f : J \in \mathbb{C}$ è μ_{xx}-integrabile

$$\int_J f(j) d\mu_{xx}(j) = \sum_{j\in J} f(j)||Q_j x||^2$$

questo è il cosiddetto integrale su una "counting measure" e si può estendere a mappe generali usando il teorema della convergenza monotona e poi il teorema di Lebesgue.

Esempio di PVM su boreliani

Prendiamo $\mathcal{H} = {}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$ e un $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ nella σ-algebra di Borel associato al proiettore ortonormale dato dalla funzione caratteristica sul tale insieme. Si può mostrare che

$$\mu_{hg}^{(P)}(E) = \langle h|P_E g\rangle = \int_E \overline{h(x)} g(x) d^n x$$

Teorema

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, P una PVM e $f : X \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile, si definisca

$$\Delta_f := \left\{ x \in \mathcal{H} \middle| \int_X |f(\lambda)|^2 \mu_{xx}^{(P)}(\lambda) < \infty \right\}$$

valgono le seguenti proprietà

- *Δ_f è un sottospazio denso in H ed esiste un operatore unico*

$$\int_X f(\lambda) dP(\lambda) : \Delta_f \in \mathcal{H} \tag{$\star$}$$

  tale che

$$\left\langle x \middle| \int_X f(\lambda) dP(\lambda) y \right\rangle = \int_X f(\lambda) d\mu_{xy}^{(P)}(\lambda) \qquad \forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in \Delta_f$$

  in particolare f è integrabile

- *L'operatore $\star$ è chiuso e normale*
- *L'operatore aggiunto è*

$$\left(\int_X f(\lambda) dP(\lambda) \right)^\star = \int_X \overline{f(\lambda)} dP(\lambda)$$

- *Vale che*

$$\left|\left| \int_X f(\lambda) dP(\lambda) x \right|\right|^2 = \int_X |f(\lambda)|^2 d\mu_{xx}^{(P)}(\lambda)$$

Corollario

Se $f : X \to \mathbb{C}$ solo assume valori non negativi reali allora

$$\left\langle x \middle| \int_X f dPx \right\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Delta_f$$

Se T è un operatore con $D(T) = \Delta_f$ in modo che

$$\langle x|Tx\rangle = \int_X f(\lambda) d\mu_{xx}^{(P)}(\lambda) \quad \forall x \in \Delta_f$$

allora

$$T = \int_X f(\lambda) dP(\lambda)$$

Possiamo ora definire la seguente proprietà.

Definizione (P-essenzialmente limitatezza)

Sia $f : X \to \mathbb{C}$ misurabile e P una PVM

$$||f||_\infty^{(P)} := \inf\{r \geq 0 | P(x \in X| |f(x)| > r) = 0\}$$

allora se $||f||_\infty^{(P)} < +\infty$, P è essenzialmente limitato.

Allora possiamo dare il seguente teorema devastante per le funzioni limitate.

Teorema

1. *Una mappa misurabile f è P-essenzialmente limitata se e solo se*

$$\int_X f(\lambda)\, dP(\lambda) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})\,.$$

In quel caso

$$\left\| \int_X f(\lambda)\, dP(\lambda) \right\| \leq \|f\|_\infty^{(P)} \leq \|f\|_\infty$$

In particolare, se $f, f_n : X \to \mathbb{C}$ sono limitate e $f_n \to f$ uniformemente come $n \to +\infty$ - o più debolmente $\|f - f_n\|_\infty^{(P)} \to 0$ dove f e tutte le f_n sono P-essenzialmente limitate - allora

$$\left\| \int_X f_n(\lambda)\, dP(\lambda) - \int_X f(\lambda)\, dP(\lambda) \right\| \to 0 \quad \text{as } n \to +\infty.$$

Risulta anche che

$$\left\| \int_X f(\lambda)\, dP(\lambda) \right\| = \|f\|_\infty^{(P)}$$

2. *Abbiamo che*

$$\int_X \chi_E\, dP = P_E\,, \quad \text{if } E \in \Sigma(X)$$

In particolare,

$$\int_X 1\, dP = \mathbb{I}$$

Per una funzione semplice $s = \sum_{k=1}^n s_k \chi_{E_k}$, dove $s_k \in \mathbb{C}$ e $E_k \in \Sigma(X)$, $k = 1, \ldots, n$,

$$\int_X \sum_{k=1}^n s_k \chi_{E_k} dP = \sum_{k=1}^n s_k P_{E_k}$$

3. *Sia $f, f_n : X \to \mathbb{C}$ funzioni misurabili tali che $\|f\|_\infty^{(P)}, \|f_n\|_\infty^{(P)} \leq K < +\infty$ per qualche $K \in \mathbb{R}$ e tutti $n \in \mathbb{N}$. Se $f_n \to f$ puntualmente come $n \to +\infty$, allora*

$$\int_X f_n dPx \to \int_X f dPx \quad \text{as } n \to +\infty, \text{ for every } x \in \mathcal{H}$$

4. If $f, g : X \to \mathbb{C}$ sono P-essenzialmente limitate e $a, b \in \mathbb{C}$, allora

$$\int_X (af + bg)\, dP = a \int_X f dP + b \int_X g dP$$

$$\int_X f dP \int_X g dP = \int_X f \cdot g\, dP$$

Possiamo quindi estendere a quelle non limitate.

Teorema

Consideriamo una PVM $P : \Sigma(X) \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$, due funzioni misurabili $f, g : X \to \mathbb{C}$ e sia $a \in \mathbb{C}$

1.
$$a \int_X f dP = \int_X a f dP$$

2. *$D(\int_X f dP + \int_X g dP) = \Delta_F \cap \Delta_g$ e*

$$\int_X f dP + \int_X g dP \subset \int_X (f + g) dP$$

con l'uguaglianza se e solo se $\Delta_f \cap \Delta_g = \Delta_{f+g}$

3. *Stesso con il prodotto*
4. *Funziona bene con l'aggiunto*
5. *Se $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ è un'isometria lineare e suriettiva $\Sigma(X) \ni E \mapsto P'_E := U P_E U^{-1}$ è una PVM su $\mathcal{H}'$ e*

$$U(\int_X f dP) U^{-1} = \int_X f dP'$$

e il suo dominio è $U(\Delta_f)$

6. *Si può comporre per mappe misurabili del tipo $\phi : X \to X'$*

1.6 Decomposizione spettrale per operatori autoaggiunti

Notazione. Denotiamo con $\mathscr{B}(X)$ la σ-algebra di Borel sullo spazio topologico X.

Teorema (Spettrale per operatori autoaggiunti)

Sia A un operatore autoaggiunto sullo spazio di Hilbert complesso $\mathcal{H}$

- *Esiste un unica PVM $P^{(A)} : \mathscr{B}(X) \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ chiamata la misura spettrale di A, tale che*

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP^{(A)}(\lambda)$$

In particolare $D(A) = \Delta_\iota$ dove $\iota : \mathbb{R} \ni \lambda \to \lambda$

- *Abbiamo inoltre che il supporto della PVM P, ossia il complemento in X dell'unione di tutti i set aperti $O \subset X$ con $P_O = 0$ è tale che*

$$supp(P^{(A)}) = \sigma(A)$$

e quindi $P^{(A)}$ è concentrata su $\sigma(A)$

$$P^{(A)}(E)) = P^{(A)}(E \cap \sigma(A)) \qquad \forall E \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

- *$\lambda \in \sigma_p(A)$ se e solo se $P^{(A)}(\lambda) \neq 0$, questo succede in particolare quando λ è un punto isolato di $\sigma(A)$. $P^{(A)}(\lambda)$ è il proiettore ortogonale sull'autospazio relativo a λ.*

- *$\lambda \in \sigma_c(A)$ se e solo se $P^{(A)}(\lambda) = 0$ ma $P^{(A)}(E) \neq 0$ se $E \ni \lambda$ è un aperto in $\mathbb{R}$.*

Osservazione

Sia data una PVM P e $\iota : \mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \lambda$ *possiamo definire l'operatore normale*

$$A = \int_{\mathbb{R}} \iota(\lambda) dP(\lambda)$$

che è autoaggiunto dato che ι *è reale. Dato che il teorema spettrale fornisce il risultato di unicità abbiamo che* $P^{(A)} = P$*, quindi abbiamo una corrispondenza biunivoca tra le PVM reali sui boreliani e gli operatori autoaggiunti su* $\mathcal{H}$*.*

Vale inoltre che dato un operatore A autoaggiunto e una $f : \sigma(A) \in \mathbb{C}$ mappa continua

$$\sigma(f(A)) = \overline{f(\sigma(A))}$$

dove la chiusura non è necessaria se A è limitato.

Teorema (Misura spettrale in comune)

Sia $\mathfrak{U} := \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *sia un set di operatori autoaggiunti su* $\mathcal{H}$ *supponiamo che la loro misura spettrale commuti. Allora esiste un unica PVM,* $P^{(\mathfrak{U})}$ *in modo che*

$$P^{(\mathfrak{U})}_{E_1 \times E_2 ...} = P^{(A_1)}_{E_1} ... P^{(A_n)}_{E_n}$$

$\forall E_i \in \mathscr{B}(X)$*. Inoltre per ogni* $f : \mathbb{R} \in \mathbb{C}$ *misurabile*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_k) dP^{(\mathfrak{U})}(x) = f(A_k) := \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dP^{(A_k)} \qquad \forall k = 1, ..., n$$

e infine, ogni proiettore commuta con la misura congiunta se commuta con tutti i $P^{(A_k)}$*.*

Osservazione (Formalismo in MQ)

Dato uno stato $\psi \in \mathcal{H}$ *descrivente un ensamble di sistemi identici preparati in ugual modo, la probabilità di ottenere il risultato nel boreliano* $E \subset \sigma(A)$ *quando misuro A è*

$$\mu^{(P(A))}_{\psi,\psi}(E) := ||P^{(A)}_E \psi||^2$$

dove $P^{(A)}$ *è la PVM dell'operatore A. Il valore di aspttazione di A,* $\langle A \rangle_\psi$ *risulta essere*

$$\langle A \rangle_\psi := \int_{\sigma(A)} \lambda d\mu^{(P(A))}_{\psi,\psi}(\lambda)$$

possiamo derivarne la famosa formula

$$\langle A \rangle_\psi = \langle \psi | A \psi \rangle$$

1.7 Divergenza della serie di Dyson

Generalmente le serie in fisica non sono convergenti e non importa che lo siano. In particolare, la serie proposta da Dyson per trovare approssimazioni successive dell'operatore evoluzione temporale con Hamiltoniane illimitate e tempo-dipendenti diverge molto velocemente.

Teorema (Formula di Taylor con Resto di Peano)

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervallo,* x_0 *un punto interno ad* I*, e sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione.*

Se f *è derivabile* n *volte nel punto* x_0*, allora esiste un unico polinomio* $P_n(x)$ *di grado minore o uguale a* n *tale che*

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \to x_0$$

Il polinomio $P_n(x)$ *è il* ***Polinomio di Taylor*** *di* f *centrato in* x_0*:*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

La notazione $o((x - x_0)^n)$ *(detto* ***Resto di Peano****) indica una funzione* $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ *tale che:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Questo significa che possiamo sempre stimare di quanto stiamo sbagliando se supponiamo di prendere un intervallo delle x e un espansione della serie fino all'ordine k-esimo.

$$|R_n(x)| \leq M|x - x_0|^n$$

dove M dipende dalla derivata n-esima e $|x - x_0|$ è l'intervallo che stiamo considerando.
Calandoci nell'esempio della serie di Dyson (o di qualsiasi altra serie divergente), quello che ci mostra questo teorema è che se io scelgo una certa accuratezza ε ()dovuta allo strumento) che stimi l'errore, allora $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x$ t.c. $M|x - x_0|^n > \varepsilon$ e non solo, infatti M, cresce con l'ordine della derivata (in questo tipo di serie) e quindi quello che succede è che più si vuole un resto accurato e ad un ordine alto, più si deve accorciare la scala dei tempi (x). Queste serie vengono dette asintotiche.

1.8 $C^\star$ algebre

p.86 Moretti.

2 Esempi ed osservazioni utili

A cosa serve uno spazio normato e il prodotto scalare?

Prendo un SR e fisso una $(O, e_1, e_2 ..., e_n)$ *a questo punto un vettore diventa*

$$v = (x, y) = xe_1 + ye_2$$

con

$$x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad x(v) = x = (e_1, v)$$
$$y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad y(v) = y = (e_2, v)$$

x *e* y *dipendono quindi dalla base. La norma di un vettore invece non dipende dalla base. Il prodotto scalare invece mi serve per distinguere due vettori della stessa norma.*

Norma su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

Si prenda $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *lo spazio delle funzioni reali* C^∞ *a supporto compatto. Posso definirci sopra la norma* $|| \cdot ||_p$ *si può fare perchè è liscia e avendo supporto compatto è limitata.*

2.1 Spazi di Hilbert

Spazi non separabili

- ***Oscilloscopio***
  Vorrei ricostruire $\psi(x) = \sum c_n e^{i\omega_n x}$. *Il problema però è che quando si vuole ricostruire un suono per esempio si fa uno spettro continuo in frequenze (oppure non sono dei seni multipli). Non ho infatti periodicità e quindi nessuna serie di Fourier .*

- ***Funzioni quasi-periodiche***
  Prendiamo $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$
  $$(f, g) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^{R} dx\overline{g(x)}f(x)$$
  questo permette di costruire uno spazio di Hilbert $B_2(\mathbb{R})$ *con la* $||\cdot||_2$. *Una base è* $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$. *Questo spazio di Hilbert non è separabile.*

Insiemi densi

E' possibile lavorare con un certo insieme di funzioni e ottenere risultati che valgono per tutte le altre? Questo ci porta al concetto di insieme denso.
$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ *e* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *sono denso in* $L^2(\mathbb{R})$. *Non ha senso lavorarci in dimensione finita.*

Perchè usiamo L^2

Perchè non vogliamo imporre limiti geometrici a priori sul modello.

2.2 Spazio di Successioni

- $l^p = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$, $1 \le p < \infty$
- $l^\infty = \{(x_n) \subset \mathbb{K} \mid (x_n)$ è limitata$\}$
  $(x_n) \in l^\infty \Leftrightarrow \exists C > 0$ t.c. $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \le C < \infty$
- $c = \{(x_n) \subset \mathbb{K} \mid (x_n)$ ammette limite $< \infty\}$
- $c_0 = \{(x_n) \subset \mathbb{K} \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$
- $c_{00} = \{(x_n) \subset \mathbb{K} \mid x_n$ definitivamente nulla$\}$

Norme

- Su l^p: $||x||_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$
- Su l^∞, c, c_0, c_{00}: $||x||_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$

Inclusioni Naturali tra Spazi $l^p/c/c_0/c_{00}$

Per $1 \leq p < r < \infty$:

$$c_{00} \subset l^p \subset l^r \subset c_0 \subset c \subset l^\infty$$

c_{00} è denso in l^p (per $p < \infty$) e in c_0. Le inclusioni sono continue.

- $(l^p, ||\cdot||_p)$ è Banach.
- $(l^2, ||\cdot||_2)$ con $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n$ è Hilbert.
- $(c_0, ||\cdot||_\infty)$ e $(c, ||\cdot||_\infty)$ sono Banach (sono sottospazi chiusi di l^∞).
- $(c_{00}, ||\cdot||_\infty)$ NON è banach (perchè non è completo).

  Controesempio: Si consideri la successione $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ in c_{00} data da $x_n^k = \begin{cases} 1/n & \text{se } 1 \leq n \leq k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$.

  - È una successione di Cauchy in l^∞: per $l \geq 1$,

  $$||x^k - x^{k+l}||_\infty = \sup_{n=k+1}^{k+l} \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{k+1} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

  - Ma (x^k) converge in l^∞ alla successione $x = (1/n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  - $x \in c_0$ (perché $1/n \to 0$), ma $x \notin c_{00}$ (non è definitivamente nulla).
  - Quindi c_{00} non è uno spazio chiuso in c_0, perciò non è completo.

Disuguaglianza di Hölder

$\forall x \in l^p, \forall y \in l^q$ t.c. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq ||x||_p ||y||_q$$

Se $p = q = 2 \implies$ Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

Separabilità di l^p

- l^p è separabile per $1 \leq p < \infty$. (l^∞ non è separabile).
- Uno spazio è separabile $\Leftrightarrow \exists$ un sottospazio denso numerabile.
- c_{00} (in particolare l'insieme delle successioni a valori razionali) è denso in $(l^p, ||\cdot||_p)$ per $1 \leq p < \infty$.
- $\overline{c_{00}}^{||\cdot||_p} = l^p$.
- $(\forall x \in l^p, \exists (x^k) \subset c_{00}$ t.c. $||x^k - x||_p \to 0)$

Riflessività

Def: Uno spazio normato $(X, ||\cdot||_X)$ è riflessivo se l'immersione canonica $J : X \to X^{\star\star}$ è suriettiva.

- $J : x \mapsto \delta_x$
- $\delta_x : X^\star \to \mathbb{K}$ è un funzionale lineare e continuo (un elemento del biduale $X^{\star\star}$) definito da:

  $$f \mapsto \delta_x(f) = f(x)$$

- $X^\star = \{f : X \to \mathbb{K}, \text{lineare e continuo}\}$ (duale topologico)
- $X^{\star\star} = (X^\star)^\star$ (biduale topologico)
- La riflessività vale per $(l^p, ||\cdot||_p)$ con $1 < p < \infty$.
- Tutti gli spazi di Hilbert sono riflessivi.

2.3 Spazi di Funzioni $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(p \in [1, +\infty])$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e μ la misura di Lebesgue.

- $L^p(\Omega) = \{[f] : \Omega \to \mathbb{K} \mid \int_\Omega |f(x)|^p d^n x < \infty\}$, per $1 \leq p < \infty$.
- $L^\infty(\Omega) = \{[f] : \Omega \to \mathbb{K} \mid \exists C > 0 \text{ t.c. } |f(x)| \leq C \text{ q.o. in } \Omega\}$
- La norma in L^∞ è $||f||_{L^\infty} = \inf\{C > 0 \mid |f(x)| \leq C \text{ q.o. in } \Omega\}$ (estremo superiore essenziale).

Si considerano classi di equivalenza $[f]$ (funzioni uguali quasi ovunque) affinché $||f||_{L^p} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ q.o.

Disuguaglianza di Hölder per L^p

Siano $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora $fg \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| d^n x \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p d^n x \right)^{1/p} \left(\int_\Omega |g(x)|^q d^n x \right)^{1/q}$$

ovvero $||fg||_{L^1} \leq ||f||_{L^p} ||g||_{L^q}$.

Inclusioni Naturali

Se $mis(\Omega) = \int_\Omega 1 d^n x < \infty$ (misura finita) e $1 \leq p < r \leq \infty$:

$$L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

L'inclusione è continua.

Riflessività

- $L^p(\Omega)$ è riflessivo per $1 < p < \infty$.
- $L^1(\Omega)$ e $L^\infty(\Omega)$ non sono riflessivi (in generale).

Separabilità

- $L^p(\Omega)$ è separabile per $1 \leq p < \infty$.
- $L^\infty(\Omega)$ non è separabile (in generale).
- $C_0^\infty(\Omega)$ (funzioni C^∞ a supporto compatto in Ω) è denso in $L^p(\Omega)$ per $p < \infty$.
- $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||\cdot||_{L^p}} = L^p(\Omega)$.

Convergenza Debole e Forte in $X^\star$

Sia $(X, ||\cdot||_X)$ uno spazio normato e $\{f_n\} \subset X^\star$.

- **Convergenza Debole (puntuale):** $f_n \rightharpoonup f$ se $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in X$.
- **Convergenza Forte (in norma):** $f_n \to f$ se $||f_n - f||_{X^\star} \to 0$.
- forte $\implies$ debole.
- debole $\implies$ forte se $\dim X < \infty$.

2.4 Spazi $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Def: $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (spazio delle funzioni localmente p-integrabili), $1 \leq p \leq \infty$, se:

$$\forall K \subset \mathbb{R}^n \text{ compatto, } f \in L^p(K)$$

(cioè $\int_K |f(x)|^p dx < \infty$).

Esempi:

- $f(x) \equiv c \in \mathbb{R}$. Se $c \neq 0$, $f \notin L^1(\mathbb{R})$ ma $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (e L^p_{loc} per ogni p).
- $f \in C^0(\mathbb{R}^n) \implies f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ per ogni p, perché f è limitata sui compatti.
- $f(x) = 1/x$ (con $f(0) = 0$) non è in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Basta prendere un compatto K che contiene 0, ad esempio $K = [-1, 1]$, e si ha $\int_{-1}^1 |1/x| dx = \infty$.

Lemma (Fondamentale Calcolo Variazioni, caso 1D)

Sia $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < b$, $f \in L^1_{loc}((a, b))$. Se vale:

$$\int_a^b f(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty((a, b))$$

allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = c$ per q.o. $x \in (a, b)$.

2.5 Richiami di Complementi di Analisi III

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

Teorema (Teorema di Beppo Levi (Convergenza Monotona))
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ una successione di funzioni tale che:

- $f_n \geq 0$ *q.o.*
- $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ *q.o.* $\forall n \in \mathbb{N}$ *(monotona non decrescente).*

Sia $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ q.o. (il limite esiste, eventualmente $+\infty$). Allora:

$$\int_\Omega f(x) dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) dx$$

Teorema (Lemma di Fatou)
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ una successione di funzioni tale che $f_n \geq 0$ q.o. Allora:

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x) dx$$

Teorema (Teorema di Lebesgue (Convergenza Dominata))
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ una successione di funzioni tale che:

- $f_n(x) \to f(x)$ *q.o. in* Ω.
- $\exists g \in L^1(\Omega)$ *(una funzione dominante) t.c.* $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *q.o.*

Allora $f \in L^1(\Omega)$ e $||f_n - f||_{L^1} \to 0$ (cioè $f_n \to f$ in L^1).

2.6 Spazi di Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$

Esempio (Equazione di Schrödinger per una particella libera):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \underline{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(t, \underline{x})$$

Si cerca ψ tale che $\psi(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ (funzione d'onda) per ogni t. L'equazione contiene $\Delta\psi = \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}$. Per dare senso a questo operatore, non basta richiedere $\psi \in C^2$. La richiesta corretta (in termini energetici) è $\psi(t, \cdot) \in H^2(\mathbb{R}^3)$.

Definizione $W^{1,p}$ (Derivata Debole)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $1 \leq p < \infty$. Si dice che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se:

1. $u \in L^p(\Omega)$
2. $\exists f_1, \dots, f_n \in L^p(\Omega)$ tali che (integrando per parti):
$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega f_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, n$$

Le funzioni f_i sono uniche (q.o.) e sono chiamate **derivate deboli** di u. Si pone $f_i =: \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

- Se $u \in C^1(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, le derivate deboli coincidono con le derivate classiche.

Norma $W^{1,p}$ La norma standard su $W^{1,p}(\Omega)$ è:
$$||u||_{W^{1,p}} = (||u||_{L^p}^p + ||\nabla u||_{L^p}^p)^{1/p} = \left(\int_\Omega |u|^p dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{1/p}$$

(Per $p = \infty$ si usa la somma delle norme L^∞).

Proprietà $(W^{1,p}(\Omega), || \cdot ||_{W^{1,p}})$ è uno spazio di Banach.

- È separabile per $1 \leq p < \infty$.
- È riflessivo per $1 < p < \infty$.
- Per $p = 2$: $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare:
$$(u, v)_{H^1} := \int_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx$$

Definizione $W^{k,p}$

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Per $k \in \mathbb{N}$:
$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k\}$$

dove $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ è un multi-indice, $|\alpha| = \sum \alpha_i$ è l'ordine della derivata, e $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ è la derivata debole.

- $W^{k,2}(\Omega) =: H^k(\Omega)$ (Spazi di Hilbert)
- $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$, quindi $H^0 = L^2$.
- Esempio Schrödinger: $\psi(t, \cdot) \in H^2(\mathbb{R}^3) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid \partial_i \psi \in L^2, \partial_i \partial_j \psi \in L^2\}$.

Teoremi di Embedding di Sobolev

I teoremi di Sobolev (o immersioni) stabiliscono relazioni tra gli spazi $W^{k,p}$ e gli spazi C^m (spazi di funzioni continue con m derivate continue).
Se $k - n/p > m$ (dove m è un intero ≥ 0), allora $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset C^m(\mathbb{R}^n)$.
Una formula sintetica è: $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \implies u \in C^m(\mathbb{R}^n)$ con $m = \lfloor k - n/p \rfloor$.

Osservazione

- $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$. *Qui* $k = 2, p = 2, n = 3$.
- $m = \lfloor 2 - 3/2 \rfloor = \lfloor 0.5 \rfloor = 0$.
- *Quindi* $H^2(\mathbb{R}^3) \subset C^0(\mathbb{R}^3)$.
- *Questo significa che una funzione H^2 (dopo eventuale modifica su un insieme di misura nulla) è continua e limitata.*
- *Questo è fondamentale per poter "valutare la funzione ψ in un punto x_0", $\psi(x_0)$, operazione che non ha senso per una generica funzione L^2.*

2.7 Operatori

Operatore posizione

Prendiamo $\mathcal{H} = L^2((0,1))$ e definiamo

$$\hat{X} : L^2((0,1)) \rightarrowtail L^2((0,1)) \qquad \hat{X}\psi = x\psi$$

possiamo calcolare la norma usando che

$$\int_0^1 dx|x\psi(x)|^2 \leq \int_0^1 dx|\psi(x)|^2 \Rightarrow ||\hat{X}|| \leq 1$$

Se però $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ allora posso prendere $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

ma $\hat{X}\psi \notin L^2(\mathbb{R})$ quindi gli operatori non limitati hanno bisogno di una teoria più estesa.
Vogliamo costruire l'aggiunto di $\hat{X}$, supponiamo di saperne l'esistenza. Possiamo usare

$$(\phi, \hat{X}\psi) = \int_0^1 dx\overline{\phi(x)}x\psi(x) = \int_0^1 dx\overline{x}\overline{\phi(x)}\psi(x) = (\hat{X}\phi, \psi)$$

quindi è autoaggiunto.
Prendiamo $\mathcal{H} = L^2((0,1))$, proviamo a trovarne gli autovalori

$$\hat{X}\psi = \lambda\psi$$

anche se mi aspetto a priori che $\lambda = x$ $\forall\psi \in [0,1]$ $\exists\psi \neq 0 \in W_\lambda$ quindi deve esistere un sottospazio ortogonale a W_λ quindi ho trovato una decomposizione con cardinalità di $[0,1]$, ma questo è assurdo perchè L^2 è separabile. Abbiamo postulato che $\hat{X}$ sia l'operatore giusto per la posizione magari ha autovalori diversi da quelli che ci aspttiamo però $\forall x$ troviamo il λ tale che

$$x\psi(x) = \lambda\psi(x) \iff \psi(x) = 0$$

quindi non ho autovalori. Proviamo ad estendere la definizione di autovalore. Con le matrici quadrate 1

$$Tv = \lambda v \iff (T - v\mathbb{1}) = 0 \Rightarrow \nexists(T - v\mathbb{1})^{-1}$$

quindi se esiste l'inversa allora non λ non è un autovalore. In dimensione finita non ho fatto niente. Vediamo il caso di $\hat{X}$

$$\exists(\hat{X} - \lambda\mathbb{1})^{-1} \text{ t.c. } ((\hat{X} - \lambda\mathbb{1})^{-1}\psi)(x) = \frac{1}{x-\lambda}\psi(x) \Rightarrow (\hat{X} - \lambda\mathbb{1})^{-1} := \frac{1}{x-\lambda}$$

Se $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \setminus [0,1]$

$$\int_0^1 dx|\frac{\psi}{x-\lambda}|^2 < \infty$$

quindi ho l'inverso ben definito. Dato che l'unico intervallo in cui quell'integrale non è definito sono $[0,1]$ non ho l'inversa quindi sono autovalori. Quindi possiamo introdurre questa nuova definizione pagando il prezzo di non avere più autofunzioni in L^2, useremo le distribuzioni.
Questo operatore ha un ottimo comportamento nei limitati. Cambiando gli autovalori a seconda dello spazio in cui ci troviamo.

Operatore parità

Prendiamo $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ e definiamo

$$\hat{P} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrowtail L^2(\mathbb{R}) \qquad \hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$$

possiamo calcolare la norma

$$||\hat{P}|| = 1$$

esso è anche unitario, cioè non cambia le norme.
Troviamo gli autovalori di P

$$P\psi = \lambda\psi \to \psi(-x) = \lambda\psi(+x)$$

usando P^2 possiamo trovare che $\lambda^2 = 1$. Definiamo $\psi_\pm = \frac{\psi(x)\pm\psi(-x)}{2}$ si mostra che sono autovalori di P. Quindi ogni funzione di L^2 può essere decomposta in due funzioni, la parte pari e la parte dispari.
Prendiamo una carica q a destra di un semispazio infinito conduttore, prendiamo $\vec{E}_q = k\frac{q}{r^2}\hat{r}$ come se non ci fosse la parete e inoltre voglio che $\vec{E}_q(x=0) = 0$ prendo quindi la parte dispari e rimane una soluzione delle Maxwell. Se invece avessi $\partial_x\vec{E}_q(x=0) = 0$ prendo la parte pari.
Si può dimostrare che l'operatore che prende la parte pari (dispari) sia un proiettore.

Operatori finito dimensionali

Un operatore su $\mathbb{C}^n$ è sempre rappresentabile tramite una matrice ed è sempre limitato. I seguenti sono indipendenti dalla base scelta

- *Determinante (dipende dal prodotto degli autovalori)*
- *Traccia (dipende dalla somma degli autovalori)*
- *Autovalori*

dato che voglio estrarre informazioni da un sistema fisico che è indipendente dalla base, queste devono essere contenute negli autovalori. Da ciò deriva il postulato della misura. Ci interessiamo però di misure reali quindi vorremmo che i nostri autovalori fossero numeri reali. Data una $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ e una b.o.c $\{e_i\}$ allora $A_{ij} = (e_i, Ae_j)$ se A è diagonalizzabile allora esiste una U tale che

$$UAU^{-1} = \sum \lambda_i P_i \qquad \tilde{P}_i := U^{-1}PU \Rightarrow A = \sum \lambda_i \tilde{P}_i$$

tramite il teorema spettrale si dimostra che $A = \bar{A}^\dagger = A^\star$

Operatore impulso

Prendiamo una $\psi \in L^2$

$$\psi(x) = \begin{cases} x^{-1/4} & 0 \le x < 1 \\ 0 & \textit{altrove} \end{cases}$$

applicando $\frac{d}{dx}$ usciamo da L^2. Ora provo a calcolare l'aggiunto

$$\left(\phi, -i\frac{d\psi}{dx}\right) = -i\int_0^1 dx\overline{\phi(x)}\frac{d\psi}{dx}(x) = -i\bar{\phi}\psi|_0^1 + \int_0^1 dx\overline{\left(-i\frac{d\phi}{dx}\right)}\psi$$

questo termine di bordo va rimosso.
Questo operatore ha un ottimo comportamento negli illimitati, sistema il comportamento degli stati all'infinito e peggiora le singolarità in zero. Cambiando gli autovalori a seconda dello spazio in cui ci troviamo. Se lo spazio è limitato P e T NON sono più autoaggiunti.
Prendiamo quindi $\mathcal{H} = L^2(0,\infty)$, che è assimilabile al caso di una particella contro una parete e supponiamo inizialmente di prendere

$$\hat{P} = -i\frac{d}{dx} \qquad D(\hat{P}) = C_0^\infty(0,\infty)$$

stando attenti a prendere l'intervallo aperto e non chiuso se no si ammettono funzioni che non si annullano in 0. Quindi si trova che

$$\left(\phi, -i\frac{d\psi}{dx}\right) = -i\int_0^1 dx\overline{\phi(x)}\frac{d\psi}{dx}(x) = -i\bar{\phi}\psi|_0^1 + \int_0^1 dx\overline{\left(-i\frac{d\phi}{dx}\right)}\psi = \left(\hat{P}^\star\phi, \psi\right)$$

dove l'ultima uguaglianza ha senso se e solo se

1. *il dominio di $\hat{P}$ permette l'annullamento del termine di bordo*
2. *$\psi \in L^2$ e $\phi' \in L^2 \Rightarrow \psi\phi' \in L^1$*

quindi troviamo che $D(\hat{P}^\star)$ è massimale, cioè tutte le funzioni tali che la loro derivata è in L^2. A questo punto usiamo la teoria degli indici di difetto di Von Neumann, trovando il $ker(P^\star \pm i\mathbb{I})$, risolvendo le due equazioni differenziali si arriva a scartare la soluzione esponenziale crescente perchè non è in $L^2(0,\infty)$ ma a tenere l'altra. Questo fa si che le dimensioni degli spazi siano diverse e quindi P non è autoaggiunto e quindi neanche un'osservabile fisica di quel sistema. Capiamo cosa significa, mettiamo caso di avere l'hamiltoniana di particella libera

$$\hat{H} = \hat{T} \qquad \hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

(da notare che non ho fatto comparire P), che applicata alla soluzione esponenziale negativa mi restituisce un'autovalore negativo. Questo autovalore non è rimuovibile come in fisica classica aggiungendo una costante in quanto in MQ questo non è più valido. P non può più essere autoaggiunto, in quanto se questo fosse vero, avrei che

$$\hat{P} = \sqrt{(2m\hat{H})}$$

e quindi avrebbe un autovalore complesso, il che non lo renderebbe autoaggiunto (fisico). A livello sperimentale quello che si fa è misurare sempre l'energia e mai l'impulso. Misurando vicino alla parete ci si accorge di questa soluzione e di questo autovalore, mentre mettendoci molto lontano dalle pareti questo effetto non viene distinto dal detector e si può lavorare con l'ipotesi di $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$.
Nel caso $\mathcal{H} = L^2(0,1)$ si trova che $d_+ = d_- = 1$ e quindi P risulta essere un buon osservabile. Quindi ho una mappa $U : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tra i due sottospazi $\mathcal{N}_\pm$ che manda $z \mapsto e^{i\alpha}z$ rappresentando un'isometria tra i due spazi. Costruendo tramite essa le estensioni autoaggiunte, si può notare che la scelta di α rappresenta la scelta della condizione al contorno del problema.

Operatori compatti

Possiamo immaginarceli come matrici infinite. Vorrei fare il conto di $\langle A \rangle$ con un certo $\psi = (\alpha, \beta)$ senza utilizzare una base. Non è che forse $\langle A \rangle = Tr(\rho A)$ dove

$$\rho = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \bar{\alpha}\beta \\ \bar{\beta}\alpha & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

facendo il conto si trova che è vero. In MQ si può generalizzare uno stato con queste matrici di densità. In spazi infinito-dimensionali abbiamo bisogno di oggetti del genere con traccia finita, quali sono? Operatori classe traccia che sono compatti.
Gli operatori compatti garantiscono che:

1. *Gli autovalori ordinati tendono a 0*
2. *Ogni autovalore ha molteplicità finita*

quindi abbiamo speranza che la traccia converga.

Operatori non limitati

Un esempio generale di operatore non limitato è (con $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$)

$$T = \sum_{k=0}^{N} c_k(x)\frac{d^k}{dx^k}$$

se ho $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ $T\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e sono tutti stati.

Operatori densi

Definiamo

$$\hat{T} = -i\frac{d}{dx} \qquad \hat{K} = -\frac{d^2}{dx^2}$$

il dominio massimale è quello per cui ha senso applicarci l'impulso.

$$D_{massimale}(\hat{T}) = H^1(\mathbb{R}) \qquad D_{massimale}(\hat{K}) = H^2(\mathbb{R})$$

dobbiamo anche assicurarci che (la corrente conservata)

$$\lim_{x\to\infty} \overline{\psi}\frac{d\psi}{dx} = 0$$

questa va a 0 solo in una dimensione su H^1 ma non in $\mathbb{R}^3$, questa va a 0 ma per tanti altri matti motivi. Un caso sensato in cui possiamo fare i conti senza soffrire è $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = D_0(\hat{T})$ che è denso in tanti spazi e va tutto bene. Proviamo a trovare l'aggiunto

$$(\phi, T\psi) = -i\int_{\mathbb{R}} \overline{\phi(x)}\frac{d\psi}{dx} = -i\bar{\phi}\psi\Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\int_{\mathbb{R}} \frac{d\bar{\phi}(x)}{dx}\psi(x)$$

dove il termine di bordo muore senza problemi, se avessi usato H^1 andava bene in una dimensione ma in tre assolutamente no. Continua però a non essere definito bene il secondo integrale, potrebbe essere comunque un integrale divergente. Se ho però la derivata di $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ allora va bene perchè il prodotto di due L^2 mi da una L^1 e quell'integrale si fa. Allora a quel punto posso dire che quel conto fa $(\hat{T}^\star\phi, \psi)$ ottengo quindi che

$$D(\hat{T}) = \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad\qquad D(\hat{T}^\star) = H^1(\mathbb{R})$$

però

$$T^\star\psi = -i\frac{d\psi}{dx} \quad \Rightarrow \quad T \subset T^\star$$

La domanda che mi faccio è, esiste un S tale che

$$T \subset S \subset T^\star \quad t.c. \quad S = S^\star$$

La risposta può essere, non si può fare (operatore P su una semiretta), si può fare ed è unico (operatore P su $\mathbb{R}$), ci sono infiniti modi di farlo.

2.8 Varie su operatori

Aggiunto di A

Scelgo $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e suppongo che $A\psi = \lambda_1\psi$ quindi il sistema non cambia e io posso confrontarlo con uno stato di controllo $(\psi, \lambda_1\psi) = (\psi, A\psi) = \lambda_1$ (dato che $||\psi|| = 1$). In generale posso farlo con un qualunque vettore di comtrollo o un array di essi. Posso ricavare la stessa informazione agendo sullo stato di controllo invece che sul sistema fisico? In altre parole, esiste un certo B tale che $(\phi, A\psi) = (B\phi, psi)$? La risposta ci porta all'aggiunto di A. Se questo operatore è lo stesso A si dice che è autoaggiunto e ha autovalori reali.

Modulo di un operatore

Prendiamo un $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ diagonalizzabile e prendiamo una funzione $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$A = \sum \lambda_i P_{\lambda_i} \Rightarrow f(A) := \sum f(\lambda_i) P_{\lambda_i}$$

il modulo serve perchè vorrei decomporre una matrice come decompongo un numero complesso in fase e modulo. A questo punto f la scelgo come la funzione radice.

Traccia di un operatore

Prendiamo per semplicità una matrice, la traccia di A posso definirla anche nel caso infinito dimensionale, ma converge? Ipotizziamo che la traccia sia la somma infinita dei suoi autovalori

$$TrA = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j$$

Per il teorema di Riemann-Dini, dato un numero reale e una serie semplicemente convergente ma non assolutamente convergente (come $\sum^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} = ln2$), esiste una permutazione di termini di tale successione che ha converge a quel numero. Questo è un problema in MQ perchè potrei avere stati normalizzati a seconda della permutazione della serie. Quindi va richiesta la convergenza assoluta. Facciamo un esempio in cui le cose vanno male.
Prendimamo un operatore $T : \mathcal{H} \in \mathcal{H}$ e un vettore che scomponiamo sulla base standard e_n

$$\psi = \sum^{\infty} c_n e_n \qquad \Rightarrow \qquad T\psi := \sum^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} c_n e_n$$

T si può mostrare che è limitato quindi $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e che $||T|| \leq 1$. Però

$$TrT = \sum^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = ln2$$

Ora se cambio base, e quindi scelgo i vettori della nuova base prendendone due dispari e uno pari... cioè $v_1 = e_1$ $v_2 = e_3$ $v_3 = e_2$ $v_4 = e_5$... ottengo che

$$TrT = \sum^{\infty} \left[\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right] = \frac{3}{2} ln2$$

infatti non è classe traccia e non può essere uno stato quantistico.

Chiusura di un operatore

Negli spazi finito dimensionali è come la continuità però non vediamola così.
Un operatore non chiuso è uno nel dominio non ci sono alcuni punti, come una retta che non ha il punto in zero. Uno che è chiudibile è uno che posso dire il suo valore dove non è definito.

2.9 Osservazioni sulla MQ

Misure in MQ

In MQ ho una corrispondenza biunivoca tra osservabili e operatori su $L^2(\mathbb{R})$

$$A : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

voglio che il processo di misura restituisca sempre qualcosa nello stesso spazio e voglio che non sia troppo diverso dallo stato iniziale (che non cambino le propietà topologiche degli insiemi input) i.e. voglio continuità degli operatori. Per esempio prendiamo U_a operatore che agisce su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ come

$$(U_a f)(x) = f(x-a)$$

questa cosa funziona perchè l'integrale di Lebesgue è invariante per traslazioni.
Prendo uno stato $\psi \in \mathcal{H}$ ci faccio agire A (operatore su questo spazio) e ottengo un nuovo stato. Siamo interessati quale sia la "differenza" tra questo nuovo stato e quello inziale. Quindi viene introdotta la norma di un operatore.

Successione di misure

Vorrei inoltre poter fare una successione di misure sul mio sistema che generano una successione di stati che non so neanche se converge. Vorrei che a partire dai dati sperimentali riuscissi a concludere che la successione converge a qualcosa che posso approssimare a meno di un ϵ. Devo avere quindi uno spazio in cui Cauchy $\iff$ Convergente. I limiti sono SEMPRE in norma.

Perchè la MQ è basata su $L^2(\mathbb{R})$

Si consideri

$$\varepsilon(E, B) = \int_{\mathbb{R}} dx(|E|^2 + |B|^2)$$

quest'integrale ovviamente deve convergere, ma esistono soluzioni delle Maxwell che lo fanno divergere e^{x-t}. Quindi si richiede che $E, B \in L^2(\mathbb{R})$. Gli spazi di Hilbert separabili vogliono mantenere la finitezza di queste grandezze fisiche.

Statistica di Bose-Einstein e oscillatore armonico quantistico

Si prenda l'oscillatore armonico quantistico

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{Q}^2$$

esso presenta uno spettro discreto $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$, da dove salta fuori l'ipotesi di Planck?
Dato $\beta = (k_B T)^{-1} > 0$ si può prendere $e^{-\beta\hat{H}}$ e calcolarne la traccia con una boc di autovettori di $\hat{H}$

$$Tr(e^{-\beta\hat{H}}) = \sum^{\infty} (\psi_n, e^{-\beta\hat{H}}\psi_n) = \sum^{\infty} (\psi_n, \sum^{\infty} \frac{1}{n!}(-\beta\hat{H})^n \psi_n) = \sum^{\infty} e^{-\beta E_n} = e^{-\beta\hbar\omega/2} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

dove nell'ultimo passaggio è stata calcolata la serie geometrica. Si mostra facilmente che $|\hat{H}| = \hat{H}$ (è positivo e autoaggiunto). L'informazione sulla statistica è contenuta nella traccia dell'Hamiltoniano.
Ci potremmo anche chiedere se H sia autoaggiunto, la risposta è negli indici di difetto e nelle equazioni differenziali ad esse associate. Quello che si trova è che la soluzione esiste per Picard-Lindelhof (polinomi di Hermite) ma non sono $\in L^2$.

2.10 Distribuzioni

Distribuzioni tramite funzioni $L^1_{\mathbf{Loc}}$

Sia $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ allora il funzionale $u_\psi : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \in \mathbb{C}$ tale che

$$f \mapsto u_\psi(f) := \int_{\mathbb{R}} dx f(x)\psi(x)$$

(che esiste sicuramente) è una distribuzione? Cioè è continuo?
Si verifica facilmente che è sequenzialmente continua.

$$|\int_{\mathbb{R}} dx f_j(x)\psi(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} dx|f_j(x)||\psi| \leq M \int_{\mathbb{R}} dx|\psi| = M'$$

dove l'ultima disuguaglianza è data perchè è a supporto compatto con M massimo. Per convergenza dominata posso passare il limite sotto al segno d'integrale e ottengo che tutto tende a 0. Quindi è sequenzialmente continua quindi possiamo scrivere impropriamente che

$$L^1_{Loc} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$