

# Esercizi Distribuzioni

Tommaso Pedroni

## Esercizio 1F

Si consideri la sequenza di funzioni  $u_j \in C^\infty(\mathbb{R})$  definita dalla relazione  $u_j(x) = e^{ijx}$ . Si dimostri che la sequenza converge puntualmente solo se  $x = 2k\pi$  con  $k$  intero, mentre è sempre convergente in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

**Soluzione.** Analizziamo separatamente la convergenza puntuale e la convergenza nel senso delle distribuzioni.

**Convergenza Puntuale.** Fissiamo  $x \in \mathbb{R}$ . Dobbiamo studiare il comportamento del limite:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} e^{ijx}.$$

Distinguiamo due casi:

1. Sia  $x = 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . In tal caso, per ogni  $j \in \mathbb{N}$ :

$$u_j(2k\pi) = e^{ij(2k\pi)} = (e^{i2\pi})^{jk} = 1^j = 1.$$

La successione numerica è costante e quindi converge a 1.

2. Sia  $x \neq 2k\pi$ . Consideriamo la successione complessa  $z_j = e^{ijx}$ . Si osserva che  $z_{j+1} = e^{ix} z_j$ . Se il limite  $L = \lim_{j \rightarrow \infty} z_j$  esistesse finito, allora dovrebbe soddisfare:

$$L = \lim_{j \rightarrow \infty} z_{j+1} = \lim_{j \rightarrow \infty} e^{ix} z_j = e^{ix} L \implies L(1 - e^{ix}) = 0.$$

Poiché  $x \neq 2k\pi$ , si ha  $e^{ix} \neq 1$ , dunque deve essere  $L = 0$ . Tuttavia,  $|z_j| = |e^{ijx}| = 1$  per ogni  $j$ , il che implica  $|L| = 1$ . Abbiamo raggiunto una contraddizione ( $0 = 1$ ), pertanto la successione non converge.

Concludiamo che la convergenza puntuale si ha se e solo se  $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Convergenza in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .** Dobbiamo verificare se esiste un limite per la successione  $\{u_j\}$  nella topologia debole-\* di  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Sia  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_0^\infty(\mathbb{R})$  una funzione test arbitraria. Valutiamo l'azione di  $u_j$  su  $\phi$ :

$$\langle u_j, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u_j(x) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ijx} \phi(x) dx.$$

Riconosciamo nell'integrale la trasformata di Fourier di  $\phi$ , definita come  $\hat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \phi(x) dx$ , valutata in  $\xi = -j$ :

$$\langle u_j, \phi \rangle = \hat{\phi}(-j).$$

Poiché  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  (spazio di Schwartz), anche la sua trasformata di Fourier  $\hat{\phi}$  appartiene a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . In particolare,  $\hat{\phi}(\xi)$  decade all'infinito più rapidamente di qualsiasi potenza inversa di  $|\xi|$ . Possiamo invocare il **Lemma di Riemann-Lebesgue**, il quale assicura che:

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{\phi}(\xi) = 0.$$

Pertanto, passando al limite per  $j \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle u_j, \phi \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{\phi}(-j) = 0 = \langle 0, \phi \rangle.$$

Poiché questo vale per ogni  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , concludiamo che:

$$u_j \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

**Convergenza in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  (Approccio per parti).** Indaghiamo la convergenza nel senso delle distribuzioni, ovvero nella topologia debole-\*. Dobbiamo verificare il comportamento del limite  $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle u_j, \phi \rangle$  per una generica funzione test  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Scriviamo l'azione della distribuzione:

$$\langle u_j, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ijx} \phi(x) dx.$$

Per  $j \neq 0$ , possiamo sfruttare l'identità differenziale  $e^{ijx} = \frac{1}{ij} \frac{d}{dx} (e^{ijx})$ . Sostituendo nell'integrale ed integrando per parti, otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ij} \left( \frac{d}{dx} e^{ijx} \right) \phi(x) dx = \underbrace{\left[ \frac{e^{ijx}}{ij} \phi(x) \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \frac{1}{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ijx} \phi'(x) dx.$$

Il termine di bordo si annulla identicamente poiché  $\phi$  ha supporto compatto (si annulla fuori da un intervallo limitato). Possiamo ora stimare il modulo dell'integrale residuo:

$$|\langle u_j, \phi \rangle| = \left| -\frac{1}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ijx} \phi'(x) dx \right| \leq \frac{1}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ijx}| |\phi'(x)| dx = \frac{1}{j} \|\phi'\|_{L^1}.$$

Essendo  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ , la sua derivata  $\phi'$  è limitata e a supporto compatto, dunque  $\|\phi'\|_{L^1}$  è una costante finita  $C < \infty$ . Passando al limite:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\langle u_j, \phi \rangle| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{C}{j} = 0.$$

Ne concludiamo che  $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle u_j, \phi \rangle = 0 = \langle 0, \phi \rangle$  per ogni  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . Pertanto, la successione  $u_j$  converge alla distribuzione nulla:

$$u_j \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} 0.$$

## Esercizio 2F

Sia  $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ , con  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Si mostri che la restrizione di  $u$  a  $\mathcal{D}(\Omega)$  identifica un elemento di  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Soluzione.** Sia  $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ . Questo significa che per ogni successione  $\phi_j \rightarrow 0$  in  $\mathcal{E}(\Omega)$ , si ha  $\langle u, \phi_j \rangle \rightarrow 0$ .

Consideriamo la restrizione di  $u$  alle funzioni test  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Poiché  $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$ , l'espressione  $\langle u, \phi \rangle$  è ben definita. La linearità è ovvia. Dobbiamo dimostrare la **continuità** rispetto alla convergenza in  $\mathcal{D}(\Omega)$  (che chiamiamo convergenza  $\mathcal{D}$ ).

Ricordiamo la definizione di convergenza in  $\mathcal{D}(\Omega)$ : una successione  $\phi_j \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}(\Omega)$  se:

1. Esiste un compatto  $K \subset \Omega$  tale che  $\text{supp}(\phi_j) \subset K$  per ogni  $j$ .
2. Per ogni multi-indice  $\alpha$ ,  $\partial^\alpha \phi_j \rightarrow 0$  uniformemente su  $K$ .

Ricordiamo ora la definizione di convergenza in  $\mathcal{E}(\Omega)$  (convergenza  $\mathcal{E}$ ): una successione  $\psi_j \rightarrow 0$  in  $\mathcal{E}(\Omega)$  se:

1. Per ogni compatto  $H \subset \Omega$  e per ogni  $\alpha$ ,  $\partial^\alpha \psi_j \rightarrow 0$  uniformemente su  $H$ .

**Passaggio chiave:** Se una successione  $\phi_j$  converge a 0 nel senso di  $\mathcal{D}$ , essa converge a 0 anche nel senso di  $\mathcal{E}$ . Infatti, se  $\phi_j \rightarrow 0$  in  $\mathcal{D}$ , le derivate convergono uniformemente sul compatto fisso  $K$ . Poiché le funzioni sono nulle fuori da  $K$ , la convergenza uniforme è garantita su qualsiasi altro compatto  $H$  (poiché su  $H \setminus K$  le funzioni sono identicamente nulle).

Dunque abbiamo l'implicazione:

$$\phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \implies \phi_j \xrightarrow{\mathcal{E}} 0.$$

Poiché  $u$  è continuo su  $\mathcal{E}$  per ipotesi ( $u \in \mathcal{E}'$ ), sappiamo che  $\phi_j \xrightarrow{\mathcal{E}} 0$  implica  $\langle u, \phi_j \rangle \rightarrow 0$ . Combinando le due cose:

$$\phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \implies \langle u, \phi_j \rangle \rightarrow 0.$$

Questo dimostra che  $u$  è sequenzialmente continuo su  $\mathcal{D}(\Omega)$ , e quindi definisce una distribuzione in  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Identificazione (Densità).** Resta da chiarire perché tale elemento è "identificato" univocamente. Ciò deriva dal fatto che  $\mathcal{D}'(\Omega)$  è denso in  $\mathcal{E}'(\Omega)$ . Due funzionali continui su  $\mathcal{E}'(\Omega)$  che coincidono sul sottoinsieme denso  $\mathcal{D}'(\Omega)$  devono coincidere ovunque. Pertanto, l'operazione di restrizione è iniettiva e possiamo vedere  $\mathcal{E}'(\Omega)$  come un sottospazio di  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

## Esercizio 3F

Si risolvano separatamente in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  le seguenti equazioni:

$$1) \quad xu' = 1 \quad \text{e} \quad 2) \quad (x^3 - 3x + 2)u = 0.$$

**Soluzione. 1) Equazione  $xu' = 1$ .**

Poniamo  $v = u' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . L'equazione diventa  $xv = 1$ . Sappiamo che una soluzione particolare di questa equazione algebrica è la distribuzione Valore Principale di  $1/x$ , denotata con  $\text{PV}(1/x)$ . Infatti,  $x\text{PV}(1/x) = 1$  nel senso delle distribuzioni. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata  $xv_h = 0$  è data da  $v_h = C_1\delta$ , dove  $\delta$  è la delta di Dirac e  $C_1$  una costante arbitraria. Pertanto, la derivata di  $u$  ha la forma:

$$u' = \text{PV}\left(\frac{1}{x}\right) + C_1\delta.$$

Per trovare  $u$ , dobbiamo trovare una primitiva di ciascun termine.

- Una primitiva di  $\text{PV}(1/x)$  è  $\ln|x|$ . Infatti,  $(\ln|x|)' = \text{PV}(1/x)$ .
- Una primitiva di  $\delta$  è la funzione di Heaviside  $\Theta(x)$  (definita come 1 per  $x > 0$  e 0 per  $x < 0$ ).

Aggiungendo una costante di integrazione arbitraria  $C_2$  (che rappresenta la soluzione dell'equazione  $u' = 0$ ), otteniamo la soluzione generale:

$$u(x) = \ln|x| + C_1\Theta(x) + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Si può anche provare che sia quella la soluzione semplicemente scaricando su una test funzione.

**2) Equazione  $(x^3 - 3x + 2)u = 0$ .**

Scomponiamo il polinomio coefficiente  $P(x) = x^3 - 3x + 2$ . Si nota che  $P(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ . Eseguendo la divisione polinomiale o Ruffini, otteniamo:

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)(x - 1)(x + 2) = (x - 1)^2(x + 2).$$

L'equazione è dunque:

$$(x - 1)^2(x + 2)u = 0.$$

Una distribuzione  $u$  che soddisfa  $f(x)u = 0$ , con  $f \in C^\infty$ , deve avere supporto contenuto nell'insieme degli zeri di  $f$ , ovvero  $Z(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ . In questo caso,  $\text{supp}(u) \subseteq \{1, -2\}$ .

In base al Teorema di struttura delle distribuzioni con supporto puntuale (cfr. Hörmander o Friedlander), se una distribuzione è annullata da una potenza  $(x - x_0)^k$ , essa deve essere una combinazione lineare della delta in  $x_0$  e delle sue derivate fino all'ordine  $k - 1$ .

Possiamo scrivere  $u = u_1 + u_2$ , dove  $\text{supp}(u_1) \subseteq \{1\}$  e  $\text{supp}(u_2) \subseteq \{-2\}$ . Poiché i supporti sono disgiunti, l'equazione deve valere localmente attorno a ciascun punto.

- **Intorno a  $x = 1$ :** Il fattore rilevante è  $(x - 1)^2$ . Poiché  $(x + 2)$  non si annulla in un intorno di 1, possiamo dividere per esso (localmente è una funzione  $C^\infty$  invertibile), riducendo l'equazione a  $(x - 1)^2u_1 = 0$ . La soluzione generale è una combinazione lineare di  $\delta(x - 1)$  e  $\delta'(x - 1)$ :

$$u_1 = c_0\delta(x - 1) + c_1\delta'(x - 1).$$

- **Intorno a  $x = -2$ :** Il fattore rilevante è  $(x + 2)$  con molteplicità 1. Analogamente,  $(x - 1)^2$  è invertibile attorno a -2. L'equazione ridotta è  $(x + 2)u_2 = 0$ . La soluzione è proporzionale a  $\delta(x + 2)$ :

$$u_2 = d_0\delta(x + 2).$$

Complessivamente, la soluzione generale in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  è:

$$u(x) = c_0\delta(x - 1) + c_1\delta'(x - 1) + d_0\delta(x + 2), \quad c_0, c_1, d_0 \in \mathbb{C}.$$

## Esercizio 4F

Sia  $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  e  $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Si mostri che:

$$\tau_a(u \star v) = (\tau_a u) \star v = u \star (\tau_a v).$$

**Soluzione.** Basta applicare le definizioni e osservare come agisce la traslazione sull'argomento della funzione test.

Ricordiamo che per definizione  $\langle u \star v, \phi \rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi(x + y) \rangle$ .

Valutiamo l'azione dei tre termini su una generica  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ :

1. **Termine**  $\tau_a(u \star v)$ :

$$\langle \tau_a(u \star v), \phi \rangle = \langle u \star v, \tau_{-a}\phi \rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi(x + y + a) \rangle.$$

2. **Termine**  $(\tau_a u) \star v$ : Sfruttando la definizione di convoluzione e spostando la traslazione dalla distribuzione alla funzione test:

$$\langle (\tau_a u) \star v, \phi \rangle = \langle (\tau_a u)_x \otimes v_y, \phi(x + y) \rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi((x + a) + y) \rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi(x + y + a) \rangle.$$

3. **Termine**  $u \star (\tau_a v)$ : Analogamente:

$$\langle u \star (\tau_a v), \phi \rangle = \langle u_x \otimes (\tau_a v)_y, \phi(x + y) \rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi(x + (y + a)) \rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi(x + y + a) \rangle.$$

Poiché tutte e tre le espressioni portano allo stesso risultato  $\langle u_x \otimes v_y, \phi(x + y + a) \rangle$  per ogni  $\phi$ , l'uguaglianza è dimostrata.

## Esercizio 5 (Lemma di Riemann-Lebesgue) F

Si dimostri che se  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , allora

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{\phi}(k) = 0.$$

(Suggerimento: si parta da  $n = 1$  e si consideri la sequenza di funzioni caratteristiche).

**Soluzione.** Utilizziamo la densità delle funzioni semplici in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . La dimostrazione si articola in tre passi logici.

**Passo 1: Calcolo per una funzione caratteristica in  $\mathbb{R}^1$ .** Sia  $n = 1$ . Consideriamo la funzione caratteristica di un intervallo limitato  $I = [a, b]$ , definita come  $\chi_I(x) = 1$  se  $x \in [a, b]$  e 0 altrimenti. La sua trasformata di Fourier è:

$$\hat{\chi}_I(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_I(x) e^{-ikx} dx = \int_a^b e^{-ikx} dx.$$

Se  $k \neq 0$ , integriamo direttamente:

$$\hat{\chi}_I(k) = \left[ \frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_a^b = \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{ik}.$$

Passando al modulo:

$$|\hat{\chi}_I(k)| = \frac{|e^{-ika} - e^{-ikb}|}{|k|} \leq \frac{|e^{-ika}| + |e^{-ikb}|}{|k|} = \frac{2}{|k|}.$$

È evidente che  $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |\hat{\chi}_I(k)| = 0$ .

**Passo 2: Estensione alle funzioni semplici.** Una funzione semplice  $\psi$  (a supporto compatto) è definita come una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di intervalli (o rettangoli in  $\mathbb{R}^n$ ). Sia:

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^M c_j \chi_{I_j}(x), \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Per la linearità della trasformata di Fourier:

$$\hat{\psi}(k) = \sum_{j=1}^M c_j \hat{\chi}_{I_j}(k).$$

Poiché il limite è un operatore lineare e la somma è finita, segue dal Passo 1 che:

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{\psi}(k) = \sum_{j=1}^M c_j \lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{\chi}_{I_j}(k) = 0.$$

(Nota: In  $\mathbb{R}^n$ , si considerano rettangoli  $R = \prod [a_i, b_i]$ . La trasformata è il prodotto delle trasformate monodimensionali. Se  $|k| \rightarrow \infty$ , almeno una componente  $|k_j| \rightarrow \infty$ , portando a zero l'intero prodotto).

**Passo 3: Approssimazione per densità in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .** Sia ora  $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Poiché le funzioni semplici sono dense in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , per ogni  $\epsilon > 0$  esiste una funzione semplice  $\psi_\epsilon$  tale che:

$$\|\phi - \psi_\epsilon\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ricordiamo la stima fondamentale per la trasformata di Fourier ( $L^1 \rightarrow L^\infty$ ):

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}.$$

Valutiamo ora  $|\hat{\phi}(k)|$  utilizzando la diseguaglianza triangolare:

$$|\hat{\phi}(k)| = |\hat{\phi}(k) - \hat{\psi}_\epsilon(k) + \hat{\psi}_\epsilon(k)| \leq |\widehat{\phi - \psi_\epsilon}(k)| + |\hat{\psi}_\epsilon(k)|.$$

Il primo termine è maggiorato dalla norma  $L^1$  della differenza:

$$|\widehat{\phi - \psi_\epsilon}(k)| \leq \|\phi - \psi_\epsilon\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dunque abbiamo:

$$|\hat{\phi}(k)| < \frac{\epsilon}{2} + |\hat{\psi}_\epsilon(k)|.$$

Poiché  $\psi_\epsilon$  è una funzione semplice, per il risultato del Passo 2 sappiamo che  $\hat{\psi}_\epsilon(k) \rightarrow 0$ . Esiste quindi un  $R > 0$  tale che per ogni  $|k| > R$  si ha  $|\hat{\psi}_\epsilon(k)| < \frac{\epsilon}{2}$ .

In conclusione, per ogni  $\epsilon > 0$ , esiste  $R > 0$  tale che per  $|k| > R$ :

$$|\hat{\phi}(k)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Questo dimostra che  $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{\phi}(k) = 0$ .

## Esercizio 1

Sia  $\square = -\partial_t^2 + \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2$  l'operatore d'onda su  $\mathbb{R}^4$ . Si stabilisca se esistono dei valori di  $\kappa \in \mathbb{C}$  per cui

$$G^- = \kappa \Theta(t) \delta(t^2 - |x|^2)$$

è soluzione fondamentale per  $\square$ .

**Soluzione.** Consideriamo l'espressione formale  $\delta(t^2 - |x|^2)$ . Per definire rigorosamente questa distribuzione, osserviamo l'argomento della delta come funzione della variabile radiale  $r = |x|$ . Poniamo  $g(r) = t^2 - r^2$ . Poiché il supporto di  $G^-$  è limitato a  $t > 0$  e operiamo con coordinate radiali  $r \geq 0$ , l'unica radice rilevante di  $g(r) = 0$  è  $r = t$ . Fattorizzando l'argomento abbiamo  $t^2 - r^2 = (t+r)(t-r)$ . Nell'intorno della radice  $r = t$ , il fattore  $(t+r)$  è strettamente positivo e pari a  $2t$  (o equivalentemente  $2r$  sul supporto). Utilizzando la proprietà di scalamento della delta  $\delta(hy) = \frac{1}{|h|}\delta(y)$ , otteniamo la decomposizione radiale:

$$\delta(t^2 - |x|^2) = \frac{\delta(t-r)}{t+r} = \frac{\delta(t-r)}{2r}.$$

Possiamo quindi scrivere l'azione di  $G^-$  su una funzione test  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$  come un integrale su  $\mathbb{R}^3$  dove la variabile temporale è vincolata a  $|x|$ :

$$\langle G^-, \phi \rangle = \frac{\kappa}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|} \phi(|x|, x) dx.$$

**Coordinate sferiche e funzione ausiliaria.** Per calcolare l'azione del D'Alembertiano, è conveniente passare a coordinate polari sferiche per la parte spaziale. Introduciamo la \*\*media sferica\*\* della funzione test, definita come:

$$\tilde{\phi}(t, r) := \int_{S^2} \phi(t, y_r) d\sigma,$$

dove l'integrale è calcolato sulla superficie della sfera unitaria  $S^2$  e  $y_r$  indica il punto sulla sfera di raggio  $r$ . Introduciamo inoltre la funzione ausiliaria pesata:

$$\Psi(t, r) := r \tilde{\phi}(t, r).$$

Sfruttando la decomposizione della misura di Lebesgue  $dx = r^2 dr d\sigma$ , l'azione della distribuzione diventa un funzionale univariato nella variabile radiale:

$$\langle G^-, \phi \rangle = \frac{\kappa}{2} \int_0^{+\infty} dr r^2 \frac{1}{r} \tilde{\phi}(r, r) = \frac{\kappa}{2} \int_0^{+\infty} \Psi(r, r) dr.$$

**Applicazione dell'operatore d'onda.** Per verificare la condizione di soluzione fondamentale, calcoliamo  $\langle \square G^-, \phi \rangle = \langle G^-, \square \phi \rangle$ . In coordinate sferiche, il Laplaciano in  $\mathbb{R}^3$  si decompone in una parte radiale e una angolare:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2},$$

dove  $\Delta_{S^2}$  è l'operatore di Laplace-Beltrami sulla sfera unitaria (che contiene solo derivate rispetto agli angoli  $\theta, \varphi$ ).

Consideriamo ora la media sferica della funzione  $\Delta \phi$ :

$$\widetilde{(\Delta \phi)}(t, r) = \int_{S^2} \left( \partial_r^2 \phi + \frac{2}{r} \partial_r \phi + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2} \phi \right) d\sigma.$$

Poiché l'integrazione avviene solo sulle variabili angolari, le derivate radiali  $\partial_r$  possono essere portate fuori dall'integrale. Il termine cruciale è l'integrale del Laplaciano angolare:

$$\int_{S^2} \Delta_{S^2} \phi d\sigma = 0.$$

Questo integrale è nullo per il teorema della divergenza sulla varietà chiusa senza bordo  $S^2$  (o equivalentemente perché le armoniche sferiche di grado zero sono costanti, e l'integrale di  $\Delta_{S^2}$  contro una costante è nullo).

Di conseguenza, la media sferica del D'Alembertiano agisce solo tramite la parte radiale e temporale:

$$\widetilde{(\square \phi)}(t, r) = \left( -\partial_t^2 + \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) \tilde{\phi}(t, r).$$

Per semplificare ulteriormente, utilizziamo l'identità operatoriale valida per funzioni radiali:

$$\left( \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) f(r) = \frac{1}{r} \partial_r^2 (rf(r)).$$

Moltiplicando l'espressione della media per  $r$  per passare alla funzione ausiliaria  $\Psi(t, r) = r\tilde{\phi}(t, r)$ , otteniamo:

$$r \widetilde{(\square\phi)}(t, r) = -r\partial_t^2\tilde{\phi} + \frac{1}{r}\partial_r^2(r\tilde{\phi}) \cdot r = (-\partial_t^2 + \partial_r^2)\Psi(t, r).$$

Questo passaggio è chiave: riduce l'operatore d'onda radiale in 3D (che ha il termine  $2/r$ ) all'operatore d'onda 1D standard (senza termini del primo ordine) applicato alla funzione pesata  $\Psi$ . Sostituendo questo risultato nell'integrale di definizione di  $G^-$ :

$$\langle G^-, \square\phi \rangle = \frac{\kappa}{2} \int_0^{+\infty} [(\partial_r^2 - \partial_t^2)\Psi(t, r)]_{t=r} dr.$$

**Riduzione a derivata totale.** Sfruttiamo la fattorizzazione dell'operatore d'onda unidimensionale  $(\partial_r^2 - \partial_t^2) = (\partial_r + \partial_t)(\partial_r - \partial_t)$ . Osserviamo che la derivata totale rispetto a  $r$  valutata lungo la caratteristica  $t = r$  è data da  $\frac{d}{dr} = \partial_r + \partial_t$ . Pertanto, l'integrando è una derivata totale esatta:

$$[(\partial_r + \partial_t)(\partial_r - \partial_t)\Psi(t, r)]_{t=r} = \frac{d}{dr} [(\partial_r\Psi - \partial_t\Psi)(t, r)]_{t=r}.$$

L'azione diventa:

$$\langle \square G^-, \phi \rangle = \frac{\kappa}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dr} ((\partial_r\Psi - \partial_t\Psi)(r, r)) dr.$$

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo, il valore dell'integrale è la differenza della funzione valutata agli estremi.

1. Per  $r \rightarrow +\infty$ :  $\phi$  è a supporto compatto, quindi  $\Psi$  e le sue derivate sono nulle.
2. Per  $r \rightarrow 0$ : dobbiamo valutare il limite  $L = \lim_{r \rightarrow 0} -\frac{\kappa}{2}(\partial_r\Psi - \partial_t\Psi)(r, r)$ .

**Valutazione al bordo  $r = 0$ .** Ricordando che  $\Psi(t, r) = r\tilde{\phi}(t, r)$ , calcoliamo le derivate:

$$\partial_t\Psi = r\partial_t\tilde{\phi} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0,$$

$$\partial_r\Psi = \tilde{\phi} + r\partial_r\tilde{\phi} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \tilde{\phi}(0, 0).$$

La media sferica nell'origine coincide con il valore della funzione nel punto, moltiplicato per l'area della sfera unitaria (si vede facilmente portando il limite dentro gli integrali sferici con Lebesgue):

$$\tilde{\phi}(0, 0) = \int_{S^2} \phi(0, 0) d\sigma = 4\pi\phi(0, 0).$$

Quindi il termine di bordo vale:

$$-\frac{\kappa}{2}(4\pi\phi(0, 0)) = -2\pi\kappa\phi(0, 0) = -2\pi\kappa\langle\delta, \phi\rangle.$$

Imponendo la condizione  $\square G^- = \delta$ , otteniamo l'equazione  $-2\pi\kappa = 1$ , da cui il valore cercato:

$$\kappa = -\frac{1}{2\pi}.$$

## Esercizio 1 in Fourier

Sia  $\square = -\partial_t^2 + \Delta_x$  l'operatore d'onda su  $\mathbb{R}^4$ . Vogliamo determinare  $\kappa \in \mathbb{C}$  affinché la distribuzione

$$G^-(t, x) = \kappa\Theta(t)\delta(t^2 - |x|^2)$$

sia la soluzione fondamentale, ovvero soddisfi  $\square G^- = \delta(t) \otimes \delta(x)$ .

**Soluzione.** Utilizziamo la trasformata di Fourier parziale rispetto alle variabili spaziali  $x \in \mathbb{R}^3$ , definita per una distribuzione temperata  $u$  tramite l'azione su una funzione test  $\phi(x)$  (o direttamente sull'esponenziale nel senso delle distribuzioni a supporto compatto):

$$\widehat{u}(k) = \langle u, e^{-ik \cdot x} \rangle.$$

## 1. L'Equazione nello Spazio delle Frequenze

Trasformiamo l'equazione differenziale  $\square G^- = \delta(t) \otimes \delta(x)$ .

- Per la parte spaziale:  $\mathcal{F}_x[\Delta G^-] = -|k|^2 \widehat{G}^-(t, k)$ .
- Per la parte temporale:  $\mathcal{F}_x[\partial_t^2 G^-] = \partial_t^2 \widehat{G}^-(t, k)$ .
- Per la sorgente:  $\mathcal{F}_x[\delta(t) \otimes \delta(x)] = \delta(t) \cdot 1 = \delta(t)$ .

L'equazione che  $\widehat{G}^-$  deve soddisfare è dunque:

$$(-\partial_t^2 - |k|^2) \widehat{G}^-(t, k) = \delta(t) \iff (\partial_t^2 + |k|^2) \widehat{G}^-(t, k) = -\delta(t). \quad (1)$$

## 2. Calcolo della Trasformata della Candidata

Calcoliamo ora esplicitamente  $\widehat{G}^-$  partendo dalla definizione data nel testo. Per  $t < 0$ ,  $\widehat{G}^- = 0$  a causa della  $\Theta(t)$ . Per  $t > 0$ , dobbiamo valutare l'azione della distribuzione  $\delta(t^2 - |x|^2)$  sulla funzione test (parametrica in  $k$ )  $\phi_k(x) = e^{-ik \cdot x}$ .

Utilizziamo coordinate sferiche  $(r, \omega)$  dove  $x = r\omega$  con  $\omega \in S^2$ . La misura di Lebesgue è  $dx = r^2 dr d\sigma(\omega)$ . La distribuzione radiale  $\delta(t^2 - r^2)$  con  $t, r > 0$  si decompone rigorosamente (regola della composizione  $\delta(g(r))$ ) come:

$$\delta(t^2 - r^2) = \frac{\delta(r - t)}{|2t|} = \frac{\delta(r - t)}{2t}.$$

Applicando la definizione di trasformata come azione distribuzionale:

$$\widehat{G}^-(t, k) = \kappa \Theta(t) \left\langle \frac{\delta(r - t)}{2t}, \int_{S^2} e^{-ik \cdot (r\omega)} d\sigma(\omega) \right\rangle_{\mathbb{R}_r^+}.$$

L'azione della delta radiale fissa  $r = t$ . Notiamo che il termine  $r^2$  dello Jacobiano si semplifica parzialmente con il denominatore  $2t$ , valutando in  $r = t$ :

$$\widehat{G}^-(t, k) = \kappa \Theta(t) \frac{t^2}{2t} \int_{S^2} e^{-itk \cdot \omega} d\sigma(\omega) = \frac{\kappa t}{2} \Theta(t) \int_{S^2} e^{-itk \cdot \omega} d\sigma(\omega).$$

L'integrale sulla sfera è standard. Fissiamo l'asse polare lungo  $k$  (cosicché  $k \cdot \omega = |k| \cos \theta$ ):

$$\int_{S^2} e^{-it|k| \cos \theta} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta e^{-it|k| \cos \theta} d\theta = 2\pi \left[ \frac{e^{-it|k| u}}{-it|k|} \right]_1^{-1} = 4\pi \frac{\sin(t|k|)}{t|k|}.$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione di  $\widehat{G}^-$ :

$$\widehat{G}^-(t, k) = \frac{\kappa t}{2} \Theta(t) \left( 4\pi \frac{\sin(t|k|)}{t|k|} \right).$$

Le  $t$  si elidono. Otteniamo la forma esplicita in Fourier:

$$\widehat{G}^-(t, k) = 2\pi \kappa \Theta(t) \frac{\sin(t|k|)}{|k|}. \quad (2)$$

## 3. Verifica e Determinazione di $\kappa$

Ora verifichiamo se l'espressione (2) soddisfa l'equazione differenziale (1). Poniamo  $C = 2\pi\kappa$  e  $S(t) = \frac{\sin(t|k|)}{|k|}$ . Abbiamo  $\widehat{G}^- = C\Theta(t)S(t)$ . Calcoliamo le derivate nel senso delle distribuzioni rispetto al tempo  $t$ :

**Derivata Prima.** Utilizziamo la regola del prodotto  $\partial_t(\Theta f) = \delta f + \Theta f'$ :

$$\partial_t \widehat{G}^- = C [\delta(t)S(t) + \Theta(t)S'(t)].$$

Poiché  $S(t) \propto \sin(t|k|)$ , si ha  $S(0) = 0$ . Dunque il termine  $\delta(t)S(t)$  svanisce nel senso delle distribuzioni.

$$\partial_t \widehat{G}^- = C\Theta(t) \cos(t|k|).$$

**Derivata Seconda.** Deriviamo nuovamente:

$$\partial_t^2 \widehat{G^-} = C \left[ \delta(t) \cos(t|k|) + \Theta(t) \frac{d}{dt} \cos(t|k|) \right].$$

Qui  $\cos(0) = 1$ , quindi  $\delta(t) \cos(t|k|) = \delta(t)$ .

$$\partial_t^2 \widehat{G^-} = C\delta(t) - C\Theta(t)|k| \sin(t|k|).$$

Notiamo che il secondo termine è esattamente  $-|k|^2 \left( C\Theta(t) \frac{\sin(t|k|)}{|k|} \right) = -|k|^2 \widehat{G^-}$ .

**Inserimento nell'Operatore.** Calcoliamo l'azione dell'operatore d'onda in Fourier ( $\partial_t^2 + |k|^2$ ):

$$(\partial_t^2 + |k|^2) \widehat{G^-} = \left( C\delta(t) - |k|^2 \widehat{G^-} \right) + |k|^2 \widehat{G^-} = C\delta(t).$$

**Conclusione.** Affinché questa espressione sia uguale alla sorgente  $-\delta(t)$  dell'equazione (1), dobbiamo imporre:

$$C = -1 \implies 2\pi\kappa = -1.$$

Dunque:

$$\kappa = -\frac{1}{2\pi}.$$

## Esercizio 2

Detti  $H_n$  i polinomi di Hermite e sapendo che vale la formula di Mehler:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left( \frac{4xy\rho - (1+\rho^2)(x^2+y^2)}{2(1-\rho^2)} \right),$$

si mostri che la funzione

$$K(x, y, t) = \frac{\Theta(t)}{\sqrt{2\pi i \sin(2t)}} \exp \left( -i \cot(2t) \frac{x^2+y^2}{2} + i \frac{xy}{\sin(2t)} \right)$$

è soluzione fondamentale dell'equazione  $L = -i\partial_t + \partial_x^2 - x^2$ .

**Soluzione.** Per dimostrare che  $K(x, y, t)$  è soluzione fondamentale, verifichiamo l'azione dell'operatore  $L$  sulla distribuzione. Utilizziamo la formula di Mehler per identificare lo sviluppo spettrale di  $K$ .

**Identificazione spettrale del nucleo.** Consideriamo le autofunzioni dell'oscillatore armonico:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}},$$

che soddisfano  $(-\partial_x^2 + x^2)\psi_n = E_n \psi_n$  con  $E_n = 2n + 1$ .

Analizziamo la parte regolare di  $K$  per  $t > 0$ . Scegliamo come parametro per la formula di Mehler  $\rho = e^{2it}$ .

Con questa sostituzione il prefattore diviene:

$$\frac{1}{\sqrt{1-e^{4it}}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2it}(e^{-2it}-e^{2it})}} = \frac{e^{-it}}{\sqrt{-2i \sin(2t)}}.$$

Notiamo che il termine  $\sqrt{-2i \sin(2t)}$  al denominatore corrisponde al prefattore nella definizione di  $K$  (a meno del fattore  $\sqrt{\pi}$ ).

Sostituendo  $\rho = e^{2it}$  nell'esponenziale della formula di Mehler, otteniamo:

$$\frac{4xye^{2it} - (1+e^{4it})(x^2+y^2)}{2(1-e^{4it})} = \frac{2xy - \cos(2t)(x^2+y^2)}{-2i \sin(2t)} = i \frac{xy}{\sin(2t)} - i \cot(2t) \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Questo riproduce esattamente l'esponente di  $K(x, y, t)$ . Possiamo dunque riscrivere la serie di Mehler moltiplicando ambo i membri per  $\frac{e^{it}}{\sqrt{\pi}}i$  (il termine  $e^{it}$  cancella l' $e^{-it}$  del prefattore):

$$\sum_{n \geq 0} ie^{it} \frac{(e^{2it})^n}{\sqrt{\pi} 2^n n!} H_n(x) H_n(y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{2i \sin(2t)}} \exp(\dots).$$

Riconoscendo a sinistra  $e^{it} e^{2int} = e^{i(2n+1)t} = e^{iE_n t}$ , otteniamo la rappresentazione spettrale:

$$K(x, y, t) = i\Theta(t) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{iE_n t} \psi_n(x) \psi_n(y).$$

**Calcolo della derivata distribuzionale.** Applichiamo l'operatore  $L = -i\partial_t + (\partial_x^2 - x^2)$ . Notiamo che  $(\partial_x^2 - x^2) = -H$ . Poiché  $H\psi_n = -E_n \psi_n$ , l'azione sulla parte spaziale è:

$$(\partial_x^2 - x^2)\psi_n(x) = -E_n \psi_n(x).$$

Calcoliamo la derivata temporale della distribuzione:

$$\partial_t K = \delta(t)i \sum_n \psi_n(x) \psi_n(y) - \Theta(t) \sum_n E_n e^{iE_n t} \psi_n(x) \psi_n(y)$$

**Valutazione dell'operatore completo.** Applicando  $L$ :

$$\begin{aligned} LK &= -i \left[ \delta(t)i \sum_n \psi_n(x) \psi_n(y) - \Theta(t) \sum_n E_n e^{iE_n t} \psi_n(x) \psi_n(y) \right] \\ &\quad + i\Theta(t) \sum_n e^{iE_n t} (-E_n) \psi_n \psi_n \end{aligned}$$

Per  $t > 0$ , i termini regolari si cancellano perfettamente:

$$\Theta(t) \sum_n [iE_n - iE_n] (\dots) = 0$$

Rimane il termine singolare all'istante  $t = 0$ :

$$LK = \delta(t) \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(x) \psi_n(y) = \delta(t) \delta(x - y).$$

Il nucleo è quindi soluzione fondamentale.

### Esercizio 3

Si calcoli il seguente limite in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x - i\epsilon)}{x - i\epsilon}.$$

**Soluzione.** Osserviamo preliminarmente che l'espressione all'interno del limite può essere riscritta come la derivata complessa di una funzione più regolare. Nello specifico:

$$\frac{\ln(x - i\epsilon)}{x - i\epsilon} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \ln^2(x - i\epsilon) \right).$$

Sia  $T_\epsilon \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  la distribuzione regolare associata alla funzione  $f_\epsilon(x) = \frac{\ln(x - i\epsilon)}{x - i\epsilon}$ . Vogliamo calcolare il limite  $T = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} T_\epsilon$  nella topologia debole-\* di  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Per ogni funzione test  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} \langle T_\epsilon, \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \ln^2(x - i\epsilon) \right) \phi(x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2(x - i\epsilon) \phi'(x) dx, \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo integrato per parti scaricando la derivata sulla funzione test (i termini di bordo si annullano poiché  $\phi$  ha supporto compatto).

**Passaggio al limite puntuale.** Studiamo il limite puntuale della funzione  $g_\epsilon(x) = \ln^2(x - i\epsilon)$  per  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . Utilizziamo la determinazione principale del logaritmo con taglio lungo il semiasse reale negativo. Poiché  $\epsilon > 0$ , il numero complesso  $z = x - i\epsilon$  si trova nel semipiano inferiore.

- Per  $x > 0$ :  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (x - i\epsilon) = x$ . L'argomento è nullo, quindi  $\ln(x - i\epsilon) \rightarrow \ln(x)$ .
- Per  $x < 0$ :  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (x - i\epsilon) = x$ . L'argomento tende a  $-\pi$  (avvicinandosi al taglio da sotto). Quindi  $\ln(x - i\epsilon) \rightarrow \ln|x| - i\pi$ .

Ne segue che, puntualmente quasi ovunque:

$$g(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln^2(x - i\epsilon) = \begin{cases} \ln^2(x) & x > 0 \\ (\ln|x| - i\pi)^2 = \ln^2|x| - \pi^2 - 2i\pi \ln|x| & x < 0. \end{cases}$$

**Giustificazione dello scambio limite-integrale.** Per applicare il Teorema della Convergenza Dominata di Lebesgue all'integrale parametrico

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2(x - i\epsilon) \phi'(x) dx,$$

dobbiamo determinare una funzione dominante  $G \in L^1(\mathbb{R})$  tale che, per ogni  $\epsilon \in (0, 1)$ , valga la maggiorazione:

$$|\ln^2(x - i\epsilon) \phi'(x)| \leq G(x) \quad \text{per quasi ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Sia  $K = \text{supp}(\phi)$  il supporto compatto della funzione test e sia  $R > 0$  tale che  $K \subset [-R, R]$ . Sia inoltre  $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi'(x)|$ .

Consideriamo il modulo del termine logaritmico. Ricordando che  $\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)$ , si ha:

$$|\ln(x - i\epsilon)| \leq |\ln|x - i\epsilon|| + |\arg(x - i\epsilon)|.$$

Poiché  $x - i\epsilon$  giace nel semipiano inferiore, l'argomento è limitato da  $\pi$ . Il modulo è  $\sqrt{x^2 + \epsilon^2}$ . Dunque:

$$|\ln(x - i\epsilon)| \leq \left| \frac{1}{2} \ln(x^2 + \epsilon^2) \right| + \pi.$$

Per costruire la dominante, analizziamo il termine  $L_\epsilon(x) := \frac{1}{2} \ln(x^2 + \epsilon^2)$  distinguendo due casi per  $x \in K$ :

1. **Regione dove l'argomento è grande ( $x^2 + \epsilon^2 \geq 1$ ):**

In questo caso  $L_\epsilon(x) \geq 0$ . Poiché  $x \in [-R, R]$  e  $\epsilon < 1$ , abbiamo  $x^2 + \epsilon^2 \leq R^2 + 1$ . Dunque:

$$|L_\epsilon(x)| = L_\epsilon(x) \leq \frac{1}{2} \ln(R^2 + 1).$$

Il termine è limitato da una costante  $C_1$ .

2. **Regione dove l'argomento è piccolo ( $x^2 + \epsilon^2 < 1$ ):**

In questo caso  $0 < x^2 + \epsilon^2 < 1$ , quindi il logaritmo è negativo:  $L_\epsilon(x) < 0$ . Sfruttando la monotonia del logaritmo, poiché  $x^2 \leq x^2 + \epsilon^2$ , vale:

$$\ln(x^2) \leq \ln(x^2 + \epsilon^2) < 0.$$

Passando ai valori assoluti (che inverte la diseguaglianza per numeri negativi), otteniamo:

$$|L_\epsilon(x)| = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + \epsilon^2) \leq -\frac{1}{2} \ln(x^2) = |\ln|x||.$$

Unendo i due casi, per ogni  $x \in K$  e  $\epsilon \in (0, 1)$ , vale la maggiorazione uniforme:

$$|\ln(x - i\epsilon)| \leq |\ln|x|| + C,$$

dove  $C = \frac{1}{2} \ln(R^2 + 1) + \pi$ . Elevando al quadrato (usando  $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ ):

$$|\ln^2(x - i\epsilon)| \leq 2 \ln^2|x| + 2C^2.$$

Possiamo quindi definire la funzione dominante come:

$$G(x) = M \cdot (2 \ln^2|x| + 2C^2) \cdot \chi_K(x),$$

dove  $\chi_K$  è la funzione caratteristica del supporto di  $\phi$ . Poiché la singolarità logaritmica è integrabile attorno allo zero ( $\int_0^1 \ln^2 x dx < \infty$ ), si ha  $G \in L^1(\mathbb{R})$ . Le ipotesi del Teorema della Convergenza Dominata sono soddisfatte.

**Giustificazione dello scambio limite-integrale (Versione Rapida).** Sia  $K$  il supporto compatto di  $\phi'$  e sia  $R > 0$  tale che  $K \subset [-R, R]$ . Per ogni  $\epsilon \in (0, 1)$  e  $x \in K$ , valgono le disuguaglianze:

$$|x| \leq |x - i\epsilon| = \sqrt{x^2 + \epsilon^2} \leq \sqrt{R^2 + 1}.$$

Dobbiamo maggiorare  $|\ln(x - i\epsilon)| \leq |\ln|x - i\epsilon|| + \pi$ . Analizziamo il termine  $|\ln|x - i\epsilon||$  distinguendo rapidamente due comportamenti, ma unificandoli in una sola stima:

- Se  $|x - i\epsilon| < 1$ , allora per la monotonia del logaritmo vale  $\ln|x| \leq \ln|x - i\epsilon| < 0$ . Passando ai moduli si inverte la disuguagliaanza:  $|\ln|x - i\epsilon|| \leq |\ln|x||$ .
- Se  $|x - i\epsilon| \geq 1$ , allora  $0 \leq \ln|x - i\epsilon| \leq \ln\sqrt{R^2 + 1}$ .

In entrambi i casi, vale la maggiorazione uniforme su  $K$ :

$$|\ln|x - i\epsilon|| \leq |\ln|x|| + C, \quad \text{con } C = \ln\sqrt{R^2 + 1}.$$

Sostituendo nella stima iniziale ed elevando al quadrato (usando  $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ ):

$$|\ln^2(x - i\epsilon)| \leq 3\ln^2|x| + 3C^2 + 3\pi^2.$$

Definiamo quindi la funzione dominante  $G \in L^1(\mathbb{R})$  come:

$$G(x) = M \cdot (3\ln^2|x| + \text{cost.}) \cdot \chi_K(x),$$

dove  $M = \sup|\phi'|$ . Essendo la singolarità logaritmica integrabile in 0 ( $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$ ),  $G$  è sommabile e il Teorema della Convergenza Dominata è applicabile.

**Calcolo della distribuzione limite.** Possiamo ora portare il limite sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned} \langle T, \phi \rangle &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\phi'(x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^0 (\ln^2|x| - \pi^2 - 2i\pi\ln|x|)\phi'(x) dx + \int_0^{+\infty} \ln^2 x \phi'(x) dx \right]. \end{aligned}$$

Raggruppiamo i termini per analizzarli separatamente:

$$\langle T, \phi \rangle = \underbrace{-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2|x|\phi'(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{\pi^2}{2} \int_{-\infty}^0 \phi'(x) dx}_{I_2} + \underbrace{i\pi \int_{-\infty}^0 \ln|x|\phi'(x) dx}_{I_3}.$$

**Analisi di  $I_1$ :** Riconosciamo la derivata distribuzionale della funzione localmente integrabile  $\ln^2|x|$ :

$$I_1 = \left\langle \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\ln^2|x|), \phi \right\rangle.$$

Calcolando la derivata nel senso delle distribuzioni, si ha  $\frac{d}{dx}(\ln^2|x|) = 2\frac{\ln|x|}{x}$ . Poiché  $\frac{\ln|x|}{x}$  non è in  $L^1_{loc}$  attorno all'origine ma è dispari, la sua regolarizzazione canonica è il valore principale:

$$I_1 = \left\langle \text{PV} \left( \frac{\ln|x|}{x} \right), \phi \right\rangle.$$

**Analisi di  $I_2$ :** L'integrale è immediato:

$$I_2 = \frac{\pi^2}{2} \left[ \phi(x) \right]_{-\infty}^0 = \frac{\pi^2}{2} (\phi(0) - 0) = \left\langle \frac{\pi^2}{2} \delta, \phi \right\rangle.$$

**Analisi di  $I_3$ :** Consideriamo la distribuzione  $S = \Theta(-x)\ln|x|$ . La sua derivata distribuzionale agisce come:

$$\langle S', \phi \rangle = -\langle S, \phi' \rangle = - \int_{-\infty}^0 \ln|x|\phi'(x) dx.$$

Il nostro integrale  $I_3$  è esattamente  $-i\pi\langle S', \phi \rangle$ . La derivata  $S'$  corrisponde, a meno del segno, alla parte finita di  $1/|x|$  sul semiasse negativo, indicata spesso con  $\text{Pf}(x_-^{-1})$ . Formalmente, manteniamo la notazione derivata per rigore:

$$I_3 = \left\langle -i\pi \frac{d}{dx} (\Theta(-x)\ln|x|), \phi \right\rangle = \langle i\pi \text{Pf}(x_-^{-1}), \phi \rangle.$$

**Conclusione.** Sommando i contributi  $I_1, I_2, I_3$ , il limite distribuzionale cercato è:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x - i\epsilon)}{x - i\epsilon} = \text{PV} \left( \frac{\ln|x|}{x} \right) + \frac{\pi^2}{2}\delta + i\pi \text{Pf}(x_-^{-1}).$$

## Esercizio 4

Sia  $C_\alpha^\infty(\mathbb{R}^+) \doteq \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \mid f(0) + \alpha f'(0) = 0\}$  con  $\mathbb{R}^+ \doteq [0, \infty)$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Detto  $C_D^\infty(\mathbb{R}^+) \doteq \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \mid f(0) = 0\}$ , sia

$$T : C_\alpha^\infty(\mathbb{R}^+) \rightarrow C_D^\infty(\mathbb{R}^+), \quad f \mapsto T(f) \doteq h = f + \alpha \frac{df}{dx}.$$

Si discuta se la restrizione di  $T$  a  $C_\alpha^\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$  è invertibile e, nel caso, si esibisca l'inversa.

**Soluzione.** Definiamo lo spazio di partenza (dominio ristretto) come  $\mathcal{D}_\alpha \doteq C_\alpha^\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$  e osserviamo che l'immagine sarà contenuta in uno spazio di funzioni a supporto compatto. Studiamo l'equazione  $T(f) = h$  per  $h \in C_D^\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$ .

Distinguiamo due casi in base al valore del parametro  $\alpha$ .

**Caso  $\alpha = 0$ .** In questo caso, la definizione degli spazi e dell'operatore si semplifica:

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^+) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \mid f(0) = 0\} = C_D^\infty(\mathbb{R}^+).$$

L'operatore diventa l'identità  $T(f) = f$ . La restrizione è quindi banalmente invertibile e  $T^{-1} = I$  (a patto di restringere l'immagine per renderlo suriettivo).

**Caso  $\alpha \neq 0$ .** Consideriamo l'equazione differenziale lineare del primo ordine:

$$f(x) + \alpha f'(x) = h(x) \iff f'(x) + \frac{1}{\alpha} f(x) = \frac{1}{\alpha} h(x).$$

**1. Iniettività.** Sia  $h \equiv 0$ . L'equazione omogenea associata è  $f' + \frac{1}{\alpha} f = 0$ , la cui soluzione generale è:

$$f(x) = ce^{-x/\alpha}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Poiché stiamo cercando soluzioni in  $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$  (a supporto compatto), deve esistere un  $K > 0$  tale che  $f(x) = 0$  per ogni  $x > K$ . Dato che la funzione esponenziale non si annulla mai, l'unica possibilità è che la costante  $c$  sia nulla. Dunque  $f \equiv 0$ , il che implica  $\ker(T|_{\mathcal{D}_\alpha}) = \{0\}$ . L'operatore è iniettivo.

**2. Suriettività e calcolo dell'inversa.** Per  $h \in C_D^\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$ , risolviamo l'equazione non omogenea utilizzando il fattore integrante  $e^{x/\alpha}$ :

$$\frac{d}{dx} \left( f(x) e^{x/\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha} h(x) e^{x/\alpha}.$$

Integrando su  $[0, x]$ :

$$f(x) e^{x/\alpha} - f(0) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x h(t) e^{t/\alpha} dt \implies f(x) = e^{-x/\alpha} \left( f(0) + \frac{1}{\alpha} \int_0^x h(t) e^{t/\alpha} dt \right).$$

Dobbiamo determinare  $f(0)$  affinché  $f$  abbia supporto compatto. Sia  $K > 0$  tale che  $\text{supp}(h) \subset [0, K]$ . Per  $x > K$ ,  $h(x) = 0$  e l'integrale diventa costante ( $\int_0^x = \int_0^\infty$ ). Per  $x > K$  si ha:

$$f(x) = e^{-x/\alpha} \left( f(0) + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty h(t) e^{t/\alpha} dt \right).$$

Affinché  $f(x)$  si annulli per  $x$  grandi (condizione necessaria per appartenere a  $\mathcal{E}'$ ), il termine in parentesi deve essere nullo. Questo vincola univocamente il valore iniziale:

$$f(0) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\infty h(t) e^{t/\alpha} dt.$$

Sostituendo questo valore nell'espressione di  $f(x)$  e usando la proprietà  $\int_0^x - \int_0^\infty = -\int_x^\infty$ , otteniamo l'espressione dell'inversa:

$$f(x) = -\frac{1}{\alpha} e^{-x/\alpha} \int_x^\infty h(t) e^{t/\alpha} dt = -\frac{1}{\alpha} \int_x^\infty h(t) e^{(t-x)/\alpha} dt.$$

**Verifica delle condizioni al bordo.** Dobbiamo infine verificare che la funzione trovata appartenga al dominio, ovvero che soddisfi  $f(0) + \alpha f'(0) = 0$ . Dall'equazione differenziale sappiamo che  $f(x) + \alpha f'(x) = h(x)$ . Valutando in  $x = 0$ :

$$f(0) + \alpha f'(0) = h(0).$$

Poiché  $h \in C_D^\infty(\mathbb{R}^+)$ , per definizione  $h(0) = 0$ . Pertanto la condizione  $f(0) + \alpha f'(0) = 0$  è soddisfatta.

**Conclusione.** La restrizione è invertibile e l'operatore inverso  $T^{-1} : C_D^\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+) \rightarrow C_\alpha^\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$  è dato da:

$$T^{-1}(h)(x) = -\frac{1}{\alpha} \int_x^\infty e^{\frac{t-x}{\alpha}} h(t) dt.$$

## Esercizio 5

Si consideri per ogni funzione  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  la funzione

$$H_f(t) \doteq \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{\mathbb{R}} d\tau \frac{f(\tau)}{t - \tau},$$

dove PV è il valor principale di Cauchy. Si mostri che  $H_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  e che  $H_f$  è estendibile ad un operatore limitato su  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Soluzione.** L'integrale definito nel testo corrisponde alla convoluzione tra la funzione test  $f$  e la distribuzione temperata  $T = \frac{1}{\pi} \text{PV} \left( \frac{1}{t} \right)$ . Possiamo quindi scrivere:

$$H_f = \frac{1}{\pi} \text{PV} \left( \frac{1}{\cdot} \right) * f.$$

Per analizzare le proprietà di  $H_f$ , passiamo allo spazio delle frequenze utilizzando la trasformata di Fourier. Ricordiamo che la trasformata di Fourier trasforma la convoluzione in un prodotto.

**1. Calcolo del moltiplicatore di Fourier (non dovuto perchè fatto in classe)** Determiniamo innanzitutto la trasformata di Fourier della distribuzione  $T$ . Consideriamo la funzione segno,  $\text{sgn}(t)$ , la quale è una distribuzione temperata. La sua derivata nel senso delle distribuzioni è:

$$\frac{d}{dt} \text{sgn}(t) = 2\delta(t).$$

Applicando la trasformata di Fourier  $\mathcal{F}$  ad ambo i membri e usando la proprietà  $\mathcal{F}[u'](t) = i\xi \widehat{u}(\xi)$ , otteniamo:

$$i\xi \widehat{\text{sgn}}(\xi) = 2.$$

La soluzione di questa equazione nell'algebra delle distribuzioni, considerando che sgn è una funzione dispari (e quindi la sua trasformata deve essere dispari, escludendo termini proporzionali a  $\delta(\xi)$ ), è:

$$\widehat{\text{sgn}}(\xi) = \frac{2}{i} \text{PV} \left( \frac{1}{\xi} \right).$$

Per le proprietà di dualità e simmetria della trasformata di Fourier, si ricava la trasformata del valor principale:

$$\mathcal{F} \left[ \text{PV} \left( \frac{1}{t} \right) \right] (\xi) = -i\pi \text{sgn}(\xi).$$

**2. Appartenenza a  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  e limitatezza su  $L^2(\mathbb{R})$ .** Tornando al nostro operatore  $H_f$ , la trasformata di Fourier è data da:

$$\widehat{H}_f(\xi) = \frac{1}{\pi} \underbrace{\mathcal{F}\left[\text{PV}\left(\frac{1}{t}\right)\right](\xi)}_{-i\pi \operatorname{sgn}(\xi)} \cdot \widehat{f}(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi).$$

Osserviamo che:

- Poiché  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , allora  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  e di conseguenza  $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .
- La funzione  $m(\xi) = -i \operatorname{sgn}(\xi)$  è limitata ( $|m(\xi)| = 1$  quasi ovunque).

Il prodotto di una funzione limitata per una funzione di Schwartz appartiene a  $L^2(\mathbb{R})$ . Poiché  $L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , ne segue che  $\widehat{H}_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  e, per isomorfismo della trasformata di Fourier su  $\mathcal{S}'$ , anche  $H_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

Per mostrare la limitatezza su  $L^2(\mathbb{R})$ , calcoliamo la norma  $L^2$  usando il teorema di Plancherel (che afferma l'isometria della trasformata di Fourier, a meno di costanti di normalizzazione che qui assumiamo unitarie per semplicità notazionale, o coerenti con la definizione):

$$\|H_f\|_{L^2} = \left\| \widehat{H}_f \right\|_{L^2} = \left\| -i \operatorname{sgn}(\cdot) \widehat{f} \right\|_{L^2}.$$

Poiché  $|-i \operatorname{sgn}(\xi)| = 1$  per quasi ogni  $\xi \in \mathbb{R}$ , abbiamo:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| -i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi) \right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{f}(\xi) \right|^2 d\xi = \left\| \widehat{f} \right\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2.$$

Dunque  $\|H_f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ . L'operatore conserva la norma (è un'isometria su  $L^2$ ) ed è quindi limitato con norma operatoriale pari a 1.

## Esercizio 6

Per ogni  $s \in \mathbb{R}$  sia  $H^s(\mathbb{R}^n) \doteq \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \langle k \rangle^s \widehat{u}(k) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ ,  $n \geq 1$ , dove  $\langle k \rangle$  è la parentesi giapponese di  $k$ . Si mostri se, dato  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  con  $\widehat{u} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , allora, detto  $\Delta$  l'operatore laplaciano su  $\mathbb{R}^n$ :

$$\Delta u \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n).$$

**Soluzione.** Preliminarmente, fissiamo la definizione standard (cfr. Friedlander-Joshi) per la *parentesi giapponese* e per la norma di Sobolev, al fine di garantire la coerenza dimensionale tra l'ordine di derivazione e l'indice dello spazio. Poniamo  $\langle k \rangle := (1 + |k|^2)^{1/2}$ . Di conseguenza, la condizione di appartenenza a  $H^s(\mathbb{R}^n)$  è data dalla finitezza della seguente norma:

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^s |\widehat{u}(k)|^2 dk < \infty.$$

Ricordiamo inoltre che, nello spazio di Fourier, l'azione del Laplaciano corrisponde alla moltiplicazione per  $-|k|^2$ , ovvero  $\widehat{\Delta u}(k) = -|k|^2 \widehat{u}(k)$ .

L'esercizio richiede di verificare la validità della doppia implicazione.

**Implicazione  $\iff$**  ( $u \in H^{s+2} \implies \Delta u \in H^s$ ): Assumiamo che  $\|u\|_{H^{s+2}} < \infty$ . Dobbiamo stimare la norma  $H^s$  di  $\Delta u$ :

$$\|\Delta u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^s \left| -|k|^2 \widehat{u}(k) \right|^2 dk = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^s |k|^4 |\widehat{u}(k)|^2 dk.$$

Poiché vale la diseguaglianza banale  $|k|^2 < 1 + |k|^2$ , abbiamo  $|k|^4 < (1 + |k|^2)^2$ . Sostituendo nell'integrale:

$$\|\Delta u\|_{H^s}^2 < \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^s (1 + |k|^2)^2 |\widehat{u}(k)|^2 dk = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^{s+2} |\widehat{u}(k)|^2 dk = \|u\|_{H^{s+2}}^2.$$

Essendo il termine a destra finito per ipotesi, concludiamo che  $\Delta u \in H^s(\mathbb{R}^n)$ .

**Implicazione  $\Rightarrow (\Delta u \in H^s \Rightarrow u \in H^{s+2})$ :** Assumiamo  $\Delta u \in H^s$ . Dobbiamo mostrare che l'integrale

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^{s+2} |\widehat{u}(k)|^2 dk$$

è finito. Spezziamo l'integrale in due regioni: la palla unitaria  $B = \{k \in \mathbb{R}^n : |k| \leq 1\}$  (basse frequenze) e il suo complemento  $B^c$  (alte frequenze).

$$I = \underbrace{\int_B (1 + |k|^2)^{s+2} |\widehat{u}(k)|^2 dk}_{I_1} + \underbrace{\int_{B^c} (1 + |k|^2)^{s+2} |\widehat{u}(k)|^2 dk}_{I_2}.$$

- **Analisi di  $I_1$ :** Sull'insieme compatto  $B$ , la funzione peso  $(1 + |k|^2)^{s+2}$  è continua e limitata (maggiorata da  $2^{s+2}$ ). Poiché per ipotesi  $\widehat{u} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ , l'integrale di  $|\widehat{u}|^2$  su un compatto è finito. Dunque  $I_1 < \infty$ .
- **Analisi di  $I_2$ :** Nella regione  $|k| > 1$ , vale la stima  $1 < |k|^2$ , da cui segue  $1 + |k|^2 < 2|k|^2$ . Possiamo quindi maggiorare il peso:

$$(1 + |k|^2)^{s+2} = (1 + |k|^2)^s (1 + |k|^2)^2 \leq (1 + |k|^2)^s (2|k|^2)^2 = 4(1 + |k|^2)^s |k|^4.$$

Inserendo questa stima in  $I_2$ :

$$I_2 \leq 4 \int_{B^c} (1 + |k|^2)^s |k|^4 |\widehat{u}(k)|^2 dk = 4 \int_{B^c} (1 + |k|^2)^s |\widehat{\Delta u}(k)|^2 dk.$$

L'ultimo integrale è maggiorato da  $4\|\Delta u\|_{H^s}^2$ , che è finito per ipotesi.

Poiché  $I = I_1 + I_2 < \infty$ , concludiamo che  $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ .

L'equivalenza è dunque **dimostrata**.

**Osservazione.** È fondamentale notare che la definizione standard  $\langle k \rangle = (1 + |k|^2)^{1/2}$  è necessaria affinché l'enunciato sia vero. Se avessimo interpretato letteralmente il testo (omettendo l'esponente frazionario nella definizione della parentesi giapponese, i.e., ponendo  $\langle k \rangle_{alt} = 1 + |k|^2$ ), l'implicazione  $\Rightarrow$  sarebbe risultata **falsa**.

Infatti, con tale definizione alternativa, la condizione  $\Delta u \in H^s$  controllerebbe il comportamento asintotico di  $|\widehat{u}|^2$  con un peso  $\sim |k|^{4s+4}$ , mentre l'appartenenza a  $H^{s+2}$  richiederebbe un controllo con peso  $\sim |k|^{4(s+2)} = |k|^{4s+8}$ . Il divario di fattore  $|k|^4$  permetterebbe di costruire controesempi (ad esempio in dimensione  $n = 1$  con  $s = 0$ , la funzione  $\widehat{u}(k) = \chi_{\{|k|>1\}} |k|^{-3}$  renderebbe vera l'ipotesi ma falsa la tesi).

## Esercizio 7

Si consideri un punto  $y \in \mathbb{R}^3$  e sia  $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la funzione tale che

$$v_j(x) = \frac{x_j - y_j}{\|x - y\|^3}, \quad j = 1, 2, 3$$

dove il pedice  $j$  indica la componente del vettore lungo una delle tre direzioni cartesiane, mentre  $\|\cdot\|$  rappresenta la norma euclidea su  $\mathbb{R}^3$ . Si mostri che

$$\operatorname{div}(v) = 4\pi\delta_y.$$

**Soluzione.** Il campo vettoriale  $v(x)$  presenta una singolarità in  $x = y$ . Procediamo in due passi: prima calcoliamo la divergenza classica per  $x \neq y$ , poi calcoliamo la divergenza distribuzionale.

**1. Calcolo puntuale per  $x \neq y$**  Poniamo  $r = \|x - y\|$ . Il campo può essere scritto in notazione vettoriale come:

$$v(x) = \frac{x - y}{r^3}.$$

Calcoliamo la divergenza classica  $\nabla \cdot v$ . Utilizzando la regola di derivazione del prodotto  $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = \nabla f \cdot \mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{A})$  con  $f = r^{-3}$  e  $\mathbf{A} = (x - y)$ , otteniamo:

$$\nabla \cdot \left( \frac{x-y}{r^3} \right) = \nabla(r^{-3}) \cdot (x-y) + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot (x-y).$$

Sapendo che  $\nabla r = \frac{x-y}{r}$  e  $\nabla \cdot (x-y) = 3$ , calcoliamo i termini:

- $\nabla(r^{-3}) = -3r^{-4}\nabla r = -3r^{-4}\frac{x-y}{r} = -3\frac{x-y}{r^5}$ ;
- Quindi il primo termine è:  $-3\frac{x-y}{r^5} \cdot (x-y) = -3\frac{\|x-y\|^2}{r^5} = -3\frac{r^2}{r^5} = -\frac{3}{r^3}$ .

Sommiamo i contributi:

$$\nabla \cdot v(x) = -\frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^3}(3) = 0 \quad \forall x \neq y.$$

Dunque la divergenza è nulla ovunque tranne che nella singolarità.

**2. Calcolo nel senso delle distribuzioni** Definisco  $D_\varepsilon := \mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)$  allora si trova che

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot v, f) &= - \sum_i (v_i, \partial_i f) \\ &\stackrel{*}{=} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D d^3x \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta \int_\varepsilon^\infty dr \cdot r^2 \frac{\vec{r} \cdot \hat{r}}{r^3} \frac{\partial f}{\partial r} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi f(\varepsilon, \theta, \phi) \end{aligned}$$

ma  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \implies \exists M > 0$  t.c.  $|f(\underline{x})| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$

$$\implies |f(\varepsilon, \theta, \phi)| \leq M \quad \forall (\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

Inoltre:

- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon, \theta, \phi) = f(\underline{0})$  per continuità di  $f$  in  $\underline{x} = 0$ .
- $M \in \mathcal{L}^1([0, \pi] \times [0, 2\pi])$

Per convergenza dominata:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi f(\varepsilon, \theta, \phi) = f(0) \cdot 4\pi \quad ok$$

\* Questa uguaglianza è vera per definizione stessa di integrale improprio

### Ecco un 2° modo

Poiché  $v$  è singolare in  $y$ , isoliamo la singolarità considerando il dominio  $\Omega_\epsilon = \mathbb{R}^3 \setminus B_\epsilon(y)$ , dove  $B_\epsilon(y)$  è la palla di raggio  $\epsilon$  centrata in  $y$ . Possiamo scrivere l'integrale come limite:

$$\langle \operatorname{div}(v), \varphi \rangle = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} v(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx.$$

Usiamo l'identità vettoriale  $v \cdot \nabla \varphi = \nabla \cdot (\varphi v) - \varphi(\nabla \cdot v)$ . Sostituendo nell'integrale:

$$\int_{\Omega_\epsilon} v \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \cdot (\varphi v) dx - \int_{\Omega_\epsilon} \varphi \underbrace{(\nabla \cdot v)}_{=0} dx.$$

Il secondo termine è nullo per quanto calcolato al punto 1. Per il primo termine, applichiamo il Teorema della Divergenza (di Gauss):

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla \cdot (\varphi v) dx = \int_{\partial\Omega_\epsilon} \varphi v \cdot n dS,$$

dove  $n$  è il versore normale **uscente** da  $\Omega_\epsilon$ . Poiché  $\partial\Omega_\epsilon$  è la superficie della sfera  $\partial B_\epsilon(y)$ , la normale uscente dal dominio "esterno" punta verso l'interno della sfera, cioè verso  $y$ . Quindi:

$$n = -\frac{x-y}{\|x-y\|} = -\frac{x-y}{\epsilon}.$$

Valutiamo il prodotto scalare  $v \cdot n$  sulla superficie ( $\|x-y\| = \epsilon$ ):

$$v(x) \cdot n = \frac{x-y}{\epsilon^3} \cdot \left( -\frac{x-y}{\epsilon} \right) = -\frac{\|x-y\|^2}{\epsilon^4} = -\frac{\epsilon^2}{\epsilon^4} = -\frac{1}{\epsilon^2}.$$

Dobbiamo valutare il limite:

$$L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \oint_{\partial B_\epsilon(y)} \varphi(x) dS.$$

Per i più precisi : [Passiamo a coordinate sferiche centrate in  $y$ . Parametrizziamo la superficie della sfera di raggio  $\epsilon$  con gli angoli  $\theta \in [0, \pi]$  e  $\phi \in [0, 2\pi]$ ]:

$$x(\theta, \phi) = y + (\epsilon \sin \theta \cos \phi, \epsilon \sin \theta \sin \phi, \epsilon \cos \theta).$$

] Oppure basta dire che l'elemento di superficie è  $dS = \epsilon^2 \sin \theta d\theta d\phi$ . Sostituendo nell'integrale:

$$L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(x(\theta, \phi)) (\epsilon^2 \sin \theta) d\theta d\phi.$$

Il termine  $\epsilon^2$  si semplifica:

$$L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(y + \epsilon \mathbf{n}(\theta, \phi)) \sin \theta d\theta d\phi.$$

Poiché  $\varphi$  è una funzione test ( $C_0^\infty$ ), essa è limitata. Inoltre, il dominio di integrazione angolare è limitato. Possiamo applicare il Teorema della Convergenza Dominata di Lebesgue (o semplicemente usare la continuità di  $\varphi$ ) per portare il limite sotto il segno di integrale:

$$L = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi(y + \epsilon \mathbf{n}(\theta, \phi)) \right] \sin \theta d\theta d\phi.$$

Per la continuità di  $\varphi$ , il limite dell'integrandi è  $\varphi(y)$ . Dato che  $\varphi(y)$  non dipende più dagli angoli, lo portiamo fuori:

$$L = \varphi(y) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta.$$

Gli integrali angolari restituiscono l'angolo solido totale  $4\pi$  (poiché  $\int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2$  e  $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$ ).

$$L = \varphi(y) \cdot 4\pi.$$

**Conclusione** Abbiamo ottenuto che per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ :

$$\langle \operatorname{div}(v), \varphi \rangle = 4\pi \varphi(y) = \langle 4\pi \delta_y, \varphi \rangle.$$

Pertanto, nel senso delle distribuzioni:

$$\operatorname{div}(v) = 4\pi \delta_y.$$

## Esercizio 8 - Metodo Giapponese

Si mostri che, per ogni  $v \in H^2(\mathbb{R})$  esiste  $C \geq 0$  tale che

$$\|v * \rho_\epsilon - v\|_{H^1} \leq C\epsilon\|v\|_{H^2},$$

dove  $\rho_\epsilon = \epsilon^{-1}\rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ ,  $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  con  $\int_{\mathbb{R}} dx \rho = 1$ .

**Soluzione.** Utilizziamo la definizione di norma nello spazio di Sobolev  $H^s(\mathbb{R})$  tramite la trasformata di Fourier. Ricordiamo che per  $u \in H^s(\mathbb{R})$ :

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi, \quad \text{dove } \langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}.$$

Consideriamo la quantità  $\|v * \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2$ . Applicando la trasformata di Fourier e sfruttando la proprietà della convoluzione ( $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\hat{g}$ ), otteniamo:

$$\mathcal{F}(v * \rho_\epsilon - v)(\xi) = \hat{v}(\xi)\hat{\rho}_\epsilon(\xi) - \hat{v}(\xi) = \hat{v}(\xi)(\hat{\rho}_\epsilon(\xi) - 1).$$

Ricordando la definizione di  $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}\rho(x/\epsilon)$ , la proprietà di scalatura della trasformata di Fourier implica:

$$\hat{\rho}_\epsilon(\xi) = \hat{\rho}(\epsilon\xi).$$

Possiamo quindi riscrivere il quadrato della norma  $H^1$  come:

$$\|v * \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2) |\hat{v}(\xi)|^2 |\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1|^2 d\xi. \quad (3)$$

**Stima del moltiplicatore.** Dato che  $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , la sua trasformata  $\hat{\rho}$  appartiene allo spazio di Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Inoltre, per ipotesi  $\int \rho dx = 1$ , il che implica  $\hat{\rho}(0) = 1$ . Applicando il Teorema del Valor Medio (o un'espansione di Taylor al primo ordine) alla funzione  $\hat{\rho}$  attorno all'origine, per ogni  $\eta \in \mathbb{R}$  abbiamo:

$$\hat{\rho}(\eta) - 1 = \hat{\rho}(\eta) - \hat{\rho}(0) = \eta \cdot \hat{\rho}'(\zeta),$$

per un certo  $\zeta$  compreso tra 0 e  $\eta$ . Poiché  $\hat{\rho} \in \mathcal{S}$ , la sua derivata prima è uniformemente limitata su  $\mathbb{R}$ . Definiamo  $K := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{\rho}'(\xi)| < \infty$ . Otteniamo la stima puntuale:

$$|\hat{\rho}(\eta) - 1| \leq K|\eta|.$$

Sostituendo  $\eta = \epsilon\xi$ , abbiamo:

$$|\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1| \leq K\epsilon|\xi|.$$

**Conclusione.** Inseriamo la stima appena ottenuta nell'integrale (3):

$$\|v * \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2 \leq \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2) |\hat{v}(\xi)|^2 \cdot (K\epsilon|\xi|)^2 d\xi = K^2\epsilon^2 \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2) |\xi|^2 |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi.$$

Osserviamo ora che per ogni  $\xi \in \mathbb{R}$ , vale banalmente  $|\xi|^2 \leq 1 + |\xi|^2$ . Moltiplicando ambo i membri per la quantità positiva  $(1 + |\xi|^2)$ , otteniamo la disegualanza algebrica:

$$(1 + |\xi|^2)|\xi|^2 \leq (1 + |\xi|^2)^2 = \langle \xi \rangle^4.$$

Utilizzando questa maggiorazione nell'integrale:

$$\|v * \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2 \leq K^2\epsilon^2 \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^4 |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi.$$

L'integrale a destra coincide esattamente con la definizione della norma  $\|v\|_{H^2}^2$ . Pertanto:

$$\|v * \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2 \leq K^2\epsilon^2 \|v\|_{H^2}^2.$$

Estraendo la radice quadrata, otteniamo la tesi con  $C = K = \sup |\hat{\rho}'|$ :

$$\|v * \rho_\epsilon - v\|_{H^1} \leq C\epsilon\|v\|_{H^2}.$$

**Osservazione.** Nella dimostrazione abbiamo usato la definizione di norma  $H^2$  tramite potenziali di Bessel ( $\langle \xi \rangle^s$ ), che equivale a:

$$\|v\|_{H^2}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + 2\|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2}^2.$$

Questa norma è equivalente, ma non isometrica, alla norma standard definita come somma delle norme delle derivate ( $\sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha v\|_{L^2}^2$ ), che manca del fattore 2 sul termine misto. Ai fini della stima asintotica in  $\epsilon$ , questa distinzione è irrilevante in quanto assorbita dalle costanti, ma è fondamentale per la precisione formale sugli spazi di Hilbert.

## Esercizio 8 - Metodo Italiano

Si mostri che, per ogni  $v \in H^2(\mathbb{R})$  esiste  $C \geq 0$  tale che

$$\|v * \rho_\epsilon - v\|_{H^1} \leq C\epsilon\|v\|_{H^2},$$

dove  $\rho_\epsilon = \epsilon^{-1}\rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ ,  $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  con  $\int_{\mathbb{R}} dx \rho = 1$ .

**Soluzione.** Definiamo l'errore di approssimazione come:

$$G_\epsilon(v) := v * \rho_\epsilon - v.$$

L'obiettivo è stimare la norma  $H^1$  di  $G_\epsilon(v)$ , che è definita da:

$$\|G_\epsilon(v)\|_{H^1}^2 = \|G_\epsilon(v)\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{d}{dx} G_\epsilon(v) \right\|_{L^2}^2. \quad (4)$$

Procediamo analizzando separatamente i due termini della somma.

**Passo 1: Stima della norma  $L^2$**  Utilizziamo la trasformata di Fourier. Ricordando che  $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$  e che  $\widehat{\rho_\epsilon}(\xi) = \hat{\rho}(\epsilon\xi)$ , la trasformata di  $G_\epsilon(v)$  è:

$$\widehat{G_\epsilon(v)}(\xi) = \hat{v}(\xi)\hat{\rho}(\epsilon\xi) - \hat{v}(\xi) = \hat{v}(\xi)(\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1).$$

Per il Teorema di Plancherel, abbiamo:

$$\|G_\epsilon(v)\|_{L^2}^2 = \left\| \widehat{G_\epsilon(v)} \right\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{v}(\xi)|^2 |\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1|^2 d\xi.$$

Poiché  $\rho$  è un mollificatore, sappiamo che  $\int \rho dx = 1$ , il che implica  $\hat{\rho}(0) = 1$ . Essendo  $\rho \in C_0^\infty$ ,  $\hat{\rho}$  è derivabile con derivata limitata. Applicando il Teorema del Valor Medio (o sviluppo di Taylor al primo ordine), esiste una costante  $K > 0$  tale che:

$$|\hat{\rho}(\eta) - \hat{\rho}(0)| \leq K|\eta|.$$

Ponendo  $\eta = \epsilon\xi$ , otteniamo:

$$|\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1| \leq K\epsilon|\xi|.$$

Sostituendo questa stima nell'integrale:

$$\|G_\epsilon(v)\|_{L^2}^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |\hat{v}(\xi)|^2 K^2 \epsilon^2 |\xi|^2 d\xi = K^2 \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{v}(\xi)|^2 d\xi.$$

Ricordando la proprietà della trasformata della derivata,  $|\xi \hat{v}(\xi)| = |\hat{v}'(\xi)|$ , concludiamo che:

$$\|G_\epsilon(v)\|_{L^2}^2 \leq K^2 \epsilon^2 \|v'\|_{L^2}^2. \quad (5)$$

**Passo 2: Stima della derivata** Consideriamo ora il secondo termine di (4). Sfruttando la proprietà di commutazione tra derivata e convoluzione ( $\frac{d}{dx}(f * g) = f' * g$ ), possiamo scrivere:

$$\frac{d}{dx} G_\epsilon(v) = \frac{d}{dx} (v * \rho_\epsilon - v) = v' * \rho_\epsilon - v' = G_\epsilon(v').$$

Dobbiamo quindi stimare la norma  $L^2$  di  $G_\epsilon(v')$ . Poiché per ipotesi  $v \in H^2$ , allora  $v' \in H^1$ . Possiamo dunque applicare la diseguaglianza (5) dimostrata nel Passo 1, sostituendo  $v$  con  $v'$ :

$$\left\| \frac{d}{dx} G_\epsilon(v) \right\|_{L^2}^2 = \|G_\epsilon(v')\|_{L^2}^2 \leq K^2 \epsilon^2 \|(v')'\|_{L^2}^2 = K^2 \epsilon^2 \|v''\|_{L^2}^2. \quad (6)$$

**Conclusione** Sommando i risultati (5) e (6), otteniamo la stima per la norma  $H^1$ :

$$\begin{aligned}\|G_\epsilon(v)\|_{H^1}^2 &= \|G_\epsilon(v)\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{d}{dx} G_\epsilon(v) \right\|_{L^2}^2 \\ &\leq K^2 \epsilon^2 \|v'\|_{L^2}^2 + K^2 \epsilon^2 \|v''\|_{L^2}^2 \\ &= K^2 \epsilon^2 \left( \|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2}^2 \right).\end{aligned}$$

Notiamo che la quantità tra parentesi è limitata dalla norma  $H^2$  al quadrato (dato che  $\|v\|_{H^2}^2 = \|v\|_2^2 + \|v'\|_2^2 + \|v''\|_2^2$ ):

$$\|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2}^2 \leq \|v\|_{H^2}^2.$$

Pertanto:

$$\|v * \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2 \leq K^2 \epsilon^2 \|v\|_{H^2}^2.$$

Estraendo la radice quadrata e ponendo  $C = K$ , si ottiene la tesi:

$$\|v * \rho_\epsilon - v\|_{H^1} \leq C \epsilon \|v\|_{H^2}.$$

## Esercizio 9

Si calcolino le soluzioni fondamentali di  $\Delta^2$  in  $\mathbb{R}^3$  dove  $\Delta$  è l'operatore di Laplace.

**Soluzione.** Cerchiamo una distribuzione  $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$  tale che:

$$\Delta^2 E = \delta \quad \text{in } \mathbb{R}^3. \tag{7}$$

Possiamo riscrivere l'equazione come l'azione iterata del Laplaciano:

$$\Delta(\Delta E) = \delta.$$

Ricordiamo che la soluzione fondamentale del Laplaciano in  $\mathbb{R}^3$ , denotata con  $E_\Delta$ , soddisfa  $\Delta E_\Delta = \delta$  ed è data da:

$$E_\Delta(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}.$$

Ponendo  $u = \Delta E$ , l'equazione (7) si riduce al sistema:

$$\begin{cases} \Delta E = u \\ \Delta u = \delta \end{cases} \implies u = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}.$$

Dobbiamo ora risolvere  $\Delta E = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$ . Data la simmetria radiale del termine noto, cerchiamo una soluzione radiale  $E = E(r)$  con  $r = |\mathbf{x}|$ .

L'operatore di Laplace per funzioni a simmetria radiale in  $\mathbb{R}^3$  si scrive come:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

L'equazione diventa (per  $r > 0$ ):

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dE}{dr} \right) = -\frac{1}{4\pi r}.$$

Moltiplicando per  $r^2$  e integrando una prima volta rispetto a  $r$ :

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dE}{dr} \right) = -\frac{r}{4\pi} \implies r^2 \frac{dE}{dr} = -\frac{r^2}{8\pi} + C_1.$$

Dividendo per  $r^2$  e integrando nuovamente:

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{1}{8\pi} + \frac{C_1}{r^2} \implies E(r) = -\frac{r}{8\pi} - \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Analizziamo i termini ottenuti:

- Il termine  $C_2$  è una costante armonica ( $\Delta C_2 = 0$ ).
- Il termine  $-C_1/r$  è proporzionale alla soluzione fondamentale del Laplaciano (che mappa in  $\delta$  tramite un Laplaciano, e quindi in  $\Delta\delta$  tramite il bilaplaciano, ma noi cerchiamo solo  $\delta$ ). Possiamo porre  $C_1 = 0$  per trovare la soluzione particolare.
- Il termine  $-\frac{r}{8\pi}$  è il candidato per la soluzione fondamentale cercata.

Verifichiamo rigorosamente nel senso delle distribuzioni che  $E(\mathbf{x}) = -\frac{|\mathbf{x}|}{8\pi}$  sia la soluzione corretta. Calcoliamo  $\Delta|\mathbf{x}|$  in  $\mathbb{R}^3$ . Poiché  $|\mathbf{x}|$  è una funzione continua e differenziabile ovunque tranne nell'origine, e la singolarità in 0 è debole (localmente integrabile insieme alle sue derivate prime), possiamo calcolare il Laplaciano in senso classico per  $r \neq 0$ :

$$\Delta r = \frac{2}{r}.$$

Non ci sono contributi deltaformi al primo passo perché la funzione  $r$  non è abbastanza singolare. Ora applichiamo il secondo Laplaciano:

$$\Delta^2 \left( -\frac{|\mathbf{x}|}{8\pi} \right) = \Delta \left( -\frac{1}{8\pi} \Delta |\mathbf{x}| \right) = \Delta \left( -\frac{1}{8\pi} \frac{2}{|\mathbf{x}|} \right) = -\frac{1}{4\pi} \Delta \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right).$$

Utilizzando l'identità nota  $\Delta(1/|\mathbf{x}|) = -4\pi\delta$ , otteniamo:

$$-\frac{1}{4\pi}(-4\pi\delta) = \delta.$$

La soluzione fondamentale del bilaplaciano in  $\mathbb{R}^3$  è dunque:

$$E(\mathbf{x}) = -\frac{|\mathbf{x}|}{8\pi}.$$

## Esercizio 10

Sia  $\square = -\partial_t^2 + \partial_x^2$  l'operatore d'onda su  $\mathbb{R}^2$ . Si mostri che, detta  $\Theta$  la funzione di Heaviside, sono soluzioni fondamentali per l'operatore d'onda:

$$G^+ = \Theta(t) \frac{\Theta(t^2 - x^2)}{2} \quad \text{e} \quad G^- = -\Theta(-t) \frac{\Theta(t^2 - x^2)}{2}.$$

**Soluzione.** Per verificare che  $G^+$  sia soluzione fondamentale, dobbiamo mostrare che  $\square G^+ = \delta$  nel senso delle distribuzioni. Analizziamo innanzitutto il supporto della distribuzione per definire correttamente l'integrale di accoppiamento con una funzione test  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

**Definizione del dominio di integrazione.** La distribuzione  $G^+$  è definita dal prodotto di due funzioni gradino:

1.  $\Theta(t)$  impone che la distribuzione sia nulla solo per  $t > 0$ .
2.  $\Theta(t^2 - x^2)$  impone  $t^2 - x^2 > 0$ , ovvero  $t^2 > x^2$ . Poiché  $t > 0$ , estraendo la radice otteniamo  $|x| < t$ , che equivale a  $-t < x < t$ .

L'intersezione di queste condizioni definisce il cono luce futuro. Pertanto, l'azione di  $G^+$  su  $\phi$  è data dall'integrale di Lebesgue limitato a questo dominio:

$$\langle G^+, \phi \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dt \int_{-t}^t \phi(t, x) dx.$$

**Calcolo del D'Alembertiano.** Per definizione di derivata nel senso delle distribuzioni, calcoliamo  $\langle \square G^+, \phi \rangle = \langle G^+, \square \phi \rangle$ . Sostituendo  $\square \phi = (-\partial_t^2 + \partial_x^2)\phi$ :

$$\langle \square G^+, \phi \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dt \left( \int_{-t}^t \partial_x^2 \phi(t, x) dx - \int_{-t}^t \partial_t^2 \phi(t, x) dx \right).$$

**Analisi del termine spaziale.** Per il primo integrale interno, applichiamo il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale nella variabile  $x$ :

$$\int_{-t}^t \partial_x^2 \phi(t, x) dx = [\partial_x \phi(t, x)]_{x=-t}^{x=t} = \partial_x \phi(t, t) - \partial_x \phi(t, -t).$$

**Analisi del termine temporale e derivate totali.** Per gestire il secondo termine, utilizziamo la regola di Leibniz per la derivazione sotto segno di integrale. Sia  $I(t) = \int_{-t}^t \partial_t \phi(t, x) dx$ . Derivando totalmente rispetto a  $t$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{-t}^t \partial_t \phi(t, x) dx = \int_{-t}^t \partial_t^2 \phi(t, x) dx + \partial_t \phi(t, t) \cdot (1) - \partial_t \phi(t, -t) \cdot (-1).$$

Da cui ricaviamo l'espressione per l'integrale della derivata seconda temporale:

$$-\int_{-t}^t \partial_t^2 \phi(t, x) dx = -\frac{d}{dt} \int_{-t}^t \partial_t \phi(t, x) dx + \partial_t \phi(t, t) + \partial_t \phi(t, -t).$$

**Sintesi.** Sommando i contributi spaziali e temporali, l'integrando in  $dt$  diventa:

$$(\partial_x \phi(t, t) + \partial_t \phi(t, t)) - (\partial_x \phi(t, -t) - \partial_t \phi(t, -t)) - \frac{d}{dt} \int_{-t}^t \partial_t \phi dx.$$

Riconosciamo nei primi termini le derivate totali della funzione  $\phi$  valutata lungo le caratteristiche  $x = t$  e  $x = -t$ :

$$\frac{d}{dt}[\phi(t, t)] = \partial_t \phi(t, t) + \partial_x \phi(t, t), \quad \frac{d}{dt}[\phi(t, -t)] = \partial_t \phi(t, -t) - \partial_x \phi(t, -t).$$

Quindi l'intero argomento dell'integrale in  $dt$  è una derivata totale esatta:

$$\langle \square G^+, \phi \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left( \phi(t, t) + \phi(t, -t) - \int_{-t}^t \partial_t \phi(t, x) dx \right) dt.$$

Integrando tra 0 e  $+\infty$  otteniamo il valore al bordo (poiché a  $+\infty$  la funzione test a supporto compatto si annulla):

$$-\frac{1}{2} \left[ \phi(0, 0) + \phi(0, 0) - \int_0^0 \partial_t \phi(0, x) dx \right] = -\frac{1}{2}(2\phi(0, 0)) = -\phi(0, 0) = -\langle \delta, \phi \rangle.$$

Dunque  $\square G^+ = -\delta$ .

**Il caso  $G^-$ .** Per  $G^-$  il ragionamento è del tutto analogo e si può ottenere velocemente osservando la simmetria temporale.  $G^-$  è supportata nel cono luce passato ( $t < -|x| \leq 0$ ). Effettuando il cambio di variabile  $t \rightarrow -t$  nell'integrale, l'azione su una funzione test si riconduce alla forma precedente, ma con un segno globale differente derivante dalla definizione di  $G^-$  (che ha un meno davanti) e dagli estremi di integrazione. La struttura delle derivate totali lungo le caratteristiche rimane invariata, portando nuovamente ad una singolarità nell'origine che restituisce la delta di Dirac.

## Esercizio 10 - Metodo di Fourier

Sia  $\square = -\partial_t^2 + \partial_x^2$  l'operatore d'onda su  $\mathbb{R}^2$ . Si mostri che, detta  $\Theta$  la funzione di Heaviside, sono soluzioni fondamentali per l'operatore d'onda:

$$G^+ = \Theta(t) \frac{\Theta(t^2 - x^2)}{2} \quad \text{e} \quad G^- = -\Theta(-t) \frac{\Theta(t^2 - x^2)}{2}.$$

**Soluzione.** L'obiettivo è verificare che  $\square G^\pm = \pm \delta(t)\delta(x)$  (a meno di un segno globale dipendente dalla convenzione sulla sorgente). Utilizziamo la trasformata di Fourier parziale rispetto alla variabile spaziale  $x$ , definita come  $\mathcal{F}[f](k) = \hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx$ .

L'equazione nello spazio delle frequenze diventa:

$$\widehat{\square G} = (-\partial_t^2 - k^2) \widehat{G}(t, k) = \delta(t).$$

## 1. Analisi del Propagatore Ritardato $G^+$

**Decomposizione geometrica.** Per  $t > 0$ , il supporto definito da  $\Theta(t^2 - x^2)$  corrisponde all'intervallo  $|x| < t$ . Possiamo riscrivere la funzione caratteristica utilizzando le funzioni segno traslate:

$$\Theta(t^2 - x^2) = \frac{1}{2} [\operatorname{sgn}(x+t) - \operatorname{sgn}(x-t)], \quad \text{per } t > 0.$$

Infatti, nell'intervallo  $-t < x < t$ , abbiamo  $\operatorname{sgn}(x+t) = 1$  e  $\operatorname{sgn}(x-t) = -1$ , la cui differenza fa 2. Fuori dall'intervallo la differenza è nulla. Dunque:

$$G^+(t, x) = \frac{\Theta(t)}{4} [\operatorname{sgn}(x+t) - \operatorname{sgn}(x-t)].$$

**Trasformata di Fourier.** Ricordando che  $\widehat{\operatorname{sgn}}(k) = \frac{2}{ik}$  (nel senso del valor principale) e usando la proprietà di traslazione  $\mathcal{F}[f(x-x_0)] = e^{-ikx_0} \hat{f}(k)$ :

- $\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(x+t)] = e^{ikt} \frac{2}{ik}$  (traslazione  $x_0 = -t$ )
- $\mathcal{F}[\operatorname{sgn}(x-t)] = e^{-ikt} \frac{2}{ik}$  (traslazione  $x_0 = t$ )

Sostituendo in  $G^+$ :

$$\widehat{G}^+(t, k) = \frac{\Theta(t)}{4} \left[ e^{ikt} \frac{2}{ik} - e^{-ikt} \frac{2}{ik} \right] = \frac{\Theta(t)}{2ik} \underbrace{(e^{ikt} - e^{-ikt})}_{2i \sin(kt)} = \Theta(t) \frac{\sin(kt)}{k}.$$

**Calcolo dell'operatore d'onda.** Calcoliamo le derivate distribuzionali rispetto al tempo di  $\widehat{G}^+$ :

$$\begin{aligned} \partial_t \widehat{G}^+ &= \delta(t) \frac{\sin(kt)}{k} + \Theta(t) \cos(kt) = \Theta(t) \cos(kt) \quad (\text{poiché } \sin(0) = 0) \\ \partial_t^2 \widehat{G}^+ &= \delta(t) \cos(kt) - k\Theta(t) \sin(kt) = \delta(t) - k\Theta(t) \sin(kt). \end{aligned}$$

Applicando l'operatore trasformato  $(-\partial_t^2 - k^2)$ :

$$(-\partial_t^2 - k^2) \widehat{G}^+ = -(\delta(t) - k\Theta(t) \sin(kt)) - k^2 \left( \Theta(t) \frac{\sin(kt)}{k} \right).$$

I termini oscillanti si cancellano perfettamente:

$$= -\delta(t) + k\Theta(t) \sin(kt) - k\Theta(t) \sin(kt) = -\delta(t).$$

Antitrasformando, otteniamo  $\square G^+ = -\delta(t)\delta(x)$ , perché antitrasformando una costante, risulta nella  $\delta(x)$ .

## 2. Analisi del Propagatore Avanzato $G^-$

**Decomposizione geometrica.** Definito come  $G^- = -\frac{1}{2}\Theta(-t)\Theta(t^2 - x^2)$ . Per  $t < 0$ , la condizione  $t^2 - x^2 > 0$  implica  $|x| < |t| = -t$ , ovvero  $t < x < -t$ . In questo caso la decomposizione corretta è:

$$\Theta(t^2 - x^2) = \frac{1}{2} [\operatorname{sgn}(x-t) - \operatorname{sgn}(x+t)], \quad \text{per } t < 0.$$

Verifica: per  $x \in (t, -t)$ , dato che  $t$  è negativo,  $x-t > 0$  ( $\operatorname{sgn} = 1$ ) e  $x+t < 0$  ( $\operatorname{sgn} = -1$ ). La differenza è  $1 - (-1) = 2$ . Quindi:

$$G^-(t, x) = -\frac{\Theta(-t)}{4} [\operatorname{sgn}(x-t) - \operatorname{sgn}(x+t)].$$

**Trasformata di Fourier.** Procediamo come nel caso precedente:

$$\widehat{G}^-(t, k) = -\frac{\Theta(-t)}{4} \left[ e^{-ikt} \frac{2}{ik} - e^{ikt} \frac{2}{ik} \right] = -\frac{\Theta(-t)}{2ik} \underbrace{(e^{-ikt} - e^{ikt})}_{-2i \sin(kt)}.$$

$$\widehat{G}^-(t, k) = \Theta(-t) \frac{\sin(kt)}{k}.$$

Notiamo che  $\widehat{G}^-$  ha la stessa forma funzionale di  $\widehat{G}^+$  ma supportata su  $t < 0$ .

### Calcolo dell'operatore d'onda.

$$\begin{aligned}\partial_t \hat{G}^- &= -\delta(t) \frac{\sin(kt)}{k} + \Theta(-t) \cos(kt) = \Theta(-t) \cos(kt). \\ \partial_t^2 \hat{G}^- &= -\delta(t) \cos(kt) - k\Theta(-t) \sin(kt) = -\delta(t) - k\Theta(-t) \sin(kt).\end{aligned}$$

Applicando l'operatore  $(-\partial_t^2 - k^2)$ :

$$\begin{aligned}(-\partial_t^2 - k^2) \hat{G}^- &= -(-\delta(t) - k\Theta(-t) \sin(kt)) - k\Theta(-t) \sin(kt). \\ &= \delta(t) + k\Theta(-t) \sin(kt) - k\Theta(-t) \sin(kt) = \delta(t).\end{aligned}$$

Antitrasformando, otteniamo  $\square G^- = \delta(t)\delta(x)$  (perchè antitrasformando una costante, risulta nella  $\delta(x)$ )

## Conclusione

Abbiamo dimostrato rigorosamente utilizzando la trasformata di Fourier spaziale e la decomposizione in funzioni segno che:

- $\square G^+ = -\delta(t)\delta(x)$
- $\square G^- = +\delta(t)\delta(x)$

Entrambe sono dunque soluzioni fondamentali dell'operatore d'onda (a meno del segno, che dipende dalla convenzione scelta per la definizione della funzione di Green causale rispetto alla sorgente).