

# Esercizi Operatori

Tommaso Pedroni

## Traccia dell'Esercizio 1-F

Dati due spazi di Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}'$  e denotando con  $\mathbb{I}$  e  $\mathbb{I}'$  i rispettivi operatori identità, si mostri che  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H}')$  è unitario se e solo se è limitato e  $T^*T = \mathbb{I}$  mentre  $TT^* = \mathbb{I}'$ .

---

**Soluzione.** Ricordiamo preliminarmente la definizione di operatore unitario. Un operatore  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  si dice *unitario* se è un isomorfismo isometrico suriettivo tra i due spazi di Hilbert. Ovvero, se conserva il prodotto scalare (e quindi è un'isometria) ed è suriettivo.

**Implicazione diretta ( $\Rightarrow$ ):** Sia  $T$  unitario.

- **Limitatezza:** Poiché  $T$  è unitario, preserva la norma, ossia  $\|T\psi\|_{\mathcal{H}'} = \|\psi\|_{\mathcal{H}}$  per ogni  $\psi \in \mathcal{H}$ . Di conseguenza, la norma operatoriale è  $\|T\| = \sup_{\|\psi\|=1} \|T\psi\| = 1$ , il che implica che  $T$  è limitato.
- **Relazioni con l'aggiunto:** Poiché  $T$  conserva il prodotto scalare, per la definizione di aggiunto vale:

$$\langle \phi, T^*T\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle T\phi, T\psi \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}.$$

Dall'arbitrarietà dei vettori segue l'identità operatoriale:

$$T^*T = \mathbb{I}.$$

Per mostrare che  $TT^* = \mathbb{I}'$ , osserviamo che  $T$ , essendo unitario, è per definizione una biiezione suriettiva. Pertanto ammette un unico operatore inverso  $T^{-1}$ . Dall'uguaglianza  $T^*T = \mathbb{I}$ , componendo a destra con  $T^{-1}$  otteniamo:

$$T^*TT^{-1} = \mathbb{I}T^{-1} \implies T^* = T^{-1}.$$

Sostituendo  $T^*$  a  $T^{-1}$  nella relazione fondamentale dell'inverso ( $TT^{-1} = \mathbb{I}'$ ), concludiamo che:

$$TT^* = \mathbb{I}'.$$

**Implicazione inversa ( $\Leftarrow$ ):** Sia  $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H}')$  limitato tale che  $T^*T = \mathbb{I}$  e  $TT^* = \mathbb{I}'$ .

- **Isometria:** Dalla condizione  $T^*T = \mathbb{I}$ , per ogni  $\psi \in \mathcal{H}$  abbiamo:

$$\|T\psi\|_{\mathcal{H}'}^2 = \langle T\psi, T\psi \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle \psi, T^*T\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi, \mathbb{I}\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \|\psi\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Quindi  $T$  è un'isometria.

- **Suriettività:** Dobbiamo mostrare che  $\text{Ran}(T) = \mathcal{H}'$ . Sia  $\eta \in \mathcal{H}'$  un vettore arbitrario. Consideriamo il vettore  $\xi = T^*\eta \in \mathcal{H}$ . Applicando  $T$  otteniamo:

$$T\xi = T(T^*\eta) = (TT^*)\eta = \mathbb{I}'\eta = \eta.$$

Dunque, per ogni  $\eta \in \mathcal{H}'$  esiste una controimmagine  $\xi \in \mathcal{H}$ , il che prova che  $T$  è suriettivo.

Essendo  $T$  un'isometria suriettiva limitata,  $T$  è unitario.

## Traccia dell'Esercizio 2-F

Sia dato uno spazio di Hilbert infinito dimensionale, mostrare che l'operatore identità non può mai essere compatto.

---

**Soluzione.** Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert separabile con  $\dim(\mathcal{H}) = \infty$  e sia  $\mathbb{I} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  l'operatore identità.

Un operatore  $K$  si dice *compatto* se mappa insiemi limitati in insiemi relativamente compatti. Equivalentemente,  $K$  è compatto se, per ogni successione limitata  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ , la successione trasformata  $\{Kx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ammette una sottosuccessione convergente in  $\mathcal{H}$ .

Poiché  $\mathcal{H}$  è infinito dimensionale, esiste in esso un sistema ortonormale infinito  $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$  (si pensi al risultato della procedura di Gram-Schmidt applicata a un insieme numerabile linearmente indipendente).

Consideriamo la successione  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Essa è limitata poiché  $\|e_n\| = 1$  per ogni  $n$ . Valutiamo l'azione dell'identità su tale successione:  $\mathbb{I}e_n = e_n$ .

Affinché  $\mathbb{I}$  sia compatto, dalla successione  $\{e_n\}$  si dovrebbe poter estrarre una sottosuccessione convergente (e quindi di Cauchy). Tuttavia, per ogni  $n \neq m$ , calcoliamo la distanza tra due elementi della base ortonormale:

$$\|e_n - e_m\|^2 = \langle e_n - e_m, e_n - e_m \rangle = \|e_n\|^2 + \|e_m\|^2 - 2\operatorname{Re} \langle e_n, e_m \rangle = 1 + 1 - 0 = 2.$$

Dunque  $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$  per ogni  $n \neq m$ .

Questo implica che non è possibile estrarre alcuna sottosuccessione di Cauchy da  $\{e_n\}$ , poiché gli elementi mantengono una distanza costante e non nulla l'uno dall'altro. Di conseguenza, la successione  $\{\mathbb{I}e_n\}$  non ammette sottosuccessioni convergenti.

Concludiamo che l'operatore identità in uno spazio di Hilbert infinito dimensionale non è compatto.

## Traccia dell'Esercizio 3-F

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e siano  $T$  e  $T'$  due operatori densamente definiti. Si mostri che:

- Se  $T \subset T'$ , allora  $(T')^* \subset T^*$ .
  - $(T')^* T^* \subseteq (TT')^*$  e l'uguaglianza vale se  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .
- 

**Soluzione.** Dividiamo l'esercizio in due parti.

### Punto (a)

L'ipotesi  $T \subset T'$  significa che:

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T') \quad \text{e} \quad Tx = T'x \quad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

Sia  $\phi \in \mathcal{D}(T')^*$ . Per definizione di operatore aggiunto, ciò significa che esiste un vettore  $\eta \in \mathcal{H}$  (denotato con  $(T')^*\phi$ ) tale che:

$$\langle \phi, T'x \rangle = \langle \eta, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(T').$$

Poiché  $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T')$ , la relazione sopra vale in particolare per ogni  $x \in \mathcal{D}(T)$ . Inoltre, per tali  $x$ , abbiamo  $T'x = Tx$ . Possiamo quindi scrivere:

$$\langle \phi, Tx \rangle = \langle \eta, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

Questa è esattamente la definizione che assicura che  $\phi \in \mathcal{D}(T^*)$  e che  $T^*\phi = \eta$ .

Abbiamo mostrato che  $\phi \in \mathcal{D}((T')^*) \implies \phi \in \mathcal{D}(T^*)$  e che l'azione degli operatori coincide. Pertanto:

$$(T')^* \subset T^*.$$

## Punto (b)

**Inclusione**  $(T')^*T^* \subseteq (TT')^*$ . Sia  $\phi \in \mathcal{D}(T'^*T^*)$ . Per definizione di dominio del prodotto di operatori, questo implica che:

$$\phi \in \mathcal{D}(T^*) \quad \text{e} \quad T^*\phi \in \mathcal{D}(T'^*).$$

Vogliamo mostrare che  $\phi \in \mathcal{D}((TT')^*)$ . Consideriamo un generico  $x \in \mathcal{D}(TT')$ . Ricordiamo che  $x \in \mathcal{D}(TT') \iff x \in \mathcal{D}(T') \wedge T'x \in \mathcal{D}(T)$ .

Valutiamo il prodotto scalare  $\langle \phi, TT'x \rangle$ :

1. Poiché  $T'x \in \mathcal{D}(T)$  e  $\phi \in \mathcal{D}(T^*)$ , possiamo scaricare  $T$ :

$$\langle \phi, T(T'x) \rangle = \langle T^*\phi, T'x \rangle.$$

2. Ora, poniamo  $\psi := T^*\phi$ . Sappiamo per ipotesi che  $\psi \in \mathcal{D}((T')^*)$ . Inoltre  $x \in \mathcal{D}(T')$ . Possiamo scaricare  $T'$ :

$$\langle \psi, T'x \rangle = \langle (T')^*\psi, x \rangle = \langle (T')^*T^*\phi, x \rangle.$$

Mettendo insieme i passaggi, abbiamo trovato che per ogni  $x \in \mathcal{D}(TT')$ :

$$\langle \phi, TT'x \rangle = \langle (T')^*T^*\phi, x \rangle.$$

Questo prova che  $\phi \in \mathcal{D}((TT')^*)$  e che  $(TT')^*\phi = (T')^*T^*\phi$ .

**Uguaglianza nel caso limitato.** Sia ora  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Questo implica che  $T$  è limitato e definito su tutto lo spazio, ovvero  $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$  e  $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H}$ . Dobbiamo mostrare l'inclusione inversa:  $(TT')^* \subseteq (T')^*T^*$ .

Osserviamo preliminarmente che, essendo  $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ , il dominio del prodotto  $TT'$  si semplifica:

$$\mathcal{D}(TT') = \{x \in \mathcal{D}(T') : T'x \in \mathcal{D}(T)\} = \{x \in \mathcal{D}(T') : T'x \in \mathcal{H}\} = \mathcal{D}(T').$$

Sia ora  $\phi \in \mathcal{D}((TT')^*)$ . Questo significa che esiste un  $\eta$  tale che:

$$\langle \phi, TT'x \rangle = \langle \eta, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(TT') = \mathcal{D}(T').$$

Essendo  $T$  limitato e definito ovunque, il suo aggiunto  $T^*$  è anch'esso definito ovunque ( $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ). Possiamo usare la proprietà dell'aggiunto per operatori limitati  $\langle \phi, Ty \rangle = \langle T^*\phi, y \rangle$  per qualsiasi  $y \in \mathcal{H}$ . Ponendo  $y = T'x$  (che è un vettore lecito in  $\mathcal{H}$ ), otteniamo:

$$\langle \phi, T(T'x) \rangle = \langle T^*\phi, (T'x) \rangle.$$

Confrontando le due espressioni, abbiamo:

$$\langle T^*\phi, T'x \rangle = \langle \eta, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(T').$$

Questa uguaglianza ci dice esattamente che il funzionale lineare  $x \mapsto \langle T^*\phi, T'x \rangle$  è limitato (rappresentabile da  $\eta$ ). Per definizione di aggiunto di  $T'$ , ciò implica che il vettore  $T^*\phi$  appartiene al dominio di  $(T')^*$ , ovvero:

$$T^*\phi \in \mathcal{D}((T')^*).$$

Poiché  $\phi \in \mathcal{H} = \mathcal{D}(T^*)$  è sempre vero, la condizione  $T^*\phi \in \mathcal{D}((T')^*)$  è sufficiente per affermare che:

$$\phi \in \mathcal{D}((T')^*T^*).$$

Ciò conclude la dimostrazione dell'uguaglianza.

## Traccia dell'Esercizio 4-F

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e sia dato  $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ . Si mostri che  $T$  è essenzialmente autoaggiunto se e solo se  $T$  è denso e chiudibile in  $\mathcal{H}$  e  $T^* = \bar{T}$ .

**Soluzione. Implicazione diretta ( $\Rightarrow$ ):** Sia  $T$  essenzialmente autoaggiunto. Per la **Definizione 84**, questo implica tre fatti:

1.  $\mathcal{D}(T)$  è denso in  $\mathcal{H}$
2.  $\mathcal{D}(T^*)$  è denso in  $\mathcal{H}$
3.  $T^* = (T^*)^*$

Poiché  $\mathcal{D}(T^*)$  è denso, per il **Teorema 82 (punto 2)**, possiamo affermare che  $T$  è chiudibile e che vale l'identità fondamentale:

$$\overline{T} = (T^*)^*.$$

Sostituendo questa identità nella condizione 3 (essenziale autoaggiunzione), otteniamo:

$$T^* = \overline{T}.$$

Abbiamo quindi mostrato che  $T$  è denso (cond. 1), chiudibile (dal Teorema 82) e che  $T^* = \overline{T}$ .

**Implicazione inversa ( $\Leftarrow$ ):** Supponiamo che:

- H1.  $\mathcal{D}(T)$  sia denso.
- H2.  $T$  sia chiudibile.
- H3.  $T^* = \overline{T}$ .

Dobbiamo verificare che  $T$  soddisfi la **Definizione 84**. La prima condizione della definizione ( $\mathcal{D}(T)$  denso) è garantita da H1.

Poiché  $T$  è chiudibile (H2), il **Teorema 82 (punto 2)** assicura che  $\mathcal{D}(T^*)$  è denso (soddisfacendo così la seconda condizione della Def. 84) e che vale:

$$(T^*)^* = \overline{T}.$$

Utilizzando l'ipotesi H3 ( $T^* = \overline{T}$ ), possiamo sostituire  $\overline{T}$  nell'equazione precedente:

$$(T^*)^* = T^*.$$

Questo soddisfa la terza condizione della **Definizione 84**. Dunque  $T$  è essenzialmente autoaggiunto.

## Traccia dell'Esercizio 5-F

Dati due spazi di Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{K}$  e un operatore unitario  $U : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{H}$ , si mostri che se  $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  è essenzialmente autoaggiunto, allora lo è anche l'operatore  $T' \doteq U^{-1}TU$  definito su  $\mathcal{D}(T') = U^{-1}\mathcal{D}(T)$ .

**Soluzione.** Sia  $T$  essenzialmente autoaggiunto. Per la **Definizione 84**, valgono:

- $\mathcal{D}(T)$  e  $\mathcal{D}(T^*)$  sono densi in  $\mathcal{H}$ .
- $T^* = (T^*)^*$ .

Dobbiamo verificare le stesse condizioni per  $T'$ .

PS: Credo ci sia un'esercitazione di Beatrice dove dimostra letteralmente le stesse cose. In particolare dimostra che  $T$  simmetrico  $\Rightarrow T'$  simmetrico, quindi sappiamo già la densità dei domini. Essendo  $U$  limitato con inverso limitato ( $U^* = U^{-1}$ ), vale la regola dell'aggiunto del prodotto (esercizio 3-F punto (b)):

$$(T')^* = (U^{-1}TU)^* = U^*T^*(U^{-1})^* = U^{-1}T^*U.$$

Il dominio di  $(T')^*$  è  $\mathcal{D}((T')^*) = U^{-1}\mathcal{D}(T^*)$ .

Dobbiamo verificare che  $(T')^* = ((T')^*)^*$ . Calcoliamo l'aggiunto dell'aggiunto di  $T'$ :

$$((T')^*)^* = (U^{-1}T^*U)^* = U^*(T^*)^*(U^{-1})^* = U^{-1}(T^*)^*U.$$

Poiché  $T$  è essenzialmente autoaggiunto, per definizione sappiamo che  $T^* = (T^*)^*$ . Sostituendo questa uguaglianza nell'equazione sopra:

$$((T')^*)^* = U^{-1}T^*U.$$

Osserviamo che il membro di destra è esattamente l'espressione di  $(T')^*$  trovata in precedenza. Dunque:

$$((T')^*)^* = (T')^*.$$

Tutte le condizioni della **Definizione 84** sono soddisfatte per  $T'$ , che è quindi essenzialmente autoaggiunto.

## Traccia dell'Esercizio 1

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e sia  $T = T^* \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$  un operatore compatto autoaggiunto. Dato  $\psi_0 \in \mathcal{H}$ , si considerino le equazioni:

1.  $T\psi = \psi$
2.  $T\psi = \psi + \psi_0$

Si mostri che:

- (a) Se l'unica soluzione di (1) è  $\psi = 0$ , allora l'equazione (2) ammette un'unica soluzione.
  - (b) Se l'equazione (1) ammette soluzioni  $\psi \neq 0$ , allora l'equazione (2) è risolubile se e solo se  $\psi_0$  è ortogonale ad ogni soluzione di (1).
- 

**Soluzione.** Definiamo l'operatore  $S : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  come:

$$S := T - I.$$

Poiché  $T$  è limitato (in quanto compatto) e  $I$  è limitato,  $S$  è un operatore limitato. Inoltre, poiché  $T$  è autoaggiunto ( $T = T^*$ ) e l'identità è autoaggiunta,  $S$  è autoaggiunto:

$$S^* = (T - I)^* = T^* - I^* = T - I = S.$$

Le equazioni date possono essere riscritte come:

1.  $S\psi = 0$  (Equazione omogenea)
2.  $S\psi = \psi_0$  (Equazione non omogenea, a meno di un segno ininfluente su  $\psi_0$ )

### Parte (a)

**Ipotesi:** L'unica soluzione della (1) è  $\psi = 0$ . Questo implica che  $\text{Ker}(S) = \{0\}$ .

#### 1. Analisi del Nucleo $\text{Ker}(S)$

Dobbiamo formalizzare che  $\text{Ker}(S)$  è un sottospazio vettoriale (banale ma necessario per rigore). Il nucleo è definito come  $\text{Ker}(S) = \{\psi \in \mathcal{H} \mid (T - I)\psi = 0\}$ .

- **Contiene lo zero:**  $S(0) = T(0) - 0 = 0$ , quindi  $0 \in \text{Ker}(S)$ .
- **Chiusura rispetto alle operazioni lineari:** Siano  $\phi_1, \phi_2 \in \text{Ker}(S)$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

$$S(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \alpha S(\phi_1) + \beta S(\phi_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

Pertanto  $\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \in \text{Ker}(S)$ .

Dunque  $\text{Ker}(S)$  è un sottospazio lineare. Per l'ipotesi di questa sezione,  $\text{Ker}(S) = \{0\}$ , il che implica che l'operatore  $S$  è **iniettivo**. L'unicità della soluzione, qualora esista, è garantita. Resta da dimostrare l'esistenza (suriettività).

## 2. Dimostrazione della Chiusura del Rango e Suriettività

Per dimostrare che l'equazione  $S\psi = \psi_0$  ammette soluzione per ogni  $\psi_0$ , dobbiamo mostrare che  $\text{Ran}(S) = \mathcal{H}$ . Essendo  $S$  autoaggiunto, vale la decomposizione ortogonale:

$$\mathcal{H} = \overline{\text{Ran}(S)} \oplus \text{Ker}(S).$$

Dato che  $\text{Ker}(S) = \{0\}$ , segue che  $\overline{\text{Ran}(S)} = \mathcal{H}$ . Ovvero, l'immagine è densa. Per concludere che  $\text{Ran}(S) = \mathcal{H}$ , è necessario e sufficiente dimostrare che  $\text{Ran}(S)$  è un insieme **chiuso**.

**Dimostrazione della chiusura di  $\text{Ran}(S)$  (Caso Generale).** Sia  $y_n \in \text{Ran}(S)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , e supponiamo che  $y_n \rightarrow y$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Dobbiamo dimostrare che  $y \in \text{Ran}(S)$ . Per ipotesi:

$$y_n = Sx_n = Tx_n - x_n \quad (*)$$

per una certa successione  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{H}$ . Senza perdita di generalità possiamo assumere  $x_n \in \text{Ker}(S)^\perp$ , eventualmente eliminando dalla successione la componente che si proietta su  $\text{Ker}(S)$ . L'affermazione è dimostrata se riusciamo a mostrare che la successione  $\{x_n\}$  è limitata: infatti, essendo  $T$  compatto, esisterà una sottosuccessione  $x_{n_k}$  tale che  $Ax_{n_k} \rightarrow y' \in \mathcal{H}$  per  $k \rightarrow \infty$ . Sostituendo in  $(*)$  concludiamo che  $x_{n_k} \rightarrow x$  per un certo  $x \in \mathcal{H}$  per  $k \rightarrow +\infty$ . Per la continuità di  $T$ ,  $Sx = Tx - x = y$ , dunque  $y \in \text{Ran}(S)$ .

Procederemo per assurdo, assumendo che  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{Ker}(S)^\perp$  sia illimitata. Quindi esisterebbe una sottosuccessione  $x_{n_m}$  con  $0 < \|x_{n_m}\| \rightarrow +\infty$  per  $m \rightarrow +\infty$ . Poiché i  $y_n$  formano una successione convergente, e quindi limitata, dividendo per  $\|x_{n_m}\|$  in  $(*)$  si ottiene:

$$S \frac{x_{n_m}}{\|x_{n_m}\|} = T \frac{x_{n_m}}{\|x_{n_m}\|} - \frac{x_{n_m}}{\|x_{n_m}\|} = \frac{y_{n_m}}{\|x_{n_m}\|} \rightarrow \mathbf{0}. \quad (**)$$

Ma  $T$  è compatto e i vettori  $\frac{x_{n_m}}{\|x_{n_m}\|}$  sono limitati, quindi possiamo estrarre un'ulteriore sottosuccessione  $x_{n_{m_k}}/\|x_{n_{m_k}}\|$  tale che:

$$\frac{x_{n_{m_k}}}{\|x_{n_{m_k}}\|} \rightarrow x' \in \mathcal{H} \quad \text{e} \quad S \frac{x_{n_{m_k}}}{\|x_{n_{m_k}}\|} \rightarrow Sx' \quad \text{per } k \rightarrow +\infty.$$

Da  $(**)$  deduciamo che  $x' \in \text{Ker}(S)$ . Per ipotesi  $\frac{x_{n_{m_k}}}{\|x_{n_{m_k}}\|} \in \text{Ker}(S)^\perp$ , e poiché  $\text{Ker}(S)^\perp$  è chiuso, allora  $x' \in \text{Ker}(S)^\perp$ . Di conseguenza  $x' \in \text{Ker}(S) \cap \text{Ker}(S)^\perp = \{0\}$ , in contraddizione con

$$\|x'\| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\|x_{n_{m_k}}\|}{\|x_{n_{m_k}}\|} = 1.$$

**Conclusion Parte (a):** Poiché  $\text{Ran}(S)$  è chiuso e  $\text{Ker}(S) = \{0\}$ , abbiamo:

$$\text{Ran}(S) = (\text{Ker}(S^*))^\perp = (\text{Ker}(S))^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}.$$

L'operatore  $S$  è quindi una biiezione su  $\mathcal{H}$ . L'equazione (2) ammette una ed una sola soluzione.

## Parte (b)

**Ipotesi:** L'equazione (1) ammette soluzioni  $\psi \neq 0$ . Questo significa che  $\text{Ker}(S) \neq \{0\}$ .  $\text{Ker}(S)$  è l'autospazio di  $T$  relativo all'autovalore 1. Poiché  $T$  è compatto, questo autospazio ha dimensione finita, ma qui ci basta sapere che non è banale.

Dalla teoria generale (e ricalcando la dimostrazione di chiusura fatta al punto (a), che rimane valida anche se il nucleo non è nullo), sappiamo che  $\text{Ran}(S)$  è un sottospazio chiuso di  $\mathcal{H}$ .

Essendo  $\text{Ran}(S)$  chiuso, vale esattamente:

$$\text{Ran}(S) = (\text{Ker}(S^*))^\perp.$$

Poiché  $S$  è autoaggiunto ( $S = S^*$ ), abbiamo:

$$\text{Ran}(S) = (\text{Ker}(S))^\perp.$$

L'equazione (2),  $S\psi = \psi_0$ , ha soluzione se e solo se  $\psi_0 \in \text{Ran}(S)$ . In virtù dell'uguaglianza sopra, questo equivale a:

$$\psi_0 \in (\text{Ker}(S))^\perp.$$

Ovvero,  $\psi_0$  deve essere ortogonale a ogni vettore del nucleo di  $S$ . Poiché i vettori di  $\text{Ker}(S)$  sono esattamente le soluzioni dell'equazione omogenea (1), l'equazione (2) è risolubile se e solo se  $\psi_0$  è ortogonale ad ogni soluzione della (1).

□

## Traccia dell'Esercizio 2

Sia  $g \in L^2([0, 2\pi])$ . Definito l'operatore  $T : L^2([0, 2\pi]) \rightarrow L^2([0, 2\pi])$  come:

$$f \mapsto T(f) \doteq g * f = \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y) dy$$

si mostri che  $T \in \mathcal{B}_\infty(L^2([0, 2\pi]))$  (ovvero  $T$  è compatto) e che le funzioni  $e^{inx}$  sono autovettori di  $T$ .

**Soluzione.** Per procedere con il dovuto rigore, assumiamo che la funzione  $g$ , data in  $L^2([0, 2\pi])$ , sia estesa per periodicità a tutto  $\mathbb{R}$ . Questo rende ben definita l'espressione  $g(x-y)$  per ogni coppia  $(x, y)$ .

### 1. Spettro Puntuale: Gli autovettori

Siano  $\phi_n(x) \doteq e^{inx}$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Verifichiamo direttamente che questi sono autovettori applicando l'operatore integrale.

$$(T\phi_n)(x) = \int_0^{2\pi} g(x-y)e^{iny} dy.$$

Operiamo il cambio di variabile  $z = x - y$ . Di conseguenza  $y = x - z$  e  $dy = -dz$ . Gli estremi di integrazione si trasformano come segue:  $y = 0 \rightarrow z = x$  e  $y = 2\pi \rightarrow z = x - 2\pi$ .

$$(T\phi_n)(x) = \int_x^{x-2\pi} g(z)e^{in(x-z)}(-dz) = e^{inx} \int_{x-2\pi}^x g(z)e^{-inz} dz.$$

L'integrandina  $h(z) = g(z)e^{-inz}$  è il prodotto di funzioni  $2\pi$ -periodiche, ed è quindi essa stessa  $2\pi$ -periodica. È fatto noto dell'analisi reale che l'integrale di una funzione periodica su un intervallo pari al periodo è invariante per traslazione degli estremi:

$$\int_{x-2\pi}^x h(z) dz = \int_0^{2\pi} h(z) dz.$$

Sostituendo, otteniamo:

$$(T\phi_n)(x) = e^{inx} \left( \int_0^{2\pi} g(z)e^{-inz} dz \right).$$

Definendo lo scalare  $\lambda_n \doteq \int_0^{2\pi} g(z)e^{-inz} dz$ , abbiamo dimostrato che:

$$T\phi_n = \lambda_n \phi_n.$$

Dunque, le funzioni  $\phi_n$  sono autovettori di  $T$  relativi agli autovalori  $\lambda_n$ .

### 2. Completezza del sistema ortonormale

Per poter analizzare le proprietà spettrali globali dell'operatore, dobbiamo assicurarci che gli autovettori trovati generino l'intero spazio. Definiamo il sistema normalizzato:

$$u_n(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Il sistema  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  è chiaramente ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di  $L^2$ :  $\langle u_n, u_m \rangle = \delta_{nm}$ .

Per dimostrarne la completezza, mostriamo che il complemento ortogonale del sottospazio generato da  $\{u_n\}$  è il solo vettore nullo. Sia  $f \in L^2([0, 2\pi])$  tale che  $\langle f, u_n \rangle = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\langle f, u_n \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{u_n(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = 0.$$

Gli integrali sopra corrispondono (a meno del fattore di normalizzazione) ai coefficienti di Fourier di  $f$ , denotati  $\hat{f}_n$ . L'ipotesi  $\langle f, u_n \rangle = 0, \forall n$  implica  $\hat{f}_n = 0, \forall n$ . Questo può essere detto per l'iniettività di Fourier su  $L^2$  enunciata in classe oppure per il **Teorema di Unicità** della serie di Fourier (conseguenza della densità dei polinomi trigonometrici e della completezza di  $L^2$ ), una funzione  $L^2$  con tutti i coefficienti di Fourier nulli è nulla quasi ovunque.

$$f = 0 \quad \text{q.o.}$$

Pertanto,  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  è una base ortonormale completa (Base di Hilbert) per  $\mathcal{H}$ .

### 3. Compattezza e Classe di Hilbert-Schmidt

Per dimostrare che  $T$  è compatto ( $T \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ ), dimostreremo la condizione più forte che  $T$  è un operatore di Hilbert-Schmidt. Un operatore  $T$  è di Hilbert-Schmidt se, data una base ortonormale  $\{e_k\}$ , la quantità  $\|T\|_2^2 \doteq \sum_k \|Te_k\|^2$  è finita.

Scegliamo come base proprio gli autovettori normalizzati  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Poiché  $Tu_n = \lambda_n u_n$ , abbiamo:

$$\|Tu_n\|^2 = \|\lambda_n u_n\|^2 = |\lambda_n|^2 \|u_n\|^2 = |\lambda_n|^2.$$

La norma Hilbert-Schmidt è dunque data dalla serie degli autovalori al quadrato:

$$\|T\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\lambda_n|^2.$$

Analizziamo i termini  $\lambda_n$ . Dalla definizione data nel punto 1:

$$\lambda_n = \int_0^{2\pi} g(z) e^{-inz} dz.$$

Possiamo riscrivere  $\lambda_n$  in funzione dei coefficienti di Fourier della funzione  $g$  rispetto alla base ortonormale  $\{u_n\}$ . I coefficienti di Fourier sono  $\hat{g}_n = \langle g, u_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} g(z) e^{-inz} dz$ . Risulta evidente che:

$$\lambda_n = \sqrt{2\pi} \hat{g}_n.$$

Sostituendo nella somma:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\lambda_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \sqrt{2\pi} \hat{g}_n \right|^2 = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2.$$

Poiché per ipotesi  $g \in L^2([0, 2\pi])$ , l'**Identità di Parseval** garantisce che la somma dei quadrati dei suoi coefficienti di Fourier converga al quadrato della norma della funzione:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2 = \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Di conseguenza:

$$\|T\|_2^2 = 2\pi \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

L'operatore  $T$  è dunque di Hilbert-Schmidt. Poiché la classe degli operatori di Hilbert-Schmidt è contenuta in quella degli operatori compatti ( $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_\infty$ ), concludiamo che  $T$  è un operatore compatto.  $\square$

### Soluzione Esercizio 2 - Metodo Spettrale

Sia  $g \in L^2([0, 2\pi])$  estesa per periodicità. Analizziamo l'operatore integrale  $T : L^2 \rightarrow L^2$  definito da  $Tf = g * f$ .

## 1. Spettro Puntuale e Diagonalizzazione

Consideriamo il sistema ortonormale completo in  $L^2([0, 2\pi])$  dato da:

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Verifichiamo che questi siano autovettori di  $T$ . Applicando la definizione:

$$(Tu_n)(x) = \int_0^{2\pi} g(x-y) \frac{e^{iny}}{\sqrt{2\pi}} dy.$$

Ponendo  $z = x - y$  e sfruttando la periodicità delle funzioni in gioco:

$$(Tu_n)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} g(z) e^{in(x-z)} dz = \left( \int_0^{2\pi} g(z) e^{-inz} dz \right) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Definiamo la successione degli scalari  $\lambda_n$  come:

$$\lambda_n \doteq \int_0^{2\pi} g(z) e^{-inz} dz.$$

Abbiamo quindi ottenuto la relazione agli autovalori:

$$Tu_n = \lambda_n u_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Notiamo che  $\lambda_n$  è strettamente legato ai coefficienti di Fourier di  $g$ . Infatti, denotando  $\hat{g}_n = \langle g, u_n \rangle$ :

$$\lambda_n = \sqrt{2\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} g(z) e^{-inz} dz \right) = \sqrt{2\pi} \hat{g}_n.$$

## 2. Compattezza via Fourier-Plancherel

Per analizzare la compattezza di  $T$ , passiamo allo spazio delle frequenze. Sia  $\mathcal{F} : L^2([0, 2\pi]) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$  l'isomorfismo isometrico di Fourier-Plancherel, che associa a ogni funzione  $f$  la successione dei suoi coefficienti di Fourier  $\{\hat{f}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ .

Grazie alla diagonalizzazione effettuata al punto precedente, l'operatore  $T$  è unitariamente equivalente a un \*\*operatore di moltiplicazione diagonale\*\*  $\hat{T}$  su  $\ell^2(\mathbb{Z})$ :

$$\hat{T}(\{\hat{f}_n\}_n) = \{\lambda_n \hat{f}_n\}_n.$$

In altre parole, l'azione dell'operatore sulle componenti di Fourier è una semplice moltiplicazione scalare elemento per elemento.

**Analisi della successione dei moltiplicatori  $\{\lambda_n\}$ :** Dall'ipotesi  $g \in L^2([0, 2\pi])$ , per il teorema di Plancherel (o Identità di Parseval), sappiamo che la successione dei coefficienti di Fourier di  $g$  è a quadrato sommabile:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2 = \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Poiché  $\lambda_n = \sqrt{2\pi} \hat{g}_n$ , ne consegue immediatamente che anche la successione degli autovalori appartiene a  $\ell^2(\mathbb{Z})$ :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\lambda_n|^2 = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2 = 2\pi \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

## 3. Conclusione

Un operatore diagonale su  $\ell^2$  definito da una successione  $\{\lambda_n\}$  è un operatore di Hilbert-Schmidt se e solo se la successione è in  $\ell^2(\mathbb{Z})$ . Avendo dimostrato che  $\{\lambda_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ , concludiamo che:

1.  $T$  è un operatore di Hilbert-Schmidt, e quindi
2.  $T$  è un operatore compatto (poiché  $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_\infty$ ).

*Nota a margine:* Anche senza invocare la classe Hilbert-Schmidt, la condizione necessaria e sufficiente affinché un operatore diagonale sia compatto è che  $\lim_{|n| \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$ . Questo è garantito dal fatto che  $\lambda_n$  sono coefficienti di Fourier di una funzione  $L^2$  (Lemma di Riemann-Lebesgue, o semplice conseguenza della convergenza della serie dei quadrati).

□

## Traccia dell'Esercizio 3

Sia data una matrice  $\sigma \in \mathcal{M}(n; \mathbb{R})$  positiva e sia  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Si mostri che l'operatore

$$L \doteq \operatorname{div}(\sigma \nabla) = \nabla \cdot (\sigma \nabla)$$

è essenzialmente autoaggiunto sullo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , dove  $\nabla$  è l'operatore gradiente.

---

**Soluzione.** Per affrontare il problema con il dovuto rigore, è necessario specificare il dominio iniziale dell'operatore. Poiché stiamo trattando operatori differenziali su  $\mathbb{R}^n$  non limitati, assumiamo come dominio di definizione lo spazio delle funzioni test a supporto compatto:

$$\mathcal{D}(L) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n).$$

L'operatore  $L$  è simmetrico su questo dominio. Infatti, per ogni  $\phi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , integrando per parti due volte e assumendo che i termini di bordo svaniscano (garantito dal supporto compatto), e sfruttando la simmetria di  $\sigma$  (implicita nella definizione di positività per matrici reali in questo contesto,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ):

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) \bar{\psi} \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} (\sigma \nabla \phi) \cdot \nabla \bar{\psi} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi \overline{\nabla \cdot (\sigma \nabla \psi)} \, dx = \langle \phi, L\psi \rangle.$$

Per dimostrare che  $L$  è **essenzialmente autoaggiunto** (ovvero che la sua chiusura  $\bar{L}$  è autoaggiunta,  $\bar{L} = L^*$ ), utilizziamo il **Criterio di Von Neumann**. Dobbiamo mostrare che gli indici di difetto sono nulli, ovvero:

$$\ker(L^* - iI) = \{0\} \quad \text{e} \quad \ker(L^* + iI) = \{0\}.$$

Poiché  $L$  è a coefficienti reali, è sufficiente studiare una delle due equazioni, in quanto la coniugazione complessa mappa le soluzioni di una in quelle dell'altra. Cerchiamo quindi le soluzioni distribuzionali  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  dell'equazione:

$$L\psi = i\psi \implies \nabla \cdot (\sigma \nabla \psi) - i\psi = 0.$$

### 1. Diagonalizzazione e Cambio di Variabili

La matrice  $\sigma$  è definita positiva. Per il Teorema Spettrale reale, esiste una matrice ortogonale  $O \in O(n)$  tale che:

$$O^T \sigma O = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \text{con } \lambda_k > 0.$$

Operiamo un cambio di variabili nello spazio  $\mathbb{R}^n$  definito dalla rotazione  $y = O^T x$ . Poiché  $O$  è ortogonale, la trasformazione è un'isometria unitaria su  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (preserva il prodotto scalare e la norma), quindi non altera le proprietà spettrali (come l'appartenenza a  $L^2$ ). Esprimiamo l'operatore differenziale nelle nuove coordinate  $y$ . Notiamo che  $\nabla_x = O \nabla_y$ . L'operatore diventa:

$$\nabla_x \cdot (\sigma \nabla_x) = (O \nabla_y)^T \sigma (O \nabla_y) = \nabla_y^T (O^T \sigma O) \nabla_y = \nabla_y^T D \nabla_y = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}.$$

L'equazione agli autovalori nelle coordinate ruotate diventa:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_k^2} - i\psi(y) = 0.$$

### 2. Analisi delle Soluzioni in $L^2$ tramite Trasformata di Fourier

Vogliamo dimostrare che l'unica soluzione  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  all'equazione  $L\psi = i\psi$  è la soluzione nulla  $\psi \equiv 0$ . Utilizziamo la trasformata di Fourier  $\mathcal{F}$ , che è un automorfismo unitario su  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (Teorema di Plancherel).

Riprendiamo l'equazione nelle coordinate diagonali  $y$  ottenuta al punto precedente:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2 \psi}{\partial y_k^2} - i\psi(y) = 0.$$

Passando allo spazio delle frequenze  $k \in \mathbb{R}^n$ , denotiamo  $\hat{\psi}(k) = \mathcal{F}[\psi](k)$ . Ricordando che l'azione della derivata in Fourier diventa una moltiplicazione (i.e.,  $\mathcal{F}[\partial_{y_j}^2 \psi] = -k_j^2 \hat{\psi}$ ), l'equazione differenziale si trasforma nella seguente equazione algebrica:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k (-k_k^2) \hat{\psi}(k) - i\hat{\psi}(k) = 0.$$

Raccogliendo  $\hat{\psi}(k)$ :

$$-\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k k_k^2 + i\right) \hat{\psi}(k) = 0.$$

Il coefficiente moltiplicativo  $P(k) = -(\sum \lambda_k k_k^2 + i)$  non si annulla mai per nessun  $k \in \mathbb{R}^n$ . Infatti, la sua parte immaginaria è costantemente  $-i \neq 0$  (inoltre, essendo  $\lambda_k > 0$ , la parte reale è sempre non positiva). Affinché il prodotto sia nullo, deve necessariamente valere:

$$\hat{\psi}(k) = 0 \quad \text{quasi ovunque.}$$

Poiché la trasformata di Fourier è iniettiva su  $L^2$ ,  $\hat{\psi} = 0$  implica  $\psi = 0$  quasi ovunque in  $\mathbb{R}^n$ . Dunque,  $\ker(L^* - iI) = \{0\}$ . Il procedimento è identico per l'equazione  $L\psi = -i\psi$  (il termine immaginario cambia segno ma rimane non nullo).

## Conclusione

Abbiamo dimostrato che  $\ker(L^* \pm iI) = \{0\}$ . Poiché gli indici di difetto sono  $(0, 0)$ , per il Criterio di autoaggiunzione essenziale (Criterio di Von Neumann), l'operatore  $L$  definito su  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  è essenzialmente autoaggiunto.  $\square$

## Traccia dell'Esercizio 4

Sia dato il dominio  $I = [0, 1]$  e si consideri il problema di Dirichlet per  $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -\frac{d^2\psi}{dx^2} + \psi = f \\ \psi|_{\partial I} = 0 \end{cases},$$

dove  $f \in C^\infty(I)$ . Sia  $H^1(I) \doteq \{\psi \in L^2(I) \mid \frac{d\psi}{dx} \in L^2(I)\}$  e sia  $H_0^1(I) \subset H^1(I)$  il sottospazio di Hilbert delle funzioni  $\psi \in L^2(I)$  tali che  $\psi|_{\partial I} = 0$ . Si mostri che esiste ed è unica una soluzione debole  $\psi_0$  del problema di Dirichlet ossia  $\psi_0 \in H_0^1(I)$  e

$$\int_I dx \psi_0 h + \int_I dx \frac{d\psi_0}{dx} \frac{dh}{dx} = \int_I dx f h, \quad \forall h \in H_0^1(I).$$

[Hint: Si ricorda che  $\|\psi\|_{H^1(I)}^2 = \|\psi\|_{L^2(I)}^2 + \|\frac{d\psi}{dx}\|_{L^2(I)}^2$ .]

**Soluzione.** La dimostrazione dell'esistenza e unicità della soluzione debole si basa sull'applicazione del Teorema di Rappresentazione di Riesz nello spazio di Hilbert appropriato. Procediamo identificando la struttura geometrica indotta dall'equazione differenziale.

### 1. Struttura dello Spazio di Hilbert

Dal testo, consideriamo lo spazio  $H_0^1(I)$ , definito come il sottospazio delle funzioni in  $H^1(I)$  che si annullano al bordo  $\partial I$ . L'Hint ci fornisce la norma su  $H^1(I)$ :

$$\|\psi\|_{H^1}^2 = \|\psi\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{d\psi}{dx} \right\|_{L^2}^2 = \int_I |\psi|^2 dx + \int_I \left| \frac{d\psi}{dx} \right|^2 dx.$$

Questa norma è indotta dal seguente **prodotto scalare**:

$$\langle u, v \rangle_{H^1} \doteq \int_I u(x)v(x) dx + \int_I \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx.$$

Poiché  $H^1(I)$  è uno spazio di Hilbert e  $H_0^1(I)$  è un suo sottospazio chiuso (definito da condizioni puntuali al bordo, che sono preservate dal limite in norma  $H^1$  per i teoremi di traccia o per definizione di chiusura), concludiamo che  $(H_0^1(I), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1})$  è esso stesso uno spazio di Hilbert.

## 2. Derivazione della Formulazione Debole

Data l'equazione differenziale classica:

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + \psi = f,$$

moltiplichiamo ambo i membri per una generica funzione test  $h \in H_0^1(I)$  e integriamo sul dominio  $I$ :

$$\int_I \left( -\frac{d^2\psi}{dx^2} + \psi \right) h \, dx = \int_I f h \, dx.$$

Sfruttando la linearità dell'integrale e applicando l'integrazione per parti al termine con la derivata seconda:

$$\int_I -\frac{d^2\psi}{dx^2} h \, dx = \underbrace{\left[ -\frac{d\psi}{dx} h \right]_{\partial I}}_{=0} + \int_I \frac{d\psi}{dx} \frac{dh}{dx} \, dx.$$

Il termine di bordo si annulla rigorosamente perché  $h \in H_0^1(I)$ , e dunque per definizione  $h|_{\partial I} = 0$ . L'equazione integrale risultante è esattamente quella richiesta dalla traccia:

$$\int_I \psi h \, dx + \int_I \frac{d\psi}{dx} \frac{dh}{dx} \, dx = \int_I f h \, dx.$$

## 3. Applicazione del Teorema di Riesz

Rileggiamo l'equazione debole alla luce della definizione di prodotto scalare data al punto 1. L'equazione si può riscrivere come:

$$\langle \psi, h \rangle_{H^1} = \int_I f h \, dx, \quad \forall h \in H_0^1(I).$$

Definiamo il funzionale lineare  $F : H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$  come  $F(h) = \int_I f h \, dx$ .

Per applicare il Teorema di Riesz, dobbiamo dimostrare che  $F$  è un funzionale **continuo** (limitato) rispetto alla norma  $H^1$ .

1. Poiché  $f \in C^\infty(I)$  e il dominio  $I$  è compatto,  $f \in L^2(I)$ , quindi  $\|f\|_{L^2} < \infty$ .
2. Applichiamo la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz in  $L^2$ :

$$|F(h)| = \left| \int_I f h \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2} \|h\|_{L^2}.$$

3. Osserviamo, dalla definizione della norma data nell'Hint, che:

$$\|h\|_{H^1}^2 = \|h\|_{L^2}^2 + \|h'\|_{L^2}^2 \implies \|h\|_{L^2}^2 \leq \|h\|_{H^1}^2 \implies \|h\|_{L^2} \leq \|h\|_{H^1}.$$

4. Combinando le diseguaglianze:

$$|F(h)| \leq \|f\|_{L^2} \|h\|_{H^1}.$$

Essendo  $\|f\|_{L^2}$  una costante,  $F$  è limitato. Per il **Teorema di Rappresentazione di Riesz**, in uno spazio di Hilbert ogni funzionale continuo può essere rappresentato univocamente da un elemento dello spazio tramite il prodotto scalare. Esiste quindi un unico  $\psi_0 \in H_0^1(I)$  tale che:

$$\langle \psi_0, h \rangle_{H^1} = F(h) \quad \forall h \in H_0^1(I).$$

Questa uguaglianza coincide esattamente con la tesi da dimostrare. □

## Traccia dell'Esercizio 5 $\psi(x_0) = 0$

Sia  $I = [0, 1]$ . Si consideri l'equazione differenziale:

$$-\frac{d\psi}{dx} + \psi = f, \quad \text{con } f \in L^2(I).$$

Si definisca la mappa  $K : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$  tale che  $\psi = K(f)$  è soluzione dell'equazione. Si discuta se  $K$  è limitato, compatto e/o positivo.

---

### Soluzione. 1. Condizione per la Linearità

Per stabilire quale condizione al contorno rende la mappa  $K : f \mapsto \psi$  un operatore lineare, analizziamo la struttura della soluzione generale dell'equazione differenziale  $-\psi' + \psi = f$ . La soluzione può essere scritta come somma di una soluzione particolare lineare rispetto a  $f$  (diciamo  $K_0 f$ , ad esempio l'integrale con estremo fisso) e della soluzione generale dell'omogenea:

$$\psi(x; f) = (K_0 f)(x) + Ce^x.$$

La costante  $C$  è determinata dalla condizione al contorno. Affinché  $K$  sia un operatore lineare, deve soddisfare la proprietà di omogeneità  $K(\lambda f) = \lambda K(f)$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Sostituendo:

$$\begin{aligned} K(\lambda f) &= \lambda(K_0 f) + Ce^x \\ \lambda K(f) &= \lambda((K_0 f) + Ce^x) = \lambda(K_0 f) + \lambda Ce^x. \end{aligned}$$

Uguagliando le due espressioni, otteniamo la condizione necessaria:

$$Ce^x = \lambda Ce^x \implies C(1 - \lambda) = 0 \quad \forall \lambda.$$

Questo implica necessariamente  $C = 0$ . Pertanto, la condizione al contorno fissata a priori deve essere tale da annullare identicamente la componente omogenea. Se fissiamo la condizione in un punto  $x_0$ , dobbiamo avere:

$$\psi(x_0) = 0 \implies Ce^{x_0} = 0 \implies C = 0.$$

Concludiamo che solo una condizione al contorno **omogenea** garantisce la linearità dell'operatore  $K$ .

### 2. Costruzione dell'Operatore e Kernel

Risolviamo l'equazione con il metodo della variazione delle costanti o fattore integrante, imponendo  $\psi(x_0) = 0$ . L'equazione  $\psi' - \psi = -f$  moltiplicata per  $e^{-x}$  diventa  $\frac{d}{dx}(e^{-x}\psi) = -e^{-x}f$ . Integrando tra  $x_0$  e  $x$ :

$$e^{-x}\psi(x) - e^{-x_0} \underbrace{\psi(x_0)}_{=0} = - \int_{x_0}^x e^{-y} f(y) dy.$$

Da cui otteniamo la forma esplicita dell'operatore:

$$(Kf)(x) = - \int_{x_0}^x e^{x-y} f(y) dy = \int_0^1 A(x, y) f(y) dy.$$

Il kernel integrale  $A(x, y)$  è definito come:

$$A(x, y) = \begin{cases} -e^{x-y} & \text{se } y \text{ è compreso tra } x_0 \text{ e } x \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

### 3. Limitatezza e Compattezza

Un operatore integrale  $K$  su  $L^2(I)$  è **compatto** (e quindi limitato) se è di classe *Hilbert-Schmidt*, condizione equivalente all'appartenenza del kernel a  $L^2(I \times I)$ . Mostriamo che la definizione spettrale di

operatore Hilbert-Schmidt coincide con la condizione  $L^2$  sul nucleo integrale. Sia  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una base ortonormale di  $L^2(I)$ . La definizione è:

$$\|K\|_{HS}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Ke_n\|^2.$$

L'azione dell'operatore integrale su un elemento della base è data da:

$$(Ke_n)(x) = \int_I A(x, y)e_n(y) dy = \langle \overline{A(x, \cdot)}, e_n \rangle_{L_y^2},$$

dove l'integrale è interpretato come il prodotto scalare rispetto alla variabile  $y$  tra la funzione coniugata del kernel e il vettore di base. Sostituendo nella definizione di norma e scambiando la serie con l'integrale in  $dx$  (giustificato dalla non-negatività dei termini o dal teorema di Beppo Levi):

$$\|K\|_{HS}^2 = \int_I dx \left( \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \overline{A(x, \cdot)}, e_n \rangle|^2 \right).$$

Riconosciamo nella parentesi l'**Identità di Parseval**, la quale afferma che la somma dei moduli quadri dei coefficienti di Fourier egualia la norma quadra della funzione:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle \overline{A(x, \cdot)}, e_n \rangle|^2 = \|\overline{A(x, \cdot)}\|_{L_y^2}^2 = \int_I |A(x, y)|^2 dy.$$

Sostituendo questo risultato nell'integrale esterno, otteniamo l'equivalenza cercata:

$$\|K\|_{HS}^2 = \int_I dx \int_I dy |A(x, y)|^2 = \|A\|_{L^2(I \times I)}^2.$$

Dobbiamo verificare che:

$$\|K\|_{HS}^2 = \int_0^1 \int_0^1 |A(x, y)|^2 dy dx < \infty.$$

Sostituendo l'espressione del kernel:

$$\|K\|_{HS}^2 = \int_0^1 dx \left| \int_{x_0}^x e^{2(x-y)} dy \right|.$$

Calcoliamo l'integrale interno:

$$\int_{x_0}^x e^{2x} e^{-2y} dy = e^{2x} \left[ -\frac{e^{-2y}}{2} \right]_{x_0}^x = \frac{e^{2x}}{2} (e^{-2x_0} - e^{-2x}) = \frac{1}{2} (e^{2(x-x_0)} - 1).$$

Poiché stiamo valutando il modulo (o considerando l'orientamento degli estremi di integrazione), la funzione integranda in  $x$  è limitata e continua sull'intervallo compatto  $[0, 1]$ . Non è necessario calcolare il valore numerico esatto: essendo l'integrale di una funzione continua su un dominio limitato, il risultato è certamente finito.

$$\|K\|_{HS}^2 < \infty \implies K \text{ è compatto (e limitato).}$$

#### 4. Positività

Verifichiamo se  $K$  è un operatore positivo, ovvero se  $\langle f, Kf \rangle \geq 0$  per ogni  $f$ . Scegliamo la funzione test  $f(x) = 1$  e consideriamo il caso standard  $x_0 = 0$  (o un  $x_0$  sufficientemente piccolo). La soluzione è:

$$(Kf)(x) = - \int_0^x e^{x-y} dy = 1 - e^x.$$

Il prodotto scalare risulta:

$$\langle 1, K1 \rangle = \int_0^1 (1 - e^x) dx = [x - e^x]_0^1 = (1 - e) - (-1) = 2 - e.$$

Poiché  $e > 2$ , si ha  $\langle 1, K1 \rangle < 0$ . L'operatore **non è positivo**.

## 5. Esempio di Positività

L'operatore  $K$  può risultare positivo modificando la condizione al contorno. Consideriamo il problema con condizione al bordo destro:

$$\begin{cases} -\psi' + \psi = f \\ \psi(1) = 0 \end{cases}$$

Valutiamo la forma quadratica  $\langle f, Kf \rangle$ . Poiché  $Kf = \psi$  e  $f = -\psi' + \psi$ , abbiamo:

$$\langle f, Kf \rangle = \langle -\psi' + \psi, \psi \rangle = \int_0^1 (-\psi'(x) + \psi(x)) \overline{\psi(x)} dx.$$

Assumendo funzioni reali per semplicità (il risultato si estende al caso complesso):

$$\int_0^1 (-\psi' \psi + \psi^2) dx = - \int_0^1 \psi \psi' dx + \|\psi\|^2.$$

Integriamo per parti il primo termine:

$$- \int_0^1 \psi \psi' dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d}{dx}(\psi^2) dx = -\frac{1}{2} [\psi(x)^2]_0^1 = -\frac{1}{2}(\psi(1)^2 - \psi(0)^2).$$

Imponendo la condizione al contorno scelta  $\psi(1) = 0$ , otteniamo:

$$-\frac{1}{2}(0 - \psi(0)^2) = \frac{1}{2}\psi(0)^2 \geq 0.$$

Ricostruendo l'espressione completa:

$$\langle f, Kf \rangle = \frac{1}{2}\psi(0)^2 + \|\psi\|_{L^2}^2.$$

Essendo somma di termini non negativi, risulta  $\langle f, Kf \rangle \geq 0$  per ogni  $f$ . In questo caso specifico,  $K$  è un **operatore positivo**.

□

## Traccia dell'Esercizio 5 Hard

Sia  $I = [0, 1]$ . Si consideri l'equazione differenziale:

$$-\frac{d\psi}{dx} + \psi = f, \quad \text{con } f \in L^2(I).$$

Si definisca la mappa  $K : L^2(I) \rightarrow L^2(I)$  tale che  $\psi = K(f)$  è soluzione dell'equazione. Si discuta se  $K$  è limitato, compatto e/o positivo.

**Soluzione.** L'operatore  $K$  descritto nel testo del problema non è ben definito, in quanto l'operatore

$$D : H^1(I) \rightarrow L^2(I) \quad \psi \mapsto -\frac{d\psi}{dx} + \psi$$

ha kernel non banale, composto da tutte le funzioni del tipo  $Ae^x$ . Per questo motivo, se l'operatore  $K$  dovesse definire la soluzione dell'equazione,  $K(0) = Ae^x$  ma questo non lo renderebbe lineare se non per  $A = 0$ . Per rendere tutto il più generale possibile, quindi dobbiamo scegliere un qualsiasi **funzionale lineare ovunque definito**  $C : L^2(I) \rightarrow \mathbb{C}$  e, data una  $f \in L^2(I)$  con cui risolvere il problema, definire un insieme e degli operatori derivata con condizione iniziale

$$S_C = \{\psi \in H^1(I) | \psi(0) = C(f)\} \quad D_C : S_C \rightarrow L^2(I)$$

a questo punto possiamo finalmente scrivere la forma degli operatori  $K_C$  dipendenti dalla condizione iniziale e la cui forma analitica è data dall'integrale di Volterra

$$K_C : L^2(I) \rightarrow L^2(I) \quad K_C(f) := e^x \left( C(f) - \int_0^x f(y) e^{-y} dy \right)$$

$K_C$  ora è un buon operatore perché è lineare, ovunque definito e vale che  $K_C(D_C(\psi)) = \psi$  con  $\psi \in S_C$

$$\begin{aligned} K_C(-\psi' + \psi) &= e^x \left( C(f) + \int_0^x \frac{d\psi}{dy} e^{-y} dy - \int_0^x \psi e^{-y} dy \right) \\ &= e^x C(f) + e^x (\psi(y)e^{-y}|_0^x) + e^x \int_0^x \psi e^{-y} dy - e^x \int_0^x \psi e^{-y} dy \\ &= e^x C(f) + \psi(x)e^{-x}e^x - \psi(0)e^x \\ &= e^x (C(f) - \psi(0)) + \psi(x) \\ &= \psi(x) \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che  $\psi \in S_C$ . Perfetto, ora possiamo procedere. L'operatore descritto è somma di due componenti

$$K_C(f) = e^x C(f) - \int_0^x f(y) e^{x-y} dy = e^x C(f) - \int_0^1 f(y) \Theta(x-y) e^{x-y} dy = e^x C(f) - f \star (\Theta(x) e^x)$$

possiamo chiamare

$$K_C(f) = R_C(f) - T(f)$$

## Analisi della convoluzione in $L^2([0, 1])$ come in 2

Definiamo il sistema ortonormale in  $L^2([0, 1])$ :

$$u_n(x) \doteq e^{2\pi i n x}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Il sistema  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  è chiaramente ortonormale rispetto al prodotto scalare standard:  $\langle u_n, u_m \rangle = \delta_{nm}$ .

Per dimostrarne la completezza, mostriamo che il complemento ortogonale del sottospazio generato da  $\{u_n\}$  contiene solo il vettore nullo. Sia  $f \in L^2([0, 1])$  tale che  $\langle f, u_n \rangle = 0$  per ogni  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\langle f, u_n \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{u_n(x)} dx = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx = 0.$$

Gli integrali sopra corrispondono esattamente ai coefficienti di Fourier di  $f$ , denotati con  $\hat{f}_n$ . L'ipotesi  $\langle f, u_n \rangle = 0, \forall n$  implica  $\hat{f}_n = 0, \forall n$ . Per il **Teorema di Unicità** della serie di Fourier (conseguenza della densità dei polinomi trigonometrici e della completezza di  $L^2$ ), una funzione  $L^2$  con tutti i coefficienti di Fourier nulli è nulla quasi ovunque.

$$f = 0 \quad \text{q.o.}$$

Pertanto,  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  è una base ortonormale completa (Base di Hilbert) per  $\mathcal{H}$ .

Per dimostrare che l'operatore  $T$  è **compatto** ( $T \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ ), verifichiamo la condizione più forte che  $T$  sia un operatore di Hilbert-Schmidt. Un operatore  $T$  è di Hilbert-Schmidt se, data una base ortonormale  $\{e_k\}$ , la quantità  $\|T\|_{HS}^2 \doteq \sum_k \|Te_k\|^2$  è finita.

Scegliamo come base proprio gli autovettori  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Poiché  $Tu_n = \lambda_n u_n$ , abbiamo:

$$\|Tu_n\|^2 = \|\lambda_n u_n\|^2 = |\lambda_n|^2 \|u_n\|^2 = |\lambda_n|^2.$$

La norma Hilbert-Schmidt è dunque data dalla serie degli autovalori al quadrato:

$$\|T\|_{HS}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\lambda_n|^2.$$

Analizziamo i termini  $\lambda_n$ . Dalla definizione dell'operatore di convoluzione su  $[0, 1]$ , gli autovalori sono dati dai coefficienti di Fourier del nucleo  $g$ :

$$\lambda_n = \int_0^1 g(z) e^{-2\pi i n z} dz = \hat{g}_n.$$

l'autovalore coincide esattamente con il coefficiente di Fourier  $\hat{g}_n$ .

Sostituendo nella somma:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\lambda_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2.$$

Poiché per ipotesi  $g \in L^2([0, 1])$ , l'**Identità di Parseval** garantisce che la somma dei quadrati dei suoi coefficienti di Fourier converga al quadrato della norma della funzione:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2 = \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Di conseguenza:

$$\|T\|_{HS}^2 = \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

L'operatore  $T$  è dunque di Hilbert-Schmidt. Poiché la classe degli operatori di Hilbert-Schmidt è contenuta in quella degli operatori compatti ( $\mathcal{B}_{HS} \subset \mathcal{B}_\infty$ ), concludiamo che  $T$  è un operatore compatto.

## Analisi dell'operatore risolvente $K$

### 1. Limitatezza

L'operatore  $K_C$  è limitato se e solo se il funzionale  $C$  è limitato.

$\Rightarrow$  Se  $C$  è limitato, allora per la diseguaglianza triangolare:

$$\|K_C f\|_{L^2} \leq \|Tf\|_{L^2} + |C(f)|\|e^x\|_{L^2}.$$

Essendo  $T$  limitato e  $C$  limitato per ipotesi,  $K$  è limitato.

$\Leftarrow$  Se  $K$  è limitato, allora  $R_C = K - T$  è differenza di operatori limitati, dunque è limitato. Poiché  $R_C(f) = C(f)e^x$ , la limitatezza di  $R$  implica necessariamente la limitatezza del funzionale  $C$ .

### 2. Compattezza

Assumendo  $C$  limitato (condizione necessaria per la limitatezza di  $K$ ), l'operatore  $K$  risulta sempre compatto.

- L'operatore  $T$  è di Hilbert-Schmidt, pertanto,  $T$  è compatto.
- L'operatore  $R_C(f) = C(f)e^x$  ha immagine unidimensionale, generata dal vettore  $e^x$ . Essendo un operatore di rango finito limitato,  $R_C$  è compatto. (Da esercitazione di prof. Costeri)

Poiché lo spazio degli operatori compatti è un sottospazio vettoriale,  $K_C = T + R_C$  è compatto. Per il Teorema di Rappresentazione di Riesz, possiamo esplicitare la struttura di  $R_C$ : esiste un'unica  $g \in L^2(I)$  tale che  $C(f) = \langle g, f \rangle$ , da cui  $R_C(f) = R_g(f) = e^x \langle g, f \rangle$ .

### 3. Positività

L'operatore  $K_C$  non è, in generale, positivo. Consideriamo il caso  $\psi(0) = 0$  (che implica  $C \equiv 0$ ). Valutiamo la parte reale della forma quadratica associata nel campo complesso.

Consideriamo il prodotto scalare standard in  $L^2$ :

$$\langle K_0 f, f \rangle = \int_0^1 (-\psi'(x) + \psi(x)) \overline{\psi(x)} dx.$$

Sfruttiamo l'identità per la derivata del modulo quadro:  $\frac{d}{dx}|\psi|^2 = \psi'\bar{\psi} + \psi\bar{\psi}' = 2\operatorname{Re}(\psi'\bar{\psi})$ . Quindi, integrando per parti o usando la suddetta identità:

$$\operatorname{Re} \int_0^1 -\psi'(x) \overline{\psi(x)} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d}{dx} |\psi(x)|^2 dx = -\frac{1}{2} (|\psi(1)|^2 - |\psi(0)|^2).$$

Sostituendo nell'espressione della forma quadratica otteniamo:

$$\operatorname{Re} \langle K_0 f, f \rangle = \|\psi\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} |\psi(1)|^2 + \frac{1}{2} |\psi(0)|^2. \quad (1)$$

Essendo nel caso  $\psi(0) = 0$ , l'espressione si riduce a:

$$\operatorname{Re} \langle K_0 f, f \rangle = \|\psi\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} |\psi(1)|^2.$$

Per mostrare che l'operatore non è positivo, scegliamo la funzione test (reale, valida anche in ambito complesso)  $\psi(x) = x$ , che implica  $f(x) = x - 1$ . Si ottiene:

$$\operatorname{Re}\langle K_0 f, f \rangle = \int_0^1 |x|^2 dx - \frac{1}{2}|1|^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} < 0.$$

Esistono quindi vettori per cui la forma quadratica assume valori negativi, violando la condizione di positività.

Per costruire un operatore  $K_C$  positivo, osserviamo l'espressione generale ricavata sopra:

$$\operatorname{Re}\langle K_C f, f \rangle = \|\psi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|\psi(0)|^2 - \frac{1}{2}|\psi(1)|^2. \quad (2)$$

Per garantire la positività è sufficiente eliminare il termine negativo imponendo la condizione al bordo  $\psi(1) = 0$ . Restringiamoci dunque alla classe dei funzionali lineari che impongono tale condizione, ad esempio:

$$C(f) = \int_0^1 e^{-y} f(y) dy.$$

In questo caso, la forma quadratica diventa  $\operatorname{Re}\langle K_C f, f \rangle = \|\psi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|\psi(0)|^2 \geq 0$  per ogni  $f \neq 0$ .

L'analisi completa per condizioni necessarie e sufficienti più generali risulta complessa e non banale al di fuori di queste costruzioni dirette.  $\square$

## Traccia dell'Esercizio 6

Su  $L^2(\mathbb{R})$  si consideri l'operatore differenziale:

$$T = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + i\frac{d}{dx}.$$

Si discuta se  $T$  ammette estensioni autoaggiunte calcolando eventualmente gli indici di difetto.

**Soluzione.** Per analizzare le proprietà di autoaggiunzione di  $T$ , cerchiamo di ricondurlo a una forma canonica nota tramite una trasformazione unitaria. L'operatore ricorda molto l'Hamiltoniana dell'Oscillatore Armonico unidimensionale ( $H_{HO} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$ ), con l'aggiunta di un termine del primo ordine.

### 1. Completamento del Quadrato

Riscriviamo l'operatore utilizzando l'operatore momento  $p = -i\frac{d}{dx}$  (in unità con  $\hbar = 1$ ). Notiamo che  $i\frac{d}{dx} = -p$ .

$$T = p^2 + x^2 - p.$$

L'idea è di "completare il quadrato" per la parte dipendente dal momento, trattando  $p$  come una variabile algebrica (lecito poiché stiamo cercando una trasformazione unitaria che agisce come una traslazione nello spazio dei momenti). Osserviamo che:

$$\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 = p^2 - p + \frac{1}{4}.$$

Pertanto possiamo scrivere:

$$T = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 - \frac{1}{4}.$$

### 2. Equivalenza Unitaria

Vogliamo eliminare lo shift  $-1/2$  nell'operatore momento. Sappiamo dalla meccanica quantistica che l'operatore di posizione  $x$  è il generatore delle traslazioni nello spazio dei momenti. Consideriamo l'operatore unitario  $U : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  definito dalla moltiplicazione per una fase (trasformazione di gauge):

$$(U\psi)(x) = e^{i\frac{1}{2}x}\psi(x).$$

L'aggiunto è  $(U^\dagger \psi)(x) = e^{-i\frac{1}{2}x}\psi(x)$ . Calcoliamo come trasforma l'operatore momento  $p$ :

$$\begin{aligned}(U^\dagger p U \psi)(x) &= e^{-ix/2} \left( -i \frac{d}{dx} \right) \left( e^{ix/2} \psi(x) \right) \\&= e^{-ix/2} \left[ -i \left( \frac{i}{2} e^{ix/2} \psi(x) + e^{ix/2} \psi'(x) \right) \right] \\&= e^{-ix/2} e^{ix/2} \left( \frac{1}{2} \psi(x) - i \psi'(x) \right) \\&= \left( \frac{1}{2} + p \right) \psi(x).\end{aligned}$$

Quindi  $U^\dagger p U = p + \frac{1}{2}$ , oppure equivalentemente  $U(p + \frac{1}{2})U^\dagger = p$ . Applichiamo questa trasformazione all'operatore  $T$ :

$$\begin{aligned}\tilde{T} &\doteq U T U^\dagger = U \left[ \left( p - \frac{1}{2} \right)^2 + x^2 - \frac{1}{4} \right] U^\dagger \\&= \left[ U \left( p - \frac{1}{2} \right) U^\dagger \right]^2 + U x^2 U^\dagger - \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Poiché  $U$  è funzione solo di  $x$ , commuta con  $x^2$ . Inoltre, dall'inverso della relazione trovata sopra ( $p \rightarrow p - 1/2$  sotto l'azione di  $U^\dagger \cdot U$ ), il termine al quadrato diventa semplicemente  $p^2$ . Formalmente:

$$U \left( -i \frac{d}{dx} - \frac{1}{2} \right) U^\dagger = -i \frac{d}{dx}.$$

Dunque l'operatore trasformato è:

$$\tilde{T} = p^2 + x^2 - \frac{1}{4} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - \frac{1}{4}.$$

### 3. Analisi dell'Operatore Trasformato

L'operatore  $\tilde{T}$  è (a meno della costante additiva  $-1/4$ , che non influenza le proprietà di dominio o autoaggiunzione per la nota qui sotto) l'Hamiltoniana dell'Oscillatore Armonico Quantistico:

$$H_{HO} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2.$$

È un risultato classico e fondamentale (dimostrabile ad esempio notando che ha uno spettro discreto completo di autofunzioni in  $L^2(\mathbb{R})$ , le funzioni di Hermite) che l'Oscillatore Armonico definito su  $C_c^\infty(\mathbb{R})$  (o sullo spazio di Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ) è essenzialmente autoaggiunto. Ciò significa che la sua chiusura  $\overline{H}_{HO}$  è autoaggiunta e unica.

Gli indici di difetto di un operatore essenzialmente autoaggiunto sono  $(0, 0)$ .

**Nota: Autoaggiunzione di  $S = T - I$ .** Verifichiamo esplicitamente che  $S = T - I$  è autoaggiunto usando la definizione. Per ogni  $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ :

$$\langle \phi, S\psi \rangle = \langle \phi, (T - I)\psi \rangle = \langle \phi, T\psi \rangle - \langle \phi, \psi \rangle.$$

Poiché  $T = T^*$  per ipotesi,  $\langle \phi, T\psi \rangle = \langle T\phi, \psi \rangle$ . Inoltre, banalmente  $\langle \phi, \psi \rangle = \langle I\phi, \psi \rangle$ . Quindi:

$$\langle \phi, S\psi \rangle = \langle T\phi, \psi \rangle - \langle I\phi, \psi \rangle = \langle (T - I)\phi, \psi \rangle = \langle S\phi, \psi \rangle.$$

Ciò prova che  $S^* = S$ .

### Conclusione

Poiché  $T$  è unitariamente equivalente a un operatore essenzialmente autoaggiunto ( $\tilde{T}$ ), anche  $T$  è essenzialmente autoaggiunto sul dominio iniziale delle funzioni test. Il motivo è l'esercitazione 2 della prof.Costeri nella quale dice che

$$\overline{T'} = U \overline{T} U^*$$

il motivo è perchè  $U$  è unitario quindi limitato.

- $T$  ammette un'unica estensione autoaggiunta (la sua chiusura  $\bar{T}$ ).
- Gli indici di difetto sono  $n_+ = n_- = 0$ .

**Osservazione** (Nota sul Metodo della Coniugazione). Si poteva anche osservare che, pur non essendo  $T$  reale ( $T \neq \bar{T}$ ), esso commuta con l'operatore anti-unitario  $\mathcal{J} = \mathcal{PC}$ , dove  $\mathcal{P}$  è la parità ( $x \rightarrow -x$ ) e  $\mathcal{C}$  la coniugazione complessa. Infatti:

$$\mathcal{PC}(-\partial_x^2 + x^2 + i\partial_x)(\mathcal{PC})^{-1} = -\partial_x^2 + (-x)^2 - i(-\partial_x) = T.$$

La commutazione con una coniugazione antiunitaria garantisce  $n_+ = n_-$ , assicurando l'esistenza di estensioni autoaggiunte, ma non la loro unicità (essenziale autoaggiunzione). Il metodo della trasformazione unitaria è quindi più forte in questo contesto.

□

## Traccia dell'Esercizio 7

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert separabile e si consideri l'equazione:

$$T\psi = \lambda\psi + f,$$

con  $T = T^* \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$  (operatore compatto autoaggiunto),  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e  $f \in \mathcal{H}$ . Si provi che, se  $\lambda$  è autovalore di  $T$ , allora l'equazione ha infinite soluzioni (sottointendendo: qualora sia risolubile).

---

**Soluzione.** Riscriviamo l'equazione nella forma operatoriale omogenea:

$$(T - \lambda I)\psi = f.$$

Definiamo l'operatore  $S_\lambda \doteq T - \lambda I$ .

### 1. Proprietà Spettrali Preliminari

Poiché  $T$  è autoaggiunto, i suoi autovalori sono reali. Essendo  $\lambda$  un autovalore per ipotesi, segue che  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Inoltre, essendo  $T$  e  $I$  operatori limitati e autoaggiunti, anche  $S_\lambda$  è limitato e autoaggiunto:

$$S_\lambda^* = (T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda}I^* = T - \lambda I = S_\lambda.$$

Dato che  $T$  è compatto e  $\lambda \neq 0$ , l'operatore  $S_\lambda$  è un **operatore di Fredholm** esattamente come nell'esercizio 1. Valgono le seguenti proprietà, dimostrate nell'esercizio 1:

1. Il nucleo  $\text{Ker}(S_\lambda)$  ha dimensione finita.
2. Il rango  $\text{Ran}(S_\lambda)$  è chiuso in  $\mathcal{H}$ .

### 2. Analisi dell'Esistenza e Molteplicità

L'ipotesi che  $\lambda$  sia un autovalore di  $T$  implica che il nucleo di  $S_\lambda$  non è banale:

$$\text{Ker}(S_\lambda) \neq \{0\}.$$

Sia  $d = \dim(\text{Ker}(S_\lambda)) \geq 1$ .

**Condizione di Risolubilità.** Affinché l'equazione  $S_\lambda\psi = f$  ammetta soluzioni, il termine noto  $f$  deve appartenere all'immagine dell'operatore. Poiché il rango è chiuso e l'operatore è autoaggiunto, vale la decomposizione ortogonale:

$$\text{Ran}(S_\lambda) = (\text{Ker}(S_\lambda^*))^\perp = (\text{Ker}(S_\lambda))^\perp.$$

Quindi, l'equazione ammette soluzioni se e solo se  $f \perp \text{Ker}(S_\lambda)$ . Nota: Se  $f$  non soddisfa questa condizione, l'insieme delle soluzioni è vuoto. Assumeremo nel seguito che  $f$  sia compatibile o che l'esercizio richieda di discutere la cardinalità dell'insieme delle soluzioni nel caso in cui questo non sia vuoto.

**Struttura dello Spazio delle Soluzioni.** Supponiamo che esista almeno una soluzione particolare  $\psi_p$  tale che  $S_\lambda \psi_p = f$ . La soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea è data dalla somma della soluzione particolare e della soluzione generale dell'equazione omogenea associata ( $S_\lambda \phi = 0$ ). L'insieme delle soluzioni  $\Sigma$  è quindi lo spazio affine:

$$\Sigma = \psi_p + \text{Ker}(S_\lambda) = \{\psi_p + \phi \mid \phi \in \text{Ker}(S_\lambda)\}.$$

Poiché  $\lambda$  è un autovalore, esiste almeno un autovettore  $u \neq 0$  tale che  $u \in \text{Ker}(S_\lambda)$ . Consideriamo la famiglia di vettori:

$$\psi_\alpha = \psi_p + \alpha u, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Verifichiamo che sono soluzioni:

$$S_\lambda(\psi_\alpha) = S_\lambda \psi_p + \alpha S_\lambda u = f + \alpha \cdot 0 = f.$$

Essendo  $\alpha$  un parametro continuo in  $\mathbb{C}$ , la famiglia  $\{\psi_\alpha\}$  contiene infiniti elementi distinti. Pertanto, se l'equazione è risolubile, essa ammette infinite soluzioni. □

## Traccia dell'Esercizio 7 (Metodo Spettrale)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert separabile e si consideri l'equazione:

$$T\psi = \lambda\psi + f,$$

con  $T = T^* \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ ,  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e  $f \in \mathcal{H}$ . Si provi che, se  $\lambda$  è autovalore di  $T$ , allora l'equazione ha infinite soluzioni (assumendo la compatibilità del termine noto).

---

**Soluzione.** Utilizziamo il **Teorema Spettrale di Hilbert-Schmidt**. Poiché  $T$  è un operatore compatto e autoaggiunto su uno spazio di Hilbert separabile, esiste una base ortonormale completa  $\{e_n\}_{n=1}^\infty$  costituita da autovettori di  $T$ , con autovalori reali  $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$  tali che  $\mu_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

### 1. Diagonalizzazione del Problema

Scomponiamo l'incognita  $\psi$  e il termine noto  $f$  lungo la base spettrale  $\{e_n\}$ :

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n, \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e_n,$$

dove  $c_n = \langle e_n, \psi \rangle$  sono le incognite e  $f_n = \langle e_n, f \rangle$  sono dati.

L'equazione  $T\psi - \lambda\psi = f$  diventa:

$$T \left( \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \right) - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e_n.$$

Sfruttando la linearità e la proprietà degli autovettori ( $Te_n = \mu_n e_n$ ):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n - \lambda) c_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e_n.$$

Per l'unicità dello sviluppo in serie di Fourier, uguagliamo i coefficienti componente per componente:

$$(\mu_n - \lambda) c_n = f_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

### 2. Analisi delle Soluzioni

Dobbiamo risolvere per i coefficienti  $c_n$ . Distinguiamo gli indici in base al valore dell'autovalore  $\mu_n$ :

**Caso A: Indici  $n$  tali che  $\mu_n \neq \lambda$ .** In questo caso il fattore  $(\mu_n - \lambda)$  è non nullo e possiamo dividere:

$$c_n = \frac{f_n}{\mu_n - \lambda}.$$

Questi coefficienti sono determinati univocamente dal termine noto  $f$ .

**Caso B: Indici  $n$  tali che  $\mu_n = \lambda$ .** Poiché  $\lambda$  è un autovalore per ipotesi, l'insieme di indici  $J_\lambda = \{n \in \mathbb{N} \mid \mu_n = \lambda\}$  non è vuoto. Per tali indici l'equazione algebrica diventa:

$$(\lambda - \lambda)c_n = f_n \implies 0 \cdot c_n = f_n.$$

Da qui deduciamo due conseguenze fondamentali:

1. **Condizione di esistenza:** Affinché l'uguaglianza sia possibile, deve essere necessariamente  $f_n = 0$  per ogni  $n \in J_\lambda$ . Geometricamente, questo significa che  $f$  deve essere ortogonale all'autospazio relativo a  $\lambda$  (ossia  $f \in \text{Ker}(T - \lambda I)^\perp$ ).
2. **Molteplicità delle soluzioni:** Se la condizione di esistenza è soddisfatta ( $f_n = 0$ ), l'equazione  $0 \cdot c_n = 0$  è verificata per qualsiasi valore complesso di  $c_n$ .

## Conclusione

Essendo  $\lambda$  un autovalore, esiste almeno un indice  $k \in J_\lambda$ . Il coefficiente  $c_k$  associato è totalmente arbitrario. La soluzione generale si scrive come:

$$\psi = \underbrace{\sum_{n \notin J_\lambda} \frac{f_n}{\mu_n - \lambda} e_n}_{\psi_{\text{particolare}}} + \underbrace{\sum_{n \in J_\lambda} \alpha_n e_n}_{\psi_{\text{omogenea}}}, \quad \text{con } \alpha_n \in \mathbb{C} \text{ arbitrari.}$$

La presenza di almeno un parametro libero  $\alpha_k$  implica che, se il problema ammette soluzione, allora ne ammette infinite.

□

## Traccia dell'Esercizio 8

Si consideri una particella di massa  $m > 0$  in  $\mathbb{R}^3$ , soggetta a un potenziale centrale  $V(r)$ . Sia dato l'operatore:

$$T = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}},$$

dove  $\hat{\mathbf{r}}$  e  $\hat{\mathbf{p}}$  sono gli operatori posizione e impulso. Si mostri che, per ogni  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$  con  $\|\psi\| = 1$  (e nel dominio dell'operatore), vale l'equazione di evoluzione:

$$\frac{d}{dt} \langle T \rangle = \frac{2}{m} \langle \hat{\mathbf{p}}^2 \rangle - 2 \langle \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V \rangle.$$

**Soluzione.** La risoluzione dell'esercizio si basa sull'applicazione del **Teorema di Ehrenfest**, che lega la derivata temporale del valore di aspettazione di un osservabile al commutatore dell'osservabile con l'Hamiltoniana.

## Ipotesi minimali per il Teorema di Ehrenfest

Sia  $H$  l'operatore Hamiltoniano autoaggiunto su un dominio denso  $D(H) \subset \mathcal{H}$  e sia  $A$  un'osservabile autoaggiunta (con  $\partial_t A = 0$ ) definita su  $D(A)$ . L'evoluzione temporale è data dal gruppo unitario fortemente continuo  $U(t) = e^{-itH/\hbar}$ .

## 1. Ruolo del Teorema di Stone e Domini

Per poter derivare rispetto al tempo il valore di aspettazione  $\langle A \rangle_{\psi_t}$ , dobbiamo garantire che lo stato  $\psi_t$  sia derivabile. Il **Teorema di Stone** stabilisce una corrispondenza biunivoca tra generatori autoaggiuntivi e gruppi unitari, affermando che la relazione:

$$\frac{d}{dt} U(t) \psi = -\frac{i}{\hbar} H U(t) \psi$$

è valida (nella topologia forte) **se e solo se**  $\psi \in D(H)$ . Pertanto, l'ipotesi  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  **non è sufficiente**. Se  $\psi \in L^2 \setminus D(H)$ , la funzione  $t \mapsto \psi_t$  è continua ma non derivabile, rendendo privo di senso il membro sinistro dell'equazione di Ehrenfest.

**Ipotesi minimali:** Affinché la relazione di Ehrenfest valga come uguaglianza tra forme quadratiche all'istante  $t$ , richiediamo:

1.  $\psi_t \in D(H)$  (per l'esistenza della derivata temporale);
2.  $\psi_t \in D(A)$  (per l'esistenza del valore di aspettazione).

## 2. Derivazione come Forma Quadratica

Sotto le ipotesi sopra citate, non è necessario che  $\psi_t \in D(HA)$  o  $D(AH)$  (cioè che il commutatore esista come operatore). Interpretiamo il commutatore come una forma quadratica derivando il prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \psi_t, A\psi_t \rangle &= \langle \dot{\psi}_t, A\psi_t \rangle + \langle \psi_t, A\dot{\psi}_t \rangle \\ &= \left\langle -\frac{i}{\hbar} H\psi_t, A\psi_t \right\rangle + \left\langle \psi_t, A \left( -\frac{i}{\hbar} H\psi_t \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar} (\langle A\psi_t, H\psi_t \rangle - \langle H\psi_t, A\psi_t \rangle). \end{aligned}$$

Definendo la media del commutatore in senso debole:

$$\langle [H, A] \rangle_{\psi}^{weak} := \langle H\psi, A\psi \rangle - \langle A\psi, H\psi \rangle,$$

otteniamo la relazione  $\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle^{weak}$ .

## Calcolo del Commutatore

L'Hamiltoniana per una particella in un potenziale  $V(r)$  è data da:

$$H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}).$$

Dobbiamo calcolare  $[T, H]$ . Per linearità:

$$[T, H] = \left[ T, \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \right] + [T, V(\hat{\mathbf{r}})].$$

### 1. Commutatore con l'Energia Cinetica

Calcoliamo  $\left[ T, \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \right] = \frac{1}{2m} [\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2]$ . Poiché l'operatore impulso commuta con se stesso ( $[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = 0$ ), il termine  $\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$  si semplifica notevolmente usando la regola  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ :

$$[\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = \hat{\mathbf{p}} \cdot [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] + \underbrace{[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2] \cdot \hat{\mathbf{r}}}_{0} = \hat{\mathbf{p}} \cdot [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2].$$

Analogamente per il primo termine:

$$[\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{r}} \cdot \underbrace{[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2]}_0 = [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] \cdot \hat{\mathbf{p}}.$$

Utilizziamo l'identità fondamentale  $[x_j, \hat{\mathbf{p}}^2] = 2i\hbar p_j$ , che in notazione vettoriale si scrive  $[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = 2i\hbar \hat{\mathbf{p}}$ . Sostituendo:

- Primo termine:  $[\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = (2i\hbar\hat{\mathbf{p}}) \cdot \hat{\mathbf{p}} = 2i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2$ .
- Secondo termine:  $[\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = \hat{\mathbf{p}} \cdot (2i\hbar\hat{\mathbf{p}}) = 2i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2$ .

Sommiamo i contributi:

$$\left[ T, \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} \right] = \frac{1}{2m} (2i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2 + 2i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2) = \frac{4i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} = \frac{2i\hbar}{m}\hat{\mathbf{p}}^2.$$

## 2. Commutatore con l'Energia Potenziale

Calcoliamo  $[T, V(\hat{\mathbf{r}})]$ . Poiché  $V(\hat{\mathbf{r}})$  è funzione solo delle coordinate, commuta con  $\hat{\mathbf{r}}$ . Quindi:

$$[\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, V] = \hat{\mathbf{r}} \cdot [\hat{\mathbf{p}}, V] \quad \text{e} \quad [\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}, V] = [\hat{\mathbf{p}}, V] \cdot \hat{\mathbf{r}}.$$

Utilizziamo la relazione fondamentale  $[\hat{\mathbf{p}}, V] = -i\hbar\nabla V$ .

- Primo termine:  $\hat{\mathbf{r}} \cdot [\hat{\mathbf{p}}, V] = \hat{\mathbf{r}} \cdot (-i\hbar\nabla V) = -i\hbar(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V)$ .
- Secondo termine:  $[\hat{\mathbf{p}}, V] \cdot \hat{\mathbf{r}} = (-i\hbar\nabla V) \cdot \hat{\mathbf{r}} = -i\hbar(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V)$  (dato che  $V$  è scalare).

Sommiamo i contributi:

$$[T, V] = -2i\hbar(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V).$$

## Conclusione

Unendo i risultati parziali, il commutatore totale è:

$$[T, H] = \frac{2i\hbar}{m}\hat{\mathbf{p}}^2 - 2i\hbar(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V).$$

Inserendo questo risultato nell'equazione di Ehrenfest derivata all'inizio:

$$\frac{d}{dt} \langle T \rangle = \frac{1}{i\hbar} \left\langle \frac{2i\hbar}{m}\hat{\mathbf{p}}^2 - 2i\hbar(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V) \right\rangle.$$

Semplificando il fattore  $i\hbar$ , otteniamo la tesi:

$$\frac{d}{dt} \langle T \rangle = \frac{2}{m} \langle \hat{\mathbf{p}}^2 \rangle - 2 \langle \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V \rangle.$$

□

## Traccia dell'Esercizio 9 Versione Hard

Siano  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$  e  $V : \mathcal{D}(V) \rightarrow \mathcal{H}$  due operatori su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  tali che:

- $T$  è autoaggiunto ( $T = T^*$ );
- $V$  è simmetrico;
- $V$  è  $T$ -limitato con limite relativo  $a < 1$ . Ovvero,  $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(V)$  ed esistono costanti  $a \in [0, 1)$  e  $b \geq 0$  tali che:

$$\|V\psi\| \leq a\|T\psi\| + b\|\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(T).$$

Si mostri che l'operatore somma  $S \doteq T + V$ , definito su  $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T)$ , è autoaggiunto.

**Soluzione.** La dimostrazione si basa sul criterio di suriettività dei ranghi per operatori simmetrici. L'obiettivo è dimostrare che esiste un valore  $\nu > 0$  sufficientemente grande tale che:

$$\text{Ran}(T + V \pm i\nu I) = \mathcal{H}.$$

Se ciò è vero, poiché  $T + V$  è simmetrico, esso è necessariamente autoaggiunto.

## 1. Stime sul Risolvente dell'Operatore Non Perturbato

Consideriamo l'operatore non perturbato  $T$ . Poiché  $T$  è autoaggiunto, per ogni  $\mu > 0$  e per ogni  $\phi \in \mathcal{D}(T)$  vale l'identità pitagorica:

$$\|(T \pm i\mu I)\phi\|^2 = \langle (T \pm i\mu I)\phi, (T \pm i\mu I)\phi \rangle = \|T\phi\|^2 + \mu^2\|\phi\|^2.$$

(I termini misti si cancellano per simmetria di  $T$ ). Da questa uguaglianza seguono immediatamente due diseguaglianze fondamentali. Ponendo  $\psi = (T + i\mu I)\phi$  (e quindi  $\phi = (T + i\mu I)^{-1}\psi$ , dato che quell'operatore è invertibile essendo  $T$  autoaggiunto), abbiamo:

1.  $\mu^2\|\phi\|^2 \leq \|\psi\|^2 \implies \|(T + i\mu I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu}$ .
2.  $\|T\phi\|^2 \leq \|\psi\|^2 \implies \|T(T + i\mu I)^{-1}\| \leq 1$ .

## 2. Stima dell'Operatore Perturbativo

Vogliamo stimare "quanto disturba"  $V$  rispetto al risolvente di  $T$ . Consideriamo il vettore

$$\phi = (T + i\mu I)^{-1}\psi$$

per un generico  $\psi \in \mathcal{H}$ . Applichiamo la condizione di limitatezza relativa di  $V$  (ipotesi c):

$$\|V\phi\| \leq a\|T\phi\| + b\|\phi\|.$$

Sostituendo  $\phi$  con l'espressione in termini di  $\psi$  e utilizzando le stime del punto 1:

$$\begin{aligned} \|V(T + i\mu I)^{-1}\psi\| &\leq a\|T(T + i\mu I)^{-1}\psi\| + b\|(T + i\mu I)^{-1}\psi\| \\ &\leq a \cdot 1 \cdot \|\psi\| + b \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \|\psi\| \\ &= \left(a + \frac{b}{\mu}\right) \|\psi\|. \end{aligned}$$

## 3. Costruzione dell'Inversa tramite Serie di Neumann

Definiamo l'operatore  $U_\mu \doteq V(T + i\mu I)^{-1}$ . Abbiamo appena dimostrato che la sua norma operatoriale è limitata da:

$$\|U_\mu\| \leq a + \frac{b}{\mu}.$$

Poiché per ipotesi  $a < 1$ , possiamo scegliere un valore  $\mu = \nu$  sufficientemente grande tale che:

$$a + \frac{b}{\nu} < 1 \implies \|U_\nu\| < 1.$$

Intanto otteniamo che, avendo la norma limitata è un operatore limitato definito su tutto  $\mathcal{H}$ . Se la norma di un operatore  $U_\nu$  è strettamente minore di 1, allora  $-1$  non appartiene al suo spettro ( $\sigma(U_\nu)$ ), e l'operatore  $(I + U_\nu)$  è invertibile con inverso limitato). In particolare, il rango di  $(I + U_\nu)$  è tutto lo spazio  $\mathcal{H}$ :

$$\text{Ran}(I + U_\nu) = \mathcal{H}.$$

## 4. Fattorizzazione e Conclusione

Consideriamo ora l'operatore perturbato  $(T + V + i\nu I)$ . Possiamo fattorizzarlo come segue per ogni  $\phi \in \mathcal{D}(T)$ :

$$\begin{aligned} (T + V + i\nu I)\phi &= (T + i\nu I)\phi + V\phi \\ &= [I + V(T + i\nu I)^{-1}] (T + i\nu I)\phi \\ &= (I + U_\nu)(T + i\nu I)\phi. \end{aligned}$$

Analizziamo i ranghi di questa composizione:

- L'operatore  $(T + i\nu I)$  mappa suriettivamente  $\mathcal{D}(T)$  su  $\mathcal{H}$  (poiché  $T$  è autoaggiunto).

- L'operatore  $(I + U_\nu)$  mappa suriettivamente  $\mathcal{H}$  su  $\mathcal{H}$  (poiché  $\|U_\nu\| < 1$ ).

La composizione di due mappe suriettive è suriettiva. Dunque:

$$\text{Ran}(T + V + i\nu I) = \mathcal{H}.$$

Un ragionamento perfettamente analogo vale per il segno opposto  $-i\nu$ , dimostrando che

$$\text{Ran}(T + V - i\nu I) = \mathcal{H}$$

. Avendo dimostrato che gli operatori di difetto sono suriettivi (o equivalentemente che gli indici di difetto sono  $(0, 0)$ ), concludiamo che  $T + V$  è autoaggiunto sul dominio  $\mathcal{D}(T)$ .

□

## Traccia dell'Esercizio 9 Versione Soft - Confermata

Siano  $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$  e  $V : \mathcal{D}(V) \rightarrow \mathcal{H}$  due operatori su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  tali che:

- $T$  è autoaggiunto ( $T = T^*$ );
- $V$  è simmetrico;
- $V$  è  $T$ -limitato con limite relativo  $a < 1$ . Ovvero,  $T \subset V$  ed esistono costanti  $a \in [0, 1)$  e  $b \geq 0$  tali che:

$$\|V\psi\| \leq a\|T\psi\| + b\|\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(T).$$

Si mostri che l'operatore somma  $S \doteq T + V$ , definito su  $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T)$ , è autoaggiunto.

---

**Soluzione.**  $S = T + V$  sul dominio di  $T$  è  $2T$  che è autoaggiunto.

## Traccia dell'Esercizio 10 Metodo I (non corretto)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert con norma  $\|\cdot\|$ . Sia  $\|\cdot\|'$  una seconda norma su  $\mathcal{H}$  tale che  $\exists C > 0$ :

$$\|\psi\| \leq C\|\psi\|', \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Sia  $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  un operatore simmetrico tale che  $\exists \kappa > 0$ :

$$\|T\psi\|' \leq \kappa\|\psi\|', \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Mostrare che  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

*[Hint: Un operatore lineare chiuso tra spazi di Banach e con dominio denso (inteso come tutto lo spazio) è limitato]*

---

**Soluzione.** Per dimostrare che  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  (ovvero che  $T$  è limitato rispetto alla norma standard  $\|\cdot\|$ ), utilizzeremo il suggerimento fornito, che è un richiamo al Teorema del Grafico Chiuso. La strategia si divide in due passi logici:

1. Identificazione del dominio e dimostrazione che  $T$  è un operatore chiuso su  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ .
2. Applicazione del Teorema del Grafico Chiuso.

## 1. Analisi del Dominio e Chiusura

La seconda disuguaglianza fornita nel testo afferma che:

$$\|T\psi\|' \leq \kappa \|\psi\|', \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

L'uso del quantificatore  $\forall \psi \in \mathcal{H}$  implica necessariamente che il dominio di  $T$  coincide con l'intero spazio di Hilbert:

$$D(T) = \mathcal{H}.$$

Inoltre, per ipotesi,  $T$  è un operatore **simmetrico**. Un operatore simmetrico  $T$  definito su tutto lo spazio di Hilbert è sempre un operatore **chiuso**. Dimostriamolo formalmente per completezza (senza dare per scontato il teorema di Hellinger-Toeplitz).

Sia  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$  una successione tale che:

$$\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \psi \quad \text{e} \quad T\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \phi.$$

Dobbiamo mostrare che  $\phi = T\psi$ . Poiché  $T$  è simmetrico, per ogni  $\eta \in \mathcal{H}$  vale l'uguaglianza:

$$\langle T\psi_n, \eta \rangle = \langle \psi_n, T\eta \rangle.$$

Passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  e sfruttando la continuità del prodotto scalare:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T\psi_n, \eta \rangle = \langle \phi, \eta \rangle,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \psi_n, T\eta \rangle = \langle \psi, T\eta \rangle.$$

Quindi:

$$\langle \phi, \eta \rangle = \langle \psi, T\eta \rangle.$$

Sfruttando nuovamente la simmetria di  $T$  sul membro di destra:

$$\langle \phi, \eta \rangle = \langle T\psi, \eta \rangle, \quad \forall \eta \in \mathcal{H}.$$

Poiché l'uguaglianza vale per ogni  $\eta$ , segue che  $\phi = T\psi$ . Abbiamo così dimostrato che il grafico di  $T$  è chiuso rispetto alla topologia indotta dalla norma  $\|\cdot\|$ .

## 2. Applicazione del Teorema del Grafico Chiuso

Siamo ora nelle seguenti condizioni:

- $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  è un operatore lineare.
- $\mathcal{H}$  è uno spazio di Hilbert (e quindi di Banach) rispetto alla norma  $\|\cdot\|$ .
- $T$  è un operatore **chiuso** rispetto a  $\|\cdot\|$ .
- $D(T) = \mathcal{H}$  (il dominio è l'intero spazio).

Il **Teorema del Grafico Chiuso** afferma che un operatore chiuso definito su tutto uno spazio di Banach a valori in uno spazio di Banach è necessariamente continuo (limitato). Pertanto:

$$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

**Osservazione** (Sulle norme ausiliarie). Le condizioni sulla norma ausiliaria  $\|\cdot\|'$  e la limitatezza di  $T$  rispetto ad essa (ossia  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \|\cdot\|')$ ) sono condizioni sufficienti a garantire la buona definizione dell'operatore, ma la dimostrazione della limitatezza in norma standard  $\|\cdot\|$  segue direttamente dalla struttura simmetrica dell'operatore e dal fatto che sia definito ovunque (Teorema di Hellinger-Toeplitz). L'esercizio è quindi risolvibile in modo rigoroso basandosi primariamente sulle proprietà spettrali (Simmetria + Dominio totale  $\implies$  Chiusura  $\implies$  Limitatezza).

□

## Traccia dell'Esercizio 10 Metodo II (confermato)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert con norma  $\|\cdot\|$ . Sia  $\|\cdot\|'$  una seconda norma su  $\mathcal{H}$  tale che  $\exists C > 0$ :

$$\|\psi\| \leq C \|\psi\|', \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Sia  $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  un operatore simmetrico tale che  $\exists \kappa > 0$ :

$$\|T\psi\|' \leq \kappa \|\psi\|', \quad \forall \psi \in \mathcal{H}'.$$

dove per  $\mathcal{H}' = (\mathcal{H}, \|\cdot\|')$  si intende lo spazio di Hilbert definito dagli elementi di  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$  che sono finiti rispetto alla norma  $\|\cdot\|'$  decorato della stessa. Mostrare che  $T$  è limitato rispetto alla norma  $\|\cdot\|$  (ovvero  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  nel senso dell'estensione).

*[Hint: Un operatore lineare chiuso tra spazi di Banach e con dominio denso (inteso come tutto lo spazio) è limitato]*

---

**Soluzione.** L'obiettivo è dimostrare che l'operatore  $T$  è limitato rispetto alla norma naturale dello spazio di Hilbert  $\|\cdot\|$ , ossia che esiste  $M > 0$  tale che  $\|T\psi\| \leq M\|\psi\|$  per ogni  $\psi \in D(T)$ .

### 1. Equivalenza delle Norme

Consideriamo i due spazi di Banach (ridenominiamoli se no si incrociano gli occhi):

$$X \doteq (\mathcal{H}, \|\cdot\|) \quad \text{e} \quad Y \doteq (\mathcal{H}, \|\cdot\|').$$

Definiamo l'operatore **Identità** che mappa dallo spazio con norma standard allo spazio con norma "prima":

$$J : X \rightarrow Y, \quad J\psi = \psi.$$

Questo operatore è lineare ed è definito su tutto lo spazio  $\mathcal{H}$  (dominio denso e completo). Per poter applicare l'Hint e concludere che  $J$  è limitato, dobbiamo verificare che  $J$  sia un **operatore chiuso**.

**Verifica della chiusura di  $J$ :** Consideriamo una successione  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$  tale che:

1.  $\psi_n \rightarrow \psi$  nello spazio  $X$  (convergenza rispetto a  $\|\cdot\|$ );
2.  $J\psi_n \rightarrow \phi$  nello spazio  $Y$  (convergenza rispetto a  $\|\cdot\|'$ ).

Dobbiamo mostrare che  $J\psi = \phi$ , ovvero che  $\psi = \phi$ .

Sfruttiamo l'ipotesi data dalla traccia:  $\|u\| \leq C \|u\|'$ . Questa disegualanza implica che la convergenza nella norma  $\|\cdot\|'$  è più forte della convergenza nella norma  $\|\cdot\|$ . Poiché  $\psi_n \rightarrow \phi$  nella norma  $\|\cdot\|'$  (punto 2), allora  $\psi_n \rightarrow \phi$  anche nella norma  $\|\cdot\|$ . Tuttavia, per il punto 1, sappiamo che  $\psi_n \rightarrow \psi$  nella norma  $\|\cdot\|$ . Per l'unicità del limite, deve essere:

$$\psi = \phi.$$

Il grafico di  $J$  è dunque chiuso.

**Applicazione dell'Hint:** L'operatore  $J$  soddisfa tutte le condizioni dell'Hint: è lineare, chiuso, e definito su tutto lo spazio di Banach  $X$ . Pertanto,  $J$  è **limitato**. Esiste quindi una costante  $K > 0$  tale che  $\|J\psi\|_Y \leq K\|\psi\|_X$ , che si traduce in:

$$\|\psi\|' \leq K\|\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}. \tag{3}$$

### 2. Dimostrazione della Limitatezza di $T$

Per ogni  $\psi \in D(T)$ :

$$\begin{aligned} \|T\psi\| &\leq C \|T\psi\|' && \text{(Dominazione della norma)} \\ &\leq C \cdot \kappa \|\psi\|' && \text{(Limitatezza in } \mathcal{H}') \\ &\leq C \cdot \kappa \cdot c \|\psi\| && \text{(Equivalenza inversa 3)} \end{aligned}$$

Posto  $M = C\kappa c$ , si ha  $\|T\psi\| \leq M\|\psi\|$ .

### 3. Estensione a tutto $\mathcal{H}$

Poiché  $T$  è limitato su un dominio denso, ammette un'unica estensione continua (BLT Theorem) su tutto  $\mathcal{H}$ , che coincide con la sua chiusura (essendo  $T$  simmetrico). Dunque  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .