

# Appendici

## Meccanica Quantistica

---

### Indice

<b>1</b>	<b>Appendici matematiche</b>	<b>3</b>
1.1	Definizione di prodotto tensore . . . . .	3
1.2	Dualità e Riflessività negli Spazi Normati . . . . .	4
1.3	La Notazione di Dirac in uno Spazio di Hilbert . . . . .	5
1.3.1	Duali Algebrici vs. Topologici . . . . .	5
1.4	Gli Spazi di Hilbert Attrezzati (Rigged Hilbert Spaces) . . . . .	6
1.4.1	La Decomposizione di un Vettore di $\mathcal{H}$ . . . . .	7
1.4.2	Perché l'Integrale "Torna" in $\mathcal{H}$ ? . . . . .	7
1.5	PVMs . . . . .	8
1.6	Decomposizione spettrale per operatori autoaggiunti . . . . .	11
1.7	Divergenza della serie di Dyson . . . . .	12
1.8	$C^*$ algebre . . . . .	13
1.8.1	Rappresentazioni di $*$ -algebre . . . . .	15
1.9	Algebre di von Neumann (o $W^*$ -algebre) . . . . .	16
1.9.1	Generazione e Operazioni Reticolari . . . . .	17
1.9.2	Somma Hilbertiana di Algebre di von Neumann . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Fondamenti logico-matematici della Meccanica Quantistica</b>	<b>19</b>
2.1	Grandezze Classiche e Misurabilità . . . . .	19
2.2	La nozione di Reticolo . . . . .	19
2.3	La logica non-Booleana della Meccanica Quantistica . . . . .	21
2.4	Perché le osservabili sono operatori autoaggiunti . . . . .	22
2.5	Il Teorema di Soler . . . . .	23
2.6	Argomenti avanzati su Teoremi di Soler e Piron . . . . .	25
2.6.1	Dagli assiomi allo Spazio Vettoriale Generalizzato . . . . .	25
2.6.2	Il Teorema di Solèr e la natura del campo . . . . .	26
2.7	Il Teorema di Gleason . . . . .	26
2.8	Teorema di Bell debole . . . . .	28
2.8.1	Stati Puri e Misti: Struttura convessa . . . . .	29
2.9	Tipologie di Sovrapposizione e Stati Misti . . . . .	29
2.9.1	L'origine dell'Interferenza Quantistica . . . . .	30
2.10	Stati post-misurazione: una critica al postulato del collasso . . . . .	30
2.10.1	Confronto tra i postulati di von Neumann e Lüders . . . . .	31
2.10.2	Dipendenza dello stato dalla procedura di misura . . . . .	32
2.10.3	Misurazioni Non Selettive (Ideali) . . . . .	33
2.11	Logica delle Algebre di von Neumann e Classificazione dei Fattori . . . . .	33
2.11.1	Funzione Dimensione e Classificazione dei Tipi . . . . .	34
2.12	Proprietà Reticolari e Classificazione Generale . . . . .	35
2.12.1	Estensione alle Algebre di von Neumann Generali . . . . .	35
2.13	Il Teorema di Gleason Generalizzato . . . . .	36
2.14	Caratterizzazione Algebrica degli Stati: Il Teorema di Riesz Non Commutativo . . . . .	36
2.14.1	Stati come Funzionali Lineari . . . . .	37
2.14.2	Analisi del Ragionamento: L'analogia con Riesz . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Esempi ed osservazioni utili</b>	<b>39</b>
3.1	Spazi di Hilbert . . . . .	39
3.2	Spazio di Successioni . . . . .	39
3.3	Spazi di Funzioni $L^p(\mathbb{R}^n)$ ( $p \in [1, +\infty]$ ) . . . . .	41
3.4	Spazi $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	42
3.5	Richiami di Complementi di Analisi III . . . . .	42
3.6	Spazi di Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	43

3.7	Operatori . . . . .	44
3.8	Varie su operatori . . . . .	47
3.9	Distribuzioni . . . . .	49
3.10	Osservazioni sulla MQ . . . . .	50
3.10.1	Il caso dell'Idrogeno . . . . .	50
3.11	Indici di difetto e Criteri . . . . .	51
3.12	Varie su distribuzioni . . . . .	54
3.13	Esempi di equazioni distribuzionali . . . . .	54
3.14	La distribuzione $\frac{1}{x}$ . . . . .	54
3.14.1	Soluzione Omogenea . . . . .	54
3.14.2	Soluzione Particolare . . . . .	55
3.14.3	Verifica Formale . . . . .	55
3.14.4	Soluzione Generale . . . . .	55
3.14.5	Analisi Complessa e Regolarizzazione . . . . .	56
3.14.6	Calcolo dei residui sui semicerchi . . . . .	56

# 1 Appendici matematiche

## 1.1 Definizione di prodotto tensore

### Definizione (Spazio vettoriale libero)

Dato un insieme qualunque  $S$  possiamo definire lo spazio vettoriale libero su un campo  $\mathbb{K}$  l'insieme

$$\mathbb{K}(S) := \{f : S \rightarrow \mathbb{K} \mid f \neq 0 \text{ su un numero finito di elementi di } S\}$$

### Definizione (Funzione caratteristica)

Definisco una funzione  $\chi : S \rightarrow \mathbb{K}(S)$  in modo che un elemento di un qualunque insieme  $S$  sia in relazione con la  $f \in \mathbb{K}(S)$  che fa 1 su quell'elemento e fa 0 su tutti gli altri.

Abbiamo quindi trovato una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{K}(S)$  che è l'insieme delle funzioni caratteristiche dell'insieme  $S$  tale che  $\mathcal{B} \subset \mathbb{K}(S)$ . Quindi ci sono elementi di  $\mathbb{K}(S)$  che non sono funzione caratteristica di nessun elemento in  $S$  però possiamo sempre scrivere per un certo  $k \in \mathbb{K}(S)$

$$k = \sum \lambda_i k_i = \sum \lambda_i \chi(s_i)$$

dove  $k_i \in \mathcal{B}$ .

Identifichiamo ora  $S$  con il prodotto cartesiano di una serie di spazi vettoriali  $U_1, \dots, U_n$  su un campo  $\mathbb{K}$ . Definiamo inoltre un sottoinsieme  $\mathcal{R} \subset \mathbb{K}(S)$  nel seguente modo:

- $q \in \mathcal{R} \iff$  dato un certo  $\lambda \in \mathbb{K}$  e un certo  $j \in \mathbb{N}$  esistano due elementi in  $S$ ,  $s_1 = (v_1, \dots, v_n)$  e  $s_2 = (v_1, \dots, \lambda v_j, \dots, v_n)$  tale che

$$q = \lambda \chi(s_1) - \chi(s_2)$$

- $q \in \mathcal{R} \iff$  dato  $j \in \mathbb{N}$  esistano tre elementi in  $S$ ,  $s_1 = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $s_2 = (v_1, \dots, v'_j, \dots, v_n)$  e  $s_3 = (v_1, \dots, v_j + v'_j, \dots, v_n)$  tale che

$$q = \chi(s_1) + \chi(s_2) - \chi(s_3)$$

Ora possiamo quozientare su questo insieme definendo  $U_T := \mathbb{K}(S)/\mathcal{R}$  e una mappa di proiezione  $T : S \rightarrow U_T$  che associa ad ogni elemento la sua classe di equivalenza (definita per esempio associando ogni elemento di  $S$  alla classe di equivalenza di cui fa parte  $\chi(s)$ ).

### Teorema

La mappa  $T$  soddisfa la proprietà di universalità cioè per ogni spazio vettoriale  $W$  e per ogni mappa multilineare  $f : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow W$  esiste un'unica mappa lineare  $f^T : U_T \rightarrow W$  che fa commutare il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} U_1 \times \dots \times U_n & \xrightarrow{T} & U_T \\ & \searrow f & \downarrow f^T \\ & & W \end{array}$$

Quindi  $U_T$  è lo spazio prodotto tensore  $U_T = U_1 \otimes \dots \otimes U_n$

*Dimostrazione.* Definiamo l'applicazione  $\tilde{f} : \mathbb{K}(U_1 \times \dots \times U_n) \rightarrow W$  in modo che, dopo aver fissato la base  $\{k_i\}$ , e preso un  $k = \sum_i a_i k_i$

$$\tilde{f}(k) := \sum_i a_i f(\chi^{-1}(k_i))$$

dato che l'inversa di  $\chi$  esiste per gli elementi della base. Ora, posso prendere  $f^T$  come  $f^T([k]) := \tilde{f}(k)$  dove  $[k]$  è la classe di equivalenza dell'elemento  $k \in \mathbb{K}(S)$  di cui  $k$  è un rappresentativo. Troviamo infatti che in questo modo  $f = f^T \circ T$  che fa commutare il diagramma.

$f^T$  è lineare, infatti

$$f^T(a[v] + b[w]) = f^T([av] + [bw]) = f^T([av + bw]) = f(av + bw) = af(a) + bf(w) = af^T([v]) + bf^T([w])$$

per le proprietà di linearità del modulo e di  $f$ .

Inoltre se io avessi  $f^T$  e  $g^T$  entrambe con le proprietà dimostrate sopra avrei che  $f = f^T \circ T = g^T \circ T$  quindi che

$$(f^T \circ T)(s) = f^T([\chi(s)]) = f^T([k]) = f(s) = (g^T \circ T)(s) = g^T([k])$$

quindi sono uguali in un sistema di generatori per  $U_T$ , in quanto le classi di equivalenza che contengono almeno un rappresentativo della base sono un sistema di generatori per tutto  $U_T$ . Per risultati di algebra lineare si trova che se le due mappe sono uguali su un sistema di generatori allora lo sono per tutto lo spazio.  $\square$

**Notazione** In meccanica quantistica

$$[\chi(v_1, \dots, v_n)] =: |v_1\rangle|v_2\rangle\dots|v_n\rangle$$

## 1.2 Dualità e Riflessività negli Spazi Normati

Per comprendere appieno il framework matematico della meccanica quantistica, dobbiamo introdurre i concetti di spazio duale e riflessività.

### Definizione (Spazio Duale Topologico)

*Dato uno spazio normato  $X$  sul campo  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ), il suo **duale topologico**, denotato con  $X^*$ , è lo spazio di tutti i funzionali lineari **continui** (o equivalentemente, limitati)  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ .*

Possiamo iterare questo processo. Il duale di  $X^*$  è  $X^{**} = (X^*)^*$ , chiamato **biduale topologico** di  $X$ .

Esiste un'applicazione "canonica" (naturale)  $\hat{J} : X \rightarrow X^{**}$  che mappa ogni vettore  $x \in X$  in un funzionale lineare continuo su  $X^*$ . Questo funzionale,  $\hat{J}(x)$ , agisce su un elemento  $f \in X^*$  nel seguente modo:

$$(\hat{J}(x))(f) = f(x)$$

Si può dimostrare che  $\hat{J}$  è un'isometria (cioè conserva la norma:  $\|\hat{J}(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ ).

### Definizione (Riflessività)

*Uno spazio normato  $X$  è detto **riflessivo** se l'immersione canonica  $\hat{J} : X \rightarrow X^{**}$  è **surgettiva**, cioè se  $\hat{J}(X) = X^{**}$ .*

In termini semplici, uno spazio è riflessivo se il suo biduale topologico "non è più grande" dello spazio stesso. Ogni elemento di  $X^{**}$  (ogni funzionale lineare continuo sui funzionali lineari continui su  $X$ ) è, di fatto, solo l'immagine di un vettore  $x \in X$  originale.

### Condizioni per la Riflessività

La riflessività è una proprietà potente ma non universale.

#### Spazi Riflessivi (Sì):

- **Tutti gli spazi di Hilbert.** Questo è il risultato più importante per la meccanica quantistica, come vedremo, ed è una conseguenza diretta del Teorema di Riesz-Fréchet.
- Tutti gli spazi normati di dimensione finita.
- Gli spazi  $L^p(\Omega)$  e  $l^p$  per  $1 < p < \infty$ .

#### Spazi Non Riflessivi (No):

- Lo spazio  $L^1(\Omega)$ . Il suo duale è  $L^\infty(\Omega)$ , ma il duale di  $L^\infty(\Omega)$  è uno spazio molto più vasto (lo spazio delle misure di Borel finitamente additive) di  $L^1(\Omega)$ .
- Lo spazio  $L^\infty(\Omega)$ .
- Lo spazio  $C(K)$  delle funzioni continue su un insieme compatto  $K$ .
- Lo spazio  $c_0$  delle successioni che tendono a zero (il suo duale è  $l^1$ , ma il suo biduale è  $l^\infty$ ).

Il motivo per cui gli spazi di Hilbert ( $\mathcal{H}$ ) sono così speciali e "ben comportati" è codificato nel seguente teorema fondamentale.

### Teorema (di Rappresentazione di Riesz-Fréchet)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert. Per ogni funzionale lineare continuo  $f \in \mathcal{H}^*$ , esiste un **unico** vettore  $y_f \in \mathcal{H}$  tale che:

$$f(x) = \langle y_f, x \rangle \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{H}$$

Inoltre,  $\|f\|_{\mathcal{H}^*} = \|y_f\|_{\mathcal{H}}$ .

(Nota: se il prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è antilineare nel primo argomento, come in fisica, l'isomorfismo è antilineare. Se è antilineare nel secondo, è lineare).

**Conseguenze per la Riflessività:** Questo teorema stabilisce un isomorfismo (anti-lineare) tra  $\mathcal{H}$  e il suo duale  $\mathcal{H}^*$ . Poiché  $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^*$ , segue banalmente che  $\mathcal{H}^* \cong \mathcal{H}^{**}$ . Combinando i due,  $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^{**}$ . Si può dimostrare che questo isomorfismo è esattamente l'immersione canonica  $\hat{J}$ . **Pertanto, ogni spazio di Hilbert è riflessivo.**

### 1.3 La Notazione di Dirac in uno Spazio di Hilbert

La notazione di Dirac è un modo geniale per sfruttare la riflessività di  $\mathcal{H}$ .

1. **Kets:** Un vettore  $\psi$  nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  (ad esempio,  $L^2(\mathbb{R})$ ) è denotato da un "ket":  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ .
2. **Bras:** Un funzionale lineare continuo  $f \in \mathcal{H}^*$  è denotato da un "bra":  $\langle f|$ .
3. **Il Teorema di Riesz in azione:** Grazie a Riesz, per ogni ket  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , esiste un unico bra  $\langle \psi| \in \mathcal{H}^*$  (il funzionale  $f_\psi(\cdot) = \langle \psi, \cdot \rangle$ ) e viceversa. C'è una corrispondenza biunivoca tra kets e bras.
4. **Il Bracket:** L'azione del bra  $\langle \phi| \in \mathcal{H}^*$  sul ket  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  è scritta come  $\langle \phi|\psi\rangle$ . Matematicamente, questo è:

$$\langle \phi|\psi\rangle \equiv f_\phi(|\psi\rangle) \equiv \langle \phi, \psi \rangle$$

Il risultato è uno scalare (un numero complesso). La notazione "bracket" è la chiusura di un "bra" e un "ket".

La notazione di Dirac brilla per la sua gestione delle "basi continue", come la base della posizione  $\{|x\rangle\}_{x \in \mathbb{R}}$ . Qui sorgono le sottigliezze.

L'oggetto  $|x\rangle$  dovrebbe essere l'autovettore dell'operatore posizione  $\hat{X}$ , tale che  $\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$ . Se lavoriamo in  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ , dove  $\hat{X}$  agisce come  $(\hat{X}\psi)(y) = y \cdot \psi(y)$ , la "funzione d'onda" di  $|x\rangle$  sarebbe  $\psi_x(y) = \delta(y - x)$ , la delta di Dirac. **Problema:** La delta di Dirac non è una funzione e non è in  $L^2(\mathbb{R})$ .

$$\int_{\mathbb{R}} |\delta(y - x)|^2 dy = \infty$$

Quindi,  $|x\rangle$  non è un vettore nel nostro spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ .

#### 1.3.1 Duali Algebrici vs. Topologici

Il prompt solleva un punto cruciale: la distinzione tra duale \*algebrico\* e \*topologico\*.

- **Duale Algebrico ( $\mathcal{L}(X)$ ):** Lo spazio di *tutti* i funzionali lineari  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ , senza alcun requisito di continuità.
- **Duale Topologico ( $X^*$ ):** Il sottospazio  $X^* \subset \mathcal{L}(X)$  che contiene solo i funzionali lineari *continui*.

Sempre  $X^* \subseteq \mathcal{L}(X)$ , e  $X^{**} \subseteq \mathcal{L}(X)^*$  (biduali).

Consideriamo il funzionale "valutazione nel punto  $x$ ":

$$E_x : \psi \mapsto \psi(x)$$

Questo funzionale  $E_x$  è lineare. Ma è continuo sulla norma  $L^2$ ? No. Si può costruire una successione di funzioni  $\psi_n \in L^2(\mathbb{R})$  tale che  $\|\psi_n\|_{L^2} \rightarrow 0$  (converge a zero in norma), ma  $\psi_n(x) \rightarrow \infty$  (diverge nel punto  $x$ ). Poiché il funzionale mappa una successione convergente (a 0) in una non convergente,  $E_x$  è **non continuo** (non limitato) sulla topologia di  $L^2$ .

Dunque,  $|x\rangle$  (o più precisamente, il bra  $\langle x|$  che implementa  $E_x$ ) **non è in  $\mathcal{H}^*$** . Risiede nello spazio molto più ampio  $\mathcal{L}(X)$  (il duale algebrico).

Bisogna quindi vedere  $|x\rangle$  come un elemento del **biduale algebrico**  $\mathcal{L}(X)^*$ . In questo caso,  $|x\rangle$  è un funzionale  $F_x : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathbb{C}$  che agisce su un bra  $\langle y| \in \mathcal{H}^*$ . Se  $|x\rangle$  è non limitato, allora la sua azione su un elemento  $\langle y| \in \mathcal{H}^*$  non è ben definita in termini semplici.

## 1.4 Gli Spazi di Hilbert Attrezzati (Rigged Hilbert Spaces)

La fisica risolve questo problema in modo più elegante, non usando l'ingestibile duale algebrico (che indicheremo con  $\mathcal{L}(X)$  per uno spazio  $X$ ), ma introducendo una struttura più fine nota come **Spazio di Hilbert Attrezzato** o **Triade di Gelfand**.

### Definizione (Spazio di Hilbert Attrezzato (Gelfand Triple))

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert (ad esempio,  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ ). Uno **Spazio di Hilbert Attrezzato** è una terna di spazi  $(\Phi, \mathcal{H}, \Phi^*)$  con le seguenti proprietà:

1.  $\Phi$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{H}$  che è **denso** in  $\mathcal{H}$ .
2.  $\Phi$  è dotato di una sua topologia (spesso derivante da una norma  $\|\cdot\|_\Phi$ ) che è **più fine** (più forte) della topologia indotta da  $\mathcal{H}$ .  
(Ciò significa che  $\|v\|_{\mathcal{H}} \leq C\|v\|_\Phi$  per qualche  $C$ , e quindi ogni successione che converge in  $\Phi$ , converge anche in  $\mathcal{H}$ ).
3.  $\Phi^*$  è il **duale topologico** di  $\Phi$  rispetto alla topologia di  $\Phi$ .

L'esempio canonico è prendere  $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R})$  (lo spazio delle funzioni  $C^\infty$  a decrescenza rapida) e  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ . La topologia di  $\mathcal{S}$  è più fine di quella  $L^2$ .

Questa costruzione porta a una "triade" di inclusioni canoniche:

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^*$$

Spieghiamo la seconda inclusione,  $\mathcal{H} \subset \Phi^*$ :

- Grazie al Teorema di Riesz, identifichiamo  $\mathcal{H}$  con il suo duale topologico  $\mathcal{H}^*$ . Quindi  $\Phi \subset \mathcal{H} \cong \mathcal{H}^*$ .
- L'inclusione  $\Phi \subset \mathcal{H}$  è continua (come visto al punto 2 della definizione).
- Per proprietà generali degli spazi duali, questo implica un'inclusione continua "al contrario" per i loro duali topologici:  $\mathcal{H}^* \subset \Phi^*$ .
- Combinando i passaggi, otteniamo la catena di inclusioni:  $\Phi \subset \mathcal{H} \cong \mathcal{H}^* \subset \Phi^*$ .

Lo spazio  $\Phi^*$  è lo spazio delle **distribuzioni temperate**  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , che è molto più grande di  $L^2(\mathbb{R})$  ma molto più "gestibile" del duale algebrico  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

**Conseguenze per la Notazione di Dirac** Questo formalismo ci permette di collocare rigorosamente ogni oggetto:

- I **"veri" kets** (stati fisici normalizzabili)  $|\psi\rangle$  sono in  $\mathcal{H}$ . Gli stati "particolarmente belli" (es. funzioni d'onda  $C^\infty$  e a decrescenza rapida) sono in  $\Phi$ .
- I **"kets generalizzati"** (autostati non normalizzabili) come  $|x\rangle$  sono **elementi di  $\Phi^*$** .

Il bracket  $\langle y|x\rangle$ , che coinvolge due "kets generalizzati" appartenenti entrambi al duale topologico  $\Phi^*$  (ad esempio  $|x\rangle = \delta_x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ), non può essere interpretato come un prodotto scalare (definito su  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ) né come l'azione di un funzionale su un vettore test (definita su  $\Phi^* \times \Phi$ ). Il suo significato emerge invece operazionalmente considerando la *risoluzione dell'identità*,  $\mathbb{I} = \int dx |x\rangle\langle x|$ . Se applichiamo questa identità a un vettore test  $|\psi\rangle \in \Phi$  e poi proiettiamo sul "bra"  $\langle y| \in \Phi^*$ , otteniamo un'identità:  $\langle y|\psi\rangle = \langle y|\mathbb{I}\psi\rangle$ . Sviluppando il lato destro, assumendo la linearità per scambiare l'integrale con il bracket (un'operazione che richiede il rigore della teoria delle distribuzioni), abbiamo  $\langle y|\mathbb{I}\psi\rangle = \langle y|(\int dx |x\rangle\langle x|)\psi\rangle = \int dx \langle y|x\rangle\langle x|\psi\rangle$ .

La rigorosità menzionata è fondamentale perché l'operazione non è banale:  $\langle y|$  è essa stessa una distribuzione ( $\delta_y \in \Phi^*$ ), non un funzionale continuo su  $\mathcal{H}$ , e l'integrale  $\int dx |x\rangle\psi(x)$  è un integrale "debole"

(o integrale di Bochner generalizzato), poiché l'integrando  $|x\rangle$  appartiene a  $\Phi^*$ , non a  $\mathcal{H}$ . L'atto di "portare il bra dentro l'integrale" (scambiare  $\langle y|\int \dots \rangle \rightarrow \int \langle y|\dots \rangle$ ) è uno scambio tra un funzionale e un'integrazione, analogo allo scambio tra un limite e un integrale, che non è universalmente lecito. Il **Teorema del Nucleo (Kernel Theorem) di Schwartz** fornisce il framework matematico rigoroso per definire tali integrali a valori operatoriali e per giustificare questa procedura, stabilendo che un operatore lineare (come l'Identità) da  $\Phi$  a  $\Phi^*$  può essere rappresentato da un "nucleo"  $K(y, x)$  (una distribuzione in due variabili) tale che la sua azione  $\psi(y)$  è data proprio da  $\int dx K(y, x)\psi(x)$ .

Poiché  $\langle y|\psi\rangle = \psi(y)$  e  $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$ , l'equazione diventa  $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}} dx \langle y|x\rangle \psi(x)$ . Questa relazione definisce  $\langle y|x\rangle$  non come uno scalare, ma come il **nucleo (kernel)**  $K(y, x)$  dell'operatore identità. L'unico oggetto matematico che soddisfa questa proprietà per ogni funzione test  $\psi$  è la **distribuzione delta di Dirac**  $\delta(y - x)$ , che è una distribuzione (un funzionale lineare continuo) definita sullo spazio delle funzioni test in due variabili (es.  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ), non uno scalare.

#### 1.4.1 La Decomposizione di un Vettore di $\mathcal{H}$

Consideriamo ora la decomposizione di un "vero" ket  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  sulla base continua:

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx |x\rangle \langle x|\psi\rangle$$

- $|\psi\rangle \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ .
- $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$ . Questa è la "funzione d'onda", una funzione in  $L^2(\mathbb{R})$ . È uno scalare (complesso) per ogni  $x$ .
- $|x\rangle \in \Phi^*$ . È una distribuzione.

L'integrale è quindi:

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx |x\rangle \psi(x)$$

Questa non è un'integrazione di Riemann o Lebesgue. È un **integrale debole**. È l'oggetto  $|\Psi\rangle \in \Phi'$  definito dalla sua azione su un qualsiasi "bra test"  $\langle\phi| \in \Phi$ :

$$\langle\phi|\Psi\rangle := \int_{\mathbb{R}} dx \langle\phi|x\rangle \psi(x) = \int_{\mathbb{R}} dx \overline{\phi(x)} \psi(x)$$

L'ultimo termine è semplicemente il prodotto scalare  $L^2$ :  $\langle\phi, \psi\rangle_{\mathcal{H}}$ .

#### 1.4.2 Perché l'Integrale "Torna" in $\mathcal{H}$ ?

Qui sta il punto cruciale. Abbiamo definito un oggetto  $|\Psi\rangle$  (l'integrale) che agisce come un funzionale  $f_{\psi}$  su tutti gli elementi  $\phi \in \Phi$ :

$$f_{\psi}(\phi) = \langle\phi|\Psi\rangle = \langle\phi, \psi\rangle_{\mathcal{H}}$$

Questo funzionale  $f_{\psi}$  è definito su  $\Phi$ . Ma è continuo anche sulla norma di  $\mathcal{H}$ ? Sì. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, per ogni  $\phi \in \mathcal{H}$ :

$$|f_{\psi}(\phi)| = |\langle\phi, \psi\rangle| \leq \|\phi\|_{\mathcal{H}} \cdot \|\psi\|_{\mathcal{H}}$$

Poiché  $\psi \in \mathcal{H}$ ,  $\|\psi\|_{\mathcal{H}}$  è finito. Dunque  $f_{\psi}$  è un funzionale lineare **continuo sull'intero spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$** .

Questo significa che l'oggetto  $|\Psi\rangle$  (l'integrale) è un **elemento di  $\mathcal{H}^*$** , il duale topologico di  $\mathcal{H}$ . Infine, per il **Teorema di Riesz-Fréchet**, ogni elemento di  $\mathcal{H}^*$  corrisponde a un unico vettore in  $\mathcal{H}$ . E quale vettore in  $\mathcal{H}$  genera il funzionale  $f_{\psi}(\cdot) = \langle\cdot, \psi\rangle$ ? Per l'unicità garantita da Riesz, è proprio il vettore  $|\psi\rangle$  da cui eravamo partiti.

1. Decomponiamo  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  usando kets "cattivi"  $|x\rangle \in \Phi^*$  e coefficienti "buoni"  $\psi(x) \in L^2$ .
2. L'integrale  $\int dx |x\rangle \psi(x)$  è definito in senso debole (distribuzionale).

3. Questo integrale definisce un funzionale lineare  $f_\psi$  che, grazie al fatto che  $\psi(x) \in L^2$ , risulta essere **continuo su  $\mathcal{H}$** .
4. L'integrale, quindi, "collassa" da  $\Phi'$  (distribuzioni) a  $\mathcal{H}^*$  (duale topologico di  $\mathcal{H}$ ).
5. Poiché  $\mathcal{H}$  è **riflessivo** (via Riesz,  $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^*$ ), questo elemento  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^*$  è identificato con un unico elemento in  $\mathcal{H}$ , che è esattamente il  $|\psi\rangle$  originale.

La riflessività dello spazio di Hilbert è la garanzia matematica che la decomposizione di un vettore  $L^2$  lungo una "base" di distribuzioni, pesata con i coefficienti  $L^2$  (la funzione d'onda), ricostruisce fedelmente il vettore  $L^2$  di partenza.

## 1.5 PVMs

### Definizione (Misura complessa)

Sia  $\Sigma(X)$  una  $\sigma$ -algebra su un insieme  $X$ , allora  $\mu : \Sigma(X) \rightarrow \mathbb{C}$  è una *misura complessa* if  $\mu(\emptyset) = 0$  e se vale la  $\sigma$ -addittività in modo che la somma converga nonostante l'ordine (converge assolutamente).

### Definizione (Variazione)

La *variazione*  $|\mu| : \Sigma(X) \rightarrow [0, +\infty)$  è una *misura positiva  $\sigma$ -additiva* definita come

$$|\mu|(E) := \sup \left\{ \sum_{F \in P(E)} |\mu(F)| \mid P(E) \subset \Sigma(X) \text{ al più partizione numerabile di } E \right\}$$

Si dimostra che la *variazione totale*  $\|\mu\| := |\mu|(X)$  è sempre finita.

### Teorema (Radon-Nikodym)

Data una *misura complessa*, esiste una *funzione misurabile*  $h : X \rightarrow \mathbb{C}$  con  $|h(x)| = 1$  rispetto a  $|\mu|$  q.o. che è unica a meno di set di misura nulla, tale che

$$\mu(E) = \int_E h d|\mu| \quad \forall E \in \Sigma(X)$$

### Definizione (Integrale di una funzione misurabile)

la *nozione di integrale* rispetto a  $\mu$  è riservata a *funzioni misurabili* che sono *assolutamente  $\mu$ -integrabili* definito come

$$\int_X f d\mu := \int_X f h d|\mu|$$

tutte le proprietà della *misura positiva* possono essere trasportate a *misure complesse*.

### Definizione (PVMs)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e  $\Sigma(X)$  una  $\sigma$ -algebra su  $X$ . Una *PVM* su  $X$  è una *mappa*  $P : \Sigma(X) \ni E \mapsto P_E \in \mathcal{P}(H)$  dove  $\mathcal{P}(H)$  è lo spazio dei *proiettori* su  $\mathcal{H}$  tale che

1.  $P_X = \mathbb{I}$
2.  $P_E P_F = P_{E \cap F}$
3. Si sommano per famiglie di insiemi disgiunte numerabili

L'ultima proprietà ha senso, in quanto si nota con la disuguaglianza di Bessel, che quella somma converge sempre.

Prendiamo ora  $x, y \in \mathcal{H}, \Sigma(X) \ni E \mapsto \langle x | P_E y \rangle =: \mu_{xy}^{(P)}(E)$ , si noti che è una *misura complessa* con le seguenti proprietà

- $\mu_{xy}^{(P)}(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{xy}^{(P)}(E_n)$  per le proprietà del prodotto interno
- $\mu_{xy}^{(P)}(X) = \langle x | y \rangle$
- $\mu_{xx}^{(P)}$  è sempre positiva e finita



Se consideriamo ora una funzione semplice  $s$  e denotiamo con  $h$  la funzione relativa al teorema di Radon vista precedentemente possiamo scrivere

$$\int_X s d\mu_{xy} := \int_X s h d|\mu_{xy}| = \sum s_k \int_{E_k} h d|\mu_{xy}| = \left\langle x \left| \sum_k s_k P_{E_k} y \right. \right\rangle$$

a questo punto possiamo finalmente definire

$$\int_X s(\lambda) dP(\lambda) := \sum s_k P_{E_k}$$

e quindi abbiamo che

$$\int_X s d\mu_{xy} = \left\langle x \left| \int_X s(\lambda) dP(\lambda) y \right. \right\rangle$$

### Esempio di PVM con proiettori numerabili

Se ponessimo che  $\mathcal{H} = \bigoplus_{j \in J} H_j$  e prendessimo come  $\sigma$ -algebra  $\Sigma(J)$  allora avrei che per  $E \in \Sigma(J)$

$$P_E z = \sum_{j \in E} Q_j z$$

con  $Q_j$  proiettore su  $H_j$ , si può dimostrare che  $P_E$  sono una PVM. In particolare se  $f : J \rightarrow \mathbb{C}$  è  $\mu_{xx}$ -integrabile

$$\int_J f(j) d\mu_{xx}(j) = \sum_{j \in J} f(j) \|Q_j x\|^2$$

questo è il cosiddetto integrale su una "counting measure" e si può estendere a mappe generali usando il teorema della convergenza monotona e poi il teorema di Lebesgue.

### Esempio di PVM su boreliani

Prendiamo  $\mathcal{H} = {}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$  e un  $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  nella  $\sigma$ -algebra di Borel associato al proiettore ortonormale dato dalla funzione caratteristica sul tale insieme. Si può mostrare che

$$\mu_{hg}^{(P)}(E) = \langle h | P_E g \rangle = \int_E \overline{h(x)} g(x) d^n x$$

### Teorema

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert,  $P$  una PVM e  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione misurabile, si definisca

$$\Delta_f := \left\{ x \in \mathcal{H} \left| \int_X |f(\lambda)|^2 \mu_{xx}^{(P)}(\lambda) < \infty \right. \right\}$$

valgono le seguenti proprietà

- $\Delta_f$  è un sottospazio denso in  $H$  ed esiste un operatore unico

$$\int_X f(\lambda) dP(\lambda) : \Delta_f \rightarrow \mathcal{H} \quad (*)$$

tale che

$$\left\langle x \left| \int_X f(\lambda) dP(\lambda) y \right. \right\rangle = \int_X f(\lambda) d\mu_{xy}^{(P)}(\lambda) \quad \forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in \Delta_f$$

in particolare  $f$  è integrabile

- L'operatore  $\star$  è chiuso e normale
- L'operatore aggiunto è

$$\left( \int_X f(\lambda) dP(\lambda) \right)^\star = \int_X \overline{f(\lambda)} dP(\lambda)$$

- Vale che

$$\left\| \int_X f(\lambda) dP(\lambda) x \right\|^2 = \int_X |f(\lambda)|^2 d\mu_{xx}^{(P)}(\lambda)$$

**Corollario**

Se  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  solo assume valori non negativi reali allora

$$\left\langle x \left| \int_X f dPx \right. \right\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Delta_f$$

Se  $T$  è un operatore con  $D(T) = \Delta_f$  in modo che

$$\langle x | Tx \rangle = \int_X f(\lambda) d\mu_{xx}^{(P)}(\lambda) \quad \forall x \in \Delta_f$$

allora

$$T = \int_X f(\lambda) dP(\lambda)$$

Possiamo ora definire la seguente proprietà.

**Definizione (P-essenzialmente limitatezza)**

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  misurabile e  $P$  una PVM

$$\|f\|_\infty^{(P)} := \inf\{r \geq 0 | P(x \in X | |f(x)| > r) = 0\}$$

allora se  $\|f\|_\infty^{(P)} < +\infty$ ,  $P$  è essenzialmente limitata.

Allora possiamo dare il seguente teorema devastante per le funzioni limitate.

**Teorema**

1. Una mappa misurabile  $f$  è  $P$ -essenzialmente limitata se e solo se

$$\int_X f(\lambda) dP(\lambda) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}).$$

In quel caso

$$\left\| \int_X f(\lambda) dP(\lambda) \right\| \leq \|f\|_\infty^{(P)} \leq \|f\|_\infty$$

In particolare, se  $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  sono limitate e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente come  $n \rightarrow +\infty$  - o più debolmente  $\|f - f_n\|_\infty^{(P)} \rightarrow 0$  dove  $f$  e tutte le  $f_n$  sono  $P$ -essenzialmente limitate - allora

$$\left\| \int_X f_n(\lambda) dP(\lambda) - \int_X f(\lambda) dP(\lambda) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty.$$

Risulta anche che

$$\left\| \int_X f(\lambda) dP(\lambda) \right\| = \|f\|_\infty^{(P)}$$

2. Abbiamo che

$$\int_X \chi_E dP = P_E, \quad \text{if } E \in \Sigma(X)$$

In particolare,

$$\int_X 1 dP = \mathbb{I}$$

Per una funzione semplice  $s = \sum_{k=1}^n s_k \chi_{E_k}$ , dove  $s_k \in \mathbb{C}$  e  $E_k \in \Sigma(X)$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,

$$\int_X \sum_{k=1}^n s_k \chi_{E_k} dP = \sum_{k=1}^n s_k P_{E_k}$$

3. Sia  $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  funzioni misurabili tali che  $\|f\|_\infty^{(P)}, \|f_n\|_\infty^{(P)} \leq K < +\infty$  per qualche  $K \in \mathbb{R}$  e tutti  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $f_n \rightarrow f$  puntualmente come  $n \rightarrow +\infty$ , allora

$$\int_X f_n dPx \rightarrow \int_X f dPx \quad \text{as } n \rightarrow +\infty, \text{ for every } x \in \mathcal{H}$$

4. If  $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$  sono  $P$ -essenzialmente limitate e  $a, b \in \mathbb{C}$ , allora

$$\int_X (af + bg) dP = a \int_X f dP + b \int_X g dP$$

$$\int_X f dP \int_X g dP = \int_X f \cdot g dP$$

Possiamo quindi estendere a quelle non limitate.

### Teorema

Consideriamo una PVM  $P : \Sigma(X) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$ , due funzioni misurabili  $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$  e sia  $a \in \mathbb{C}$

1.

$$a \int_X f dP = \int_X a f dP$$

2.  $D(\int_X f dP + \int_X g dP) = \Delta_f \cap \Delta_g$  e

$$\int_X f dP + \int_X g dP \subset \int_X (f + g) dP$$

con l'uguaglianza se e solo se  $\Delta_f \cap \Delta_g = \Delta_{f+g}$

3. Stesso con il prodotto

4. Funziona bene con l'aggiunto

5. Se  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  è un'isometria lineare e suriettiva  $\Sigma(X) \ni E \mapsto P'_E := U P_E U^{-1}$  è una PVM su  $\mathcal{H}'$  e

$$U \left( \int_X f dP \right) U^{-1} = \int_X f dP'$$

e il suo dominio è  $U(\Delta_f)$

6. Si può comporre per mappe misurabili del tipo  $\phi : X \rightarrow X'$

## 1.6 Decomposizione spettrale per operatori autoaggiunti

**Notazione.** Denotiamo con  $\mathcal{B}(X)$  la  $\sigma$ -algebra di Borel sullo spazio topologico  $X$ .

### Teorema (Spettrale per operatori autoaggiunti)

Sia  $A$  un operatore autoaggiunto sullo spazio di Hilbert complesso  $\mathcal{H}$

- Esiste un'unica PVM  $P^{(A)} : \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$  chiamata la misura spettrale di  $A$ , tale che

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP^{(A)}(\lambda)$$

In particolare  $D(A) = \Delta_\iota$  dove  $\iota : \mathbb{R} \ni \lambda \rightarrow \lambda$

- Abbiamo inoltre che il supporto della PVM  $P$ , ossia il complemento in  $X$  dell'unione di tutti i set aperti  $O \subset X$  con  $P_O = 0$  è tale che

$$\text{supp}(P^{(A)}) = \sigma(A)$$

e quindi  $P^{(A)}$  è concentrata su  $\sigma(A)$

$$P^{(A)}(E) = P^{(A)}(E \cap \sigma(A)) \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

- $\lambda \in \sigma_p(A)$  se e solo se  $P^{(A)}(\lambda) \neq 0$ , questo succede in particolare quando  $\lambda$  è un punto isolato di  $\sigma(A)$ .  $P^{(A)}(\lambda)$  è il proiettore ortogonale sull'autospazio relativo a  $\lambda$ .
- $\lambda \in \sigma_c(A)$  se e solo se  $P^{(A)}(\lambda) = 0$  ma  $P^{(A)}(E) \neq 0$  se  $E \ni \lambda$  è un aperto in  $\mathbb{R}$ .

### Osservazione

Sia data una PVM  $P$  e  $\iota : \mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \lambda$  possiamo definire l'operatore normale

$$A = \int_{\mathbb{R}} \iota(\lambda) dP(\lambda)$$

che è autoaggiunto dato che  $\iota$  è reale. Dato che il teorema spettrale fornisce il risultato di unicità abbiamo che  $P^{(A)} = P$ , quindi abbiamo una corrispondenza biunivoca tra le PVM reali sui boreliani e gli operatori autoaggiunti su  $\mathcal{H}$ .

Vale inoltre che dato un operatore  $A$  autoaggiunto e una  $f : \sigma(A) \in \mathbb{C}$  mappa continua

$$\sigma(f(A)) = \overline{f(\sigma(A))}$$

dove la chiusura non è necessaria se  $A$  è limitato.

### Teorema (Misura spettrale in comune)

Sia  $\mathfrak{U} := \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  sia un set di operatori autoaggiunti su  $\mathcal{H}$  supponiamo che la loro misura spettrale commuti. Allora esiste un'unica PVM,  $P^{(\mathfrak{U})}$  in modo che

$$P_{E_1 \times E_2 \dots}^{(\mathfrak{U})} = P_{E_1}^{(A_1)} \dots P_{E_n}^{(A_n)}$$

$\forall E_i \in \mathcal{B}(X)$ . Inoltre per ogni  $f : \mathbb{R} \in \mathbb{C}$  misurabile

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_k) dP^{(\mathfrak{U})}(x) = f(A_k) := \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dP^{(A_k)} \quad \forall k = 1, \dots, n$$

e infine, ogni proiettore commuta con la misura congiunta se commuta con tutti i  $P^{(A_k)}$ .

### Osservazione (Formalismo in MQ)

Dato uno stato  $\psi \in \mathcal{H}$  descrivente un ensemble di sistemi identici preparati in ugual modo, la probabilità di ottenere il risultato nel boreliano  $E \subset \sigma(A)$  quando misuro  $A$  è

$$\mu_{\psi, \psi}^{(P(A))}(E) := \|P_E^{(A)} \psi\|^2$$

dove  $P^{(A)}$  è la PVM dell'operatore  $A$ . Il valore di aspettazione di  $A$ ,  $\langle A \rangle_{\psi}$  risulta essere

$$\langle A \rangle_{\psi} := \int_{\sigma(A)} \lambda d\mu_{\psi, \psi}^{(P(A))}(\lambda)$$

possiamo derivarne la famosa formula

$$\langle A \rangle_{\psi} = \langle \psi | A \psi \rangle$$

## 1.7 Divergenza della serie di Dyson

Generalmente le serie in fisica non sono convergenti e non importa che lo siano. In particolare, la serie proposta da Dyson per trovare approssimazioni successive dell'operatore evoluzione temporale con Hamiltoniane illimitate e tempo-dipendenti diverge molto velocemente.

### Teorema (Formula di Taylor con Resto di Peano)

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo,  $x_0$  un punto interno ad  $I$ , e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione.

Se  $f$  è derivabile  $n$  volte nel punto  $x_0$ , allora esiste un unico polinomio  $P_n(x)$  di grado minore o uguale a  $n$  tale che

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Il polinomio  $P_n(x)$  è il **Polinomio di Taylor** di  $f$  centrato in  $x_0$ :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

La notazione  $o((x - x_0)^n)$  (detto **Resto di Peano**) indica una funzione  $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$  tale che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Questo significa che possiamo sempre stimare di quanto stiamo sbagliando se supponiamo di prendere un intervallo delle  $x$  e un'espansione della serie fino all'ordine  $k$ -esimo.

$$|R_n(x)| \leq M|x - x_0|^n$$

dove  $M$  dipende dalla derivata  $n$ -esima e  $|x - x_0|$  è l'intervallo che stiamo considerando.

Calandoci nell'esempio della serie di Dyson (o di qualsiasi altra serie divergente), quello che ci mostra questo teorema è che se io scelgo una certa accuratezza  $\varepsilon$  (dovuta allo strumento) che stimi l'errore, allora  $\forall \varepsilon > 0 \exists x$  t.c.  $M|x - x_0|^n > \varepsilon$  e non solo, infatti  $M$ , cresce con l'ordine della derivata (in questo tipo di serie) e quindi quello che succede è che più si vuole un resto accurato e ad un ordine alto, più si deve accorciare la scala dei tempi ( $x$ ). Queste serie vengono dette asintotiche.

## 1.8 $C^*$ algebre

La coniugazione hermitiana fornisce il pretesto naturale per introdurre uno dei concetti matematici più utili nelle formulazioni avanzate della Meccanica Quantistica: le  $C^*$ -algebre (note in passato anche come  $B^*$ -algebre). Riprenderemo questi concetti nei capitoli successivi per discutere il teorema di decomposizione spettrale e la formulazione algebrica delle teorie quantistiche.

### Definizione ( $*$ -algebra e $C^*$ -algebra)

Sia  $\mathfrak{A}$  un'algebra (commutativa o meno, con unità o meno) sul campo  $\mathbb{C}$ . Un'applicazione  $*$  :  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  è detta **involuzione** se soddisfa le seguenti proprietà per ogni  $x, y \in \mathfrak{A}$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ :

1. **Antilinearità:**  $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha}x^* + \bar{\beta}y^*$ ;
2. **Involutività:**  $(x^*)^* = x$ ;
3. **Antimoltiplicatività:**  $(xy)^* = y^*x^*$ .

La struttura  $(\mathfrak{A}, *)$  è chiamata  **$*$ -algebra**.

Se  $\mathfrak{A}$  è anche un'algebra di Banach (normata e completa), essa è detta **Banach  $*$ -algebra** se l'involuzione è isometrica, ovvero  $\|x^*\| = \|x\|$  (o equivalentemente  $\|x^*x\| \leq \|x\|^2$ ).

Una Banach  $*$ -algebra è detta  **$C^*$ -algebra** se la norma soddisfa l'identità  $C^*$ :

$$\|x^*x\| = \|x\|^2 \quad \text{per ogni } x \in \mathfrak{A}. \quad (1)$$

### Definizione (Morfismi di $*$ -algebre)

Siano  $\mathfrak{A}_1$  e  $\mathfrak{A}_2$  due  $*$ -algebre (con unità). Un omomorfismo di algebre  $f : \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2$  si dice  **$*$ -omomorfismo** se preserva l'involuzione:

$$f(x^*) = f(x)^* \quad \text{per ogni } x \in \mathfrak{A}_1,$$

e preserva l'unità (se presente), ovvero  $f(\mathbb{I}_1) = \mathbb{I}_2$ .

- Se  $f$  è anche biunivoco, si chiama  **$*$ -isomorfismo**.
- Un  $*$ -isomorfismo da  $\mathfrak{A}$  in se stessa ( $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$ ) è detto  **$*$ -automorfismo**.

Possiamo classificare gli elementi di una  $*$ -algebra in base al loro comportamento rispetto all'involuzione.

### Definizione (Elementi speciali)

Un elemento  $x$  in una  $*$ -algebra  $\mathfrak{A}$  (con unità  $\mathbb{I}$ ) si dice:

- (i) **Normale:** se commuta con il suo aggiunto,  $x^*x = xx^*$ ;
- (ii) **Hermitiano** (o autoaggiunto): se coincide con il suo aggiunto,  $x^* = x$ ;
- (iii) **Isometria:** se  $x^*x = \mathbb{I}$ ;
- (iv) **Unitario:** se  $x^*x = xx^* = \mathbb{I}$  (cioè l'inverso è l'aggiunto).

### Osservazione (Sottoalgebre e Generatori)

1. Una **\*-sottoalgebra** di  $\mathfrak{A}$  è una sottoalgebra chiusa rispetto all'operazione di involuzione. Nel caso delle  $C^*$ -algebre, una  $C^*$ -**sottoalgebra** deve essere anche chiusa nella topologia della norma (quindi completa).
2. L'intersezione arbitraria di \*-sottoalgebre è ancora una \*-sottoalgebra. Dato un sottoinsieme  $S \subset \mathfrak{A}$ , la \*-algebra **generata** da  $S$  è l'intersezione di tutte le \*-sottoalgebre che contengono  $S$ . Lo stesso vale, *mutatis mutandis*, per le  $C^*$ -sottoalgebre (che saranno chiuse).
3. L'inverso di un \*-isomorfismo è anch'esso un \*-isomorfismo.

Concludiamo con un risultato tecnico utile riguardante gli omomorfismi.

### Proposizione

Siano  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$  due \*-algebre con unità e sia  $\phi : \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2$  una mappa lineare che preserva il prodotto e l'involuzione. Se  $\phi$  è **suriettiva**, allora essa è automaticamente un \*-omomorfismo (ovvero preserva necessariamente l'unità:  $\phi(\mathbb{I}_1) = \mathbb{I}_2$ ).

### Osservazione (Conservazione dell'unità)

Vale un fatto algebrico generale: una mappa lineare suriettiva tra algebre con unità che preserva il prodotto preserva necessariamente anche l'elemento unitario ( $\phi(\mathbb{I}_1) = \mathbb{I}_2$ ).

Elenchiamo alcune proprietà cruciali che discendono direttamente dalla definizione di  $C^*$ -algebra.

### Proposizione (Proprietà fondamentali delle $C^*$ -algebre)

Sia  $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|)$  una  $C^*$ -algebra con involuzione  $*$ .

- (a) Se  $x \in \mathfrak{A}$  è un elemento **normale** ( $x^*x = xx^*$ ), allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\|x^n\| = \|x\|^n.$$

- (b) L'involuzione è un'**isometria**: per ogni  $x \in \mathfrak{A}$ ,

$$\|x^*\| = \|x\|.$$

- (c) Se  $\mathfrak{A}$  possiede unità  $\mathbb{I}$ , allora  $\mathbb{I}^* = \mathbb{I}$ . Inoltre,  $x$  è invertibile se e solo se  $x^*$  lo è, e vale la relazione:

$$(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}.$$

È possibile costruire nuove  $C^*$ -algebre a partire da famiglie esistenti.

### Definizione (Somma diretta di $C^*$ -algebre)

Sia  $\{\mathfrak{A}_j\}_{j \in J}$  una famiglia di  $C^*$ -algebre (dove  $J$  ha cardinalità arbitraria). Consideriamo l'insieme delle famiglie  $\{a_j\}_{j \in J}$  (con  $a_j \in \mathfrak{A}_j$ ) che sono limitate in norma, equipaggiato con la norma del sup:

$$\|\{a_j\}_{j \in J}\| := \sup_{j \in J} \|a_j\|_j < +\infty. \quad (2)$$

Dotando questo insieme delle operazioni puntuali (somma, prodotto, involuzione componente per componente), si ottiene una struttura di algebra chiamata **somma diretta** e indicata con:

$$\bigoplus_{j \in J} \mathfrak{A}_j.$$

Tale struttura risulta essere una  $C^*$ -algebra rispetto alla norma definita.

### Osservazione (Rigidità delle $C^*$ -algebre)

La struttura di una  $C^*$ -algebra è notevole perché le sue proprietà topologiche e algebriche sono profondamente intrecciate. Si può dimostrare (e lo vedremo più avanti) che:

- Ogni \*-omomorfismo  $\phi$  tra  $C^*$ -algebre con unità è **automaticamente continuo** (anzi, contrattivo:  $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$ ).
- Un \*-omomorfismo è un'**isometria** ( $\|\phi(a)\| = \|a\|$ ) se e solo se è **iniettivo**.

## Esempi principali

1. Le algebre di funzioni complesse (come  $C(K)$  o  $L^\infty$ ) sono esempi di  $C^*$ -algebre **commutative**, dove l'involuzione è la complessa coniugazione.
2. **Operatori limitati:** Se  $\mathcal{H}$  è uno spazio di Hilbert, l'algebra  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  degli operatori lineari limitati è una  $C^*$ -algebra con unità (non commutativa, se  $\dim(\mathcal{H}) > 1$ ), dove l'involuzione è data dall'aggiunto hermitiano.

Prima di addentrarci nelle rappresentazioni, è utile menzionare la struttura dei **quaternioni**  $\mathbb{H}$ . Essa può essere vista come un'algebra reale normata con unità. Sebbene il campo base sia  $\mathbb{R}$ , è possibile definire un'involuzione tramite il coniugato quaternionico, rendendo  $\mathbb{H}$  una  $C^*$ -algebra reale (soddisfa  $\|q^*q\| = \|q\|^2$ ).

Una rappresentazione concreta di  $\mathbb{H}$  è data dalla sottoalgebra reale delle matrici  $2 \times 2$  complesse generata dall'identità  $\mathbb{I}$  e dalle matrici  $-i\sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_3$  (dove  $\sigma_i$  sono le matrici di Pauli).  $\mathbb{H}$  è un **anello con divisione** (ogni elemento non nullo è invertibile) non commutativo.

Esistono risultati fondamentali che classificano tali strutture, rilevanti per i fondamenti della fisica quantistica (si ricordi il Teorema di Solèr).

### Teorema (Frobenius e Hurwitz)

- **Teorema di Frobenius (1887):** Ogni algebra associativa con divisione a dimensione finita sul campo reale  $\mathbb{R}$  è necessariamente isomorfa a  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{H}$ .
- **Teorema di Hurwitz (1923):** Ogni algebra  $\mathfrak{A}$  con divisione, associativa, normata e unitale su  $\mathbb{R}$  tale che  $\|ab\| = \|a\|\|b\|$  è isometricamente isomorfa a  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{H}$ .

(Rilasciando l'associatività si ottengono anche gli ottetti di Cayley  $\mathbb{O}$ ).

### 1.8.1 Rappresentazioni di $*$ -algebre

Una definizione centrale nelle teorie quantistiche avanzate (come la QFT) è quella di rappresentazione di un'algebra di operatori astratti su uno spazio di Hilbert concreto.

#### Definizione (Rappresentazione)

Sia  $\mathfrak{A}$  una  $*$ -algebra (non necessariamente unitale o  $C^*$ ) e  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert. Un  $*$ -omomorfismo  $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  è detto **rappresentazione** di  $\mathfrak{A}$  su  $\mathcal{H}$ . Si richiede esplicitamente che la rappresentazione preservi l'unità se presente nell'algebra, ovvero  $\pi(\mathbb{I}_{\mathfrak{A}}) = \mathbb{I}_{\mathcal{H}}$ .

Si definiscono le seguenti proprietà per una rappresentazione  $\pi$ :

- (a) **Fedele (Faithful):** se  $\pi$  è iniettiva (il kernel è nullo).
- (b) **Irriducibile:** se non esistono sottospazi chiusi di  $\mathcal{H}$  (diversi da  $\{0\}$  e  $\mathcal{H}$  stesso) che siano invarianti sotto l'azione di  $\pi(\mathfrak{A})$ . Ovvero, se  $M \subset \mathcal{H}$  è chiuso e  $\pi(a)M \subset M$  per ogni  $a \in \mathfrak{A}$ , allora  $M = \{0\}$  o  $M = \mathcal{H}$ .
- (c) **Unitariamente Equivalente:** Due rappresentazioni  $\pi$  su  $\mathcal{H}$  e  $\pi'$  su  $\mathcal{H}'$  sono equivalenti se esiste un'isometria suriettiva (unitario)  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  tale che  $U\pi(a)U^{-1} = \pi'(a)$  per ogni  $a \in \mathfrak{A}$ .

#### Definizione (Vettore Ciclico)

Un vettore  $\psi \in \mathcal{H}$  si dice **ciclico** per la rappresentazione  $\pi$  se l'insieme  $\{\pi(a)\psi \mid a \in \mathfrak{A}\}$  è denso in  $\mathcal{H}$ .

Le proprietà di irriducibilità e ciclicità sono strettamente legate:

#### Proposizione

Sia  $\pi$  una rappresentazione irriducibile di una  $*$ -algebra con unità su  $\mathcal{H} \neq \{0\}$ . Allora **ogni** vettore non nullo  $\psi \in \mathcal{H}$  è ciclico per  $\pi$ .

#### Osservazione (Continuità Automatica)

Se  $\mathfrak{A}$  è una  $C^*$ -algebra con unità, ogni rappresentazione è automaticamente continua (rispetto alla norma di  $\mathfrak{A}$  e alla norma operatoriale su  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ). In particolare, è una contrazione:  $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ .

Infine, analizziamo il caso in cui una mappa lineare preservi prodotti e involuzioni ma "manchi" l'identità, non qualificandosi come rappresentazione secondo la Definizione 3.52.

**Proposizione (Rappresentazione ridotta)**

Sia  $\mathfrak{A}$  una  $*$ -algebra con unità e  $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  una mappa lineare che preserva prodotti e involuzioni (ma non necessariamente l'unità). Allora lo spazio di Hilbert si decompone come  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\phi \oplus \mathcal{H}_\phi^\perp$ , dove  $\mathcal{H}_\phi = \text{Ran}(\phi(\mathbb{I}))$ . Valgono i seguenti fatti:

1. Entrambi i sottospazi sono invarianti sotto  $\phi(a)$  per ogni  $a$ .
2. La restrizione su  $\mathcal{H}_\phi^\perp$  è nulla:  $\phi(a) \upharpoonright_{\mathcal{H}_\phi^\perp} = 0$ .
3. La restrizione sul complemento  $\pi_\phi : \mathfrak{A} \ni a \mapsto \phi(a) \upharpoonright_{\mathcal{H}_\phi} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi)$  è una **rappresentazione** (preserva l'unità su  $\mathcal{H}_\phi$ ).

Inoltre,  $\pi_\phi$  è irriducibile se e solo se  $\phi$  non è la mappa nulla e non esistono sottospazi propri invarianti non banali in  $\mathcal{H}$ .

## 1.9 Algebre di von Neumann (o $W^*$ -algebre)

Un concetto centrale nello studio delle algebre di operatori è quello di commutante, che descrive l'insieme degli operatori che commutano con una data classe.

**Definizione (Commutante)**

Sia  $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  un sottoinsieme di operatori limitati su uno spazio di Hilbert complesso. Il **commutante** di  $\mathfrak{M}$  è definito come:

$$\mathfrak{M}' := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid TA - AT = 0 \text{ per ogni } A \in \mathfrak{M}\}.$$

Iterando la costruzione, si definisce il **bicommutante** come  $\mathfrak{M}'' := (\mathfrak{M}')'$ .

**Osservazione (Proprietà algebriche e topologiche)**

1. Se  $\mathfrak{M}$  è chiuso rispetto all'involuzione (cioè è un  $*$ -insieme), allora  $\mathfrak{M}'$  è una  $*$ -algebra con unità.
2. Vale sempre l'inclusione  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}''$ .
3. Non si ottengono nuovi insiemi oltre il secondo commutante, poiché  $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'''$ .
4. Una proprietà cruciale è la chiusura topologica:  $\mathfrak{M}'$  è sempre chiuso non solo nella topologia uniforme, ma anche nelle topologie **debole** e **forte** degli operatori.

Il legame tra proprietà algebriche (il commutante) e topologiche (la chiusura) è sancito da uno dei teoremi più importanti dell'analisi funzionale, dovuto a von Neumann.

**Teorema (Teorema del Bicommutante di von Neumann)**

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert complesso e  $\mathfrak{A}$  una  $*$ -sottoalgebra con unità di  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . I seguenti fatti sono equivalenti:

- (a)  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}''$  (l'algebra coincide con il suo bicommutante);
- (b)  $\mathfrak{A}$  è chiusa nella topologia debole degli operatori;
- (c)  $\mathfrak{A}$  è chiusa nella topologia forte degli operatori.

Inoltre, se  $\mathfrak{B}$  è una qualunque  $*$ -sottoalgebra con unità, il suo bicommutante  $\mathfrak{B}''$  coincide con la sua chiusura debole e con la sua chiusura forte:

$$\mathfrak{B}'' = \overline{\mathfrak{B}}^w = \overline{\mathfrak{B}}^s.$$

Grazie al teorema precedente, siamo pronti a definire una classe speciale di algebre di operatori.

**Definizione (Algebra di von Neumann)**

Sia  $\mathcal{H} \neq \{0\}$  uno spazio di Hilbert complesso. Un'**Algebra di von Neumann** (o  $W^*$ -algebra) su  $\mathcal{H}$  è una  $*$ -sottoalgebra con unità  $\mathfrak{R} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  che soddisfa una delle tre proprietà equivalenti del Teorema del Bicommutante (solitamente si usa la definizione  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}''$ ).



### Osservazione (Relazione con le $C^*$ -algebre)

Poiché la chiusura nella topologia forte implica la chiusura nella topologia uniforme (della norma), ogni algebra di von Neumann è, in particolare, una  $C^*$ -algebra. Il termine  $W^*$ -algebra è spesso usato come sinonimo, anche se originariamente indicava una definizione astratta (come duale topologico di uno spazio di Banach, risultato provato da Sakai nel 1970). In questo contesto concreto, i termini sono interscambiabili.

### Definizione (Centro e Fattori)

Data un'algebra di von Neumann  $\mathfrak{R}$ :

- Il **centro** di  $\mathfrak{R}$  è l'insieme degli elementi che commutano con tutti gli elementi dell'algebra:

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{R}) := \mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}'.$$

- Un **fattore** è un'algebra di von Neumann con centro banale, ovvero contenente solo i multipli scalari dell'identità:

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}' = \{c\mathbb{I}\}_{c \in \mathbb{C}}.$$

La classificazione dei fattori è un capitolo centrale nella teoria delle algebre di operatori, con profonde conseguenze nella teoria quantistica dei campi.

### 1.9.1 Generazione e Operazioni Reticolari

Se  $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  è un insieme chiuso rispetto all'involutione, l'algebra di von Neumann **generata** da  $\mathfrak{M}$  è la più piccola algebra di von Neumann che contiene  $\mathfrak{M}$ . Grazie al teorema del bicommutante, essa è esattamente  $\mathfrak{M}''$ .

Possiamo definire operazioni reticolari sulla famiglia delle algebre di von Neumann su  $\mathcal{H}$ :

- **Intersezione (Meet):** L'intersezione arbitraria di algebre di von Neumann  $\{\mathfrak{R}_\alpha\}$  è ancora un'algebra di von Neumann:

$$\bigwedge_{\alpha} \mathfrak{R}_\alpha := \bigcap_{\alpha} \mathfrak{R}_\alpha.$$

- **Unione generata (Join):** L'unione insiemistica non è in genere un'algebra. Si definisce il join come l'algebra generata dall'unione:

$$\bigvee_{\alpha} \mathfrak{R}_\alpha := \left( \bigcup_{\alpha} \mathfrak{R}_\alpha \right)''.$$

Concludiamo con il caso più semplice e fondamentale.

### Proposizione (Il caso $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ )

Sia  $\mathcal{H} \neq \{0\}$ . Allora:

- (a) Il commutante dell'intera algebra degli operatori è costituito dai soli scalari:  $\mathcal{B}(\mathcal{H})' = \{c\mathbb{I}\}$ . Di conseguenza,  $\mathcal{B}(\mathcal{H})'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , confermando che è un'algebra di von Neumann.
- (b) Poiché il centro è banale ( $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \cap \{c\mathbb{I}\} = \{c\mathbb{I}\}$ ),  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  è un **fattore**.
- (c) Non esistono sottospazi chiusi non banali che siano invarianti sotto l'azione di tutti gli elementi di  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  (proprietà di transistività o irriducibilità).

### 1.9.2 Somma Hilbertiana di Algebre di von Neumann

Esiste una naturale corrispondenza tra la somma diretta di spazi di Hilbert e la somma diretta di  $C^*$ -algebre, che si specializza nel caso delle algebre di von Neumann.

### Proposizione (Costruzione della Somma Diretta di Operatori)

Consideriamo una famiglia di spazi di Hilbert non banali  $\{\mathcal{H}_j\}_{j \in J}$  e una famiglia di  $C^*$ -algebre di operatori  $\{\mathfrak{A}_j\}_{j \in J}$ , con  $\mathfrak{A}_j \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_j)$ .

- (a) **Isomorfismo Isometrico:** Dato un elemento astratto della somma diretta  $\bigoplus_{j \in J} \mathfrak{A}_j$  (ovvero una famiglia limitata di operatori), possiamo definire l'operatore globale  $\hat{\bigoplus}_{j \in J} A_j$  agente sullo spazio somma  $\bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_j$  come:

$$\left( \hat{\bigoplus}_{j \in J} A_j \right) \left( \bigoplus_{j \in J} x_j \right) := \bigoplus_{j \in J} (A_j x_j). \quad (3)$$

Tale operatore è ben definito e limitato. Inoltre, la norma dell'operatore coincide con la  $C^*$ -norma della somma diretta astratta:

$$\left\| \hat{\bigoplus}_{j \in J} A_j \right\|_{\mathcal{B}(\bigoplus \mathcal{H}_j)} = \left\| \bigoplus_{j \in J} A_j \right\|_{\bigoplus \mathfrak{A}_j} = \sup_{j \in J} \|A_j\|.$$

La mappa che associa la somma astratta all'operatore concreto è un  $*$ -omomorfismo isometrico.

- (b) **Commutante della somma:** Il commutante della somma diretta è la somma diretta dei commutanti:

$$\left( \hat{\bigoplus}_{j \in J} \mathfrak{A}_j \right)' = \hat{\bigoplus}_{j \in J} \mathfrak{A}_j'.$$

- (c) **Proprietà di von Neumann:** Se ogni componente  $\mathfrak{A}_j$  è un'algebra di von Neumann, allora anche l'algebra somma  $\hat{\bigoplus}_{j \in J} \mathfrak{A}_j$  è un'algebra di von Neumann.

#### Definizione (Somma diretta di Algebre di von Neumann)

Sia  $\{\mathfrak{A}_j\}_{j \in J}$  una famiglia di algebre di von Neumann su spazi  $\{\mathcal{H}_j\}_{j \in J}$ . L'algebra di von Neumann definita nella proposizione precedente è chiamata **somma diretta della famiglia di algebre di von Neumann**.

#### Osservazione (Notazione semplificata)

Poiché la costruzione definisce un isomorfismo isometrico canonico tra l'algebra astratta delle famiglie limitate e l'algebra concreta degli operatori sullo spazio somma, nel seguito si semplificherà la notazione rimuovendo il simbolo "cappello". Indicheremo con lo stesso simbolo  $\bigoplus_{j \in J} A_j$  sia l'elemento astratto che l'operatore concreto, e con  $\bigoplus_{j \in J} \mathfrak{A}_j$  l'algebra somma.

## 2 Fondamenti logico-matematici della Meccanica Quantistica

### 2.1 Grandezze Classiche e Misurabilità

Le quantità classiche più complesse di un sistema possono essere descritte mediante funzioni misurabili secondo Borel definite sullo spazio delle fasi  $\Gamma$ . La scelta della  $\sigma$ -algebra di Borel è naturale in quanto determinata dalla topologia che si assume esistere su  $\Gamma$ .

#### Definizione (Grandezza Fisica e Valore di Aspettazione)

Una grandezza fisica è rappresentata da una funzione Borel-misurabile  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ . La misurabilità è un requisito fondamentale che permette di definire operazioni fisiche, come il calcolo del valore di aspettazione quando lo stato è descritto da una misura  $\mu$ :

$$\langle f \rangle_\mu = \int_\Gamma f d\mu.$$

#### Osservazione (Proprietà Elementari)

Le cosiddette “proprietà elementari” del sistema sono descritte da funzioni misurabili che assumono solo valori binari, ovvero  $g : \Gamma \rightarrow \{0, 1\}$ . Queste funzioni sono identificate fedelmente con le funzioni caratteristiche (o indicatrici) di insiemi di Borel. Dato un insieme di Borel  $E_g = g^{-1}(\{1\})$ , si ha infatti  $g = \chi_{E_g}$ . È importante notare che richiedere la continuità per queste funzioni sarebbe troppo restrittivo: le proprietà elementari non sarebbero rappresentabili se ci si limitasse alle mappe continue.

Una generica quantità fisica  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  è completamente determinata dalla classe degli insiemi di Borel  $E_B^{(f)}$ , definiti come la controimmagine di un insieme  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ :

$$E_B^{(f)} := f^{-1}(B). \quad (4)$$

Il significato fisico dell'insieme  $E_B^{(f)}$  è: “l'insieme degli stati in cui il valore di  $f$  appartiene a  $B$ ”.

#### Proposizione (Proprietà della Mappa Inversa)

La mappa  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto E_B^{(f)}$  permette di ricostruire la funzione  $f$ . La classe degli insiemi  $E_B^{(f)}$  forma una  $\sigma$ -algebra e soddisfa le seguenti proprietà elementari al variare di  $B$  in  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ :

- (Fi)  $E_{\mathbb{R}}^{(f)} = \Gamma$ ;
- (Fii)  $E_B^{(f)} \cap E_C^{(f)} = E_{B \cap C}^{(f)}$ ;
- (Fiii) Se  $N \subset \mathbb{N}$  e  $\{B_k\}_{k \in N} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$  è una famiglia di insiemi a due a due disgiunti ( $B_j \cap B_k = \emptyset$  per  $k \neq j$ ), allora:

$$\bigcup_{j \in N} E_{B_j}^{(f)} = E_{\bigcup_{j \in N} B_j}^{(f)}.$$

#### Osservazione (Commenti sulle proprietà)

Si possono fare alcune precisazioni sulle proprietà sopra elencate:

- (a) Utilizzando (Fi) e (Fiii), la proprietà (Fii) può essere sostituita dalla proprietà sul complemento:  $E_{\mathbb{R} \setminus E}^{(f)} = \Gamma \setminus E_E^{(f)}$ . In particolare, si ha  $E_{\emptyset}^{(f)} = \emptyset$ .
- (b) Le proprietà (Fii) e (Fiii) implicano che la condizione di disgiunzione in (Fiii) non è strettamente necessaria; l'uguaglianza vale anche rimuovendo il vincolo  $B_j \cap B_k = \emptyset$ .
- (c) Infine, invocando le leggi di De Morgan, la proprietà (Fiii) è valida anche sostituendo l'unione  $\cup$  con l'intersezione  $\cap$ .

### 2.2 La nozione di Reticolo

Tornando alla struttura matematica delle proprietà elementari classiche, osserviamo che esse possono essere inquadrare nella nozione algebrica di *reticolo*.

Richiamiamo brevemente che in un insieme parzialmente ordinato (o *poset*)  $(X, \geq)$ , se  $Y \subset X$ , il simbolo  $\sup Y$  denota (se esiste) il più piccolo elemento  $x \in X$  tale che  $x \geq y$  per ogni  $y \in Y$ . Analogamente,  $\inf Y$  denota (se esiste) il più grande elemento  $x \in X$  tale che  $y \geq x$  per ogni  $y \in Y$ .

### Definizione (Reticolo)

Un insieme parzialmente ordinato  $(X, \geq)$  è definito **reticolo** (in inglese *lattice*) se, per ogni coppia di elementi  $a, b \in X$ :

- (a) Esiste in  $X$   $\sup\{a, b\}$ , denominato **join** e indicato con  $a \vee b$ ;
- (b) Esiste in  $X$   $\inf\{a, b\}$ , denominato **meet** e indicato con  $a \wedge b$ .

Si noti che il poset  $(X, \geq)$  non deve necessariamente essere totalmente ordinato. La notazione  $a \leq b$  è equivalente a  $b \geq a$ .

### Osservazione

- (a) Nei casi concreti in cui  $X = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  o  $X = \mathcal{B}(\Gamma)$ , la relazione d'ordine  $\geq$  coincide con l'inclusione insiemistica  $\supseteq$ . Di conseguenza, l'operazione di join  $\vee$  corrisponde all'unione  $\cup$ , mentre il meet  $\wedge$  corrisponde all'intersezione  $\cap$ .
- (b) In un reticolo generale, le operazioni  $\vee$  e  $\wedge$  risultano essere associative e commutative. Valgono inoltre le **leggi di assorbimento**:

$$a \vee (a \wedge b) = a \quad e \quad a \wedge (a \vee b) = a.$$

- (c) Esiste una stretta relazione tra l'ordine e le operazioni: in un reticolo,  $a \geq b$  se e solo se  $a \vee b = a$  (o equivalentemente  $a \wedge b = b$ ).

### Definizione (Algebra di Boole)

Un reticolo  $(X, \geq)$  si dice:

- (a) **Distributivo**: se le operazioni  $\vee$  e  $\wedge$  si distribuiscono l'una rispetto all'altra. Per ogni  $a, b, c \in X$ :

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

- (b) **Limitato** (o *bounded*): se ammette un elemento minimo **0** (bottom) e un elemento massimo **1** (top).
- (c) **Ortocomplementato**: se è limitato ed è dotato di una mappa  $X \ni a \mapsto \neg a$ , detta **ortocomplemento** di  $a$ , tale che:

- (i)  $a \vee \neg a = \mathbf{1}$  per ogni  $a \in X$ ;
- (ii)  $a \wedge \neg a = \mathbf{0}$  per ogni  $a \in X$ ;
- (iii)  $\neg(\neg a) = a$  per ogni  $a \in X$  (involutività);
- (iv)  $a \geq b \implies \neg b \geq \neg a$  per ogni  $a, b \in X$  (inversione dell'ordine).

- (d) **completo** (risp.  **$\sigma$ -completo**), se ogni insieme (numerabile)  $\{a_j\} \subset X$  ammette  $\inf$ :  $\bigwedge_{j \in J} a_j$  e

$$\sup: \bigvee_{j \in J} a_j.$$

Un reticolo con proprietà (a), (b) e (c) è chiamato **Algebra di Boole**. Un'algebra di Boole che soddisfa (d) con  $J = \mathbb{N}$  è una  $\sigma$ -algebra di Boole.

### Definizione (Sottoreticolo)

Un **sottoreticolo** è un sottoinsieme  $X_0 \subset X$  che eredita la struttura di reticolo da  $X$  nel seguente senso preciso: l'estremo inferiore e l'estremo superiore di ogni coppia di elementi di  $X_0$  devono esistere e coincidere con i corrispondenti estremo inferiore e superiore calcolati in  $X$ .

Facendo riferimento a sottoreticoli limitati (bounded) o ortocomplementati, si richiede per definizione che:

- L'elemento minimo (**bottom**) e l'elemento massimo (**top**) della sottostruttura coincidano con quelli della struttura maggiore;
- L'ortocomplemento di un elemento nella sottostruttura coincida con quello definito nella struttura maggiore.

In modo banale si può definire omomorfismi e isomorfismi su reticoli.

### Osservazione (Rappresentazione delle Algebre di Boole)

È naturale chiedersi se un'algebra di Boole astratta corrisponda sempre a un'algebra di insiemi.

- Il **Teorema di Loomis-Sikorski** garantisce che ogni  $\sigma$ -algebra di Boole astratta è isomorfa al quoziente  $\Sigma/\mathcal{N}$  di una  $\sigma$ -algebra concreta  $\Sigma$  su uno spazio di misura, modulo un ideale  $\mathcal{N}$  di insiemi di misura nulla.
- Nel caso più semplice di algebre di Boole (non  $\sigma$ ), il **Teorema di rappresentazione di Stone** prova l'isomorfismo con un'algebra concreta di insiemi.

Pertanto, il reticolo delle proprietà elementari di un sistema classico è a tutti gli effetti una  $\sigma$ -algebra di Boole concreta: è distributivo, limitato (con  $\mathbf{0} = \emptyset$  e  $\mathbf{1} = \Gamma$ ), ortocomplementato (complemento insiemistico) e  $\sigma$ -completo. La mappa definita in precedenza,  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto E_B^{(f)} \in \mathcal{B}(\Gamma)$ , è un omomorfismo di  $\sigma$ -algebre di Boole.

## 2.3 La logica non-Booleana della Meccanica Quantistica

Il quadro classico appena descritto diviene insostenibile per i sistemi quantistici. La ragione profonda risiede nell'esistenza di proprietà elementari *incompatibili*. Le idee fondamentali introdotte da von Neumann per formalizzare questa nuova logica si basano sui seguenti postulati:

- (N1) Dato un sistema quantistico, esiste uno spazio di Hilbert complesso e separabile  $\mathcal{H}$  tale che le osservabili elementari (quelle che assumono solo valori in  $\{0, 1\}$ ) sono rappresentate fedelmente dall'insieme  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  dei **proiettori ortogonali** su  $\mathcal{H}$ .
- (N2) Due osservabili elementari  $P, Q$  sono *compatibili* se e solo se i corrispondenti proiettori commutano ( $PQ = QP$ ).

### Osservazione

La richiesta di separabilità in (N1) è utile per molte costruzioni tecniche, ma talvolta può essere omessa o dedotta da requisiti fisici. Inoltre, per sistemi che ammettono regole di superselezione, il postulato (N1) richiede delle modifiche, ma per ora ci atteniamo alla versione standard.

L'insieme  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  possiede una naturale struttura d'ordine parziale indotta dall'inclusione dei sotto-spazi immagine. Scriviamo  $P \geq Q$  se e solo se  $P(\mathcal{H}) \supseteq Q(\mathcal{H})$ . Dotato di questo ordine,  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  diventa un reticolo con proprietà specifiche molto diverse da quelle classiche.

### Proposizione (Struttura del reticolo quantistico $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ )

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert complesso (non necessariamente separabile). Per ogni  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , definiamo l'ortocomplemento  $\neg P := \mathbb{I} - P$  (il proiettore sul complemento ortogonale  $P(\mathcal{H})^\perp$ ). La struttura

$$(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \geq, \mathbf{0}, \mathbb{I}, \neg)$$

è un reticolo limitato, ortocomplementato e completo (e quindi  $\sigma$ -completo), che tuttavia **non è distributivo** se  $\dim(\mathcal{H}) \geq 2$ .

In dettaglio, date  $P, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  e una famiglia  $\{P_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ :

- (i) Il **Join**  $P \vee Q$  è il proiettore ortogonale sulla somma chiusa dei range:

$$P \vee Q = \text{proj su } \overline{P(\mathcal{H}) + Q(\mathcal{H})}.$$

Analogamente,  $\bigvee_{j \in J} P_j$  è il proiettore sullo spazio chiuso generato dall'unione dei range:  $\text{span}\{P_j(\mathcal{H})\}_{j \in J}$ .

- (ii) Il **Meet**  $P \wedge Q$  è il proiettore ortogonale sull'intersezione dei range:

$$P \wedge Q = \text{proj su } P(\mathcal{H}) \cap Q(\mathcal{H}).$$

Analogamente,  $\bigwedge_{j \in J} P_j$  è il proiettore sull'intersezione  $\bigcap_{j \in J} P_j(\mathcal{H})$ .

- (iii) Gli elementi minimo (bottom) e massimo (top) sono rispettivamente l'operatore nullo  $\mathbf{0}$  e l'identità  $\mathbb{I}$ .

(iv) Nel caso numerabile ( $J = \mathbb{N}$ ), le operazioni di reticolo sono legate ai limiti nella topologia forte degli operatori ( $s\text{-lim}$ ):

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} P_n = s\text{-}\lim_{k \rightarrow +\infty} \bigvee_{n \leq k} P_n \quad e \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} P_n = s\text{-}\lim_{k \rightarrow +\infty} \bigwedge_{n \leq k} P_n.$$

### Proposizione (Sottoinsiemi Massimali e Algebre di Boole)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert complesso e separabile e si consideri il reticolo ortocomplementato e  $\sigma$ -completo dei proiettori ortogonali  $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \geq, \mathbf{0}, \mathbb{I}, \neg)$ .

Assumiamo che  $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$  sia un sottoinsieme massimale di elementi che commutano a due a due (ovvero, se  $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  commuta con ogni  $P \in \mathcal{L}_0$ , allora  $Q \in \mathcal{L}_0$ ). Valgono i seguenti fatti:

#### 1. Struttura di Sottoreticolo:

- (a)  $\mathcal{L}_0$  contiene l'operatore nullo  $\mathbf{0}$  e l'identità  $\mathbb{I}$ ;
- (b)  $\mathcal{L}_0$  è chiuso rispetto all'ortocomplemento  $(\neg)$ ;
- (c) L'estremo superiore e l'estremo inferiore di successioni di elementi calcolati in  $\mathcal{L}_0$  coincidono con i corrispondenti  $\sup$  e  $\inf$  calcolati nell'intero  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

Di conseguenza,  $\mathcal{L}_0$  è un sottoreticolo di  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

#### 2. Struttura Booleana: $\mathcal{L}_0$ è anche una $\sigma$ -algebra di Boole. Inoltre, per ogni $P, Q \in \mathcal{L}_0$ , le operazioni di reticolo assumono la seguente forma algebrica:

- (i)  $P \vee Q = P + Q - PQ$ ;
- (ii)  $P \wedge Q = PQ$ .

#### 3. Generalizzazione: Le identità algebriche riportate al punto (2) sono valide più in generale per qualsiasi coppia di proiettori $P, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , sotto la sola ipotesi che essi commutino ( $PQ = QP$ ).

### Teorema (Caratterizzazione della $\wedge$ logica)

In uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  per ogni  $P, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  e  $x \in \mathcal{H}$

$$(P \wedge Q)x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (PQ)^n x$$

### Osservazione (Misurazioni Alternate e Convergenza)

La dimostrazione matematica sui proiettori implica un fatto fisico più forte riguardante le misurazioni consecutive. Si ha infatti che le successioni alternate di proiettori convergono al proiettore sull'intersezione dei sottospazi:

$$Px, QPx, PQPx, \dots \longrightarrow (P \wedge Q)x \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Poiché  $P \wedge Q = Q \wedge P$ , il risultato vale anche scambiando l'ordine. Fisicamente, se assumiamo che lo stato post-misurazione sia descritto dalla proiezione, il lato destro della formula

$$\|(P \wedge Q)x\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(PQ)^n x\|^2$$

rappresenta la probabilità che una sequenza infinita di misurazioni alternate di  $P$  e  $Q$  (anche incompatibili) dia esito positivo a ogni passo, partendo dallo stato  $x$ .

## 2.4 Perché le osservabili sono operatori autoaggiunti

Siamo ora in grado di chiarire perché, in questo contesto, le osservabili corrispondano alle **PVM** (Projection-Valued Measures) su  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  e, di conseguenza, agli operatori autoaggiunti grazie ai teoremi di integrazione spettrale.

Analogamente al caso classico, un'osservabile  $A$  può essere vista come una collezione di osservabili elementari SI-NO  $\{P_E\}_{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$ , etichettate sugli insiemi di Borel di  $\mathbb{R}$ . Il significato di  $P_E$  è:

$$P_E = \text{"il valore dell'osservabile appartiene a } E\text{"}. \quad (5)$$

Assumendo che queste osservabili elementari siano *a due a due compatibili* (ipotesi cruciale che permette di lavorare in un sottoinsieme massimale  $\mathcal{L}_0$  che si comporta come un'algebra di Boole), ci aspettiamo che soddisfino le proprietà analoghe a quelle classiche (Fi)-(Fiii), tradotte nel linguaggio dei proiettori:

- (i')  $P_{\mathbb{R}} = \mathbb{I}$ ;
- (ii')  $P_E \wedge P_F = P_{E \cap F}$ ;
- (iii') Se  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  sono disgiunti, allora  $\bigvee_{j \in \mathbb{N}} P_{E_j} = P_{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j}$ .

Tenendo conto delle proprietà dei proiettori compatibili e della convergenza nella topologia forte per le serie infinite, queste relazioni diventano la definizione esatta di una PVM su  $\mathbb{R}$ :

- (i)  $P_{\mathbb{R}} = \mathbb{I}$ ;
- (ii)  $P_E P_F = P_{E \cap F}$  (poiché per proiettori commutanti il meet è il prodotto);
- (iii) Per insiemi disgiunti  $\{E_k\}$ , vale la  $\sigma$ -additività nella topologia forte degli operatori:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} P_{E_j} x = P_{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j} x \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{H}.$$

### Teorema (Corrispondenza con Operatori Autoaggiunti)

Le PVM su  $\mathbb{R}$  sono associate in modo biunivoco agli operatori autoaggiunti. Integrando la funzione identità  $\iota : \mathbb{R} \ni r \mapsto r \in \mathbb{R}$  rispetto alla misura  $P$ , otteniamo l'operatore normale:

$$A_P = \int_{\mathbb{R}} r dP(r).$$

Poiché la funzione integranda è a valori reali,  $A_P$  è autoaggiunto. Inoltre,  $P$  è l'unica PVM associata ad  $A_P$  e il supporto di  $P$  coincide con lo spettro  $\sigma(A_P)$ .

Concludiamo che, adottando il framework di von Neumann, le osservabili in Meccanica Quantistica sono naturalmente descritte da operatori autoaggiunti, i cui spettri coincidono con l'insieme dei valori assumibili dalle osservabili stesse.

## 2.5 Il Teorema di Soler

Per affrontare il problema della coordinatizzazione, elenchiamo alcune proprietà speciali del reticolo dei proiettori ortogonali. Poiché la distributività non vale in  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , si introduce la nozione più debole di **ortomodularità**. Un altro concetto centrale è quello di *atomo*.

### Definizione (Atomo)

Sia  $(\mathcal{L}, \geq, \mathbf{0}, \mathbf{1})$  un reticolo limitato. Un elemento  $a \in \mathcal{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$  è chiamato **atomo** se  $p \leq a$  implica  $p = \mathbf{0}$  oppure  $p = a$ .

Il seguente teorema raccoglie le proprietà rilevanti del reticolo  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , definendo contestualmente le proprietà astratte che possono applicarsi a reticoli ortocomplementati generici.

### Teorema (Proprietà di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ )

Nel reticolo ortocomplementato  $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \geq, \mathbf{0}, I, -)$  dei proiettori ortogonali su uno spazio di Hilbert complesso  $\mathcal{H}$ , gli unici atomi sono i proiettori su sottospazi monodimensionali. Inoltre,  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  soddisfa le seguenti proprietà:

- (i) **Separabilità** (per  $\mathcal{H}$  separabile): se una famiglia  $\{P_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  è ortogonale (cioè  $P_i \leq \neg P_j$  per  $i \neq j$ ), allora l'insieme degli indici  $J$  è al più numerabile.
- (ii) **Atomicità e Atomisticità**:
  1. Per ogni  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  esiste un atomo  $A$  tale che  $A \leq P$  (atomicità).
  2. Ogni  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  è il join degli atomi che contiene:  $P = \bigvee \{A \leq P \mid A \text{ è un atomo}\}$  (atomisticità).
- (iii) **Ortomodularità**: La relazione d'ordine implica una forma debole di distributività:

$$P \leq Q \implies Q = P \vee ((\neg P) \wedge Q).$$

- (iv) **Proprietà di copertura:** Se  $A$  è un atomo e  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  tali che  $A \wedge P = 0$ , allora valgono specifiche relazioni tra  $P$  e  $A \vee P$  che regolano l'altezza degli elementi nel reticolo.
- (v) **Irriducibilità:** Solo gli operatori  $0$  e  $I$  commutano con ogni elemento di  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

### Teorema (Atomicità $\Rightarrow$ atomisticità)

In un reticolo ortocomplementato  $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \geq, 0, \mathbb{I}, \neg)$  ortomodularità e atomicità implica atomisticità.

È possibile definire le operazioni di negazione logica e compatibilità direttamente sulla struttura astratta del reticolo, senza fare inizialmente riferimento alla natura operatoriale. Tuttavia, queste definizioni astratte si rivelano equivalenti alle nozioni standard sugli operatori.

### Definizione (Ortogonalità e Commutatività in Reticoli)

Sia  $(\mathcal{L}, \geq, 0, 1, \neg)$  un reticolo ortocomplementato e siano  $a, b \in \mathcal{L}$ .

- (a)  $a$  e  $b$  si dicono **ortogonali** (scritto  $a \perp b$ ) se  $a \leq \neg b$  (o equivalentemente  $b \leq \neg a$ ).
- (b)  $a$  e  $b$  si dicono **commutanti** se esistono tre elementi  $a$  due a due ortogonali  $c_1, c_2, c_3$  ( $c_i \perp c_j$  per  $i \neq j$ ) tali che:

$$a = c_1 \vee c_3 \quad e \quad b = c_2 \vee c_3.$$

### Osservazione

La definizione astratta di commutatività è equivalente a richiedere che il sottoreticolo ortocomplementato generato da  $p$  e  $q$  sia Booleano. Questo conferma che la commutatività rappresenta la "compatibilità classica" tra proposizioni.

Queste nozioni astratte recuperano esattamente il loro significato fisico usuale quando applicate al caso concreto dei proiettori.

### Proposizione (Equivalenza con le proprietà degli operatori)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e consideriamo  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  come reticolo ortocomplementato. Due elementi  $P, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ :

- (i) Sono **ortogonali** nel senso della Definizione precedente se e solo se proiettano su sottospazi mutuamente ortogonali, il che equivale alla condizione operatoriale  $PQ = QP = 0$ .
- (ii) **Commutano** nel senso della Definizione precedente se e solo se commutano come operatori, ovvero  $PQ = QP$ .

Piron ha dimostrato che, assumendo l'esistenza di almeno 4 atomi a due a due ortogonali, il reticolo delle proposizioni può essere identificato canonicamente con i sottospazi chiusi di uno spazio di Hilbert generalizzato, dove il campo scalare è sostituito da un **anello con divisione**  $\mathbb{D}$  (dotato di involuzione).

È stato a lungo congetturato che, aggiungendo ipotesi di separabilità e ortomodularità, l'anello  $\mathbb{D}$  si restringesse ai soli casi reali, complessi o quaternionici. La conferma formale è arrivata con il seguente teorema fondamentale.

### Teorema (Teorema di Solèr)

Consideriamo un reticolo separabile, ortomodulare,  $\sigma$ -completo, atomico e irriducibile, che soddisfi la proprietà di copertura.

Se tale reticolo ammette un insieme **infinito** di atomi a due a due ortogonali, allora esso è isomorfo al reticolo dei sottospazi chiusi (ordinati per inclusione insiemistica) di uno spazio di Hilbert separabile definito sul corpo  $\mathbb{K}$ , dove  $\mathbb{K}$  può essere scelto esclusivamente tra:  $\mathbb{R}$   $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{H}$ .

Come di consueto, il reticolo dei sottospazi chiusi può essere interpretato come il reticolo  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  dei proiettori ortogonali corrispondenti.

### Osservazione (La natura del corpo e l'irriducibilità)

- **Irriducibilità e Superselezione:** La proprietà di irriducibilità non è strettamente necessaria per la validità fisica. Se fallisce, il reticolo si decompone in sottoreticoli irriducibili. Fisicamente, questa situazione è naturale in presenza di regole di superselezione.



- **La scelta dei numeri complessi:** Il teorema di Solèr lascia aperta la scelta tra  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{H}$ . Perché la fisica standard usa  $\mathbb{C}$ ? Studi recenti suggeriscono che, per sistemi elementari relativistici, la struttura complessa sia imposta dalla simmetria relativistica stessa. Tuttavia, se non diversamente specificato, nel seguito assumeremo l'uso del campo  $\mathbb{C}$  per descrivere i sistemi quantistici.

### Osservazione (Necessità delle ipotesi di Solèr e Spazio-Tempo)

È fondamentale sottolineare che la validità di tutte le proprietà elencate nel Teorema 4.16 (Solèr) è cruciale per ottenere la tesi, ovvero la struttura di spazio di Hilbert. Esistono infatti strutture di reticolo fisicamente rilevanti che soddisfano molte di quelle proprietà, come l'ortomodularità, ma falliscono in altre.

Un esempio notevole è la famiglia degli **insiemi causalmente completi** nello spazio-tempo di Minkowski  $M$ . Definiamo il complemento causale  $\Sigma^\perp$  di un sottoinsieme di Borel  $\Sigma \subset M$  come:

$$\Sigma^\perp := \{x \in M \mid x \notin \Sigma \text{ e } x, y \text{ sono cronologicamente separati per ogni } y \in \Sigma\}.$$

(Ricordiamo che  $x, y$  sono cronologicamente separati se  $x \neq y$  e non esiste alcun segmento di tipo tempo che li congiunge). Una regione  $\Delta$  si dice **causalmente completa** se  $\Delta = (\Delta^\perp)^\perp$ .

Il reticolo costituito da tutte le regioni causalmente completi di  $M$ , ordinato tramite l'inclusione insiemistica, risulta essere:

- Un reticolo non-Booleano, atomico, atomistico, irriducibile e ortomodulare;
- Dotato di ortocomplemento  $\perp$ , con minimo  $\emptyset$  e massimo  $M$ .

Tuttavia, questo reticolo **non soddisfa la proprietà di copertura** (e anche la separabilità è problematica). Il fallimento della proprietà di copertura impedisce di dotare lo spazio-tempo di una naturale struttura di Hilbert generalizzata. Questo risultato distingue strutturalmente la logica quantistica standard dalla logica causale dello spazio-tempo, offrendo forse spunti per una formulazione della gravità quantistica.

## 2.6 Argomenti avanzati su Teoremi di Soler e Piron

Abbiamo finora stabilito che il reticolo dei proiettori  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  soddisfa proprietà specifiche (completezza, ortomodularità, atomicità, proprietà di copertura). Il problema inverso, noto come *problema della coordinatizzazione*, consiste nel dimostrare che un reticolo astratto  $\mathcal{L}$  che soddisfi tali assiomi sia necessariamente isomorfo al reticolo dei sottospazi di uno spazio di Hilbert.

Questo programma di ricerca, avviato da Birkhoff e von Neumann e sviluppato da Jauch, Piron e altri, ha trovato il suo culmine nel Teorema di Solèr (1995).

### 2.6.1 Dagli assiomi allo Spazio Vettoriale Generalizzato

Il primo passo consiste nel recuperare una struttura di spazio vettoriale su un corpo generico.

#### Teorema (Piron-Maeda-Maeda)

Sia  $\mathcal{L}$  un reticolo ortocomplementato, completo, irriducibile e atomistico che soddisfa la **proprietà di copertura**. Supponiamo inoltre che  $\mathcal{L}$  contenga almeno 4 atomi a due a due ortogonali.

Allora esistono:

1. Un anello con divisione (corpo)  $\mathbb{K}$  dotato di un'involuzione antiautomorfa  $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ ;
2. Uno spazio vettoriale "generalizzato"  $E$  su  $\mathbb{K}$ ;
3. Una forma hermitiana  $\langle \cdot | \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  non singolare (tale cioè che  $\langle x | x \rangle = 0 \implies x = 0$ );

tali che  $\mathcal{L}$  è isomorfo al reticolo dei sottospazi "chiusi"  $\mathbf{M} \subset E$  (dove la chiusura è definita algebricamente come  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{\perp\perp}$  rispetto alla forma hermitiana), ordinati per inclusione.

Inoltre,  $\mathcal{L}$  è ortomodulare se e solo se la forma soddisfa la condizione:  $\mathbf{M} + \mathbf{M}^\perp = E$  per ogni sottospazio chiuso  $\mathbf{M}$ .

### 2.6.2 Il Teorema di Solèr e la natura del campo

Il risultato precedente lascia aperta la natura dell'anello  $\mathbb{K}$ . Molti autori congetturarono che l'aggiunta dell'ipotesi di ortomodularità e di infinitezza dimensionale costringesse  $\mathbb{K}$  ad essere uno dei campi classici ( $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ). Questa congettura è stata dimostrata da Solèr (e indipendentemente da Holland per condizioni equivalenti).

#### Teorema (Solèr-Holland)

Consideriamo un reticolo  $\mathcal{L}$  che soddisfi tutte le ipotesi del teorema precedente (ortocomplementato, completo, irriducibile, atomistico, con proprietà di copertura e almeno 4 atomi ortogonali) e assumiamo inoltre che sia **ortomodulare**.

Supponiamo che valga una delle seguenti condizioni equivalenti (che impongono l'infinita dimensionalità):

- (a) **(Solèr)** Esiste una successione ortonormale infinita  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (ovvero  $\langle e_n | e_n \rangle = 1$ );
- (b) **(Holland)** Esiste una successione ortogonale infinita con norma fissata;
- (c) Lo spazio non ha dimensione finita e il reticolo ammette sufficienti simmetrie unitarie tra gli atomi.

Allora valgono le seguenti conclusioni fondamentali:

1. Il corpo  $\mathbb{K}$  può essere solo uno tra i **Reali**  $\mathbb{R}$ , i **Complessi**  $\mathbb{C}$  o i **Quaternioni**  $\mathbb{H}$ .
2. La forma hermitiana è definita positiva.
3. Lo spazio  $E$  è **completo** rispetto alla norma indotta, ed è quindi uno **Spazio di Hilbert** (reale, complesso o quaternionico).
4. Lo spazio di Hilbert è separabile se e solo se il reticolo  $\mathcal{L}$  è separabile.

#### Osservazione (Significato delle Ipotesi e Fisica)

- **Irriducibilità e Superselezione:** L'ipotesi di irriducibilità non è essenziale. Senza di essa, il reticolo si decompone in sottoreticoli irriducibili. In fisica, questo corrisponde alla presenza di regole di superselezione, dove lo spazio di Hilbert totale è somma diretta di settori coerenti tra i quali non sono possibili sovrapposizioni.
- **Proprietà di Copertura e Gravità Quantistica:** La covering property è invece cruciale. Esistono strutture fisicamente rilevanti che la violano. Ad esempio, il reticolo delle regioni causalmente complete nello spaziotempo di Minkowski soddisfa quasi tutte le proprietà (inclusa l'ortomodularità) ma non la proprietà di copertura. Questo impedisce di associare allo spaziotempo una struttura di Hilbert naturale, suggerendo che in una teoria di Gravità Quantistica la struttura geometrica dello spaziotempo e quella lineare della meccanica quantistica potrebbero divergere.
- **La scelta di  $\mathbb{C}$ :** Il teorema di Solèr ammette ancora  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}$ . Risultati recenti (Oppio et al.) mostrano che se si richiede che il sistema supporti un'azione del gruppo di Poincaré (necessaria per le particelle elementari relativistiche), i casi reale e quaternionico possono essere esclusi, lasciando  $\mathbb{C}$  come unica scelta consistente.

## 2.7 Il Teorema di Gleason

Sulla base della struttura di reticolo dei proiettori, possiamo formulare una definizione generale di probabilità in ambito quantistico.

#### Definizione (Misura di Probabilità Quantistica)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert. Una **misura di probabilità quantistica** su  $\mathcal{H}$  è una mappa  $\rho : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, 1]$  che soddisfa i seguenti requisiti:

1.  $\rho(\mathbb{I}) = 1$ ;
2.  $\sigma$ -additività su proiettori ortogonali: se  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$  è una famiglia tale che  $P_h P_k = 0$  per  $h \neq k$ , allora:

$$\rho\left(s\text{-}\sum_{n \in \mathbb{N}} P_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho(P_n).$$

L'insieme convesso delle misure di probabilità quantistiche su  $\mathcal{H}$  viene denotato con  $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ .

### Osservazione (Stati e Operatori)

È fondamentale distinguere tra la nozione matematica astratta di misura di probabilità e quella di operatore di stato quantistico. Come caso particolare, ogni vettore unitario  $\psi \in \mathcal{H}$  definisce una misura  $\rho_\psi(P) := \langle \psi | P \psi \rangle$ . Poiché  $\mathcal{M}(\mathcal{H})$  è convesso, anche le combinazioni convesse finite  $\rho = \sum p_k \rho_{\psi_k}$  sono misure. Associando a tale somma l'operatore  $T = \sum p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ , si osserva che il valore della probabilità può essere calcolato tramite la traccia:

$$\rho(P) = \text{tr}(TP).$$

Questo suggerisce la definizione della seguente classe di operatori.

### Definizione (Operatori di Stato Quantistico)

Si definisce l'insieme chiuso e convesso degli **operatori di stato quantistico** (o matrici densità)  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  come il sottoinsieme degli operatori di classe traccia  $\mathfrak{B}_1(\mathcal{H})$  positivi e con traccia unitaria:

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) := \{T \in \mathfrak{B}_1(\mathcal{H}) \mid T \geq 0, \text{tr}(T) = 1\}.$$

La relazione tra le due definizioni è formalizzata dalla seguente proposizione.

### Proposizione

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert. Se  $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ , la mappa

$$\rho_T : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ni P \mapsto \text{tr}(TP)$$

è ben definita e rappresenta una misura di probabilità quantistica, ovvero  $\rho_T \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$ .

Il risultato più profondo, che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le misure astratte sul reticolo e gli operatori di stato, è il celebre teorema di Gleason.

### Teorema (Teorema di Gleason)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert di dimensione finita  $\neq 2$ , oppure di dimensione infinita e separabile. L'insieme delle misure di probabilità quantistica  $\rho \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$  è in corrispondenza biunivoca con l'insieme degli operatori di stato quantistico  $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ . La biiezione è data dalla formula:

$$\text{tr}(TP) = \rho(P) \quad \text{per ogni } P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Inoltre, tale corrispondenza preserva la struttura convessa dei due insiemi.

### Osservazione (Confronto con la notazione fisica standard)

È utile notare una differenza di convenzione rispetto ai testi standard di Meccanica Quantistica.

- In questi appunti,  $T$  denota l'operatore di stato (o matrice densità), mentre  $\rho$  indica la misura di probabilità astratta.
- Nella letteratura fisica, è l'operatore stesso ad essere solitamente indicato con il simbolo  $\rho$  (o  $\hat{\rho}$ ).

Pertanto, l'uguaglianza  $\rho(P) = \text{tr}(TP)$  espressa nel Teorema di Gleason equivale alla formula standard per il calcolo del valore di aspettazione (o probabilità) di un proiettore  $P$  su uno stato misto  $\hat{\rho}$ :

$$\langle P \rangle_{\hat{\rho}} = \text{tr}(\hat{\rho}P).$$

Nel caso particolare in cui il sistema si trovi in uno stato puro descritto dal vettore unitario  $|\psi\rangle$ , l'operatore di stato diventa il proiettore  $T = |\psi\rangle\langle\psi|$  e la formula restituisce la celebre **regola di Born**:

$$\text{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|P) = \langle\psi|P|\psi\rangle.$$

### Osservazione (Il caso $\dim \mathcal{H} = 2$ e altre note)

- (a) L'ipotesi  $\dim(\mathcal{H}) \neq 2$  nel Teorema di Gleason è fondamentale. Esiste infatti un noto controesempio per  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ .

Identificando i proiettori unidimensionali  $P \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$  con i vettori unitari  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^t \in \mathbb{R}^3$  sulla sfera di Bloch, possiamo scrivere ogni proiettore come:

$$P_{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} \left( \mathbb{I} + \sum_{j=1}^3 n_j \sigma_j \right),$$

dove  $\sigma_j$  sono le matrici di Pauli standard. Si osserva che due proiettori sono ortogonali,  $P_{\mathbf{n}} \perp P_{\mathbf{n}'}$ , se e solo se i vettori corrispondenti sono antipodi, ovvero  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}'$ .

Fissiamo ora un vettore unitario  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$  e definiamo la mappa  $\rho : \mathcal{L}(\mathbb{C}^2) \rightarrow [0, 1]$  come segue:

$$\rho(P_{\mathbf{n}}) := \frac{1}{2} \left( 1 + \sum_{j=1}^3 (n_j m_j)^3 \right).$$

Questa mappa si estende univocamente a una misura di probabilità quantistica. Infatti, verifichiamo l'additività per proiettori ortogonali ( $\mathbf{n}$  e  $-\mathbf{n}$ ):

$$\rho(P_{\mathbf{n}}) + \rho(P_{-\mathbf{n}}) = \frac{1}{2}(1 + \Sigma) + \frac{1}{2}(1 - \Sigma) = 1,$$

dato che il termine cubico è dispari,  $(-n_j)^3 = -n_j^3$ .

Tuttavia, **non esiste alcun operatore**  $T$  (matrice densità) tale che  $\text{tr}(TP_{\mathbf{n}}) = \rho(P_{\mathbf{n}})$  per ogni  $\mathbf{n}$ . Se esistesse, imponendo l'uguaglianza avremmo:

$$\text{tr} \left[ T \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 n_j \text{tr}(T \sigma_j) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (n_j m_j)^3.$$

Semplificando, si otterrebbe una relazione del tipo:

$$\sum_{j=1}^3 n_j T_j = \sum_{j=1}^3 n_j^3 m_j^3,$$

dove  $T_j = \text{tr}(T \sigma_j)$  sono costanti. Questo è impossibile da soddisfare per ogni  $\mathbf{n}$ , poiché il membro di sinistra dipende **linearmente** dalle componenti  $n_j$ , mentre il membro di destra dipende da esse in modo cubico.

- (b) Il teorema può essere esteso a spazi di Hilbert reali o quaternionici (in accordo con il teorema di Solèr), sebbene con complicazioni tecniche legate alla definizione di traccia.
- (c) Il teorema di Gleason ha conseguenze cruciali per l'interpretazione della Meccanica Quantistica, in particolare escludendo la possibilità di stati "sharp" (senza dispersione) per tutte le osservabili, anticipando concetti legati ai teoremi di no-go per variabili nascoste (Bell, Kochen-Specker).

## 2.8 Teorema di Bell debole

In Meccanica Classica esistono misure di probabilità che assegnano valore 1 a certe proprietà elementari e 0 alle rimanenti (stati deterministici). In Meccanica Quantistica, invece, la natura è intrinsecamente probabilistica: non esistono misure "sharp" (senza dispersione). Questo fatto è sancito matematicamente dal seguente teorema, spesso citato come versione matematica del Teorema di Bell (o legato al Teorema di Kochen-Specker).

### Teorema (Teorema di Bell debole)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert con  $\dim(\mathcal{H}) > 2$  (finito o infinito separabile). Non esiste alcuna misura di probabilità quantistica  $\rho : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \{0, 1\}$  che assuma esclusivamente i valori 0 e 1.

*Dimostrazione.* (Sintesi) La dimostrazione sfrutta il Teorema di Gleason. Se tale misura esistesse, sarebbe rappresentata da un operatore  $T$ . La funzione  $f(\psi) = \langle \psi | T \psi \rangle$  mapperebbe la sfera unitaria (che è connessa) nell'insieme discreto  $\{0, 1\}$ . Per continuità, l'immagine dovrebbe essere connessa, quindi costante (tutta 0 o tutta 1). Ma questo contraddice il fatto che  $\text{tr}(T) = 1$ .  $\square$

### Osservazione

Questo risultato implica che non è possibile spiegare la MQ classica in termini di "variabili nascoste" non contestuali che assegnino valori definiti a tutte le osservabili simultaneamente. Alla luce delle precedenti discussioni, identificheremo d'ora in poi l'insieme delle misure fisicamente rilevanti con l'insieme convesso  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  degli operatori di stato (matrici densità), anche nel caso in cui  $\mathcal{H}$  non fosse separabile.

### 2.8.1 Stati Puri e Misti: Struttura convessa

Siamo ora in grado di analizzare la geometria dell'insieme degli stati  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ , introducendo la distinzione fondamentale per i fisici tra stati puri e misti. Ricordiamo che, dato un insieme convesso  $C$  in uno spazio vettoriale, un punto  $e \in C$  si dice **estremale** se non può essere scritto come combinazione convessa non banale di altri punti (cioè  $e = \lambda x + (1 - \lambda)y$  implica  $x = y = e$ ).

#### Proposizione (Struttura di $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ )

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert.

- (a) **Stati Puri (Punti Estremali):** I punti estremali dell'insieme convesso  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  sono esattamente i proiettori di rango 1, ovvero gli operatori della forma:

$$P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| \quad \text{con } \|\psi\| = 1.$$

Esiste quindi una biiezione tra i punti estremali e i raggi dello spazio proiettivo complesso  $\mathbb{P}\mathcal{H}$ . In fisica, questi corrispondono agli **stati puri**. Gli indicheremo con  $\mathcal{S}(\mathcal{H})_p$ .

- (b) **Stati Misti (Decomposizione):** Ogni operatore di stato  $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  è una combinazione lineare convessa (eventualmente infinita) di stati puri. In particolare, esiste sempre una decomposizione spettrale:

$$T = \sum_{u \in M} p_u |u\rangle\langle u|,$$

dove  $M$  è una base hilbertiana di autovettori di  $T$ , i coefficienti  $p_u \in [0, 1]$  soddisfano  $\sum p_u = 1$ , e la serie converge nella norma della classe traccia  $\|\cdot\|_1$  (e quindi anche uniformemente). Tali stati non estremali sono detti **stati misti**.

#### Osservazione (Sulla dimostrazione)

La parte (b) è una conseguenza diretta del fatto che gli operatori di classe traccia sono compatti e autoaggiunti (essendo positivi), ammettendo quindi una base di autovettori. La condizione  $\text{tr}(T) = 1$  assicura che la somma degli autovalori sia unitaria, definendo una distribuzione di probabilità classica  $\{p_u\}$  sugli stati puri  $|u\rangle$ .

## 2.9 Tipologie di Sovrapposizione e Stati Misti

In questa sezione approfondiamo la natura degli stati non puri e le diverse modalità con cui gli stati quantistici possono combinarsi.

#### Definizione (Stati Misti e Matrici Densità)

Gli operatori di stato che non sono estremali (cioè non sono proiettori di rango 1 della forma  $|\psi\rangle\langle\psi|$ ) sono chiamati **operatori statistici** o **matrici densità**. In fisica, si dice che essi descrivono **stati misti**, miscele o stati non puri.

È fondamentale distinguere due modi in cui gli stati possono essere "sommati":

1. **Sovrapposizione Coerente (Somma vettoriale):** Dati dei vettori  $\phi_i \in \mathcal{H}$ , consideriamo il vettore somma:

$$\psi = \sum_{i \in I} a_i \phi_i$$

con la serie convergente nella topologia di  $\mathcal{H}$  se l'insieme  $I$  è infinito. Lo stato puro  $T_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$  generato da questo vettore è detto **sovrapposizione coerente** degli stati puri associati ai  $\phi_i$ . Questo è il contenuto del **Principio di Sovrapposizione** degli stati puri.

2. **Sovrapposizione Incoerente (Somma convessa di operatori):** Se consideriamo una famiglia di operatori di stato  $\{T_i\}_{i \in I}$  e dei pesi  $p_i \in [0, 1]$  tali che  $\sum p_i = 1$ , definiamo:

$$T = \sum_{i \in I} p_i T_i.$$

In questo caso, l'operatore  $T$  descrive una **sovrapposizione incoerente** (o miscela statistica). Qui non si sommano le ampiezze di probabilità, ma le probabilità classiche di trovare il sistema in uno degli stati  $T_i$ .

### Definizione (Ampiezza e Probabilità di Transizione)

Siano  $\psi, \phi \in \mathcal{H}$  vettori unitari.

- Il numero complesso  $\langle \psi | \phi \rangle$  è detto **ampiezza di transizione** (o ampiezza di probabilità).
- Il numero reale non negativo  $|\langle \psi | \phi \rangle|^2$  è la **probabilità di transizione** dello stato  $|\phi\rangle\langle\phi|$  sullo stato  $|\psi\rangle\langle\psi|$ .

Interpretiamo  $|\langle \psi | \phi \rangle|^2 = \text{tr}(T_\psi P_\phi)$  come la probabilità che il sistema, preparato nello stato  $\psi$ , venga trovato nello stato  $\phi$  a seguito di una misurazione (al tempo  $t$ ). Si noti la simmetria  $|\langle \psi | \phi \rangle|^2 = |\langle \phi | \psi \rangle|^2$ .

### 2.9.1 L'origine dell'Interferenza Quantistica

La differenza fisica tra sovrapposizione coerente e incoerente diventa evidente calcolando le probabilità dei risultati di una misura. Consideriamo due vettori unitari  $\psi, \phi \in \mathcal{H}$  e costruiamo due stati diversi basati su di essi.

#### Osservazione (Analisi comparata delle probabilità)

Siano  $a, b \in \mathbb{C}$  coefficienti tali che  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .

1. **Caso Coerente (Stato Puro):** Definiamo il vettore  $\chi := a\psi + b\phi$ . Lo stato è  $T_\chi = |\chi\rangle\langle\chi|$ . La probabilità che una proposizione elementare  $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  sia vera in questo stato è data da:

$$\begin{aligned} \text{tr}(T_\chi Q) &= \langle \chi | Q | \chi \rangle = \langle a\psi + b\phi | Q | a\psi + b\phi \rangle \\ &= |a|^2 \langle \psi | Q | \psi \rangle + |b|^2 \langle \phi | Q | \phi \rangle + \underbrace{\bar{a}b \langle \psi | Q | \phi \rangle + \bar{b}a \langle \phi | Q | \psi \rangle}_{\text{Termini misti}}. \end{aligned}$$

2. **Caso Incoerente (Stato Misto):** Usiamo gli stessi pesi  $|a|^2$  e  $|b|^2$  per costruire una miscela statistica:

$$T := |a|^2 T_\psi + |b|^2 T_\phi = |a|^2 |\psi\rangle\langle\psi| + |b|^2 |\phi\rangle\langle\phi|.$$

La probabilità che  $Q$  sia vera in questo stato è semplicemente la media pesata delle probabilità:

$$\text{tr}(TQ) = |a|^2 \langle \psi | Q | \psi \rangle + |b|^2 \langle \phi | Q | \phi \rangle.$$

La differenza tra le due probabilità (4.23 e 4.24 nel testo) è esattamente il **Termine di Interferenza Quantistica**:

$$r(T_\chi Q) - \text{tr}(TQ) = \bar{a}b \langle \psi | Q | \phi \rangle + \bar{b}a \langle \phi | Q | \psi \rangle.$$

Questo termine (che può essere positivo o negativo) è assente nella miscela statistica classica. È proprio questo termine a spiegare fenomeni sperimentali come l'interferenza degli elettroni nell'esperimento della doppia fenditura: la sovrapposizione coerente permette alle "traiettorie" (o meglio, alle ampiezze) di interferire costruttivamente o distruttivamente, mentre la miscela incoerente somma semplicemente le intensità.

### 2.10 Stati post-misurazione: una critica al postulato del collasso

Dopo aver ridefinito lo stato in termini di operatori di classe traccia  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ , è necessario aggiornare l'assioma relativo al collasso della funzione d'onda. La formulazione standard (introdotta da von Neumann e generalizzata da Lüders) descrive cosa accade al sistema fisico, in uno stato  $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ , quando viene sottoposto alla misurazione di un'osservabile elementare  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  (assumendo che il risultato sia positivo,  $\text{tr}(TP) > 0$ ).

Ci riferiamo qui a *misurazioni non distruttive* (o di prima specie), dove il sistema esaminato (tipicamente una particella) non viene assorbito o annichilito dallo strumento.

#### Definizione (Postulato di proiezione generale)

Se un sistema quantistico si trova nello stato descritto dall'operatore statistico  $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  al tempo  $t_0$ , e la proposizione  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  risulta vera dopo una misurazione, lo stato del sistema immediatamente dopo la misura è descritto dall'operatore:

$$T_P := \frac{PTP}{\text{tr}(TP)}. \quad (6)$$

Il termine al denominatore è semplicemente la probabilità che l'evento  $P$  si verifichi nello stato  $T$ , necessaria per rinormalizzare la traccia a 1.

#### Osservazione (Caso dello stato puro)

Se lo stato iniziale è puro, ovvero  $T = |\psi\rangle\langle\psi|$  per un vettore unitario  $\psi$ , la formula generale si riduce alla nota proiezione del vettore di stato. Lo stato post-misura è ancora puro ed è determinato dal vettore:

$$\psi_P = \frac{P\psi}{\|P\psi\|}.$$

#### Osservazione (Misurazione di Osservabili e Spettro)

Il postulato si applica concretamente alla misurazione di un'osservabile  $A$  con misura spettrale  $P^{(A)}$ . Negli esperimenti reali, si testa una famiglia di proposizioni elementari mutuamente esclusive  $\{P_{E_j}^{(A)}\}$ , costruite su una partizione dello spettro  $\sigma(A)$ . L'ampiezza di questa partizione corrisponde alla sensibilità (risoluzione) dello strumento di misura. Misurare l'osservabile equivale a testare simultaneamente quale di queste proposizioni è vera.

Il postulato di proiezione sopra enunciato non è arbitrario, ma possiede un'importante caratterizzazione legata al concetto di probabilità condizionata.

Supponiamo di misurare  $P$  (ottenendo successo) e di volerci chiedere, subito dopo, qual è la probabilità di misurare una proposizione  $Q$ . In generale, se  $P$  e  $Q$  non commutano, la logica quantistica rende il problema della probabilità condizionata molto complesso e diverso dal caso classico.

Tuttavia, se ci restringiamo al caso di proposizioni compatibili, in particolare quando  $Q \leq P$  (ovvero il sottospazio di  $Q$  è contenuto in quello di  $P$ , il che implica  $Q$  implica  $P$ ), ci aspettiamo che valgano le intuizioni classiche. In questo caso  $P \wedge Q = Q$ , quindi la regola classica di Bayes suggerisce:

$$\mathbb{P}_T(Q|P) = \frac{\mathbb{P}_T(Q \cap P)}{\mathbb{P}_T(P)} = \frac{\text{tr}(TQ)}{\text{tr}(TP)}.$$

Se imponiamo che questa relazione debba valere per lo stato post-misurazione  $T'$ , otteniamo una caratterizzazione univoca del postulato di collasso.

#### Proposizione (Caratterizzazione di Lüders)

Sia  $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  uno stato quantistico e supponiamo che per  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  si abbia  $\text{tr}(TP) > 0$ . Esiste esattamente un altro operatore di stato  $T' \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  tale che:

$$\text{tr}(T'Q) = \frac{\text{tr}(TQ)}{\text{tr}(TP)} \quad \text{per ogni } Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \text{ con } Q \leq P. \quad (7)$$

Tale operatore è esattamente quello fornito dal postulato di Lüders-von Neumann:

$$T' = \frac{PTP}{\text{tr}(TP)}.$$

#### Osservazione (Critica Fisica)

Contrariamente a quanto potrebbe sembrare, l'ipotesi che giustifica la proposizione precedente (ovvero la validità della formula classica per la probabilità condizionata quando  $Q \leq P$ ) non è fisicamente banale. Essa si basa sull'idea che una misurazione consecutiva di  $P$  e poi di  $Q$  sia equivalente a una singola misurazione simultanea. Questa assunzione idealizza il processo, trascurando il fatto che due misurazioni in sequenza potrebbero coinvolgere strumenti e azioni fisiche differenti rispetto a una misura congiunta.

#### 2.10.1 Confronto tra i postulati di von Neumann e Lüders

Sebbene il postulato di proiezione sembri univoco, storicamente esistono due formulazioni che differiscono nel modo di trattare gli autospazi degeneri (con dimensione  $> 1$ ).

#### Osservazione (Differenza tra von Neumann e Lüders)

Consideriamo un'osservabile  $A$  con spettro discreto e decomposizione spettrale  $A = \sum_{\lambda} \lambda P^{(\lambda)}$ , dove  $P^{(\lambda)}$  è il proiettore sull'autospazio relativo all'autovalore  $\lambda$ , avente dimensione  $d_{\lambda}$ .

1. **Approccio di von Neumann:** L'idea originale prevedeva che la misura di  $A$  proiettasse lo stato sugli autovettori di una base fissata  $\{\psi_j^{(\lambda)}\}_{j=1}^{d_\lambda}$  dell'autospazio. Se il risultato è  $\lambda$ , lo stato post-misura diventa una miscela statistica (incoerente) delle proiezioni sugli assi della base:

$$T'_{vN} := \sum_{j=1}^{d_\lambda} P_j^{(\lambda)} T P_j^{(\lambda)}, \quad (8)$$

dove  $P_j^{(\lambda)} = |\psi_j^{(\lambda)}\rangle\langle\psi_j^{(\lambda)}|$ . Questo processo distrugge eventuali coerenze (sovrapposizioni) interne all'autospazio degenerare.

2. **Approccio di Lüders:** Il postulato moderno (che abbiamo adottato nella formula 4.25) prevede invece una proiezione sull'intero autospazio  $P^{(\lambda)}$ . Lo stato post-misura è:

$$T'_L := \frac{P^{(\lambda)} T P^{(\lambda)}}{\text{tr}(P^{(\lambda)} T P^{(\lambda)})}. \quad (9)$$

Questo approccio preserva la coerenza quantistica all'interno dell'autospazio degenerare (principio di minima perturbazione).

Le due prescrizioni coincidono se e solo se lo spettro è non degenerare ( $d_\lambda = 1$ ). Tuttavia, notiamo che le probabilità dei risultati calcolate con i due metodi sono identiche:  $\text{tr}(T'_{vN}) = \text{tr}(T'_L) = 1$ .

### 2.10.2 Dipendenza dello stato dalla procedura di misura

Un aspetto sottile ma fondamentale è che lo stato post-misura dipende strettamente da *cosa* è stato effettivamente misurato e da *come* l'informazione è stata raccolta. Non basta sapere "quale valore" ha assunto una grandezza, ma bisogna sapere se lo strumento era in grado di distinguere valori più fini.

#### Misura di funzioni di osservabili

Consideriamo un sistema preparato in uno stato  $\rho$  (usiamo  $\rho$  per brevità al posto di  $T$ ) e un'osservabile  $A$  con spettro puntuale  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ . Supponiamo che i proiettori spettrali  $P_i := P_{\lambda_i}$  siano unidimensionali.

Definiamo una funzione  $f(A)$  tale che:

$$f(\lambda_1) = f(\lambda_2) = 1 \quad e \quad f(\lambda_3) = f(\lambda_4) = -1.$$

Lo spettro dell'osservabile  $f(A)$  è quindi  $\sigma(f(A)) = \{1, -1\}$ .

Analizziamo due procedure diverse per ottenere il risultato "1":

1. **Misura diretta di  $f(A)$ :** Usiamo uno strumento che distingue solo tra il valore 1 e  $-1$ . Se otteniamo 1, secondo Lüders proiettiamo sul proiettore somma  $P_{1,2} = P_1 + P_2$ . Lo stato collassa in:

$$\rho' = \frac{(P_1 + P_2)\rho(P_1 + P_2)}{\text{tr}((P_1 + P_2)\rho)}.$$

In questo stato, la coerenza (i termini di interferenza) tra i sottospazi associati a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  viene preservata. Se  $\rho$  era uno stato puro,  $\rho'$  rimane puro (ma confinato nel sottospazio 1,2).

2. **Misura di  $A$  con "dimenticanza":** Misuriamo l'osservabile  $A$  completa, distinguendo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , ma successivamente raggruppiamo i dati (o ignoriamo la distinzione) dicendo solo "è uscito 1". Fisicamente, lo strumento ha interagito distinguendo i singoli autostati. Lo stato risultante è una miscela statistica dei risultati possibili pesati con le loro probabilità condizionate:

$$\rho'' = \frac{P_1\rho P_1 + P_2\rho P_2}{\text{tr}((P_1 + P_2)\rho)}.$$

Qui i termini incrociati (tipo  $P_1\rho P_2$ ) sono spariti.  $\rho''$  è una miscela incoerente (stato misto), anche se  $\rho$  era puro. Questo è un caso di probabilità **epistemica** ossia derivante da un'ignoranza di informazioni sul sistema. L'osservatore che ignora la distinzione dei risultati ha un'informazione sullo stato del sistema che non è totale, anche se non può saperlo. Ciò non è sintomo di un'interpretazione soggettivistica della meccanica quantistica, quanto suggerisce che lo stato è "oggettivo" tra osservatori che hanno la stessa conoscenza sul sistema.



In conclusione,  $\rho' \neq \rho''$ . La probabilità di ottenere il risultato 1 è la stessa, ma lo stato fisico finale è diverso. Questo dimostra che misurare  $f(A)$  non è equivalente a misurare  $A$  e poi calcolare la funzione, se ci interessa lo stato successivo del sistema.

**Esistono stati rappresentati da matrici densità che sono "intrinsecamente" probabilistiche?**

Sì, si prenda una coppia entangled. Se ho accesso solo ad un sottosistema e non all'altro, lo stato di esso è rappresentato da una matrice densità intrinsecamente probabilistica.

### 2.10.3 Misurazioni Non Selettive (Ideali)

Il caso (2) dell'esempio precedente introduce il concetto di **misura non selettiva**. Una misura selettiva filtra il sistema in base al risultato (come nell'equazione 4.25). Una misura non selettiva avviene quando l'apparato interagisce con il sistema misurando un'osservabile  $A$ , ma l'osservatore non legge il risultato o raccoglie tutti i sistemi uscenti in un unico ensemble.

Se  $\sigma(A) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j$  è una decomposizione in insiemi disgiunti di risultati e misuriamo  $A$  senza selezionare l'uscita, lo stato finale  $T'$  è la sovrapposizione incoerente di tutti i possibili stati post-misura pesati con la loro probabilità.

**Definizione (Misura Non Selettiva)**

Dato uno stato iniziale  $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  e una misura spettrale  $\{P_{E_j}^{(A)}\}$ , lo stato dopo una misura non selettiva è:

$$T' = \sum_{j \in \mathbb{N}} P_{E_j}^{(A)} T P_{E_j}^{(A)}. \quad (10)$$

Ponendo  $p_j = \text{tr}(T P_{E_j}^{(A)})$  e definendo gli stati condizionati normalizzati  $T_j$ , possiamo scrivere:

$$T' = \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j T_j.$$

**Osservazione**

È importante notare due aspetti:

- La mappa  $T \mapsto T'$  descritta dalla (10) è **lineare**. Al contrario, la mappa della misura selettiva (il collasso standard) non è lineare a causa del fattore di normalizzazione al denominatore che dipende da  $T$ .
- Questo formalismo giustifica la creazione di stati misti a partire da stati puri mediante l'interazione con un apparato di misura (decoerenza). Una volta creato uno stato misto in questo modo, la meccanica quantistica non offre alcun modo per distinguere tramite esperimenti diretti se tale miscela provenga da una misura non selettiva su un autovettore di  $A$  o da un'altra preparazione che ha generato la stessa matrice densità (ambiguità della decomposizione dell'ensemble).

## 2.11 Logica delle Algebre di von Neumann e Classificazione dei Fattori

Un punto storicamente cruciale nello sviluppo della teoria di von Neumann fu il tentativo di recuperare la proprietà di *modularità* per il reticolo delle proposizioni quantistiche, proprietà che fallisce nel reticolo standard  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  in dimensione infinita. L'idea è di restringere l'insieme delle osservabili e delle proposizioni a quelle appartenenti a una specifica algebra di von Neumann  $\mathfrak{R}$ .

Data un'algebra di von Neumann  $\mathfrak{R}$  su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , definiamo la **logica dell'algebra** come l'insieme dei suoi proiettori ortogonali:

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H}) := \mathfrak{R} \cap \mathcal{L}(\mathcal{H}). \quad (11)$$

Fisicamente, questo rappresenta l'insieme delle proposizioni elementari associate al sistema fisico descritto dall'algebra  $\mathfrak{R}$ .

**Proposizione (Proprietà di  $\mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$ )**

Sia  $\mathfrak{R}$  un'algebra di von Neumann su  $\mathcal{H} \neq \{0\}$ . Valgono i seguenti fatti:

- $\mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$  è un reticolo completo e ortomodulare (eredita la struttura da  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ).
- Il reticolo genera l'algebra:  $\mathfrak{R} = (\mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H}))''$ .

(c) Il centro del reticolo genera il centro dell'algebra:  $(\mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})')' = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}'$ .

(d)  $\mathfrak{R}$  è un **fattore** (centro banale) se e solo se il reticolo  $\mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$  è irriducibile.

(e)  $\mathfrak{R} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$  se e solo se il reticolo coincide con tutto  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

La classificazione dei fattori, opera monumentale di Murray e von Neumann, si basa sulla capacità di confrontare la "grandezza" dei proiettori all'interno dell'algebra, generalizzando il concetto di dimensione del sottospazio.

### Definizione (Equivalenza di Murray-von Neumann)

Due proiettori  $P, Q \in \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$  si dicono **equivalenti** (scritto  $P \sim Q$ ) se esiste un'isometria parziale  $U \in \mathfrak{R}$  tale che:

$$P = U^*U \quad e \quad Q = UU^*.$$

Intuitivamente, questo significa che i sottospazi  $P(\mathcal{H})$  e  $Q(\mathcal{H})$  sono isometrici attraverso una mappa che "vive" nell'algebra  $\mathfrak{R}$ . Si introduce un ordinamento parziale:  $P \preceq Q$  se esiste  $P' \in \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$  tale che  $P \sim P' \leq Q$ .

Questa relazione permette di definire quando un proiettore è "finito" o "infinito", analogamente agli insiemi nella teoria degli insiemi.

### Definizione (Finitzza)

Un elemento  $P \in \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$  si dice:

- (a) **Finito**: se  $P \sim Q \leq P$  implica  $P = Q$  (ovvero, non è equivalente a nessun suo sottoproiettore proprio).
- (b) **Infinito**: se non è finito.
- (c) **Propriamente infinito**: se è infinito e "centrally infinite".

#### 2.11.1 Funzione Dimensione e Classificazione dei Tipi

Se  $\mathfrak{R}$  è un fattore (i.e., non può essere decomposto ulteriormente), è possibile definire una "misura" della grandezza dei proiettori.

### Proposizione (Funzione Dimensione)

Se  $\mathfrak{R}$  è un fattore, esiste una mappa  $d : \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, +\infty]$ , detta **funzione dimensione**, unica a meno di costanti moltiplicative, tale che:

- $d(P) = 0 \iff P = 0$ ;
- $d(P) = d(Q) \iff P \sim Q$ ;
- $d(P + Q) = d(P) + d(Q)$  se  $P \perp Q$ .

In base al codominio (range) della funzione dimensione  $d(\mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H}))$ , i fattori sono classificati in tre Tipi principali. Questa classificazione è esaustiva.

**Tipo I (Discretezza):** Il range è discreto:  $\{0, 1, \dots, n\}$  (dove  $n$  può essere  $\infty$ ).

- Corrisponde alla Meccanica Quantistica standard.
- I fattori di Tipo I sono isomorfi a  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  per qualche spazio di Hilbert.
- Il reticolo contiene atomi (proiettori minimali).

**Tipo II (Geometria Continua):** Il range è continuo.

- **Tipo II<sub>1</sub>**: Il range è l'intervallo unitario  $[0, 1]$ . Qui l'elemento identità  $\mathbb{I}$  è finito. Questo è il caso in cui il reticolo diventa **modulare**.
- **Tipo II<sub>∞</sub>**: Il range è  $[0, \infty)$ .

**Tipo III (Patologico/QFT):** Il range è  $\{0, \infty\}$ .

- Tutti i proiettori non nulli sono infiniti. Non esiste una traccia normale finita.

- Sebbene sembrino patologici, questi fattori sono fondamentali nelle *Teorie Quantistiche dei Campi Algebriche* (AQFT) e nella meccanica statistica di sistemi infiniti.

### Osservazione

La distinzione tra i tipi ha profonde implicazioni fisiche. Mentre la QM ordinaria (sistemi finiti di particelle) vive nei fattori di Tipo I, la descrizione di sistemi con infiniti gradi di libertà (campi relativistici, limite termodinamico) richiede inevitabilmente l'uso di fattori di Tipo III, dove concetti come "stati puri" o "autovettori" diventano problematici o inesistenti.

## 2.12 Proprietà Reticolari e Classificazione Generale

Le proprietà strutturali del reticolo dei proiettori  $\mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$  variano drasticamente a seconda del tipo di fattore  $\mathfrak{R}$ . Di seguito riassumiamo le caratteristiche fondamentali (distributività, modularità, atomicità):

Tipo di Fattore	Modulare?	Atomico?	Note
<b>Tipo <math>I_n</math></b> ( $n < \infty$ )	Sì	Sì	Non distributivo per $n \geq 2$ . $d(P) = \dim(P)$ .
<b>Tipo <math>I_\infty</math></b>	No	Sì	Isomorfo a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con $\dim \mathcal{H} = \infty$ .
<b>Tipo <math>II_1</math></b>	<b>Sì</b>	<b>No</b>	<i>Geometria Continua</i> : modulare ma senza atomi.
<b>Tipo <math>II_\infty</math> e III</b>	No	No	Né modulari, né atomici.

Tabella 1: Proprietà del reticolo dei proiettori per i diversi tipi di fattori.

### 2.12.1 Estensione alle Algebre di von Neumann Generali

Se  $\mathfrak{R}$  non è un fattore (cioè il suo centro  $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}'$  non è banale), non ricade necessariamente in un unico tipo. Tuttavia, ogni algebra di von Neumann può essere decomposta nella **somma diretta** di algebre appartenenti ai tipi disgiunti definiti sopra.

Per classificare un'algebra generale, è necessario introdurre due definizioni tecniche riguardanti la struttura interna dei proiettori.

#### Definizione (Proiettore Abeliano e Supporto Centrale)

Sia  $\mathfrak{R}$  un'algebra di von Neumann su  $\mathcal{H}$ .

- Un proiettore finito  $P \in \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$  si dice **Abeliano** se l'algebra ridotta  $P\mathfrak{R}P := \{PAP \mid A \in \mathfrak{R}\}$  è un'algebra commutativa (abeliana).
- Dato un operatore  $A \in \mathfrak{R}$ , il suo **supporto centrale** (o central carrier)  $C_A$  è il più piccolo proiettore del centro che "copre"  $A$ . Formalmente:

$$C_A := \mathbb{I} - \bigvee \{P \in \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H}) \cap \mathfrak{R}' \mid PA = 0\}.$$

In termini intuitivi,  $C_A$  proietta sul sottospazio generato dall'azione del commutante  $\mathfrak{R}'$  sul range di  $A$ .

Utilizzando queste nozioni, possiamo definire i Tipi per una generica algebra di von Neumann  $\mathfrak{R}$ .

#### Definizione (Classificazione di $\mathfrak{R}$ )

Un'algebra di von Neumann  $\mathfrak{R}$  si dice di:

- **Tipo I:** se contiene un proiettore abeliano avente supporto centrale  $\mathbb{I}$ . (È di tipo  $I_n$  se l'identità è somma ortogonale di  $n$  proiettori abeliani equivalenti).
- **Tipo II:** se **non** contiene proiettori abeliani non nulli, ma contiene un proiettore finito avente supporto centrale  $\mathbb{I}$ . (È di tipo  $II_1$  se  $\mathbb{I}$  è finito,  $II_\infty$  se  $\mathbb{I}$  è propriamente infinito).
- **Tipo III:** se non contiene alcun proiettore finito non nullo (è puramente infinita).

#### Osservazione (Legame tra Fattori e Algebre Generali)

Esiste un legame profondo tra la classificazione dei fattori e quella delle algebre generali:

1. Un **fattore** è di tipo  $X$  (dove  $X \in \{I_n, II_1, II_\infty, III\}$ ) secondo la Definizione 7.66 se e solo se lo è secondo la classificazione basata sulla funzione dimensione (Prop. 7.63).
2. In uno spazio di Hilbert separabile, vale il teorema di decomposizione in **Integrale Diretto**: un'algebra di von Neumann di tipo  $X$  è isomorfa a un integrale diretto di fattori, tutti dello stesso tipo  $X$ . Questo generalizza il concetto di somma diretta al caso continuo.

### 2.13 Il Teorema di Gleason Generalizzato

Il celebre risultato di Gleason, che associa le misure di probabilità quantistica agli operatori di classe traccia (matrici densità), può essere esteso dal caso standard  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  al caso di una generica algebra di von Neumann  $\mathfrak{R}$ . Tuttavia, è necessario escludere casi patologici (il fattore  $I_2$ ) e considerare forme di addittività più forti.

#### Teorema (Gleason Generalizzato)

Sia  $\mathfrak{R}$  un'algebra di von Neumann su uno spazio di Hilbert complesso  $\mathcal{H} \neq \{0\}$ , la cui decomposizione in tipi non includa alcuna componente di Tipo  $I_2$ . Sia  $\mu : \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, +\infty]$  una misura sul reticolo dei proiettori tale che  $0 < \mu(\mathbb{I}) < +\infty$  e che sia  $\sigma$ -**additiva** (additiva su successioni numerabili di proiettori ortogonali).

Le seguenti tre condizioni sono equivalenti all'esistenza di un operatore positivo di classe traccia  $T \in \mathfrak{B}_1(\mathcal{H})$  tale che  $\mu(P) = \text{tr}(TP)$  per ogni  $P \in \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$ :

- (i)  $\mu$  è **completamente additiva**: Per ogni famiglia arbitraria (non necessariamente numerabile)  $\{P_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$  di elementi a due a due ortogonali:

$$\mu \left( \bigvee_{j \in J} P_j \right) = \sum_{j \in J} \mu(P_j). \quad (12)$$

- (ii)  $\mu$  ammette un **supporto**: Esiste un elemento  $P \in \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$  tale che  $\mu(Q) = 0$  se e solo se  $Q \perp P$  (per ogni  $Q \in \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$ ).
- (iii)  $\mu$  è normale: La funzione normalizzata  $\frac{1}{\mu(\mathbb{I})}\mu$  è la restrizione al reticolo dei proiettori di uno stato algebrico normale sulla  $C^*$ -algebra  $\mathfrak{R}$ .

#### Osservazione (Implicazioni Fisiche e Matematiche)

Analizziamo le conseguenze di questo teorema:

1. **Il caso Separabile**: Se lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  è **separabile**, ogni famiglia di proiettori a due a due ortogonali è al più numerabile. Di conseguenza, la  $\sigma$ -addittività implica automaticamente la completa addittività. Pertanto, in uno spazio separabile (e senza componenti  $I_2$ ), ogni misura  $\sigma$ -additiva è automaticamente generata da un operatore di classe traccia. **Attenzione**: A differenza del caso  $\mathfrak{R} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , se l'algebra è un sottoinsieme proprio, l'operatore  $T$  che rappresenta  $\mu$  non è in generale unico.
2. **Stati Normali**: Una misura di probabilità  $\mu_T$  su un'algebra di von Neumann  $\mathfrak{R}$  indotta da un operatore  $T$  di traccia unitaria ( $\text{tr}(T) = 1$ ) è chiamata **stato normale** di  $\mathfrak{R}$ . Tale misura è la restrizione al reticolo dei proiettori del funzionale lineare  $\omega_T : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definito da:

$$\omega_T(A) := \text{tr}(TA).$$

Il concetto di stato normale (che corrisponde alla continuità nella topologia ultra-debole) è centrale nella trattazione algebrica della Meccanica Quantistica e sarà approfondito nel Capitolo 14.

### 2.14 Caratterizzazione Algebrica degli Stati: Il Teorema di Riesz Non Commutativo

Questa sezione esplora una caratterizzazione puramente matematica dello spazio degli stati  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ , fondamentale per la formulazione algebrica delle teorie quantistiche (che vedremo in seguito). L'idea centrale è mostrare che la relazione tra stati e operatori è l'analogo "non commutativo" del celebre Teorema di Rappresentazione di Riesz per le misure classiche.

### 2.14.1 Stati come Funzionali Lineari

Ricordiamo che un operatore di classe traccia positivo  $T \in \mathfrak{B}_1(\mathcal{H})$  definisce un funzionale lineare sull'algebra degli operatori compatti  $\mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H})$  tramite la traccia:

$$\omega_T : \mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \omega_T(A) := \text{tr}(TA).$$

Questo funzionale è positivo ( $\omega_T(A^*A) \geq 0$ ) e la sua norma coincide con la traccia di  $T$ :  $\|\omega_T\| = \text{tr}(T)$ .

Possiamo quindi ribaltare la prospettiva e definire gli stati in modo astratto.

#### Definizione (Stato Algebrico)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert complesso. Chiamiamo **stato algebrico** sulla  $C^*$ -algebra  $\mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H})$  ogni funzionale lineare  $\omega : \mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$  che sia:

1. **Positivo:**  $\omega(A^*A) \geq 0$  per ogni  $A \in \mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H})$ ;

2. **Normalizzato:**  $\|\omega\| = 1$ .

L'insieme di tali stati è denotato con  $\mathfrak{E}(\mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H}))$ .

Il seguente teorema stabilisce che questa definizione astratta cattura esattamente gli stati fisici (matrici densità) che conosciamo.

#### Teorema (Caratterizzazione degli Stati)

La mappa  $T \mapsto \omega_T$  definita da  $\omega_T(A) = \text{tr}(TA)$  è una biiezione tra l'insieme degli operatori di stato  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  e l'insieme degli stati algebrici  $\mathfrak{E}(\mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H}))$ . In altre parole, ogni funzionale positivo e normalizzato sugli operatori compatti proviene da un unico operatore densità.

### 2.14.2 Analisi del Ragionamento: L'analogia con Riesz

Per comprendere appieno il significato "non commutativo" di questo risultato, è utile confrontarlo con il Teorema di Riesz classico per l'integrazione.

**Teorema di Riesz Classico (Analisi):** Consideriamo uno spazio di Hausdorff localmente compatto  $X$ . Il teorema afferma che ogni funzionale lineare positivo limitato  $\Lambda$  sullo spazio delle funzioni continue che svaniscono all'infinito,  $C_0(X)$ , è rappresentato da un'unica misura di Borel regolare  $\mu$ :

$$\Lambda(f) = \int_X f d\mu.$$

**Versione Quantistica (Non Commutativa):** In Meccanica Quantistica, lo spazio delle fasi viene sostituito dallo spazio di Hilbert e le funzioni commutano diventano operatori. Possiamo istituire il seguente parallelismo:

Caso Classico (Commutativo)	Caso Quantistico (Non Commutativo)
Spazio $X$ (localmente compatto)	Spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ( $\dim \mathcal{H} = \infty$ )
Funzioni $C_0(X)$ (svaniscono all' $\infty$ )	Operatori Compatti $\mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H})$ (spettro tende a 0)
Funzionale Positivo $\Lambda$	Funzionale Positivo $\omega$
Misura di Probabilità $\mu$	Operatore di Stato $T$ (Matrice Densità)
Integrale $\Lambda(f) = \int f d\mu$	Traccia $\omega(A) = \text{tr}(TA)$

Tabella 2: Dizionario tra Teoria della Misura Classica e Meccanica Quantistica.

#### Osservazione (Interpretazione Fisica)

La proposizione implica che possiamo pensare alla traccia  $\text{tr}(TA)$  come a un **integrale non commutativo** dell'osservabile  $A$  rispetto alla "misura" definita dallo stato  $T$ . Formalmente, se  $T_\rho$  è l'operatore associato a una misura di probabilità  $\rho$  sul reticolo  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  (grazie al teorema di Gleason), scriveremo simbolicamente:

$$\int_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} A d\rho := \text{tr}(T_\rho A). \quad (13)$$

Questa notazione unifica il concetto di valore di aspettazione quantistico con quello classico di media integrale.

Concludiamo con la formulazione formale del teorema di rappresentazione in questo contesto.

**Teorema (Teorema di Riesz Non Commutativo)**

*Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert complesso (separabile o di dimensione finita  $\neq 2$ ). Sia  $\omega : \mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$  un funzionale lineare positivo limitato con norma unitaria. Allora esiste un'unica misura di probabilità  $\rho_\omega : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, 1]$  (soddisfacente gli assiomi della misura quantistica) tale che:*

$$\omega(A) = \int_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} A d\rho_\omega \quad \forall A \in \mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H}). \quad (14)$$

*In concreto, questo integrale è calcolato come  $\text{tr}(TA)$ , dove  $T$  è l'operatore di stato associato a  $\omega$ .*

### 3 Esempi ed osservazioni utili

#### A cosa serve uno spazio normato e il prodotto scalare?

Prendo un SR e fisso una  $(O, e_1, e_2, \dots, e_n)$  a questo punto un vettore diventa

$$v = (x, y) = xe_1 + ye_2$$

con

$$x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad x(v) = x = (e_1, v)$$

$$y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad y(v) = y = (e_2, v)$$

$x$  e  $y$  dipendono quindi dalla base. La norma di un vettore invece non dipende dalla base. Il prodotto scalare invece mi serve per distinguere due vettori della stessa norma.

#### Norma su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

Si prenda  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  lo spazio delle funzioni reali  $C^\infty$  a supporto compatto. Posso definirci sopra la norma  $\|\cdot\|_p$  si può fare perchè è liscia e avendo supporto compatto è limitata.

### 3.1 Spazi di Hilbert

#### Spazi non separabili

- **Oscilloscopio**

Vorrei ricostruire  $\psi(x) = \sum c_n e^{i\omega_n x}$ . Il problema però è che quando si vuole ricostruire un suono per esempio si fa uno spettro continuo in frequenze (oppure non sono dei seni multipli). Non ho infatti periodicità e quindi nessuna serie di Fourier.

- **Funzioni quasi-periodiche**

Prendiamo  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$(f, g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R dx \overline{g(x)} f(x)$$

questo permette di costruire uno spazio di Hilbert  $B_2(\mathbb{R})$  con la  $\|\cdot\|_2$ . Una base è  $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ . Questo spazio di Hilbert non è separabile.

#### Insiemi densi

E' possibile lavorare con un certo insieme di funzioni e ottenere risultati che valgono per tutte le altre? Questo ci porta al concetto di insieme denso.

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  sono densi in  $L^2(\mathbb{R})$ . Non ha senso lavorarci in dimensione finita.

#### Perchè usiamo $L^2$

Perchè non vogliamo imporre limiti geometrici a priori sul modello.

### 3.2 Spazio di Successioni

- $l^p = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \mid \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}$ ,  $1 \leq p < \infty$
- $l^\infty = \{(x_n) \subset \mathbb{K} \mid (x_n) \text{ è limitata}\}$   
 $(x_n) \in l^\infty \Leftrightarrow \exists C > 0 \text{ t.c. } \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \leq C < \infty$
- $c = \{(x_n) \subset \mathbb{K} \mid (x_n) \text{ ammette limite } < \infty\}$
- $c_0 = \{(x_n) \subset \mathbb{K} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$
- $c_{00} = \{(x_n) \subset \mathbb{K} \mid x_n \text{ definitivamente nulla}\}$

#### Norme

- Su  $l^p$ :  $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{1/p}$
- Su  $l^\infty, c, c_0, c_{00}$ :  $\|x\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$

## Inclusioni Naturali tra Spazi $l^p/c/c_0/c_{00}$

Per  $1 \leq p < r < \infty$ :

$$c_{00} \subset l^p \subset l^r \subset c_0 \subset c \subset l^\infty$$

$c_{00}$  è denso in  $l^p$  (per  $p < \infty$ ) e in  $c_0$ . Le inclusioni sono continue.

- $(l^p, \|\cdot\|_p)$  è Banach.
- $(l^2, \|\cdot\|_2)$  con  $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n$  è Hilbert.
- $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$  e  $(c, \|\cdot\|_\infty)$  sono Banach (sono sottospazi chiusi di  $l^\infty$ ).
- $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$  NON è banach (perchè non è completo).

Controesempio: Si consideri la successione  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $c_{00}$  data da  $x_n^k = \begin{cases} 1/n & \text{se } 1 \leq n \leq k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .

– È una successione di Cauchy in  $l^\infty$ : per  $l \geq 1$ ,

$$\|x^k - x^{k+l}\|_\infty = \sup_{n=k+1}^{k+l} \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

- Ma  $(x^k)$  converge in  $l^\infty$  alla successione  $x = (1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- $x \in c_0$  (perché  $1/n \rightarrow 0$ ), ma  $x \notin c_{00}$  (non è definitivamente nulla).
- Quindi  $c_{00}$  non è uno spazio chiuso in  $c_0$ , perciò non è completo.

## Disuguaglianza di Hölder

$\forall x \in l^p, \forall y \in l^q$  t.c.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

Se  $p = q = 2 \implies$  Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

## Separabilità di $l^p$

- $l^p$  è separabile per  $1 \leq p < \infty$ . ( $l^\infty$  non è separabile).
- Uno spazio è separabile  $\Leftrightarrow \exists$  un sottospazio denso numerabile.
- $c_{00}$  (in particolare l'insieme delle successioni a valori razionali) è denso in  $(l^p, \|\cdot\|_p)$  per  $1 \leq p < \infty$ .
- $\overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_p} = l^p$ .
- $(\forall x \in l^p, \exists (x^k) \subset c_{00}$  t.c.  $\|x^k - x\|_p \rightarrow 0)$

## Riflessività

Def: Uno spazio normato  $(X, \|\cdot\|_X)$  è riflessivo se l'immersione canonica  $J : X \rightarrow X^{**}$  è suriettiva.

- $J : x \mapsto \delta_x$
- $\delta_x : X^* \rightarrow \mathbb{K}$  è un funzionale lineare e continuo (un elemento del bidual  $X^{**}$ ) definito da:

$$f \mapsto \delta_x(f) = f(x)$$

- $X^* = \{f : X \rightarrow \mathbb{K}, \text{lineare e continuo}\}$  (duale topologico)
- $X^{**} = (X^*)^*$  (bidual topologico)
- La riflessività vale per  $(l^p, \|\cdot\|_p)$  con  $1 < p < \infty$ .
- Tutti gli spazi di Hilbert sono riflessivi.



### 3.3 Spazi di Funzioni $L^p(\mathbb{R}^n)$ ( $p \in [1, +\infty]$ )

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto e  $\mu$  la misura di Lebesgue.

- $L^p(\Omega) = \{[f] : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \int_{\Omega} |f(x)|^p d^n x < \infty\}$ , per  $1 \leq p < \infty$ .
- $L^\infty(\Omega) = \{[f] : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \exists C > 0 \text{ t.c. } |f(x)| \leq C \text{ q.o. in } \Omega\}$
- La norma in  $L^\infty$  è  $\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C > 0 \mid |f(x)| \leq C \text{ q.o. in } \Omega\}$  (estremo superiore essenziale).

Si considerano classi di equivalenza  $[f]$  (funzioni uguali quasi ovunque) affinché  $\|f\|_{L^p} = 0 \Leftrightarrow f = 0$  q.o.

#### Disuguaglianza di Hölder per $L^p$

Siano  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^q(\Omega)$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Allora  $fg \in L^1(\Omega)$  e

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| d^n x \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p d^n x \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} |g(x)|^q d^n x \right)^{1/q}$$

ovvero  $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ .

#### Inclusioni Naturali

Se  $\text{mis}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 d^n x < \infty$  (misura finita) e  $1 \leq p < r \leq \infty$ :

$$L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

L'inclusione è continua.

#### Riflessività

- $L^p(\Omega)$  è riflessivo per  $1 < p < \infty$ .
- $L^1(\Omega)$  e  $L^\infty(\Omega)$  non sono riflessivi (in generale).

#### Separabilità

- $L^p(\Omega)$  è separabile per  $1 \leq p < \infty$ .
- $L^\infty(\Omega)$  non è separabile (in generale).
- $C_0^\infty(\Omega)$  (funzioni  $C^\infty$  a supporto compatto in  $\Omega$ ) è denso in  $L^p(\Omega)$  per  $p < \infty$ .
- $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^p}} = L^p(\Omega)$ .

#### Convergenza Debole e Forte in $X^*$

Sia  $(X, \|\cdot\|_X)$  uno spazio normato e  $\{f_n\} \subset X^*$ .

- **Convergenza Debole (puntuale):**  $f_n \rightharpoonup f$  se  $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in X$ .
- **Convergenza Forte (in norma):**  $f_n \rightarrow f$  se  $\|f_n - f\|_{X^*} \rightarrow 0$ .
- forte  $\implies$  debole.
- debole  $\implies$  forte se  $\dim X < \infty$ .

### 3.4 Spazi $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Def:  $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$  (spazio delle funzioni localmente  $p$ -integrabili),  $1 \leq p \leq \infty$ , se:

$$\forall K \subset \mathbb{R}^n \text{ compatto, } f \in L^p(K)$$

(cioè  $\int_K |f(x)|^p dx < \infty$ ).

Esempi:

- $f(x) \equiv c \in \mathbb{R}$ . Se  $c \neq 0$ ,  $f \notin L^1(\mathbb{R})$  ma  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  (e  $L^p_{loc}$  per ogni  $p$ ).
- $f \in C^0(\mathbb{R}^n) \implies f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$  per ogni  $p$ , perché  $f$  è limitata sui compatti.
- $f(x) = 1/x$  (con  $f(0) = 0$ ) non è in  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Basta prendere un compatto  $K$  che contiene 0, ad esempio  $K = [-1, 1]$ , e si ha  $\int_{-1}^1 |1/x| dx = \infty$ .

Valgono le seguenti inclusioni:

$$L^p(\mathbb{R}^n), C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

#### Lemma (Fondamentale Calcolo Variazioni, caso 1D)

Sia  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $f \in L^1_{loc}((a, b))$ . Se vale:

$$\int_a^b f(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty((a, b))$$

allora  $\exists c \in \mathbb{R}$  t.c.  $f(x) = c$  per q.o.  $x \in (a, b)$ .

### 3.5 Richiami di Complementi di Analisi III

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto.

#### Teorema (Teorema di Beppo Levi (Convergenza Monotona))

Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$  una successione di funzioni tale che:

- $f_n \geq 0$  q.o.
- $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$  q.o.  $\forall n \in \mathbb{N}$  (monotona non decrescente).

Sia  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  q.o. (il limite esiste, eventualmente  $+\infty$ ). Allora:

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx$$

#### Teorema (Lemma di Fatou)

Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$  una successione di funzioni tale che  $f_n \geq 0$  q.o. Allora:

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx$$

#### Teorema (Teorema di Lebesgue (Convergenza Dominata))

Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$  una successione di funzioni tale che:

- $f_n(x) \rightarrow f(x)$  q.o. in  $\Omega$ .
- $\exists g \in L^1(\Omega)$  (una funzione dominante) t.c.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  q.o.

Allora  $f \in L^1(\Omega)$  e  $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$  (cioè  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1$ ).

### 3.6 Spazi di Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$

Esempio (Equazione di Schrödinger per una particella libera):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \underline{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(t, \underline{x})$$

Si cerca  $\psi$  tale che  $\psi(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3)$  (funzione d'onda) per ogni  $t$ . L'equazione contiene  $\Delta \psi = \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}$ . Per dare senso a questo operatore, non basta richiedere  $\psi \in C^2$ . La richiesta corretta (in termini energetici) è  $\psi(t, \cdot) \in H^2(\mathbb{R}^3)$ .

#### Definizione $W^{1,p}$ (Derivata Debole)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $1 \leq p < \infty$ . Si dice che  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  se:

1.  $u \in L^p(\Omega)$
2.  $\exists f_1, \dots, f_n \in L^p(\Omega)$  tali che (integrando per parti):

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} f_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, n$$

Le funzioni  $f_i$  sono uniche (q.o.) e sono chiamate **derivate deboli** di  $u$ . Si pone  $f_i =: \frac{\partial u}{\partial x_i}$ .

- Se  $u \in C^1(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ , le derivate deboli coincidono con le derivate classiche.

**Norma  $W^{1,p}$**  La norma standard su  $W^{1,p}(\Omega)$  è:

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p)^{1/p} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{1/p}$$

(Per  $p = \infty$  si usa la somma delle norme  $L^\infty$ ).

**Proprietà**  $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}})$  è uno spazio di Banach.

- È separabile per  $1 \leq p < \infty$ .
- È riflessivo per  $1 < p < \infty$ .
- Per  $p = 2$ :  $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$  è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare:

$$(u, v)_{H^1} := \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx$$

#### Definizione $W^{k,p}$

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Per  $k \in \mathbb{N}$ :

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k\}$$

dove  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  è un multi-indice,  $|\alpha| = \sum \alpha_i$  è l'ordine della derivata, e  $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  è la derivata debole.

- $W^{k,2}(\Omega) =: H^k(\Omega)$  (Spazi di Hilbert)
- $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ , quindi  $H^0 = L^2$ .
- Esempio Schrödinger:  $\psi(t, \cdot) \in H^2(\mathbb{R}^3) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid \partial_i \psi \in L^2, \partial_i \partial_j \psi \in L^2\}$ .

## Teoremi di Embedding di Sobolev

I teoremi di Sobolev (o immersioni) stabiliscono relazioni tra gli spazi  $W^{k,p}$  e gli spazi  $C^m$  (spazi di funzioni continue con  $m$  derivate continue).

Se  $k - n/p > m$  (dove  $m$  è un intero  $\geq 0$ ), allora  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset C^m(\mathbb{R}^n)$ .

Una formula sintetica è:  $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \implies u \in C^m(\mathbb{R}^n)$  con  $m = \lfloor k - n/p \rfloor$ .

### Osservazione

- $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ . Qui  $k = 2, p = 2, n = 3$ .
- $m = \lfloor 2 - 3/2 \rfloor = \lfloor 0.5 \rfloor = 0$ .
- Quindi  $H^2(\mathbb{R}^3) \subset C^0(\mathbb{R}^3)$ .
- Questo significa che una funzione  $H^2$  (dopo eventuale modifica su un insieme di misura nulla) è continua e limitata.
- Questo è fondamentale per poter "valutare la funzione  $\psi$  in un punto  $x_0$ ",  $\psi(x_0)$ , operazione che non ha senso per una generica funzione  $L^2$ .

## 3.7 Operatori

### Operatore posizione

Prendiamo  $\mathcal{H} = L^2((0,1))$  e definiamo

$$\hat{X} : L^2((0,1)) \mapsto L^2((0,1)) \quad \hat{X}\psi = x\psi$$

possiamo calcolare la norma usando che

$$\int_0^1 dx |x\psi(x)|^2 \leq \int_0^1 dx |\psi(x)|^2 \Rightarrow \|\hat{X}\| \leq 1$$

Se però  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  allora posso prendere  $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

ma  $\hat{X}\psi \notin L^2(\mathbb{R})$  quindi gli operatori non limitati hanno bisogno di una teoria più estesa.

Vogliamo costruire l'aggiunto di  $\hat{X}$ , supponiamo di saperne l'esistenza. Possiamo usare

$$(\phi, \hat{X}\psi) = \int_0^1 dx \overline{\phi(x)} x\psi(x) = \int_0^1 dx x \overline{\phi(x)} \psi(x) = (\hat{X}\phi, \psi)$$

quindi è autoaggiunto.

Prendiamo  $\mathcal{H} = L^2((0,1))$ , proviamo a trovarne gli autovalori

$$\hat{X}\psi = \lambda\psi$$

anche se mi aspetto a priori che  $\lambda = x \ \forall \psi \in [0,1] \ \exists \psi \neq 0 \in W_\lambda$  quindi deve esistere un sottospazio ortogonale a  $W_\lambda$  quindi ho trovato una decomposizione con cardinalità di  $[0,1]$ , ma questo è assurdo perchè  $L^2$  è separabile. Abbiamo postulato che  $\hat{X}$  sia l'operatore giusto per la posizione magari ha autovalori diversi da quelli che ci aspettiamo però  $\forall x$  troviamo il  $\lambda$  tale che

$$x\psi(x) = \lambda\psi(x) \iff \psi(x) = 0$$

quindi non ho autovalori. Proviamo ad estendere la definizione di autovalore. Con le matrici quadrate 1

$$Tv = \lambda v \iff (T - v\mathbb{1}) = 0 \Rightarrow \#(T - v\mathbb{1})^{-1}$$

quindi se esiste l'inversa allora non  $\lambda$  non è un autovalore. In dimensione finita non ho fatto niente. Vediamo il caso di  $\hat{X}$

$$\exists (\hat{X} - \lambda\mathbb{1})^{-1} \text{ t.c. } ((\hat{X} - \lambda\mathbb{1})^{-1}\psi)(x) = \frac{1}{x - \lambda}\psi(x) \Rightarrow (\hat{X} - \lambda\mathbb{1})^{-1} := \frac{1}{x - \lambda}$$

Se  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \setminus [0, 1]$

$$\int_0^1 dx \left| \frac{\psi}{x - \lambda} \right|^2 < \infty$$

quindi ho l'inverso ben definito. Dato che l'unico intervallo in cui quell'integrale non è definito sono  $[0, 1]$  non ho l'inversa quindi sono autovalori. Quindi possiamo introdurre questa nuova definizione pagando il prezzo di non avere più autofunzioni in  $L^2$ , useremo le distribuzioni.

Questo operatore ha un ottimo comportamento nei limitati. Cambiando gli autovalori a seconda dello spazio in cui ci troviamo.

### Operatore parità

Prendiamo  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  e definiamo

$$\hat{P} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \quad \hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$$

possiamo calcolare la norma

$$||\hat{P}|| = 1$$

esso è anche unitario, cioè non cambia le norme.

Troviamo gli autovalori di  $P$

$$P\psi = \lambda\psi \rightarrow \psi(-x) = \lambda\psi(+x)$$

usando  $P^2$  possiamo trovare che  $\lambda^2 = 1$ . Definiamo  $\psi_{\pm} = \frac{\psi(x) \pm \psi(-x)}{2}$  si mostra che sono autovalori di  $P$ . Quindi ogni funzione di  $L^2$  può essere decomposta in due funzioni, la parte pari e la parte dispari.

Prendiamo una carica  $q$  a destra di un semispazio infinito conduttore, prendiamo  $\vec{E}_q = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$  come se non ci fosse la parete e inoltre voglio che  $\vec{E}_q(x=0) = 0$  prendo quindi la parte dispari e rimane una soluzione delle Maxwell. Se invece avessi  $\partial_x \vec{E}_q(x=0) = 0$  prendo la parte pari.

Si può dimostrare che l'operatore che prende la parte pari (dispari) sia un proiettore.

### Operatori finito dimensionali

Un operatore su  $\mathbb{C}^n$  è sempre rappresentabile tramite una matrice ed è sempre limitato. I seguenti sono indipendenti dalla base scelta

- Determinante (dipende dal prodotto degli autovalori)
- Traccia (dipende dalla somma degli autovalori)
- Autovalori

dato che voglio estrarre informazioni da un sistema fisico che è indipendente dalla base, queste devono essere contenute negli autovalori. Da ciò deriva il postulato della misura. Ci interessiamo però di misure reali quindi vorremmo che i nostri autovalori fossero numeri reali. Data una  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  e una b.o.c  $\{e_i\}$  allora  $A_{ij} = (e_i, Ae_j)$  se  $A$  è diagonalizzabile allora esiste una  $U$  tale che

$$UAU^{-1} = \sum \lambda_i P_i \quad \tilde{P}_i := U^{-1} P_i U \Rightarrow A = \sum \lambda_i \tilde{P}_i$$

tramite il teorema spettrale si dimostra che  $A = \bar{A}^\dagger = A^*$

### Operatore impulso

Prendiamo una  $\psi \in L^2$

$$\psi(x) = \begin{cases} x^{-1/4} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

applicando  $\frac{d}{dx}$  usciamo da  $L^2$ . Ora provo a calcolare l'aggiunto

$$\left( \phi, -i \frac{d\psi}{dx} \right) = -i \int_0^1 dx \overline{\phi(x)} \frac{d\psi}{dx}(x) = -i \overline{\phi\psi}|_0^1 + \int_0^1 dx \overline{\left( -i \frac{d\phi}{dx} \right)} \psi$$

questo termine di bordo va rimosso.

Questo operatore ha un ottimo comportamento negli illimitati, sistema il comportamento degli stati all'infinito e peggiora le singolarità in zero. Cambiando gli autovalori a seconda dello spazio in cui ci troviamo. Se lo spazio è limitato  $P$  e  $T$  NON sono più autoaggiunti.

Prendiamo quindi  $\mathcal{H} = L^2(0, \infty)$ , che è assimilabile al caso di una particella contro una parete e supponiamo inizialmente di prendere

$$\hat{P} = -i \frac{d}{dx} \quad D(\hat{P}) = C_0^\infty(0, \infty)$$

stando attenti a prendere l'intervallo aperto e non chiuso se no si ammettono funzioni che non si annullano in 0. Quindi si trova che

$$\left( \phi, -i \frac{d\psi}{dx} \right) = -i \int_0^1 dx \overline{\phi(x)} \frac{d\psi}{dx}(x) = -i \overline{\phi} \psi|_0^1 + \int_0^1 dx \overline{\left( -i \frac{d\phi}{dx} \right)} \psi = \left( \hat{P}^* \phi, \psi \right)$$

dove l'ultima uguaglianza ha senso se e solo se

1. il dominio di  $\hat{P}$  permette l'annullamento del termine di bordo
2.  $\psi \in L^2$  e  $\phi' \in L^2 \Rightarrow \psi \phi' \in L^1$

quindi troviamo che  $D(\hat{P}^*)$  è massimale, cioè tutte le funzioni tali che la loro derivata è in  $L^2$ . A questo punto usiamo la teoria degli indici di difetto di Von Neumann, trovando il  $\ker(P^* \pm i\mathbb{I})$ , risolvendo le due equazioni differenziali si arriva a scartare la soluzione esponenziale crescente perchè non è in  $L^2(0, \infty)$  ma a tenere l'altra. Questo fa sì che le dimensioni degli spazi siano diverse e quindi  $P$  non è autoaggiunto e quindi neanche un'osservabile fisica di quel sistema. Capiamo cosa significa, mettiamo caso di avere l'hamiltoniana di particella libera

$$\hat{H} = \hat{T} \quad \hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$$

(da notare che non ho fatto comparire  $P$ ), che applicata alla soluzione esponenziale negativa mi restituisce un'autovalore negativo. Questo autovalore non è rimuovibile come in fisica classica aggiungendo una costante in quanto in MQ questo non è più valido.  $P$  non può più essere autoaggiunto, in quanto se questo fosse vero, avrei che

$$\hat{P} = \sqrt{(2m\hat{H})}$$

e quindi avrebbe un autovalore complesso, il che non lo renderebbe autoaggiunto (fisico). A livello sperimentale quello che si fa è misurare sempre l'energia e mai l'impulso. Misurando vicino alla parete ci si accorge di questa soluzione e di questo autovalore, mentre mettendoci molto lontano dalle pareti questo effetto non viene distinto dal detector e si può lavorare con l'ipotesi di  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ .

Nel caso  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$  si trova che  $d_+ = d_- = 1$  e quindi  $P$  risulta essere un buon osservabile. Quindi ho una mappa  $U : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tra i due sottospazi  $\mathcal{N}_\pm$  che manda  $z \mapsto e^{i\alpha} z$  rappresentando un'isometria tra i due spazi. Costruendo tramite essa le estensioni autoaggiunte, si può notare che la scelta di  $\alpha$  rappresenta la scelta della condizione al contorno del problema.

## Operatori compatti

Possiamo immaginarceli come matrici infinite. Vorrei fare il conto di  $\langle A \rangle$  con un certo  $\psi = (\alpha, \beta)$  senza utilizzare una base. Non è che forse  $\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A)$  dove

$$\rho = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \bar{\alpha}\beta \\ \bar{\beta}\alpha & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

facendo il conto si trova che è vero. In MQ si può generalizzare uno stato con queste matrici di densità. In spazi infinito-dimensionali abbiamo bisogno di oggetti del genere con traccia finita, quali sono? Operatori classe traccia che sono compatti.

Gli operatori compatti garantiscono che:

1. Gli autovalori ordinati tendono a 0
2. Ogni autovalore ha molteplicità finita

quindi abbiamo speranza che la traccia converga.

## Operatori non limitati

Un esempio generale di operatore non limitato è (con  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ )

$$T = \sum_{k=0}^N c_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$$

se ho  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$   $T\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  e sono tutti stati.

### Operatori densi

Definiamo

$$\hat{T} = -i \frac{d}{dx} \quad \hat{K} = -\frac{d^2}{dx^2}$$

il dominio massimale è quello per cui ha senso applicarci l'impulso.

$$D_{\text{massimale}}(\hat{T}) = H^1(\mathbb{R}) \quad D_{\text{massimale}}(\hat{K}) = H^2(\mathbb{R})$$

dobbiamo anche assicurarci che (la corrente conservata)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\psi} \frac{d\psi}{dx} = 0$$

questa va a 0 solo in una dimensione su  $H^1$  ma non in  $\mathbb{R}^3$ , questa va a 0 ma per tanti altri matti motivi. Un caso sensato in cui possiamo fare i conti senza soffrire è  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = D_0(\hat{T})$  che è denso in tanti spazi e va tutto bene. Proviamo a trovare l'aggiunto

$$(\phi, T\psi) = -i \int_{\mathbb{R}} \bar{\phi}(x) \frac{d\psi}{dx} = -i \bar{\phi}\psi \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i \int_{\mathbb{R}} \frac{d\bar{\phi}(x)}{dx} \psi(x)$$

dove il termine di bordo muore senza problemi, se avessi usato  $H^1$  andava bene in una dimensione ma in tre assolutamente no. Continua però a non essere definito bene il secondo integrale, potrebbe essere comunque un integrale divergente. Se ho però la derivata di  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  allora va bene perchè il prodotto di due  $L^2$  mi dà una  $L^1$  e quell'integrale si fa. Allora a quel punto posso dire che quel conto fa ( $\hat{T}^*\phi, \psi$ ) ottengo quindi che

$$D(\hat{T}) = \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad D(\hat{T}^*) = H^1(\mathbb{R})$$

però

$$T^*\psi = -i \frac{d\psi}{dx} \Rightarrow T \subset T^*$$

La domanda che mi faccio è, esiste un  $S$  tale che

$$T \subset S \subset T^* \quad \text{t.c.} \quad S = S^*$$

La risposta può essere, non si può fare (operatore  $P$  su una semiretta), si può fare ed è unico (operatore  $P$  su  $\mathbb{R}$ ), ci sono infiniti modi di farlo.

## 3.8 Varie su operatori

### Aggiunto di A

Scelgo  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  e suppongo che  $A\psi = \lambda_1\psi$  quindi il sistema non cambia e io posso confrontarlo con uno stato di controllo  $(\psi, \lambda_1\psi) = (\psi, A\psi) = \lambda_1$  (dato che  $\|\psi\| = 1$ ). In generale posso farlo con un qualunque vettore di controllo o un array di essi. Posso ricavare la stessa informazione agendo sullo stato di controllo invece che sul sistema fisico? In altre parole, esiste un certo  $B$  tale che  $(\phi, A\psi) = (B\phi, \psi)$ ? La risposta ci porta all'aggiunto di  $A$ . Se questo operatore è lo stesso  $A$  si dice che è autoaggiunto e ha autovalori reali.

### Modulo di un operatore

Prendiamo un  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$  diagonalizzabile e prendiamo una funzione  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$A = \sum \lambda_i P_{\lambda_i} \Rightarrow f(A) := \sum f(\lambda_i) P_{\lambda_i}$$

il modulo serve perchè vorrei decomporre una matrice come decompongo un numero complesso in fase e modulo. A questo punto  $f$  la scelgo come la funzione radice.

### Traccia di un operatore

Prendiamo per semplicità una matrice, la traccia di  $A$  posso definirla anche nel caso infinito dimensionale, ma converge? Ipotizziamo che la traccia sia la somma infinita dei suoi autovalori

$$\text{Tr} A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j$$

Per il teorema di Riemann-Dini, dato un numero reale e una serie semplicemente convergente ma non assolutamente convergente (come  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ ), esiste una permutazione di termini di tale successione che ha converge a quel numero. Questo è un problema in MQ perchè potrei avere stati normalizzati a seconda della permutazione della serie. Quindi va richiesta la convergenza assoluta. Facciamo un esempio in cui le cose vanno male.

Prendiamo un operatore  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  e un vettore che scomponiamo sulla base standard  $e_n$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \quad \Rightarrow \quad T\psi := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} c_n e_n$$

$T$  si può mostrare che è limitato quindi  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  e che  $\|T\| \leq 1$ . Però

$$\text{Tr}T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

Ora se cambio base, e quindi scelgo i vettori della nuova base prendendone due dispari e uno pari... cioè  $v_1 = e_1$   $v_2 = e_3$   $v_3 = e_2$   $v_4 = e_5$ ... ottengo che

$$\text{Tr}T = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right] = \frac{3}{2} \ln 2$$

infatti non è classe traccia e non può essere uno stato quantistico.

### Chiusura di un operatore

Negli spazi finito dimensionali è come la continuità però non vediamo così.

Un operatore non chiuso è uno nel dominio non ci sono alcuni punti, come una retta che non ha il punto in zero. Uno che è chiudibile è uno che posso dire il suo valore dove non è definito.

### Teorema (Completezza degli operatori limitati)

Siano  $X$  uno spazio normato e  $Y$  uno spazio di Banach. Allora lo spazio degli operatori lineari limitati  $\mathcal{B}(X, Y)$  è uno spazio di Banach (cioè completo rispetto alla norma operatoriale).

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

In questo caso specifico,  $X = Y = \mathcal{H}$  è Hilbert  $\Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  è Banach.

### Teorema (Norma operatoriale e Spazi di Banach)

Se  $X, Y$  sono spazi normati,  $\mathcal{B}(X, Y)$  è normato con norma  $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ . Se  $Y$  è Banach, allora  $\mathcal{B}(X, Y)$  è Banach. Dimostrazione (cenni): Se  $(T_n)_n$  è Cauchy in  $\mathcal{B}(X, Y)$ , allora per ogni  $x$ ,  $(T_n x)_n$  è Cauchy in  $Y$ . Poiché  $Y$  è completo,  $T_n x \rightarrow y$ . Si definisce  $Tx := y$ . Si dimostra poi che  $T$  è limitato e  $T_n \rightarrow T$  in norma.

### Equivalenza Unitaria

Siano  $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  e  $T' : D(T') \rightarrow \mathcal{H}'$  con  $D(T') = UD(T)$  e  $T' = UTU^{-1}$ , dove  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  è unitario. Provare le seguenti proprietà:

- (1)  **$T$  chiudibile  $\Rightarrow T'$  chiudibile.** Definiamo  $\overline{T'} = U\overline{T}U^{-1}$ . Poiché  $\overline{T}$  è chiuso, si verifica che questa è la chiusura di  $T'$ .

$$\overline{T'}|_{D(T')} = U\overline{T}|_{D(T)}U^{-1} = UTU^{-1} = T'$$

- (2)  **$T$  chiuso  $\iff T'$  chiuso.** Ricordiamo che  $T$  è chiuso se il grafico  $\Gamma(T)$  è chiuso. Sia  $\xi_n = Ux_n \in D(T')$ . Se  $\xi_n \rightarrow \xi$  e  $T'\xi_n \rightarrow \eta$ , dobbiamo mostrare che  $\xi \in D(T')$  e  $T'\xi = \eta$ . Dato che  $U$  è unitario (quindi isometrico e invertibile), la convergenza di  $\xi_n$  implica la convergenza di  $x_n$ . Essendo  $T$  chiuso, le relazioni si trasportano tramite  $U$ .

$$T'\xi_n = UTU^{-1}(Ux_n) = UTx_n \rightarrow UTx = T'\xi$$

- (3)  **$T$  hermitiano  $\Rightarrow T'$  hermitiano.**  $T$  hermitiano:  $\langle y, Tx \rangle = \langle Ty, x \rangle$ . Siano  $x', y' \in D(T')$ . Esistono  $x, y \in D(T)$  tali che  $x' = Ux, y' = Uy$ .

$$\begin{aligned} \langle y', T'x' \rangle_{\mathcal{H}'} &= \langle Uy, UTU^{-1}Ux \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle Uy, UTx \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle y, Tx \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle Ty, x \rangle_{\mathcal{H}} = \langle UTy, Ux \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle T'y', x' \rangle_{\mathcal{H}'} \end{aligned}$$



(4)  **$T$  simmetrico  $\implies T'$  simmetrico.** Simmetrico significa Hermitiano +  $D(T)$  denso. Abbiamo già provato l'hermiticità. La densità di  $D(T')$  segue dalla densità di  $D(T)$  e dalla suriettività/continuità di  $U$ . Se  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{H}$ , allora  $U\varphi_n \rightarrow U\varphi$  in  $\mathcal{H}'$ .

(5)  **$T$  normale  $\iff T'$  normale.** Normale significa  $TT^* = T^*T$ . Calcoliamo l'aggiunto:  $(T')^* = (UTU^{-1})^* = (U^{-1})^*T^*U^* = UT^*U^{-1}$ .

$$T'(T')^* = (UTU^{-1})(UT^*U^{-1}) = UTT^*U^{-1}$$

Se  $T$  è normale,  $UTT^*U^{-1} = UT^*TU^{-1} = (T')^*T'$ .

### 3.9 Distribuzioni

#### Distribuzioni tramite funzioni $L^1_{\text{Loc}}$

Sia  $\psi \in L^1(\mathbb{R})$  allora il funzionale  $u_\psi : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

$$f \mapsto u_\psi(f) := \int_{\mathbb{R}} dx f(x) \psi(x)$$

(che esiste sicuramente) è una distribuzione? Cioè è continuo? Si verifica facilmente che è sequenzialmente continua.

$$\left| \int_{\mathbb{R}} dx f_j(x) \psi(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} dx |f_j(x)| |\psi| \leq M \int_{\mathbb{R}} dx |\psi| = M'$$

dove l'ultima disuguaglianza è data perchè è a supporto compatto con  $M$  massimo. Per convergenza dominata posso passare il limite sotto al segno d'integrale e ottengo che tutto tende a 0. Quindi è sequenzialmente continua quindi possiamo scrivere impropriamente che

$$L^1_{\text{Loc}} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

che sono le funzioni integrabili su tutti i compatti di  $\mathbb{R}$ . Inoltre si ha che

$$L^p(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{Loc}} \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

quindi la MQ sta dentro  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  se consideriamo  $p = 2$ .

#### Derivata di funzioni non derivabili

La theta di Heaviside è  $L^1_{\text{Loc}}(\mathbb{R})$  ed è il prototipo di situazioni fisiche nelle quali ho un campo tangente a una superficie che dentro di essa deve essere nullo (conduttore, lago, tubo...). La componente tangente salta da un certo numero a 0. Come deriviamo una funzione del genere?

$$\frac{\Theta(x)}{dx}(f) = -\Theta\left(\frac{df}{dx}\right) = -\int_{\mathbb{R}} dx \Theta(x) \frac{df}{dx} = -\int_0^\infty dx \frac{df}{dx} = -f(x)|_0^\infty = f(0) = \delta(f)$$

Ora posso derivare qualunque cosa. Per esempio  $f(x) = |x|$ , derivata otteniamo

$$\text{sign}(x) = \Theta(x) - \Theta(-x)$$

e quindi

$$\frac{d}{dx} \text{sign}(x) = \frac{d}{dx} \Theta(x) - \frac{d}{dx} \Theta(-x) = 2\delta$$

Fondamentalmente quando derivo qualcosa non derivabile (con derivabilità di salto), in ogni punto di salto ottengo una delta.

#### Posso integrare su $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ?

Se voglio mantenere la linearità (e quindi l'invarianza per traslazioni) no. Se no si fa e si chiama path integral.

#### Serie di Taylor

Prendiamo la serie di Taylor centrata in 0 di una  $f$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} x^n = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \delta^{(n)} \right] (f)$$

si nota che

$$x\delta^{(1)}(f) = \delta^{(1)}(xf) = -\delta(f + xf') = -\delta(f) - 0\delta(f') = -\delta(f)$$

### 3.10 Osservazioni sulla MQ

#### Misure in MQ

In MQ ho una corrispondenza biunivoca tra osservabili e operatori su  $L^2(\mathbb{R})$

$$A : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

voglio che il processo di misura restituisca sempre qualcosa nello stesso spazio e voglio che non sia troppo diverso dallo stato iniziale (che non cambino le proprietà topologiche degli insiemi input) i.e. voglio continuità degli operatori. Per esempio prendiamo  $U_a$  operatore che agisce su  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  come

$$(U_a f)(x) = f(x - a)$$

questa cosa funziona perchè l'integrale di Lebesgue è invariante per traslazioni.

Prendo uno stato  $\psi \in \mathcal{H}$  ci faccio agire  $A$  (operatore su questo spazio) e ottengo un nuovo stato. Siamo interessati quale sia la "differenza" tra questo nuovo stato e quello iniziale. Quindi viene introdotta la norma di un operatore.

#### Successione di misure

Vorrei inoltre poter fare una successione di misure sul mio sistema che generano una successione di stati che non so neanche se converge. Vorrei che a partire dai dati sperimentali riuscissi a concludere che la successione converge a qualcosa che posso approssimare a meno di un  $\epsilon$ . Devo avere quindi uno spazio in cui Cauchy  $\iff$  Convergente. I limiti sono SEMPRE in norma.

#### Perchè la MQ è basata su $L^2(\mathbb{R})$

Si consideri

$$\varepsilon(E, B) = \int_{\mathbb{R}} dx (|E|^2 + |B|^2)$$

quest'integrale ovviamente deve convergere, ma esistono soluzioni delle Maxwell che lo fanno divergere  $e^{x-t}$ . Quindi si richiede che  $E, B \in L^2(\mathbb{R})$ . Gli spazi di Hilbert separabili vogliono mantenere la finitezza di queste grandezze fisiche.

#### Statistica di Bose-Einstein e oscillatore armonico quantistico

Si prenda l'oscillatore armonico quantistico

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{Q}^2$$

esso presenta uno spettro discreto  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ , da dove salta fuori l'ipotesi di Planck?

Dato  $\beta = (k_B T)^{-1} > 0$  si può prendere  $e^{-\beta\hat{H}}$  e calcolarne la traccia con una base di autovettori di  $\hat{H}$

$$\text{Tr}(e^{-\beta\hat{H}}) = \sum_n (\psi_n, e^{-\beta\hat{H}} \psi_n) = \sum_n (\psi_n, \sum_{n!} \frac{1}{n!} (-\beta\hat{H})^n \psi_n) = \sum_n e^{-\beta E_n} = e^{-\beta\hbar\omega/2} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

dove nell'ultimo passaggio è stata calcolata la serie geometrica. Si mostra facilmente che  $|\hat{H}| = \hat{H}$  (è positivo e autoaggiunto). L'informazione sulla statistica è contenuta nella traccia dell'Hamiltoniano.

Ci potremmo anche chiedere se  $H$  sia autoaggiunto, la risposta è negli indici di difetto e nelle equazioni differenziali ad esse associate. Quello che si trova è che la soluzione esiste per Picard-Lindelhof (polinomi di Hermite) ma non sono  $\in L^2$ .

#### 3.10.1 Il caso dell'Idrogeno

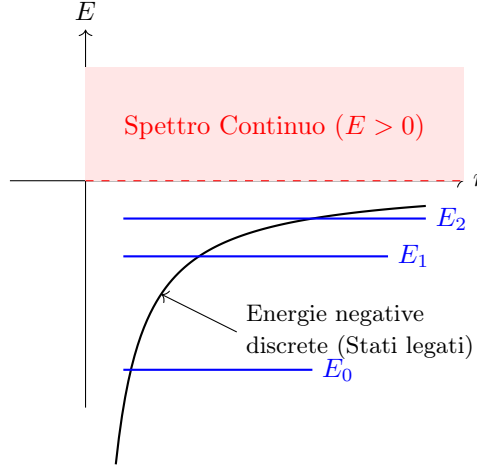
Consideriamo l'evoluzione temporale di uno stato quantistico. Se all'istante iniziale abbiamo:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\psi(0)\rangle$$

L'evoluzione temporale è data da:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |n\rangle$$

**Attenzione:** Questa formula è valida *solo se* l'Hamiltoniana  $H$  ha uno spettro **puramente discreto**. Nel caso dell'atomo di Idrogeno, l'Hamiltoniana  $H$  possiede sia uno spettro continuo che uno spettro discreto.



Non sappiamo a priori se  $|\psi(t)\rangle$  sia uno stato legato o di scattering (o una sovrapposizione). Dobbiamo prendere una base dello spazio  $L^2$ . Se dobbiamo trovare le autofunzioni di  $H$ :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e}{4\pi r} \right] \psi = E\psi$$

Poiché  $H$  ha spettro continuo, le soluzioni  $\psi$  appartengono allo spazio delle distribuzioni  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , non necessariamente a  $L^2$  (non sono normalizzabili nel senso classico). È un'equazione differenziale su  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

### 3.11 Indici di difetto e Criteri

#### Definizione (Indici di Difetto)

Dato un operatore simmetrico  $T$ , si definiscono indici di difetto le dimensioni dei sottospazi di difetto (nuclei dell'aggiunto shiftato):

$$d_{\pm}(T) := \dim[\ker(T^* \mp i\mathbb{I})]$$

#### Teorema (Estensioni Autoaggiunte e Indici di Difetto)

Se  $d_+(T) = d_-(T) = k$ , allora esistono infinite estensioni autoaggiunte di  $T$ . Tale famiglia di estensioni è parametrizzata da un gruppo a un parametro  $U(\alpha)$  di trasformazioni unitarie (o più in generale da una matrice unitaria  $U(k)$ ). Se  $d_+(T) \neq d_-(T)$ , l'operatore non ammette estensioni autoaggiunte. Se  $d_+(T) = d_-(T) = 0$ , l'operatore è essenzialmente autoaggiunto.

#### Teorema (Formula di von Neumann per il Dominio)

Nel caso  $d_+(T) = d_-(T) = 1$ , siano  $\varphi_+ \in \ker(T^* - i\mathbb{I})$  e  $\varphi_- \in \ker(T^* + i\mathbb{I})$  vettori normalizzati. Le estensioni autoaggiunte  $T_\alpha$  sono in corrispondenza biunivoca con le isometrie suriettive tra i sottospazi di difetto (in questo caso fasi  $e^{i\alpha}$ ). Il dominio dell'estensione  $T_\alpha$  è dato da:

$$D(T_\alpha) = \{\psi + z\varphi_+ + ze^{i\alpha}\varphi_- \mid \psi \in D(T), z \in \mathbb{C}\}$$

#### Criterio (Autoaggiunzione essenziale tramite base ortonormale)

Se un operatore simmetrico  $T$  possiede una base ortonormale di autostati  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con autovalori reali, allora  $T$  è essenzialmente autoaggiunto, cioè  $d_+(T) = d_-(T) = 0$ .

#### Criterio (Coniugazione di von Neumann)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e  $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  un operatore simmetrico. Sia  $C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operatore antilineare (coniugazione) tale che:

1.  $C^2 = \mathbb{I}$ ;
2.  $\langle C\psi, C\varphi \rangle = \overline{\langle \psi, \varphi \rangle}$  per ogni  $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ ;
3.  $C(D(T)) \subseteq D(T)$  e  $[C, T] = 0$  sul dominio di  $T$  (ossia  $CT\psi = TC\psi$ ).

Allora gli indici di difetto sono uguali:  $d_+(T) = d_-(T)$ . Di conseguenza, l'operatore ammette estensioni autoaggiunte.

### Osservazione (Dipendenza dal Dominio Spaziale)

La natura degli indici di difetto e la possibilità di estensioni autoaggiunte dipendono non solo dall'espressione formale dell'operatore differenziale, ma dalla topologia dell'intervallo su cui è definito. Ad esempio, per l'operatore  $T = xp + px$ :

- Su  $\mathbb{R}$ : Essenzialmente autoaggiunto ( $d_{\pm} = 0$ ).
- Su un intervallo limitato  $(a, b)$  (es.  $(1, 2)$ ): Ammette infinite estensioni ( $d_{\pm} = 1$ ).
- Su un intervallo semi-limitato o singolare (es.  $(0, 1)$  dove  $1/x$  non è integrabile): Può accadere che  $d_+ \neq d_-$ , rendendo impossibile l'estensione autoaggiunta.

### Hamiltoniano dell'Oscillatore Armonico e Autoaggiunzione Essenziale

Si consideri l'operatore  $H := -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$  definito su  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Per determinare se è essenzialmente autoaggiunto (senza calcolare esplicitamente gli indici di difetto  $d_{\pm}(H) = 0$ ), utilizziamo il Criterio di Nelson.

#### Teorema (Criterio di Nelson)

Sia  $A$  un operatore simmetrico su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Se il dominio di  $A$ ,  $D(A)$ , contiene un insieme di vettori analitici per  $A$  il cui span è denso in  $\mathcal{H}$ , allora  $A$  è essenzialmente autoaggiunto.

#### Definizione (Vettore Analitico)

Un vettore  $f \in \mathcal{H}$  è detto analitico per  $A$  se esiste  $s > 0$  tale che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n f\| s^n}{n!} < \infty$$

In particolare, gli autovettori propri di  $A$  sono vettori analitici (la serie diventa una serie esponenziale convergente). Per applicare il criterio, è sufficiente provare che gli autostati dell'oscillatore armonico  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  formano un sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) per  $L^2(\mathbb{R})$ . Ricordiamo la forma esplicita:

$$\psi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

dove  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$  sono i polinomi di Hermite.

#### Dimostrazione: 1. Ortogonalità

Per  $m \neq n$  (assumiamo  $n > m$ ), dobbiamo mostrare  $(\psi_n, \psi_m)_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ . Questo equivale a mostrare l'ortogonalità dei polinomi di Hermite rispetto al peso  $e^{-x^2}$ :

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx$$

Integrando per parti  $n$  volte (i termini di bordo si annullano per la rapida decrescenza della gaussiana):

$$= (-1)^{2n} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (H_m(x)) dx = 0$$

L'ultima uguaglianza vale perché  $H_m(x)$  è un polinomio di grado  $m < n$ , quindi la sua derivata  $n$ -esima è nulla.

#### Dimostrazione: 2. Normalizzazione

Verifichiamo  $\|\psi_n\|^2 = 1$ . Ponendo  $m = n$  nella formula precedente:

$$\|\psi_n\|^2 \propto \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n}{dx^n} (H_n(x)) e^{-x^2} dx$$

Poiché  $H_n(x)$  è di grado  $n$ , la derivata  $n$ -esima è una costante ( $2^n n!$ ). Portandola fuori dall'integrale rimane l'integrale gaussiano  $\int e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ . Combinando i fattori di normalizzazione:

$$\|\psi_n\|^2 = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} (2^n n!) \sqrt{\pi} = 1$$

### Dimostrazione: 3. Completezza

Dobbiamo mostrare che se  $f \in L^2(\mathbb{R})$  è ortogonale a tutti i  $\psi_n$ , allora  $f = 0$ . Lo span dei polinomi di Hermite coincide con lo span di tutti i polinomi. Dobbiamo verificare che  $S := \text{span}\{e^{-x^2/2}p(x) \mid p(x) \text{ polinomio}\}^\perp = \{0\}$ . Sia  $f \in S$ . Allora  $\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2}x^n dx = 0$  per ogni  $n$ . Definiamo  $g(x) := f(x)e^{-x^2/2}$ . Calcoliamo la trasformata di Fourier di  $g$ :

$$G(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2}e^{i\xi x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2}x^n dx = 0$$

Poiché  $G(\xi) = 0$ , per il teorema di Plancherel  $\|g\|_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\|G\|_{L^2} = 0$ , quindi  $g(x) = 0 \implies f(x) = 0$ . Concludiamo che  $H$  è essenzialmente autoaggiunto.

### Interpretazione Fisica: Operatore Cinetico su Semiretta

Abbiamo visto che  $T = -\frac{d^2}{dx^2}$  su  $L^2(0, \infty)$  ammette estensioni autoaggiunte  $T_\alpha$  definite da condizioni al contorno di Robin:

$$f'(0) + \beta f(0) = 0, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \tan \frac{\alpha}{2}\right)$$

Possiamo riscrivere la condizione usando un parametro  $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$  tale che  $\beta = \tan \gamma$ :

$$\cos \gamma f'(0) + \sin \gamma f(0) = 0$$

- $\gamma = 0 \implies f'(0) = 0$  (Neumann).
- $\gamma = \pm\pi/2 \implies f(0) = 0$  (Dirichlet).

### Osservazione (Condizioni di Robin e "Skin Effect" (Stati di Bordo))

Una conseguenza fisica rilevante delle condizioni al contorno di Robin ( $f'(0) + \beta f(0) = 0$ ) nell'estensione autoaggiunta dell'operatore cinetico è la possibilità di supportare stati localizzati al bordo. Come visto precedentemente, per  $\beta > 0$  (corrispondente a  $\theta \in (0, \pi/2)$  con  $\beta = \cot \theta$ ), l'equazione agli autovalori ammette la soluzione:

$$f(x) = Ce^{-\beta x}$$

Questa funzione presenta caratteristiche peculiari:

- **Localizzazione Esponenziale:** La densità di probabilità  $|\psi(x)|^2 \sim e^{-2\beta x}$  è massima al bordo ( $x = 0$ ) e decade esponenzialmente verso l'interno del dominio ("bulk"). Questo comportamento è analogo a uno "Skin Effect" quantistico, dove la particella è confinata sulla superficie del materiale.
- **Energia Negativa:** Tale stato corrisponde a un autovalore di energia negativo  $E = -\beta^2$ . Questo indica uno stato legato creato puramente dalla condizione al contorno, che agisce come una buca di potenziale attrattiva (una "trappola" delta di Dirac al bordo).
- **Dipendenza dal Parametro:** Maggiore è  $\beta$ , più rapido è il decadimento (minore lunghezza di penetrazione  $\lambda \sim 1/\beta$ ) e più forte è il confinamento al bordo. Se  $\beta \rightarrow 0$  (condizione di Neumann), lo stato legato scompare e ci si riconduce allo spettro continuo puro.

In sintesi, le condizioni di Robin permettono di modellizzare interazioni superficiali che possono "catturare" la particella, generando stati che non esistono per le condizioni "pure" di Dirichlet o Neumann.

### Osservazione (Stati Legati e Problema della Radice Quadrata)

Consideriamo la funzione  $f_\theta(x) = e^{-\cot \theta x}$  con  $\theta \in (0, \pi/2)$  (quindi  $\cot \theta > 0$ ). Questa funzione è in  $L^2(0, \infty)$  e soddisfa la condizione al contorno per  $\beta = \cot \theta$ .

$$T_\alpha f_\theta = -\frac{d^2}{dx^2}(e^{-\cot \theta x}) = -(\cot^2 \theta) f_\theta$$

$f_\theta$  è un'autofunzione con autovalore negativo  $(-\cot^2 \theta)$ . Questi sono detti **stati legati**. Ciò implica che l'estensione  $T_\alpha$  non preserva la positività dell'operatore originale  $T$ . **Conseguenza fisica:** Se interpretiamo  $T$  come l'energia cinetica  $P^2$ , non possiamo definire univocamente l'operatore impulso  $P = \sqrt{T_\alpha}$  perché lo spettro contiene valori negativi (la radice sarebbe immaginaria). Questo riflette il fatto che l'operatore impulso  $P = -i\frac{d}{dx}$  su  $(0, \infty)$  ha indici di difetto diversi ( $d_+ = 0, d_- = 1$ ) e non ammette estensioni autoaggiunte.

### Operatore Cinetico su Intervallo Limitato

Per  $T = -\frac{d^2}{dx^2}$  su un intervallo limitato  $(a, b)$ , gli indici di difetto sono  $d_{\pm}(T) = 2$ . Le estensioni autoaggiunte sono parametrizzate da una matrice unitaria  $U \in U(2)$  (dimensione 4). La parametrizzazione può essere scritta come:

$$U = e^{i\theta} M, \quad \text{con } M \in SU(2), \theta \in [0, \pi]$$

$$M = m_0 \mathbb{I} - i \vec{m} \cdot \vec{\sigma}$$

dove  $\vec{\sigma}$  sono le matrici di Pauli e  $m_0^2 + |\vec{m}|^2 = 1$ . Anche in questo caso, le estensioni non garantiscono necessariamente la positività.

### 3.12 Varie su distribuzioni

#### Supporto di $\delta$

Consideriamo la delta di Dirac  $\delta$ . Se prendiamo una funzione test  $\varphi$  supportata su  $(x-a, x+b)$  tale che  $0 \notin (x-a, x+b)$ , allora:

$$\delta(\varphi) = 0$$

Quindi su tutti questi insiemi che non contengono l'origine, la  $\delta$  è nulla.

Tuttavia, per ogni  $\varepsilon > 0$ , definendo un intorno  $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ , per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  con  $\text{supp}(\varphi) \subset I_\varepsilon$ , abbiamo:

$$\delta(\varphi) = \varphi(0)$$

che può essere diverso da zero. Quindi il supporto è topologicamente l'insieme  $\{0\}$ . Per la funzione gradino di Heaviside  $\Theta(x)$  (indicata come  $\mathbb{H}$  o  $\Theta$  negli appunti), si può dimostrare che:

$$\text{supp}(\Theta) = [0, \infty)$$

### 3.13 Esempi di equazioni distribuzionali

#### Pettine di Dirac

Risolvere  $\sin(x) \cdot u = 0$  con  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R})$ . La soluzione è il cosiddetto **Pettine di Dirac**:

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_{x_k} \quad \text{con } x_k = k\pi$$

#### Cristallo unidimensionale

Consideriamo un modello di cristallo descritto dall'Hamiltoniana:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda \delta_k$$

Qui vediamo ogni atomo come una delta di Dirac. **Nota:** Questo operatore  $H$  non può agire rigorosamente su  $L^2(\mathbb{R})$  perché la  $\delta$  non è definita su funzioni di  $L^2$  (necessita continuità, mentre funzioni  $L^2$  sono classi di equivalenza).

### 3.14 La distribuzione $\frac{1}{x}$

Vogliamo risolvere l'equazione distribuzionale:

$$xu = 1 \quad \text{con } u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R})$$

Questa è un'equazione non omogenea. La soluzione generale è data dalla somma di una soluzione particolare  $u_p$  e della soluzione dell'omogenea  $u_0$ :

$$u = u_p + u_0$$

#### 3.14.1 Soluzione Omogenea

L'equazione omogenea è  $xu_0 = 0$ . La soluzione è proporzionale alla delta di Dirac (che è supportata in 0, dove  $x = 0$ ):

$$u_0 = c\delta$$

(Definizione di soluzione particolare e omogenea).

### 3.14.2 Soluzione Particolare

Intuitivamente verrebbe da dire  $u_p = \frac{1}{x}$ . Tuttavia, la funzione  $1/x$  classica non appartiene a  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R})$  perché non è localmente integrabile nell'intorno dello zero (la singolarità è troppo forte).

$$\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \implies \text{necessitiamo una regolarizzazione.}$$

Possiamo usare la derivata del logaritmo:

$$\frac{1}{x} = \frac{d \ln |x|}{dx}$$

Sappiamo che  $\ln |x| \in L^1_{\text{loc}}$ , quindi è integrabile e definisce una distribuzione regolare. Possiamo quindi definire la distribuzione "valore principale di  $1/x$ " come:

$$\text{P.V.} \left( \frac{1}{x} \right) := \frac{d}{dx} \ln |x| \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R})$$

### 3.14.3 Verifica Formale

Per ogni funzione test  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ :

$$\left\langle \frac{d \ln |x|}{dx}, f \right\rangle = - \left\langle \ln |x|, \frac{df}{dx} \right\rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \ln |x| \frac{df}{dx}$$

Calcoliamo questo integrale separando la singolarità con un limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ :

$$W(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dx \frac{f(x)}{x} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x} \right]$$

Analizziamo il termine con il logaritmo (usando l'integrazione per parti sul termine distribuzionale):

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( [\ln |x| f(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} + [\ln |x| f(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{|x| > \varepsilon} dx \ln |x| \frac{df}{dx} \right)$$

Consideriamo i termini di bordo a  $\varepsilon$ :

$$[\ln |x| f(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} + [\ln |x| f(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} = \ln |-\varepsilon| f(-\varepsilon) - \ln |\varepsilon| f(\varepsilon)$$

Espandiamo  $f$  in serie di Taylor attorno a 0:  $f(\pm\varepsilon) = f(0) \pm f'(0)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ .

$$\begin{aligned} &= \ln \varepsilon [f(0) - f'(0)\varepsilon] - \ln \varepsilon [f(0) + f'(0)\varepsilon] + \dots \\ &= \ln \varepsilon [f(-\varepsilon) - f(\varepsilon)] = \ln \varepsilon [(f(0) - f'(0)\varepsilon) - (f(0) + f'(0)\varepsilon)] \\ &= \ln \varepsilon [-2\varepsilon f'(0)] \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Il primo termine si annulla (o meglio, i termini divergenti si cancellano grazie alla simmetria del Valore Principale). Quindi:

$$W(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{\varepsilon}^{\infty} dx \frac{f(x) - f(-x)}{x} \right) = \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x} dx$$

Dunque la distribuzione è ben definita:

$$\left\langle \frac{d \ln |x|}{dx}, f \right\rangle = \text{P.V.} \left\langle \frac{1}{x}, f \right\rangle$$

### 3.14.4 Soluzione Generale

La soluzione dell'equazione  $xu = 1$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R})$  è quindi:

$$u = \text{P.V.} \left( \frac{1}{x} \right) + c\delta$$

### 3.14.5 Analisi Complessa e Regolarizzazione

Possiamo vedere la regolarizzazione attraverso l'integrazione nel piano complesso:

$$\int \frac{f(x)}{x} dx \longrightarrow \oint \frac{f(z)}{z} dz$$

Consideriamo un percorso che evita la singolarità in  $z = 0$  deformando il cammino nel piano complesso.

### 3.14.6 Calcolo dei residui sui semicerchi

1. Percorso  $C_\varepsilon$  (sopra il polo):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z} dz = i\pi f(0)$$

(Nota: Il segno dipende dall'orientazione. Per il Lemma di Jordan sul piccolo cerchio in senso orario sarebbe  $-i\pi \text{Res}$ , qui stiamo integrando solo sul semicerchio). Negli appunti è indicato  $\pi i f(0)$ .

2. Percorso  $D_\varepsilon$  (sotto il polo):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z} dz = -i\pi f(0)$$

Questo concetto si lega alle formule di Plemelj-Sokhotski. Spostare il polo  $z \rightarrow z \pm i\varepsilon$  equivale a deformare il contorno:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \mp i\varepsilon} = \text{P.V.} \frac{1}{x} \pm i\pi \delta(x)$$

Negli appunti troviamo la relazione:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_C \frac{f(z)}{z - i\varepsilon} = 2\pi i f(i\varepsilon) \rightarrow 2\pi i f(0)$$

**Domanda:** Quale di questi risultati è quello giusto per  $u$ ? **Risposta:** Tutti. La soluzione generale è  $u = \text{P.V.} \frac{1}{x} + c\delta$ . A seconda della fisica del problema (condizioni al contorno, causalità, ecc.), il valore della costante  $c$  cambia.

### Controesempio finale

La funzione  $e^{1/x}$  **non** è interpretabile come distribuzione. La singolarità essenziale in  $x = 0$  è troppo forte per essere regolarizzata nello spazio delle distribuzioni standard.