Esercizi Operatori

Tommaso Pedroni

Traccia dell'Esercizio 1-F

Dati due spazi di Hilbert $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ e denotando con $\mathbb{I}$ e $\mathbb{I}'$ i rispettivi operatori identità, si mostri che $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H}')$ è unitario se e solo se è limitato e $T^*T = \mathbb{I}$ mentre $TT^* = \mathbb{I}'$.

Soluzione. Ricordiamo preliminariarmente la definizione di operatore unitario. Un operatore $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ si dice *unitario* se è un isomorfismo isometrico suriettivo tra i due spazi di Hilbert. Ovvero, se conserva il prodotto scalare (e quindi è un'isometria) ed è suriettivo.

Implicazione diretta ($\Rightarrow$): Sia T unitario.

- **Limitatezza:** Poiché T è unitario, preserva la norma, ossia $\|T\psi\|_{\mathcal{H}'} = \|\psi\|_{\mathcal{H}}$ per ogni $\psi \in \mathcal{H}$. Di conseguenza, la norma operatoriale è $\|T\| = \sup_{\|\psi\|=1} \|T\psi\| = 1$, il che implica che T è limitato.
- **Relazioni con l'aggiunto:** Poiché T conserva il prodotto scalare, per la definizione di aggiunto vale:
$$\langle \phi, T^*T\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle T\phi, T\psi \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}.$$
Dall'arbitrarietà dei vettori segue l'identità operatoriale:
$$T^*T = \mathbb{I}.$$
Dato T suriettiva $\forall x \in \mathcal{H}'$ trovo y tale che $Ty = x$ quindi
$$TT^*x = TT^*Ty = Ty = x \qquad \Longrightarrow \qquad TT^* = \mathbb{I}'$$

Implicazione inversa ($\Leftarrow$): Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H}')$ limitato tale che $T^*T = \mathbb{I}$ e $TT^* = \mathbb{I}'$.

- **Isometria:** Dalla condizione $T^*T = \mathbb{I}$, per ogni $\psi \in \mathcal{H}$ abbiamo:
$$\|T\psi\|^2_{\mathcal{H}'} = \langle T\psi, T\psi \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle \psi, T^*T\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi, \mathbb{I}\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \|\psi\|^2_{\mathcal{H}}.$$
Quindi T è un'isometria.
- **Suriettività:** Dobbiamo mostrare che $\mathrm{Ran}(T) = \mathcal{H}'$. Sia $\eta \in \mathcal{H}'$ un vettore arbitrario. Consideriamo il vettore $\xi = T^*\eta \in \mathcal{H}$. Applicando T otteniamo:
$$T\xi = T(T^*\eta) = (TT^*)\eta = \mathbb{I}'\eta = \eta.$$
Dunque, per ogni $\eta \in \mathcal{H}'$ esiste una controimmagine $\xi \in \mathcal{H}$, il che prova che T è suriettivo.

Essendo T un'isometria suriettiva limitata, T è unitario.

Traccia dell'Esercizio 2-F

Sia dato uno spazio di Hilbert infinito dimensionale, mostrare che l'operatore identità non può mai essere compatto.

Soluzione. Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile con $\dim(\mathcal{H}) = \infty$ e sia $\mathbb{I} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ l'operatore identità.

Un operatore K si dice *compatto* se mappa insiemi limitati in insiemi relativamente compatti. Equivalentemente, K è compatto se, per ogni successione limitata $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$, la successione trasformata $\{Kx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente in $\mathcal{H}$.

Poiché $\mathcal{H}$ è infinito dimensionale, esiste in esso un sistema ortonormale infinito $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ (si pensi al risultato della procedura di Gram-Schmidt applicata a un insieme numerabile linearmente indipendente).

Consideriamo la successione $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Essa è limitata poiché $\|e_n\| = 1$ per ogni n. Valutiamo l'azione dell'identità su tale successione: $\mathbb{I}e_n = e_n$.

Affinché $\mathbb{I}$ sia compatto, dalla successione $\{e_n\}$ si dovrebbe poter estrarre una sottosuccessione convergente (e quindi di Cauchy). Tuttavia, per ogni $n \neq m$, calcoliamo la distanza tra due elementi della base ortonormale:

$$\|e_n - e_m\|^2 = \langle e_n - e_m, e_n - e_m\rangle = \|e_n\|^2 + \|e_m\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle e_n, e_m\rangle = 1 + 1 - 0 = 2.$$

Dunque $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ per ogni $n \neq m$.

Questo implica che non è possibile estrarre alcuna sottosuccessione di Cauchy da $\{e_n\}$, poiché gli elementi mantengono una distanza costante e non nulla l'uno dall'altro. Di conseguenza, la successione $\{\mathbb{I}e_n\}$ non ammette sottosuccessioni convergenti.

Concludiamo che l'operatore identità in uno spazio di Hilbert infinito dimensionale non è compatto.

Traccia dell'Esercizio 3-F

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e siano T e T' due operatori densamente definiti. Si mostri che:

(a) Se $T \subset T'$, allora $(T')^* \subset T^*$.

(b) $(T')^*T^* \subseteq (TT')^*$ e l'uguaglianza vale se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Soluzione. Dividiamo l'esercizio in due parti.

Punto (a)

L'ipotesi $T \subset T'$ significa che:

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T') \quad \text{e} \quad Tx = T'x \quad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

Sia $\phi \in \mathcal{D}(T')^*$. Per definizione di operatore aggiunto, ciò significa che esiste un vettore $\eta \in \mathcal{H}$ (denotato con $(T')^*\phi$) tale che:

$$\langle \phi, T'x\rangle = \langle \eta, x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(T').$$

Poiché $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T')$, la relazione sopra vale in particolare per ogni $x \in \mathcal{D}(T)$. Inoltre, per tali x, abbiamo $T'x = Tx$. Possiamo quindi scrivere:

$$\langle \phi, Tx\rangle = \langle \eta, x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

Questa è esattamente la definizione che assicura che $\phi \in \mathcal{D}(T^*)$ e che $T^*\phi = \eta$.

Abbiamo mostrato che $\phi \in \mathcal{D}((T')^*) \implies \phi \in \mathcal{D}(T^*)$ e che l'azione degli operatori coincide. Pertanto:

$$(T')^* \subset T^*.$$

Punto (b)

Inclusione $(T')^*T^* \subseteq (TT')^*$. Sia $\phi \in \mathcal{D}(T'^*T^*)$. Per definizione di dominio del prodotto di operatori, questo implica che:

$$\phi \in \mathcal{D}(T^*) \quad \text{e} \quad T^*\phi \in \mathcal{D}(T'^*).$$

Vogliamo mostrare che $\phi \in \mathcal{D}((TT')^*)$. Consideriamo un generico $x \in \mathcal{D}(TT')$. Ricordiamo che $x \in \mathcal{D}(TT') \iff x \in \mathcal{D}(T') \wedge T'x \in \mathcal{D}(T)$.

Valutiamo il prodotto scalare $\langle \phi, TT'x \rangle$:

1. Poiché $T'x \in \mathcal{D}(T)$ e $\phi \in \mathcal{D}(T^*)$, possiamo scaricare T:

$$\langle \phi, T(T'x) \rangle = \langle T^*\phi, T'x \rangle .$$

2. Ora, poniamo $\psi \coloneqq T^*\phi$. Sappiamo per ipotesi che $\psi \in \mathcal{D}((T')^*)$. Inoltre $x \in \mathcal{D}(T')$. Possiamo scaricare T':

$$\langle \psi, T'x \rangle = \langle (T')^*\psi, x \rangle = \langle (T')^*T^*\phi, x \rangle .$$

Mettendo insieme i passaggi, abbiamo trovato che per ogni $x \in \mathcal{D}(TT')$:

$$\langle \phi, TT'x \rangle = \langle (T')^*T^*\phi, x \rangle .$$

Questo prova che $\phi \in \mathcal{D}((TT')^*)$ e che $(TT')^*\phi = (T')^*T^*\phi$.

Uguaglianza nel caso limitato. Sia ora $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Questo implica che T è limitato e definito su tutto lo spazio, ovvero $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ e $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H}$. Dobbiamo mostrare l'inclusione inversa: $(TT')^* \subseteq (T')^*T^*$.

Osserviamo preliminarmente che, essendo $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$, il dominio del prodotto TT' si semplifica:

$$\mathcal{D}(TT') = \{x \in \mathcal{D}(T') : T'x \in \mathcal{D}(T)\} = \{x \in \mathcal{D}(T') : T'x \in \mathcal{H}\} = \mathcal{D}(T').$$

Sia ora $\phi \in \mathcal{D}((TT')^*)$. Questo significa che esiste un η tale che:

$$\langle \phi, TT'x \rangle = \langle \eta, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(TT') = \mathcal{D}(T').$$

Essendo T limitato e definito ovunque, il suo aggiunto T^* è anch'esso definito ovunque ($T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$). Possiamo usare la proprietà dell'aggiunto per operatori limitati $\langle \phi, Ty \rangle = \langle T^*\phi, y \rangle$ per qualsiasi $y \in \mathcal{H}$. Ponendo $y = T'x$ (che è un vettore lecito in $\mathcal{H}$), otteniamo:

$$\langle \phi, T(T'x) \rangle = \langle T^*\phi, (T'x) \rangle .$$

Confrontando le due espressioni, abbiamo:

$$\langle T^*\phi, T'x \rangle = \langle \eta, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(T').$$

Questa uguaglianza ci dice esattamente che il funzionale lineare $x \mapsto \langle T^*\phi, T'x \rangle$ è limitato (rappresentabile da η). Per definizione di aggiunto di T', ciò implica che il vettore $T^*\phi$ appartiene al dominio di $(T')^*$, ovvero:

$$T^*\phi \in \mathcal{D}((T')^*).$$

Poiché $\phi \in \mathcal{H} = \mathcal{D}(T^*)$ è sempre vero, la condizione $T^*\phi \in \mathcal{D}((T')^*)$ è sufficiente per affermare che:

$$\phi \in \mathcal{D}((T')^*T^*).$$

Ciò conclude la dimostrazione dell'uguaglianza.

Traccia dell'Esercizio 4-F

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e sia dato $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Si mostri che T è essenzialmente autoaggiunto se e solo se T è denso e chiudibile in $\mathcal{H}$ e $T^* = \overline{T}$.

Soluzione. Implicazione diretta ($\Rightarrow$): Sia T essenzialmente autoaggiunto. Per la **Definizione 84**, questo implica tre fatti:

1. $\mathcal{D}(T)$ è denso in $\mathcal{H}$
2. $\mathcal{D}(T^*)$ è denso in $\mathcal{H}$
3. $T^* = (T^*)^*$

Poiché $\mathcal{D}(T^*)$ è denso, per il **Teorema 82 (punto 2)**, possiamo affermare che T è chiudibile e che vale l'identità fondamentale:

$$\overline{T} = (T^*)^*.$$

Sostituendo questa identità nella condizione 3 (essenziale autoaggiunzione), otteniamo:

$$T^* = \overline{T}.$$

Abbiamo quindi mostrato che T è denso (cond. 1), chiudibile (dal Teorema 82) e che $T^* = \overline{T}$.
Implicazione inversa ($\Leftarrow$): Supponiamo che:

H1. $\mathcal{D}(T)$ sia denso.

H2. T sia chiudibile.

H3. $T^* = \overline{T}$.

Dobbiamo verificare che T soddisfi la **Definizione 84**. La prima condizione della definizione ($\mathcal{D}(T)$ denso) è garantita da H1.

Poiché T è chiudibile (H2), il **Teorema 82 (punto 2)** assicura che $\mathcal{D}(T^*)$ è denso (soddisfacendo così la seconda condizione della Def. 84) e che vale:

$$(T^*)^* = \overline{T}.$$

Utilizzando l'ipotesi H3 ($T^* = \overline{T}$), possiamo sostituire $\overline{T}$ nell'equazione precedente:

$$(T^*)^* = T^*.$$

Questo soddisfa la terza condizione della **Definizione 84**. Dunque T è essenzialmente autoaggiunto.

Traccia dell'Esercizio 5-F

Dati due spazi di Hilbert $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ e un operatore unitario $U : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$, si mostri che se $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è essenzialmente autoaggiunto, allora lo è anche l'operatore $T' \doteq U^{-1}TU$ definito su $\mathcal{D}(T') = U^{-1}\mathcal{D}(T)$.

Soluzione. Sia T essenzialmente autoaggiunto. Per la **Definizione 84**, valgono:

- $\mathcal{D}(T)$ e $\mathcal{D}(T^*)$ sono densi in $\mathcal{H}$.
- $T^* = (T^*)^*$.

Dobbiamo verificare le stesse condizioni per T'.
PS: Credo ci sia un'esercitazione di Beatrice dove dimostra letteralmente le stesse cose. In particolare dimostra che T simmetrico $\Rightarrow$ T' simmetrico, quindi sappiamo già la densità dei domini. Essendo U limitato con inverso limitato ($U^* = U^{-1}$), vale la regola dell'aggiunto del prodotto (esercizio 3-F punto (b)):

$$(T')^* = (U^{-1}TU)^* = U^*T^*(U^{-1})^* = U^{-1}T^*U.$$

Il dominio di $(T')^*$ è $\mathcal{D}((T')^*) = U^{-1}\mathcal{D}(T^*)$.
Dobbiamo verificare che $(T')^* = ((T')^*)^*$. Calcoliamo l'aggiunto dell'aggiunto di T':

$$((T')^*)^* = \left(U^{-1}T^*U\right)^* = U^*(T^*)^*(U^{-1})^* = U^{-1}(T^*)^*U.$$

Poiché T è essenzialmente autoaggiunto, per definizione sappiamo che $T^* = (T^*)^*$. Sostituendo questa uguaglianza nell'equazione sopra:

$$((T')^*)^* = U^{-1}T^*U.$$

Osserviamo che il membro di destra è esattamente l'espressione di $(T')^*$ trovata in precedenza. Dunque:

$$((T')^*)^* = (T')^*.$$

Tutte le condizioni della **Definizione 84** sono soddisfatte per T', che è quindi essenzialmente autoaggiunto.

Traccia dell'Esercizio 1

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e sia $T = T^* \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ un operatore compatto autoaggiunto. Dato $\psi_0 \in \mathcal{H}$, si considerino le equazioni:

1. $T\psi = \psi$
2. $T\psi = \psi + \psi_0$

Si mostri che:

(a) Se l'unica soluzione di (1) è $\psi = 0$, allora l'equazione (2) ammette un'unica soluzione.

(b) Se l'equazione (1) ammette soluzioni $\psi \neq 0$, allora l'equazione (2) è risolubile se e solo se ψ_0 è ortogonale ad ogni soluzione di (1).

Soluzione. Definiamo l'operatore $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ come:

$$S \coloneqq T - I.$$

Poiché T è limitato (in quanto compatto) e I è limitato, S è un operatore limitato. Inoltre, poiché T è autoaggiunto ($T = T^*$) e l'identità è autoaggiunta, S è autoaggiunto:

$$S^* = (T - I)^* = T^* - I^* = T - I = S.$$

Le equazioni date possono essere riscritte come:

1. $S\psi = 0$ (Equazione omogenea)
2. $S\psi = \psi_0$ (Equazione non omogenea, a meno di un segno ininfluente su ψ_0)

Parte (a)

Ipotesi: L'unica soluzione della (1) è $\psi = 0$. Questo implica che $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$.

1. Analisi del Nucleo $\mathrm{Ker}(S)$

Dobbiamo formalizzare che $\mathrm{Ker}(S)$ è un sottospazio vettoriale (banale ma necessario per rigore). Il nucleo è definito come $\mathrm{Ker}(S) = \{\psi \in \mathcal{H} \mid (T - I)\psi = 0\}$.

- **Contiene lo zero:** $S(0) = T(0) - 0 = 0$, quindi $0 \in \mathrm{Ker}(S)$.
- **Chiusura rispetto alle operazioni lineari:** Siano $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Ker}(S)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

  $$S(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \alpha S(\phi_1) + \beta S(\phi_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

  Pertanto $\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \in \mathrm{Ker}(S)$.

Dunque $\mathrm{Ker}(S)$ è un sottospazio lineare. Per l'ipotesi di questa sezione, $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$, il che implica che l'operatore S è **iniettivo**. L'unicità della soluzione, qualora esista, è garantita. Resta da dimostrare l'esistenza (suriettività).

2. Dimostrazione della Chiusura del Rango e Suriettività

Per dimostrare che l'equazione $S\psi = \psi_0$ ammette soluzione per ogni ψ_0, dobbiamo mostrare che $\mathrm{Ran}(S) = \mathcal{H}$. Essendo S autoaggiunto, vale la decomposizione ortogonale:

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Ran}(S)} \oplus \mathrm{Ker}(S).$$

Dato che $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$, segue che $\overline{\mathrm{Ran}(S)} = \mathcal{H}$. Ovvero, l'immagine è densa. Per concludere che $\mathrm{Ran}(S) = \mathcal{H}$, è necessario e sufficiente dimostrare che $\mathrm{Ran}(S)$ è un insieme **chiuso**.

Dimostrazione della chiusura di $\mathrm{Ran}(S)$ **(Caso Generale).** Sia $y_n \in \mathrm{Ran}(S)$, $n \in \mathbb{N}$, e supponiamo che $y_n \to y$ per $n \to +\infty$. Dobbiamo dimostrare che $y \in \mathrm{Ran}(S)$. Per ipotesi:

$$y_n = Sx_n = Tx_n - x_n \tag{*}$$

per una certa successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$. Senza perdita di generalità possiamo assumere $x_n \in \mathrm{Ker}(S)^\perp$, eventualmente eliminando dalla successione la componente che si proietta su $\mathrm{Ker}(S)$. L'affermazione è dimostrata se riusciamo a mostrare che la successione $\{x_n\}$ è limitata: infatti, essendo T compatto, esisterà una sottosuccessione x_{n_k} tale che $Ax_{n_k} \to y' \in \mathcal{H}$ per $k \to \infty$. Sostituendo in (*) concludiamo che $x_{n_k} \to x$ per un certo $x \in \mathcal{H}$ per $k \to +\infty$. Per la continuità di T, $Sx = Tx - x = y$, dunque $y \in \mathrm{Ran}(S)$.

Procederemo per assurdo, assumendo che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Ker}(S)^\perp$ sia illimitata. Quindi esisterebbe una sottosuccessione x_{n_m} con $0 < \|x_{n_m}\| \to +\infty$ per $m \to +\infty$. Poiché i y_n formano una successione convergente, e quindi limitata, dividendo per $\|x_{n_m}\|$ in (*) si ottiene:

$$S\frac{x_{n_m}}{\|x_{n_m}\|} = T\frac{x_{n_m}}{\|x_{n_m}\|} - \frac{x_{n_m}}{\|x_{n_m}\|} = \frac{y_{n_m}}{\|x_{n_m}\|} \to \mathbf{0}. \tag{**}$$

Ma T è compatto e i vettori $\frac{x_{n_m}}{\|x_{n_m}\|}$ sono limitati, quindi possiamo estrarre un'ulteriore sottosuccessione $x_{n_{m_k}}/\|x_{n_{m_k}}\|$ tale che:

$$\frac{x_{n_{m_k}}}{\|x_{n_{m_k}}\|} \to x' \in \mathcal{H} \quad \text{e} \quad S\frac{x_{n_{m_k}}}{\|x_{n_{m_k}}\|} \to Sx' \quad \text{per } k \to +\infty.$$

Da (**) deduciamo che $x' \in \mathrm{Ker}(S)$. Per ipotesi $\frac{x_{n_{m_k}}}{\|x_{n_{m_k}}\|} \in \mathrm{Ker}(S)^\perp$, e poiché $\mathrm{Ker}(S)^\perp$ è chiuso, allora $x' \in \mathrm{Ker}(S)^\perp$. Di conseguenza $x' \in \mathrm{Ker}(S) \cap \mathrm{Ker}(S)^\perp = \{\mathbf{0}\}$, in contraddizione con

$$\|x'\| = \lim_{k\to+\infty} \frac{\|x_{n_{m_k}}\|}{\|x_{n_{m_k}}\|} = 1.$$

Conclusione Parte (a): Poiché $\mathrm{Ran}(S)$ è chiuso e $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$, abbiamo:

$$\mathrm{Ran}(S) = (\mathrm{Ker}(S^*))^\perp = (\mathrm{Ker}(S))^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}.$$

L'operatore S è quindi una biiezione su $\mathcal{H}$. L'equazione (2) ammette una ed una sola soluzione.

Parte (b)

Ipotesi: L'equazione (1) ammette soluzioni $\psi \neq 0$. Questo significa che $\mathrm{Ker}(S) \neq \{0\}$. $\mathrm{Ker}(S)$ è l'autospazio di T relativo all'autovalore 1. Poiché T è compatto, questo autospazio ha dimensione finita, ma qui ci basta sapere che non è banale.

Dalla teoria generale (e ricalcando la dimostrazione di chiusura fatta al punto (a), che rimane valida anche se il nucleo non è nullo), sappiamo che $\mathrm{Ran}(S)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$.

Essendo $\mathrm{Ran}(S)$ chiuso, vale esattamente:

$$\mathrm{Ran}(S) = (\mathrm{Ker}(S^*))^\perp.$$

Poiché S è autoaggiunto ($S = S^*$), abbiamo:

$$\mathrm{Ran}(S) = (\mathrm{Ker}(S))^\perp.$$

L'equazione (2), $S\psi = \psi_0$, ha soluzione se e solo se $\psi_0 \in \mathrm{Ran}(S)$. In virtù dell'uguaglianza sopra, questo equivale a:

$$\psi_0 \in (\mathrm{Ker}(S))^{\perp}.$$

Ovvero, ψ_0 deve essere ortogonale a ogni vettore del nucleo di S. Poiché i vettori di $\mathrm{Ker}(S)$ sono esattamente le soluzioni dell'equazione omogenea (1), l'equazione (2) è risolubile se e solo se ψ_0 è ortogonale ad ogni soluzione della (1).

□

Traccia dell'Esercizio 2

Sia $g \in L^2([0, 2\pi])$. Definito l'operatore $T : L^2([0, 2\pi]) \to L^2([0, 2\pi])$ come:

$$f \mapsto T(f) \doteq g * f = \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)\,dy$$

si mostri che $T \in \mathcal{B}_\infty(L^2([0, 2\pi]))$ (ovvero T è compatto) e che le funzioni e^{inx} sono autovettori di T.

Soluzione. Per procedere con il dovuto rigore, assumiamo che la funzione g, data in $L^2([0, 2\pi])$, sia estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Questo rende ben definita l'espressione $g(x-y)$ per ogni coppia (x, y).

1. Spettro Puntuale: Gli autovettori

Siano $\phi_n(x) \doteq e^{inx}$ con $n \in \mathbb{Z}$. Verifichiamo direttamente che questi sono autovettori applicando l'operatore integrale.

$$(T\phi_n)(x) = \int_0^{2\pi} g(x-y)e^{iny}\,dy.$$

Operiamo il cambio di variabile $z = x - y$. Di conseguenza $y = x - z$ e $dy = -dz$. Gli estremi di integrazione si trasformano come segue: $y = 0 \to z = x$ e $y = 2\pi \to z = x - 2\pi$.

$$(T\phi_n)(x) = \int_x^{x-2\pi} g(z)e^{in(x-z)}(-dz) = e^{inx}\int_{x-2\pi}^{x} g(z)e^{-inz}\,dz.$$

L'integranda $h(z) = g(z)e^{-inz}$ è il prodotto di funzioni 2π-periodiche, ed è quindi essa stessa 2π-periodica. È fatto noto dell'analisi reale che l'integrale di una funzione periodica su un intervallo pari al periodo è invariante per traslazione degli estremi:

$$\int_{x-2\pi}^{x} h(z)\,dz = \int_0^{2\pi} h(z)\,dz.$$

Sostituendo, otteniamo:

$$(T\phi_n)(x) = e^{inx}\left(\int_0^{2\pi} g(z)e^{-inz}\,dz\right).$$

Definendo lo scalare $\lambda_n \doteq \int_0^{2\pi} g(z)e^{-inz}\,dz$, abbiamo dimostrato che:

$$T\phi_n = \lambda_n\phi_n.$$

Dunque, le funzioni ϕ_n sono autovettori di T relativi agli autovalori λ_n.

2. Completezza del sistema ortonormale

Per poter analizzare le proprietà spettrali globali dell'operatore, dobbiamo assicurarci che gli autovettori trovati generino l'intero spazio. Definiamo il sistema normalizzato:

$$u_n(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Il sistema $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è chiaramente ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di L^2: $\langle u_n, u_m\rangle = \delta_{nm}$.

Per dimostrarne la completezza, mostriamo che il complemento ortogonale del sottospazio generato da $\{u_n\}$ è il solo vettore nullo. Sia $f \in L^2([0, 2\pi])$ tale che $\langle f, u_n \rangle = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

$$\langle f, u_n \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{u_n(x)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\, dx = 0.$$

Gli integrali sopra corrispondono (a meno del fattore di normalizzazione) ai coefficienti di Fourier di f, denotati $\hat{f}_n$. L'ipotesi $\langle f, u_n \rangle = 0, \forall n$ implica $\hat{f}_n = 0, \forall n$. Questo può essere detto per l'iniettività di Fourier su L^2 enunciata in classe oppure per il **Teorema di Unicità** della serie di Fourier (conseguenza della densità dei polinomi trigonometrici e della completezza di L^2), una funzione L^2 con tutti i coefficienti di Fourier nulli è nulla quasi ovunque.

$$f = 0 \quad \text{q.o.}$$

Pertanto, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è una base ortonormale completa (Base di Hilbert) per $\mathcal{H}$.

3. Compattezza e Classe di Hilbert-Schmidt

Per dimostrare che T è compatto ($T \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$), dimostreremo la condizione più forte che T è un operatore di Hilbert-Schmidt. Un operatore T è di Hilbert-Schmidt se, data una base ortonormale $\{e_k\}$, la quantità $\|T\|_2^2 \doteq \sum_k \|Te_k\|^2$ è finita.

Scegliamo come base proprio gli autovettori normalizzati $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Poiché $Tu_n = \lambda_n u_n$, abbiamo:

$$\|Tu_n\|^2 = \|\lambda_n u_n\|^2 = |\lambda_n|^2 \|u_n\|^2 = |\lambda_n|^2.$$

La norma Hilbert-Schmidt è dunque data dalla serie degli autovalori al quadrato:

$$\|T\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n|^2.$$

Analizziamo i termini λ_n. Dalla definizione data nel punto 1:

$$\lambda_n = \int_0^{2\pi} g(z)e^{-inz}\, dz.$$

Possiamo riscrivere λ_n in funzione dei coefficienti di Fourier della funzione g rispetto alla base ortonormale $\{u_n\}$. I coefficienti di Fourier sono $\hat{g}_n = \langle g, u_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} g(z)e^{-inz}\, dz$. Risulta evidente che:

$$\lambda_n = \sqrt{2\pi}\, \hat{g}_n.$$

Sostituendo nella somma:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\sqrt{2\pi}\, \hat{g}_n\right|^2 = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2.$$

Poiché per ipotesi $g \in L^2([0, 2\pi])$, l'**Identità di Parseval** garantisce che la somma dei quadrati dei suoi coefficienti di Fourier converga al quadrato della norma della funzione:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2 = \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Di conseguenza:

$$\|T\|_2^2 = 2\pi \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

L'operatore T è dunque di Hilbert-Schmidt. Poiché la classe degli operatori di Hilbert-Schmidt è contenuta in quella degli operatori compatti ($\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_\infty$), concludiamo che T è un operatore compatto.

$\square$

Soluzione Esercizio 2 - Metodo Spettrale

Sia $g \in L^2([0, 2\pi])$ estesa per periodicità. Analizziamo l'operatore integrale $T : L^2 \to L^2$ definito da $Tf = g * f$.

1. Spettro Puntuale e Diagonalizzazione

Consideriamo il sistema ortonormale completo in $L^2([0,2\pi])$ dato da:

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Verifichiamo che questi siano autovettori di T. Applicando la definizione:

$$(Tu_n)(x) = \int_0^{2\pi} g(x-y) \frac{e^{iny}}{\sqrt{2\pi}} \, dy.$$

Ponendo $z = x - y$ e sfruttando la periodicità delle funzioni in gioco:

$$(Tu_n)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} g(z) e^{in(x-z)} \, dz = \left(\int_0^{2\pi} g(z) e^{-inz} \, dz \right) \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Definiamo la successione degli scalari λ_n come:

$$\lambda_n \doteq \int_0^{2\pi} g(z) e^{-inz} \, dz.$$

Abbiamo quindi ottenuto la relazione agli autovalori:

$$Tu_n = \lambda_n u_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Notiamo che λ_n è strettamente legato ai coefficienti di Fourier di g. Infatti, denotando $\hat{g}_n = \langle g, u_n \rangle$:

$$\lambda_n = \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} g(z) e^{-inz} \, dz \right) = \sqrt{2\pi}\, \hat{g}_n.$$

2. Compattezza via Fourier-Plancherel

Per analizzare la compattezza di T, passiamo allo spazio delle frequenze. Sia $\mathcal{F} : L^2([0,2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ l'isomorfismo isometrico di Fourier-Plancherel, che associa a ogni funzione f la successione dei suoi coefficienti di Fourier $\{\hat{f}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Grazie alla diagonalizzazione effettuata al punto precedente, l'operatore T è unitariamente equivalente a un **operatore di moltiplicazione diagonale** $\hat{T}$ su $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\hat{T}(\{\hat{f}_n\}_n) = \{\lambda_n \hat{f}_n\}_n.$$

In altre parole, l'azione dell'operatore sulle componenti di Fourier è una semplice moltiplicazione scalare elemento per elemento.

Analisi della successione dei moltiplicatori $\{\lambda_n\}$: Dall'ipotesi $g \in L^2([0,2\pi])$, per il teorema di Plancherel (o Identità di Parseval), sappiamo che la successione dei coefficienti di Fourier di g è a quadrato sommabile:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2 = \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Poiché $\lambda_n = \sqrt{2\pi}\, \hat{g}_n$, ne consegue immediatamente che anche la successione degli autovalori appartiene a $\ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\lambda_n|^2 = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2 = 2\pi \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

3. Conclusione

Un operatore diagonale su ℓ^2 definito da una successione $\{\lambda_n\}$ è un operatore di Hilbert-Schmidt se e solo se la successione è in $\ell^2(\mathbb{Z})$. Avendo dimostrato che $\{\lambda_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, concludiamo che:

1. T è un operatore di Hilbert-Schmidt, e quindi
2. T è un operatore compatto (poiché $\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_\infty$).

Nota a margine: Anche senza invocare la classe Hilbert-Schmidt, la condizione necessaria e sufficiente affinché un operatore diagonale sia compatto è che $\lim_{|n| \to \infty} \lambda_n = 0$. Questo è garantito dal fatto che λ_n sono coefficienti di Fourier di una funzione L^2 (Lemma di Riemann-Lebesgue, o semplice conseguenza della convergenza della serie dei quadrati).

□

Traccia dell'Esercizio 3

Sia data una matrice $\sigma \in \mathcal{M}(n;\mathbb{R})$ positiva e sia $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Si mostri che l'operatore

$$L \doteq \operatorname{div}(\sigma\nabla) = \nabla \cdot (\sigma\nabla)$$

è essenzialmente autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, dove ∇ è l'operatore gradiente.

Soluzione. Per affrontare il problema con il dovuto rigore, è necessario specificare il dominio iniziale dell'operatore. Poiché stiamo trattando operatori differenziali su $\mathbb{R}^n$ non limitati, assumiamo come dominio di definizione lo spazio delle funzioni test a supporto compatto:

$$\mathcal{D}(L) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n).$$

L'operatore L è simmetrico su questo dominio. Infatti, per ogni $\phi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, integrando per parti due volte e assumendo che i termini di bordo svaniscano (garantito dal supporto compatto), e sfruttando la simmetria di σ (implicita nella definizione di positività per matrici reali in questo contesto, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$):

$$\langle L\phi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot (\sigma\nabla\phi)\bar{\psi}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} (\sigma\nabla\phi) \cdot \nabla\bar{\psi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\overline{\nabla \cdot (\sigma\nabla\psi)}\, dx = \langle \phi, L\psi\rangle\,.$$

Per dimostrare che L è **essenzialmente autoaggiunto** (ovvero che la sua chiusura $\bar{L}$ è autoaggiunta, $\bar{L} = L^*$), utilizziamo il **Criterio di Von Neumann**. Dobbiamo mostrare che gli indici di difetto sono nulli, ovvero:

$$\ker(L^* - iI) = \{0\} \quad \text{e} \quad \ker(L^* + iI) = \{0\}.$$

Poiché L è a coefficienti reali, è sufficiente studiare una delle due equazioni, in quanto la coniugazione complessa mappa le soluzioni di una in quelle dell'altra. Cerchiamo quindi le soluzioni distribuzionali $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dell'equazione:

$$L\psi = i\psi \implies \nabla \cdot (\sigma\nabla\psi) - i\psi = 0.$$

1. Diagonalizzazione e Cambio di Variabili

La matrice σ è definita positiva. Per il Teorema Spettrale reale, esiste una matrice ortogonale $O \in O(n)$ tale che:

$$O^T\sigma O = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \text{con } \lambda_k > 0.$$

Operiamo un cambio di variabili nello spazio $\mathbb{R}^n$ definito dalla rotazione $y = O^T x$. Poiché O è ortogonale, la trasformazione è un'isometria unitaria su $L^2(\mathbb{R}^n)$ (preserva il prodotto scalare e la norma), quindi non altera le proprietà spettrali (come l'appartenenza a L^2). Esprimiamo l'operatore differenziale nelle nuove coordinate y. Notiamo che $\nabla_x = O\nabla_y$. L'operatore diventa:

$$\nabla_x \cdot (\sigma\nabla_x) = (O\nabla_y)^T\sigma(O\nabla_y) = \nabla_y^T(O^T\sigma O)\nabla_y = \nabla_y^T D\nabla_y = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}.$$

L'equazione agli autovalori nelle coordinate ruotate diventa:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2\psi}{\partial y_k^2} - i\psi(y) = 0.$$

2. Analisi delle Soluzioni in L^2 tramite Trasformata di Fourier

Vogliamo dimostrare che l'unica soluzione $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ all'equazione $L\psi = i\psi$ è la soluzione nulla $\psi \equiv 0$. Utilizziamo la trasformata di Fourier $\mathcal{F}$, che è un automorfismo unitario su $L^2(\mathbb{R}^n)$ (Teorema di Plancherel).

Riprendiamo l'equazione nelle coordinate diagonali y ottenuta al punto precedente:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2\psi}{\partial y_k^2} - i\psi(y) = 0.$$

Passando allo spazio delle frequenze $k \in \mathbb{R}^n$, denotiamo $\hat{\psi}(k) = \mathcal{F}[\psi](k)$. Ricordando che l'azione della derivata in Fourier diventa una moltiplicazione (i.e., $\mathcal{F}[\partial^2_{y_j}\psi] = -k_j^2\hat{\psi}$), l'equazione differenziale si trasforma nella seguente equazione algebrica:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(-k_k^2)\hat{\psi}(k) - i\hat{\psi}(k) = 0.$$

Raccogliendo $\hat{\psi}(k)$:

$$-\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k k_k^2 + i\right)\hat{\psi}(k) = 0.$$

Il coefficiente moltiplicativo $P(k) = -(\sum \lambda_k k_k^2 + i)$ non si annulla mai per nessun $k \in \mathbb{R}^n$. Infatti, la sua parte immaginaria è costantemente $-i \neq 0$ (inoltre, essendo $\lambda_k > 0$, la parte reale è sempre non positiva). Affinché il prodotto sia nullo, deve necessariamente valere:

$$\hat{\psi}(k) = 0 \quad \text{quasi ovunque.}$$

Poiché la trasformata di Fourier è iniettiva su L^2, $\hat{\psi} = 0$ implica $\psi = 0$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$. Dunque, $\ker(L^* - iI) = \{0\}$. Il procedimento è identico per l'equazione $L\psi = -i\psi$ (il termine immaginario cambia segno ma rimane non nullo).

Conclusione

Abbiamo dimostrato che $\ker(L^* \pm iI) = \{0\}$. Poiché gli indici di difetto sono $(0, 0)$, per il Criterio di autoaggiunzione essenziale (Criterio di Von Neumann), l'operatore L definito su $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è essenzialmente autoaggiunto.

$\square$

Traccia dell'Esercizio 4

Sia dato il dominio $I = [0, 1]$ e si consideri il problema di Dirichlet per $\psi : I \to \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -\frac{d^2\psi}{dx^2} + \psi = f \\ \psi|_{\partial I} = 0 \end{cases},$$

dove $f \in C^\infty(I)$. Sia $H^1(I) \doteq \{\psi \in L^2(I) \mid \frac{d\psi}{dx} \in L^2(I)\}$ e sia $H_0^1(I) \subset H^1(I)$ il sottospazio di Hilbert delle funzioni $\psi \in L^2(I)$ tali che $\psi|_{\partial I} = 0$. Si mostri che esiste ed è unica una soluzione *debole* ψ_0 del problema di Dirichlet ossia $\psi_0 \in H_0^1(I)$ e

$$\int_I dx\, \psi_0 h + \int_I dx\, \frac{d\psi_0}{dx}\frac{dh}{dx} = \int_I dx\, fh, \quad \forall h \in H_0^1(I).$$

[Hint: Si ricorda che $\|\psi\|^2_{H^1(I)} = \|\psi\|^2_{L^2(I)} + \|\frac{d\psi}{dx}\|^2_{L^2(I)}$.]

Soluzione. La dimostrazione dell'esistenza e unicità della soluzione debole si basa sull'applicazione del Teorema di Rappresentazione di Riesz nello spazio di Hilbert appropriato. Procediamo identificando la struttura geometrica indotta dall'equazione differenziale.

1. Struttura dello Spazio di Hilbert

Dal testo, consideriamo lo spazio $H_0^1(I)$, definito come il sottospazio delle funzioni in $H^1(I)$ che si annullano al bordo ∂I. L'Hint ci fornisce la norma su $H^1(I)$:

$$\|\psi\|^2_{H^1} = \|\psi\|^2_{L^2} + \left\|\frac{d\psi}{dx}\right\|^2_{L^2} = \int_I |\psi|^2\, dx + \int_I \left|\frac{d\psi}{dx}\right|^2\, dx.$$

Questa norma è indotta dal seguente **prodotto scalare**:

$$\langle u, v\rangle_{H^1} \doteq \int_I u(x)v(x)\, dx + \int_I \frac{du}{dx}(x)\frac{dv}{dx}(x)\, dx.$$

Poiché $H^1(I)$ è uno spazio di Hilbert e $H_0^1(I)$ è un suo sottospazio chiuso (definito da condizioni puntuali al bordo, che sono preservate dal limite in norma H^1 per i teoremi di traccia o per definizione di chiusura), concludiamo che $(H_0^1(I), \langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1})$ è esso stesso uno spazio di Hilbert.

2. Derivazione della Formulazione Debole

Data l'equazione differenziale classica:

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + \psi = f,$$

moltiplichiamo ambo i membri per una generica funzione test $h \in H_0^1(I)$ e integriamo sul dominio I:

$$\int_I \left(-\frac{d^2\psi}{dx^2} + \psi\right) h\,dx = \int_I fh\,dx.$$

Sfruttando la linearità dell'integrale e applicando l'integrazione per parti al termine con la derivata seconda:

$$\int_I -\frac{d^2\psi}{dx^2} h\,dx = \underbrace{\left[-\frac{d\psi}{dx}h\right]_{\partial I}}_{=0} + \int_I \frac{d\psi}{dx}\frac{dh}{dx}\,dx.$$

Il termine di bordo si annulla rigorosamente perché $h \in H_0^1(I)$, e dunque per definizione $h|_{\partial I} = 0$. L'equazione integrale risultante è esattamente quella richiesta dalla traccia:

$$\int_I \psi h\,dx + \int_I \frac{d\psi}{dx}\frac{dh}{dx}\,dx = \int_I fh\,dx.$$

3. Applicazione del Teorema di Riesz

Rileggiamo l'equazione debole alla luce della definizione di prodotto scalare data al punto 1. L'equazione si può riscrivere come:

$$\langle\psi, h\rangle_{H^1} = \int_I fh\,dx, \quad \forall h \in H_0^1(I).$$

Definiamo il funzionale lineare $F : H_0^1(I) \to \mathbb{R}$ come $F(h) = \int_I fh\,dx$.

Per applicare il Teorema di Riesz, dobbiamo dimostrare che F è un funzionale **continuo** (limitato) rispetto alla norma H^1.

1. Poiché $f \in C^\infty(I)$ e il dominio I è compatto, $f \in L^2(I)$, quindi $\|f\|_{L^2} < \infty$.
2. Applichiamo la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in L^2:

$$|F(h)| = \left|\int_I fh\,dx\right| \le \|f\|_{L^2}\|h\|_{L^2}.$$

3. Osserviamo, dalla definizione della norma data nell'Hint, che:

$$\|h\|_{H^1}^2 = \|h\|_{L^2}^2 + \|h'\|_{L^2}^2 \implies \|h\|_{L^2}^2 \le \|h\|_{H^1}^2 \implies \|h\|_{L^2} \le \|h\|_{H^1}.$$

4. Combinando le disuguaglianze:

$$|F(h)| \le \|f\|_{L^2}\|h\|_{H^1}.$$

Essendo $\|f\|_{L^2}$ una costante, F è limitato. Per il **Teorema di Rappresentazione di Riesz**, in uno spazio di Hilbert ogni funzionale lineare continuo può essere rappresentato univocamente da un elemento dello spazio tramite il prodotto scalare. Esiste quindi un unico $\psi_0 \in H_0^1(I)$ tale che:

$$\langle\psi_0, h\rangle_{H^1} = F(h) \quad \forall h \in H_0^1(I).$$

Questa uguaglianza coincide esattamente con la tesi da dimostrare.

□

Traccia dell'Esercizio 5 $\psi(x_0) = 0$

Sia $I = [0, 1]$. Si consideri l'equazione differenziale:

$$-\frac{d\psi}{dx} + \psi = f, \quad \text{con } f \in L^2(I).$$

Si definisca la mappa $K : L^2(I) \to L^2(I)$ tale che $\psi = K(f)$ è soluzione dell'equazione. Si discuta se K è limitato, compatto e/o positivo.

Soluzione. **1. Condizione per la Linearità**

Per stabilire quale condizione al contorno rende la mappa $K : f \mapsto \psi$ un operatore lineare, analizziamo la struttura della soluzione generale dell'equazione differenziale $-\psi' + \psi = f$. La soluzione può essere scritta come somma di una soluzione particolare lineare rispetto a f (diciamo $K_0 f$, ad esempio l'integrale con estremo fisso) e della soluzione generale dell'omogenea:

$$\psi(x; f) = (K_0 f)(x) + Ce^x.$$

La costante C è determinata dalla condizione al contorno. Affinché K sia un operatore lineare, deve soddisfare la proprietà di omogeneità $K(\lambda f) = \lambda K(f)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Sostituendo:

$$\begin{aligned} K(\lambda f) &= \lambda(K_0 f) + Ce^x \\ \lambda K(f) &= \lambda\left((K_0 f) + Ce^x\right) = \lambda(K_0 f) + \lambda Ce^x. \end{aligned}$$

Uguagliando le due espressioni, otteniamo la condizione necessaria:

$$Ce^x = \lambda Ce^x \implies C(1 - \lambda) = 0 \quad \forall \lambda.$$

Questo implica necessariamente $C = 0$. Pertanto, la condizione al contorno fissata a priori deve essere tale da annullare identicamente la componente omogenea. Se fissiamo la condizione in un punto x_0, dobbiamo avere:

$$\psi(x_0) = 0 \implies Ce^{x_0} = 0 \implies C = 0.$$

Concludiamo che solo una condizione al contorno **omogenea** garantisce la linearità dell'operatore K.

2. Costruzione dell'Operatore e Kernel

Risolviamo l'equazione con il metodo della variazione delle costanti o fattore integrante, imponendo $\psi(x_0) = 0$. L'equazione $\psi' - \psi = -f$ moltiplicata per e^{-x} diventa $\frac{d}{dx}(e^{-x}\psi) = -e^{-x} f$. Integrando tra x_0 e x:

$$e^{-x}\psi(x) - e^{-x_0}\underbrace{\psi(x_0)}_{=0} = -\int_{x_0}^{x} e^{-y} f(y)\, dy.$$

Da cui otteniamo la forma esplicita dell'operatore:

$$(Kf)(x) = -\int_{x_0}^{x} e^{x-y} f(y)\, dy = \int_0^1 A(x, y) f(y)\, dy.$$

Il kernel integrale $A(x, y)$ è definito come:

$$A(x, y) = \begin{cases} -e^{x-y} & \text{se } y \text{ è compreso tra } x_0 \text{ e } x \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

3. Limitatezza e Compattezza

Un operatore integrale K su $L^2(I)$ è **compatto** (e quindi limitato) se è di classe *Hilbert-Schmidt*, condizione equivalente all'appartenenza del kernel a $L^2(I \times I)$. Mostriamo che la definizione spettrale di operatore Hilbert-Schmidt coincide con la condizione L^2 sul nucleo integrale. Sia $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormale di $L^2(I)$. La definizione è:

$$\|K\|_{HS}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Ke_n\|^2.$$

L'azione dell'operatore integrale su un elemento della base è data da:

$$(Ke_n)(x) = \int_I A(x,y)e_n(y)\,dy = \langle \overline{A(x,\cdot)}, e_n\rangle_{L_y^2},$$

dove l'integrale è interpretato come il prodotto scalare rispetto alla variabile y tra la funzione coniugata del kernel e il vettore di base. Sostituendo nella definizione di norma e scambiando la serie con l'integrale in dx (giustificato dalla non-negatività dei termini o dal teorema di Beppo Levi):

$$\|K\|_{HS}^2 = \int_I dx \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle \overline{A(x,\cdot)}, e_n\rangle \right|^2 \right).$$

Riconosciamo nella parentesi l'**Identità di Parseval**, la quale afferma che la somma dei moduli quadri dei coefficienti di Fourier eguaglia la norma quadra della funzione:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle \overline{A(x,\cdot)}, e_n\rangle \right|^2 = \left\| \overline{A(x,\cdot)} \right\|_{L_y^2}^2 = \int_I |A(x,y)|^2\,dy.$$

Sostituendo questo risultato nell'integrale esterno, otteniamo l'equivalenza cercata:

$$\|K\|_{HS}^2 = \int_I dx \int_I dy\, |A(x,y)|^2 = \|A\|_{L^2(I\times I)}^2.$$

Dobbiamo verificare che:

$$\|K\|_{HS}^2 = \int_0^1 \int_0^1 |A(x,y)|^2\,dy\,dx < \infty.$$

Sostituendo l'espressione del kernel:

$$\|K\|_{HS}^2 = \int_0^1 dx \left| \int_{x_0}^{x} e^{2(x-y)}\,dy \right|.$$

Calcoliamo l'integrale interno:

$$\int_{x_0}^{x} e^{2x}e^{-2y}\,dy = e^{2x}\left[-\frac{e^{-2y}}{2}\right]_{x_0}^{x} = \frac{e^{2x}}{2}(e^{-2x_0} - e^{-2x}) = \frac{1}{2}(e^{2(x-x_0)} - 1).$$

Poiché stiamo valutando il modulo (o considerando l'orientamento degli estremi di integrazione), la funzione integranda in x è limitata e continua sull'intervallo compatto $[0,1]$. Non è necessario calcolare il valore numerico esatto: essendo l'integrale di una funzione continua su un dominio limitato, il risultato è certamente finito.

$$\|K\|_{HS}^2 < \infty \implies K \text{ è compatto (e limitato).}$$

4. Positività

Verifichiamo se K è un operatore positivo, ovvero se $\langle f, Kf\rangle \geq 0$ per ogni f. Scegliamo la funzione test $f(x) = 1$ e consideriamo il caso standard $x_0 = 0$ (o un x_0 sufficientemente piccolo). La soluzione è:

$$(Kf)(x) = -\int_0^x e^{x-y}\,dy = 1 - e^x.$$

Il prodotto scalare risulta:

$$\langle 1, K1\rangle = \int_0^1 (1-e^x)\,dx = [x - e^x]_0^1 = (1-e) - (-1) = 2 - e.$$

Poiché $e > 2$, si ha $\langle 1, K1\rangle < 0$. L'operatore **non è positivo**.

5. Esempio di Positività

L'operatore K può risultare positivo modificando la condizione al contorno. Consideriamo il problema con condizione al bordo destro:

$$\begin{cases} -\psi' + \psi = f \\ \psi(1) = 0 \end{cases}$$

Valutiamo la forma quadratica $\langle f, Kf \rangle$. Poiché $Kf = \psi$ e $f = -\psi' + \psi$, abbiamo:

$$\langle f, Kf \rangle = \langle -\psi' + \psi, \psi \rangle = \int_0^1 (-\psi'(x) + \psi(x))\overline{\psi(x)}\, dx.$$

Assumendo funzioni reali per semplicità (il risultato si estende al caso complesso):

$$\int_0^1 (-\psi'\psi + \psi^2)\, dx = -\int_0^1 \psi\psi'\, dx + \|\psi\|^2.$$

Integriamo per parti il primo termine:

$$-\int_0^1 \psi\psi'\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dx}(\psi^2)\, dx = -\frac{1}{2}\left[\psi(x)^2\right]_0^1 = -\frac{1}{2}(\psi(1)^2 - \psi(0)^2).$$

Imponendo la condizione al contorno scelta $\psi(1) = 0$, otteniamo:

$$-\frac{1}{2}(0 - \psi(0)^2) = \frac{1}{2}\psi(0)^2 \geq 0.$$

Ricostruendo l'espressione completa:

$$\langle f, Kf \rangle = \frac{1}{2}\psi(0)^2 + \|\psi\|_{L^2}^2.$$

Essendo somma di termini non negativi, risulta $\langle f, Kf \rangle \geq 0$ per ogni f. In questo caso specifico, K è un **operatore positivo**.

□

Traccia dell'Esercizio 5 Hard

Sia $I = [0, 1]$. Si consideri l'equazione differenziale:

$$-\frac{d\psi}{dx} + \psi = f, \quad \text{con } f \in L^2(I).$$

Si definisca la mappa $K : L^2(I) \to L^2(I)$ tale che $\psi = K(f)$ è soluzione dell'equazione. Si discuta se K è limitato, compatto e/o positivo.

Soluzione. L'operatore K descritto nel testo del problema non è ben definito, in quanto l'operatore

$$D : H^1(I) \to L^2(I) \qquad \psi \mapsto -\frac{d\psi}{dx} + \psi$$

ha kernel non banale, composto da tutte le funzioni del tipo Ae^x. Per questo motivo, se l'operatore K dovesse definire la soluzione dell'equazione, $K(0) = Ae^x$ ma questo non lo renderebbe lineare se non per $A = 0$. Per rendere tutto il più generale possibile, quindi dobbiamo scegliere un qualsiasi **funzionale lineare ovunque definito** $C : L^2(I) \to \mathbb{C}$ e, data una $f \in L^2(I)$ con cui risolvere il problema, definire un insieme e degli operatori derivata con condizione iniziale

$$S_C = \{\psi \in H^1(I) | \psi(0) = C(f)\} \qquad D_C : S_C \to L^2(I)$$

a questo punto possiamo finalmente scrivere la forma degli opreatori K_C dipendenti dalla condizione iniziale e la cui forma analitica è data dall'integrale di Volterra

$$K_C : L^2(I) \to L^2(I) \qquad K_C(f) := e^x \left(C(f) - \int_0^x f(y)e^{-y} dy \right)$$

K_C ora è un buon operatore perchè è lineare, ovunque definito e vale che $K_C(D_C(\psi)) = \psi$ con $\psi \in S_C$

$$\begin{aligned}
K_C(-\psi' + \psi) &= e^x \left(C(f) + \int_0^x \frac{d\psi}{dy} e^{-y} dy - \int_0^x \psi e^{-y} dy \right) \\
&= e^x C(f) + e^x (\psi(y) e^{-y}|_0^x) + e^x \int_0^x \psi e^{-y} dy - e^x \int_0^x \psi e^{-y} dy \\
&= e^x C(f) + \psi(x) e^{-x} e^x - \psi(0) e^x \\
&= e^x (C(f) - \psi(0)) + \psi(x) \\
&= \psi(x)
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che $\psi \in S_C$. Perfetto, ora possiamo procdere. L'operatore descritto è somma di due componenti

$$K_C(f) = e^x C(f) - \int_0^x f(y) e^{x-y} dy = e^x C(f) - \int_0^1 f(y) \Theta(x-y) e^{x-y} dy = e^x C(f) - f \star (\Theta(x) e^x)$$

possiamo chiamare

$$K_C(f) = R_C(f) - T(f)$$

Analisi della convoluzione in $L^2([0,1])$ come in 2

Definiamo il sistema ortonormale in $L^2([0,1])$:

$$u_n(x) \doteq e^{2\pi i n x}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Il sistema $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è chiaramente ortonormale rispetto al prodotto scalare standard: $\langle u_n, u_m \rangle = \delta_{nm}$.

Per dimostrarne la completezza, mostriamo che il complemento ortogonale del sottospazio generato da $\{u_n\}$ contiene solo il vettore nullo. Sia $f \in L^2([0,1])$ tale che $\langle f, u_n \rangle = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

$$\langle f, u_n \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{u_n(x)} \, dx = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} \, dx = 0.$$

Gli integrali sopra corrispondono esattamente ai coefficienti di Fourier di f, denotati con $\hat{f}_n$. L'ipotesi $\langle f, u_n \rangle = 0, \forall n$ implica $\hat{f}_n = 0, \forall n$. Per il **Teorema di Unicità** della serie di Fourier (conseguenza della densità dei polinomi trigonometrici e della completezza di L^2), una funzione L^2 con tutti i coefficienti di Fourier nulli è nulla quasi ovunque.

$$f = 0 \quad \text{q.o.}$$

Pertanto, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ è una base ortonormale completa (Base di Hilbert) per $\mathcal{H}$.
Per dimostrare che l'operatore T è **compatto** ($T \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$), verifichiamo la condizione più forte che T sia un operatore di Hilbert-Schmidt. Un operatore T è di Hilbert-Schmidt se, data una base ortonormale $\{e_k\}$, la quantità $\|T\|_{HS}^2 \doteq \sum_k \|Te_k\|^2$ è finita.

Scegliamo come base proprio gli autovettori $\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Poiché $Tu_n = \lambda_n u_n$, abbiamo:

$$\|Tu_n\|^2 = \|\lambda_n u_n\|^2 = |\lambda_n|^2 \|u_n\|^2 = |\lambda_n|^2.$$

La norma Hilbert-Schmidt è dunque data dalla serie degli autovalori al quadrato:

$$\|T\|_{HS}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\lambda_n|^2.$$

Analizziamo i termini λ_n. Dalla definizione dell'operatore di convoluzione su $[0,1]$, gli autovalori sono dati dai coefficienti di Fourier del nucleo g:

$$\lambda_n = \int_0^1 g(z) e^{-2\pi i n z} \, dz = \hat{g}_n.$$

l'autovalore coincide esattamente con il coefficiente di Fourier $\hat{g}_n$.

Sostituendo nella somma:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\lambda_n|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2.$$

Poiché per ipotesi $g \in L^2([0,1])$, l'**Identità di Parseval** garantisce che la somma dei quadrati dei suoi coefficienti di Fourier converga al quadrato della norma della funzione:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2 = \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Di conseguenza:

$$\|T\|_{HS}^2 = \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

L'operatore T è dunque di Hilbert-Schmidt. Poiché la classe degli operatori di Hilbert-Schmidt è contenuta in quella degli operatori compatti ($\mathcal{B}_{HS} \subset \mathcal{B}_\infty$), concludiamo che T è un operatore compatto.

Analisi dell'operatore risolvente K

1. Limitatezza

L'operatore K_C è limitato se e solo se il funzionale C è limitato.

$\Rightarrow$ Se C è limitato, allora per la disuguaglianza triangolare:

$$\|K_C f\|_{L^2} \leq \|Tf\|_{L^2} + |C(f)|\|e^x\|_{L^2}.$$

Essendo T limitato e C limitato per ipotesi, K è limitato.

$\Leftarrow$ Se K è limitato, allora $R_C = K - T$ è differenza di operatori limitati, dunque è limitato. Poiché $R_C(f) = C(f)e^x$, la limitatezza di R implica necessariamente la limitatezza del funzionale C.

2. Compattezza

Assumendo C limitato (condizione necessaria per la limitatezza di K), l'operatore K risulta sempre compatto.

- L'operatore T è di Hilbert-Schmidt, pertanto, T è compatto.
- L'operatore $R_C(f) = C(f)e^x$ ha immagine unidimensionale, generata dal vettore e^x. Essendo un operatore di rango finito limitato, R_C è compatto. (Da esercitazione di prof. Costeri)

Poiché lo spazio degli operatori compatti è un sottospazio vettoriale, $K_C = T + R_C$ è compatto. Per il Teorema di Rappresentazione di Riesz, possiamo esplicitare la struttura di R_C: esiste un'unica $g \in L^2(I)$ tale che $C(f) = \langle g, f\rangle$, da cui $R_C(f) = R_g(f) = e^x\langle g, f\rangle$.

3. Positività

L'operatore K_C non è, in generale, positivo. Consideriamo il caso $\psi(0) = 0$ (che implica $C \equiv 0$). Valutiamo la parte reale della forma quadratica associata nel campo complesso.

Consideriamo il prodotto scalare standard in L^2:

$$\langle K_0 f, f\rangle = \int_0^1 (-\psi'(x) + \psi(x))\overline{\psi(x)}\, dx.$$

Sfruttiamo l'identità per la derivata del modulo quadro: $\frac{d}{dx}|\psi|^2 = \psi'\bar{\psi} + \psi\bar{\psi}' = 2\,\mathrm{Re}(\psi'\bar{\psi})$. Quindi, integrando per parti o usando la suddetta identità:

$$\mathrm{Re}\int_0^1 -\psi'(x)\overline{\psi(x)}\, dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d}{dx}|\psi(x)|^2\, dx = -\frac{1}{2}\left(|\psi(1)|^2 - |\psi(0)|^2\right).$$

Sostituendo nell'espressione della forma quadratica otteniamo:

$$\mathrm{Re}\langle K_0 f, f\rangle = \|\psi\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}|\psi(1)|^2 + \frac{1}{2}|\psi(0)|^2. \tag{1}$$

Essendo nel caso $\psi(0) = 0$, l'espressione si riduce a:

$$\mathrm{Re}\langle K_0 f, f\rangle = \|\psi\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}|\psi(1)|^2.$$

Per mostrare che l'operatore non è positivo, scegliamo la funzione test (reale, valida anche in ambito complesso) $\psi(x) = x$, che implica $f(x) = x - 1$. Si ottiene:

$$\mathrm{Re}\langle K_0 f, f\rangle = \int_0^1 |x|^2\,dx - \frac{1}{2}|1|^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} < 0.$$

Esistono quindi vettori per cui la forma quadratica assume valori negativi, violando la condizione di positività.
Per costruire un operatore K_C positivo, osserviamo l'espressione generale ricavata sopra:

$$\mathrm{Re}\langle K_C f, f\rangle = \|\psi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}|\psi(0)|^2 - \frac{1}{2}|\psi(1)|^2. \tag{2}$$

Per garantire la positività è sufficiente eliminare il termine negativo imponendo la condizione al bordo $\psi(1) = 0$. Restringiamoci dunque alla classe dei funzionali lineari che impongono tale condizione, ad esempio:

$$C(f) = \int_0^1 e^{-y} f(y)\,dy.$$

In questo caso, la forma quadratica diventa $\mathrm{Re}\langle K_C f, f\rangle = \|\psi\|^2 + \frac{1}{2}|\psi(0)|^2 \geq 0$ per ogni $f \neq 0$.

L'analisi completa per condizioni necessarie e sufficienti più generali risulta complessa e non banale al di fuori di queste costruzioni dirette. $\square$

Traccia dell'Esercizio 6

Su $L^2(\mathbb{R})$ si consideri l'operatore differenziale:

$$T = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + i\frac{d}{dx}.$$

Si discuta se T ammette estensioni autoaggiunte calcolando eventualmente gli indici di difetto.

Soluzione. Per analizzare le proprietà di autoaggiunzione di T, cerchiamo di ricondurlo a una forma canonica nota tramite una trasformazione unitaria. L'operatore ricorda molto l'Hamiltoniana dell'Oscillatore Armonico unidimensionale ($H_{HO} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$), con l'aggiunta di un termine del primo ordine.

1. Completamento del Quadrato

Riscriviamo l'operatore utilizzando l'operatore momento $p = -i\frac{d}{dx}$ (in unità con $\hbar = 1$). Notiamo che $i\frac{d}{dx} = -p$.

$$T = p^2 + x^2 - p.$$

L'idea è di "completare il quadrato" per la parte dipendente dal momento, trattando p come una variabile algebrica (lecito poiché stiamo cercando una trasformazione unitaria che agisce come una traslazione nello spazio dei momenti). Osserviamo che:

$$\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 = p^2 - p + \frac{1}{4}.$$

Pertanto possiamo scrivere:

$$T = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 - \frac{1}{4}.$$

2. Equivalenza Unitaria

Vogliamo eliminare lo shift $-1/2$ nell'operatore momento. Sappiamo dalla meccanica quantistica che l'operatore di posizione x è il generatore delle traslazioni nello spazio dei momenti. Consideriamo l'operatore unitario $U : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definito dalla moltiplicazione per una fase (trasformazione di gauge):

$$(U\psi)(x) = e^{i\frac{1}{2}x}\psi(x).$$

L'aggiunto è $(U^\dagger\psi)(x) = e^{-i\frac{1}{2}x}\psi(x)$. Calcoliamo come trasforma l'operatore momento p:

$$
\begin{aligned}
(U^\dagger pU\psi)(x) &= e^{-ix/2}\left(-i\frac{d}{dx}\right)\left(e^{ix/2}\psi(x)\right) \\
&= e^{-ix/2}\left[-i\left(\frac{i}{2}e^{ix/2}\psi(x) + e^{ix/2}\psi'(x)\right)\right] \\
&= e^{-ix/2}e^{ix/2}\left(\frac{1}{2}\psi(x) - i\psi'(x)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + p\right)\psi(x).
\end{aligned}
$$

Quindi $U^\dagger pU = p + \frac{1}{2}$, oppure equivalentemente $U\left(p + \frac{1}{2}\right)U^\dagger = p$. Applichiamo questa trasformazione all'operatore T:

$$
\begin{aligned}
\tilde{T} \doteq UTU^\dagger &= U\left[\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 - \frac{1}{4}\right]U^\dagger \\
&= \left[U\left(p - \frac{1}{2}\right)U^\dagger\right]^2 + Ux^2U^\dagger - \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Poiché U è funzione solo di x, commuta con x^2. Inoltre, dall'inverso della relazione trovata sopra ($p \to p - 1/2$ sotto l'azione di $U^\dagger \cdot U$), il termine al quadrato diventa semplicemente p^2. Formalmente:

$$
U\left(-i\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}\right)U^\dagger = -i\frac{d}{dx}.
$$

Dunque l'operatore trasformato è:

$$
\tilde{T} = p^2 + x^2 - \frac{1}{4} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - \frac{1}{4}.
$$

3. Analisi dell'Operatore Trasformato

L'operatore $\tilde{T}$ è (a meno della costante additiva $-1/4$, che non influenza le proprietà di dominio o autoaggiunzione per la nota qui sotto) l'Hamiltoniana dell'Oscillatore Armonico Quantistico:

$$
H_{HO} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2.
$$

È un risultato classico e fondamentale (dimostrabile ad esempio notando che ha uno spettro discreto completo di autofunzioni in $L^2(\mathbb{R})$, le funzioni di Hermite) che l'Oscillatore Armonico definito su $C_c^\infty(\mathbb{R})$ (o sullo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) è essenzialmente autoaggiunto. Ciò significa che la sua chiusura $\overline{H}_{HO}$ è autoaggiunta e unica.

Gli indici di difetto di un operatore essenzialmente autoaggiunto sono $(0, 0)$.

Nota: Autoaggiunzione di $S = T - I$. Ricordiamo che un operatore T è essenzialmente autoaggiunto se e solo se la sua chiusura $\overline{T}$ è autoaggiunta, ovvero $\overline{T} = T^*$.

Consideriamo l'operatore $S = T - I$. Poiché l'operatore identità I è limitato e autoaggiunto, valgono le seguenti proprietà:

1. L'aggiunto di S è dato da:
$$
S^* = (T - I)^* = T^* - I^* = T^* - I
$$

2. La chiusura di S è data da:
$$
\overline{S} = \overline{T - I} = \overline{T} - I
$$

Dall'ipotesi che T è essenzialmente autoaggiunto, abbiamo $\overline{T} = T^*$. Sostituendo questa uguaglianza nelle espressioni precedenti otteniamo:

$$
\overline{S} = \overline{T} - I = T^* - I = S^*
$$

Poiché $\overline{S} = S^*$, l'operatore $\overline{S}$ è autoaggiunto, il che implica per definizione che S è essenzialmente autoaggiunto. □

Conclusione

Poiché T è unitariamente equivalente a un operatore essenzialmente autoaggiunto ($\tilde{T}$), anche T è essenzialmente autoaggiunto sul dominio iniziale delle funzioni test. Il motivo è l'esercitazione 2 della prof.Costeri nella quale dice che

$$\overline{T'} = U\overline{T}U^\star \qquad \text{e} \qquad T'^\star = U^\star T^\star U$$

il motivo è perchè U è unitario quindi limitato.

- T ammette un'unica estensione autoaggiunta (la sua chiusura $\bar{T}$).
- Gli indici di difetto sono $n_+ = n_- = 0$.

Osservazione (Nota sul Metodo della Coniugazione)**.** Si poteva anche osservare che, pur non essendo T reale ($T \neq \bar{T}$), esso commuta con l'operatore anti-unitario $\mathcal{J} = \mathcal{PC}$, dove $\mathcal{P}$ è la parità ($x \to -x$) e $\mathcal{C}$ la coniugazione complessa. Infatti:

$$\mathcal{PC}\left(-\partial_x^2 + x^2 + i\partial_x\right)(\mathcal{PC})^{-1} = -\partial_x^2 + (-x)^2 - i(-\partial_x) = T.$$

La commutazione con una coniugazione antiunitaria garantisce $n_+ = n_-$, assicurando l'esistenza di estensioni autoaggiunte, ma non la loro unicità (essenziale autoaggiunzione). Il metodo della trasformazione unitaria è quindi più forte in questo contesto.

□

Traccia dell'Esercizio 7

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e si consideri l'equazione:

$$T\psi = \lambda\psi + f,$$

con $T = T^* \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ (operatore compatto autoaggiunto), $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $f \in \mathcal{H}$. Si provi che, se λ è autovalore di T, allora l'equazione ha infinite soluzioni (sottointendendo: qualora sia risolubile).

Soluzione. Riscriviamo l'equazione nella forma operatoriale omogenea:

$$(T - \lambda I)\psi = f.$$

Definiamo l'operatore $S_\lambda \doteq T - \lambda I$.

1. Proprietà Spettrali Preliminari

Poiché T è autoaggiunto, i suoi autovalori sono reali. Essendo λ un autovalore per ipotesi, segue che $\lambda \in \mathbb{R}$. Inoltre, essendo T e I operatori limitati e autoaggiunti, anche S_λ è limitato e autoaggiunto:

$$S_\lambda^* = (T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda}I^* = T - \lambda I = S_\lambda.$$

Dato che T è compatto e $\lambda \neq 0$, l'operatore S_λ è un **operatore di Fredholm** esattamente come nell'esercizio 1. Valgono le seguenti proprietà, dimostrate nell'esercizio 1:

1. Il nucleo $\mathrm{Ker}(S_\lambda)$ ha dimensione finita.
2. Il rango $\mathrm{Ran}(S_\lambda)$ è chiuso in $\mathcal{H}$.

2. Analisi dell'Esistenza e Molteplicità

L'ipotesi che λ sia un autovalore di T implica che il nucleo di S_λ non è banale:

$$\mathrm{Ker}(S_\lambda) \neq \{0\}.$$

Sia $d = \dim(\mathrm{Ker}(S_\lambda)) \geq 1$.

Condizione di Risolubilità. Affinché l'equazione $S_\lambda \psi = f$ ammetta soluzioni, il termine noto f deve appartenere all'immagine dell'operatore. Poiché il rango è chiuso e l'operatore è autoaggiunto, vale la decomposizione ortogonale:

$$\mathrm{Ran}(S_\lambda) = (\mathrm{Ker}(S_\lambda^*))^\perp = (\mathrm{Ker}(S_\lambda))^\perp.$$

Quindi, l'equazione ammette soluzioni se e solo se $f \perp \mathrm{Ker}(S_\lambda)$. *Nota: Se f non soddisfa questa condizione, l'insieme delle soluzioni è vuoto. Assumeremo nel seguito che f sia compatibile o che l'esercizio richieda di discutere la cardinalità dell'insieme delle soluzioni nel caso in cui questo non sia vuoto.*

Struttura dello Spazio delle Soluzioni. Supponiamo che esista almeno una soluzione particolare ψ_p tale che $S_\lambda \psi_p = f$. La soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea è data dalla somma della soluzione particolare e della soluzione generale dell'equazione omogenea associata ($S_\lambda \phi = 0$). L'insieme delle soluzioni Σ è quindi lo spazio affine:

$$\Sigma = \psi_p + \mathrm{Ker}(S_\lambda) = \{\psi_p + \phi \mid \phi \in \mathrm{Ker}(S_\lambda)\}.$$

Poiché λ è un autovalore, esiste almeno un autovettore $u \neq 0$ tale che $u \in \mathrm{Ker}(S_\lambda)$. Consideriamo la famiglia di vettori:

$$\psi_\alpha = \psi_p + \alpha u, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Verifichiamo che sono soluzioni:

$$S_\lambda(\psi_\alpha) = S_\lambda \psi_p + \alpha S_\lambda u = f + \alpha \cdot 0 = f.$$

Essendo α un parametro continuo in $\mathbb{C}$, la famiglia $\{\psi_\alpha\}$ contiene infiniti elementi distinti. Pertanto, se l'equazione è risolubile, essa ammette infinite soluzioni.

□

Traccia dell'Esercizio 7 (Metodo Spettrale)

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e si consideri l'equazione:

$$T\psi = \lambda\psi + f,$$

con $T = T^* \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $f \in \mathcal{H}$. Si provi che, se λ è autovalore di T, allora l'equazione ha infinite soluzioni (assumendo la compatibilità del termine noto).

Soluzione. Utilizziamo la decomposizione spettrale fornita dal **Teorema di Hilbert** per operatori compatti autoaggiunti.

1. Decomposizione Spettrale di T

Poiché T è compatto e autoaggiunto, in virtù del Teorema 62, possiamo scrivere T come somma (nel senso della convergenza uniforme) dei suoi proiettori spettrali:

$$T = \sum_n \mu_n P_n,$$

dove:

- $\{\mu_n\}$ sono gli autovalori non nulli di T (reali, poiché T è autoaggiunto).
- P_n è il proiettore ortogonale sull'autospazio $E_n = \mathrm{Ker}(T - \mu_n I)$.
- I proiettori sono mutuamente ortogonali: $P_n P_m = \delta_{nm} P_n$.

Inoltre, lo spazio di Hilbert si decompone nella somma diretta ortogonale degli autospazi e del nucleo di T:

$$\mathcal{H} = \mathrm{Ker}(T) \oplus \bigoplus_n E_n.$$

Di conseguenza, ogni vettore $\psi \in \mathcal{H}$ può essere scomposto univocamente come $\psi = \psi_0 + \sum_n P_n \psi$, dove $\psi_0 \in \mathrm{Ker}(T)$.

2. Proiezione dell'Equazione

L'equazione da risolvere è $(T - \lambda I)\psi = f$. Proiettiamo questa equazione sui vari autospazi applicando l'operatore P_k ad ambo i membri. Ricordando che $P_k T = T P_k = \mu_k P_k$, otteniamo:

$$P_k(T - \lambda I)\psi = P_k f \implies (\mu_k - \lambda)P_k\psi = P_k f.$$

Analizziamo anche la proiezione sul nucleo di T (se esiste). Sia P_{Ker} il proiettore su $\mathrm{Ker}(T)$. Poiché $TP_{\mathrm{Ker}} = 0$:

$$P_{\mathrm{Ker}}(T - \lambda I)\psi = -\lambda P_{\mathrm{Ker}}\psi = P_{\mathrm{Ker}} f \implies P_{\mathrm{Ker}}\psi = -\frac{1}{\lambda}P_{\mathrm{Ker}} f.$$

Questa componente è sempre univocamente determinata poiché $\lambda \neq 0$.

3. Analisi delle componenti sugli autospazi

Dobbiamo risolvere $(\mu_k - \lambda)P_k\psi = P_k f$ per ogni k. Distinguiamo due casi:

Caso A: $\mu_k \neq \lambda$ In questo caso il coefficiente $(\mu_k - \lambda)$ è non nullo. Possiamo invertire scalarmente l'equazione:

$$P_k\psi = \frac{1}{\mu_k - \lambda}P_k f.$$

La componente della soluzione lungo l'autospazio E_k è fissata univocamente dal termine noto f.

Caso B: $\mu_k = \lambda$ Poiché per ipotesi λ è un autovalore di T, esiste un indice (diciamo j) tale che $\mu_j = \lambda$. L'equazione proiettata su E_j diventa:

$$(\lambda - \lambda)P_j\psi = P_j f \implies 0 \cdot P_j\psi = P_j f.$$

Da qui deduciamo:

1. **Compatibilità:** Affinché l'equazione abbia soluzione, deve essere $P_j f = 0$, ovvero f deve essere ortogonale all'autospazio E_λ relativo all'autovalore λ.
2. **Indeterminatezza:** Se la condizione $P_j f = 0$ è soddisfatta, l'equazione $0 \cdot P_j\psi = 0$ è verificata per **qualsiasi** vettore $v \in E_j = \mathrm{Ran}(P_j)$.

4. Costruzione della Soluzione Generale

Ricostruiamo la soluzione ψ sommando tutte le componenti trovate:

$$\psi = P_{\mathrm{Ker}}\psi + \sum_{\mu_n \neq \lambda} P_n\psi + P_\lambda\psi.$$

Sostituendo le espressioni ricavate:

$$\psi = \underbrace{-\frac{1}{\lambda}P_{\mathrm{Ker}} f + \sum_{\mu_n \neq \lambda} \frac{1}{\mu_n - \lambda}P_n f}_{\psi_{\text{fissata}}} + \underbrace{v}_{\psi_{\text{arbitraria}}},$$

dove v è un qualsiasi vettore appartenente all'autospazio E_λ (cioè $P_\lambda v = v$).

Poiché λ è un autovalore, la dimensione di E_λ è almeno 1 (in realtà è finita ma non nulla, per il Teorema 61). Possiamo quindi scegliere $v = \alpha u$, dove $u \in E_\lambda$ è un autovettore normalizzato e $\alpha \in \mathbb{C}$ è un parametro arbitrario. Poiché α può assumere infiniti valori, l'equazione ammette **infinite soluzioni**.

$\square$

Traccia dell'Esercizio 8

Si consideri una particella di massa $m > 0$ in $\mathbb{R}^3$, soggetta a un potenziale centrale $V(r)$. Sia dato l'operatore:

$$T = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}},$$

dove $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\mathbf{p}}$ sono gli operatori posizione e impulso. Si mostri che, per ogni $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ con $\|\psi\| = 1$ (e nel dominio dell'operatore), vale l'equazione di evoluzione:

$$\frac{d}{dt} \langle T \rangle = \frac{2}{m} \left\langle \hat{\mathbf{p}}^2 \right\rangle - 2 \langle \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V \rangle .$$

Soluzione. La risoluzione dell'esercizio si basa sull'applicazione del **Teorema di Ehrenfest**, che lega la derivata temporale del valore di aspettazione di un osservabile al commutatore dell'osservabile con l'Hamiltoniana.

Ipotesi minimali per il Teorema di Ehrenfest

Sia H l'operatore Hamiltoniano autoaggiunto su un dominio denso $D(H) \subset \mathcal{H}$ e sia A un'osservabile autoaggiunta (con $\partial_t A = 0$) definita su $D(A)$. L'evoluzione temporale è data dal gruppo unitario fortemente continuo $U(t) = e^{-itH/\hbar}$.

1. Ruolo del Teorema di Stone e Domini

Per poter derivare rispetto al tempo il valore di aspettazione $\langle A \rangle_{\psi_t}$, dobbiamo garantire che lo stato ψ_t sia derivabile. Il **Teorema di Stone** stabilisce una corrispondenza biunivoca tra generatori autoaggiunti e gruppi unitari, affermando che la relazione:

$$\frac{d}{dt} U(t)\psi = -\frac{i}{\hbar} H U(t)\psi$$

è valida (nella topologia forte) **se e solo se** $\psi \in D(H)$. Pertanto, l'ipotesi $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ **non è sufficiente**. Se $\psi \in L^2 \setminus D(H)$, la funzione $t \mapsto \psi_t$ è continua ma non derivabile, rendendo privo di senso il membro sinistro dell'equazione di Ehrenfest.

Ipotesi minimali: Affinché la relazione di Ehrenfest valga come uguaglianza tra forme quadratiche all'istante t, richiediamo:

1. $\psi_t \in D(H)$ (per l'esistenza della derivata temporale);
2. $\psi_t \in D(A)$ (per l'esistenza del valore di aspettazione).

2. Derivazione come Forma Quadratica

Sotto le ipotesi sopra citate, non è necessario che $\psi_t \in D(HA)$ o $D(AH)$ (cioè che il commutatore esista come operatore). Interpretiamo il commutatore come una forma quadratica derivando il prodotto scalare:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle \psi_t, A\psi_t \rangle &= \langle \dot{\psi}_t, A\psi_t \rangle + \langle \psi_t, A\dot{\psi}_t \rangle \\
&= \left\langle -\frac{i}{\hbar} H\psi_t, A\psi_t \right\rangle + \left\langle \psi_t, A \left(-\frac{i}{\hbar} H\psi_t \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{i\hbar} \left(\langle A\psi_t, H\psi_t \rangle - \langle H\psi_t, A\psi_t \rangle \right) .
\end{aligned}$$

Definendo la media del commutatore in senso debole:

$$\langle [H, A] \rangle_\psi^{weak} := \langle H\psi, A\psi \rangle - \langle A\psi, H\psi \rangle,$$

otteniamo la relazione $\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{i}{\hbar} \langle [H, A] \rangle^{weak}$.

Calcolo del Commutatore

L'Hamiltoniana per una particella in un potenziale $V(r)$ è data da:

$$H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}).$$

Dobbiamo calcolare $[T, H]$. Per linearità:

$$[T, H] = \left[T, \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\right] + [T, V(\hat{\mathbf{r}})].$$

1. Commutatore con l'Energia Cinetica

Calcoliamo $\left[T, \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\right] = \frac{1}{2m}[\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2]$. Poiché l'operatore impulso commuta con se stesso ($[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = 0$), il termine $\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{r}}$ si semplifica notevolmente usando la regola $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$:

$$[\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = \hat{\mathbf{p}}\cdot[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] + \underbrace{[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2]}_{0}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{p}}\cdot[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2].$$

Analogamente per il primo termine:

$$[\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2]\cdot\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{r}}\cdot\underbrace{[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2]}_{0} = [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2]\cdot\hat{\mathbf{p}}.$$

Utilizziamo l'identità fondamentale $[x_j, \hat{\mathbf{p}}^2] = 2i\hbar p_j$, che in notazione vettoriale si scrive $[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = 2i\hbar\hat{\mathbf{p}}$. Sostituendo:

- Primo termine: $[\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = (2i\hbar\hat{\mathbf{p}})\cdot\hat{\mathbf{p}} = 2i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2$.
- Secondo termine: $[\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = \hat{\mathbf{p}}\cdot(2i\hbar\hat{\mathbf{p}}) = 2i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2$.

Sommando i contributi:

$$\left[T, \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\right] = \frac{1}{2m}(2i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2 + 2i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2) = \frac{4i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} = \frac{2i\hbar}{m}\hat{\mathbf{p}}^2.$$

2. Commutatore con l'Energia Potenziale

Calcoliamo $[T, V(\hat{\mathbf{r}})]$. Poiché $V(\hat{\mathbf{r}})$ è funzione solo delle coordinate, commuta con $\hat{\mathbf{r}}$. Quindi:

$$[\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{p}}, V] = \hat{\mathbf{r}}\cdot[\hat{\mathbf{p}}, V] \quad \text{e} \quad [\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{r}}, V] = [\hat{\mathbf{p}}, V]\cdot\hat{\mathbf{r}}.$$

Utilizziamo la relazione fondamentale $[\hat{\mathbf{p}}, V] = -i\hbar\nabla V$.

- Primo termine: $\hat{\mathbf{r}}\cdot[\hat{\mathbf{p}}, V] = \hat{\mathbf{r}}\cdot(-i\hbar\nabla V) = -i\hbar(\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla V)$.
- Secondo termine: $[\hat{\mathbf{p}}, V]\cdot\hat{\mathbf{r}} = (-i\hbar\nabla V)\cdot\hat{\mathbf{r}} = -i\hbar(\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla V)$ (dato che V è scalare).

Sommando i contributi:

$$[T, V] = -2i\hbar(\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla V).$$

Conclusione

Unendo i risultati parziali, il commutatore totale è:

$$[T, H] = \frac{2i\hbar}{m}\hat{\mathbf{p}}^2 - 2i\hbar(\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla V).$$

Inserendo questo risultato nell'equazione di Ehrenfest derivata all'inizio:

$$\frac{d}{dt}\langle T\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle \frac{2i\hbar}{m}\hat{\mathbf{p}}^2 - 2i\hbar(\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla V)\right\rangle.$$

Semplificando il fattore $i\hbar$, otteniamo la tesi:

$$\frac{d}{dt}\langle T\rangle = \frac{2}{m}\left\langle\hat{\mathbf{p}}^2\right\rangle - 2\left\langle\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla V\right\rangle.$$

$\square$

Traccia dell'Esercizio 9 Versione Hard

Siano $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ e $V : \mathcal{D}(V) \to \mathcal{H}$ due operatori su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ tali che:

(a) T è autoaggiunto ($T = T^*$);

(b) V è simmetrico;

(c) V è T-limitato con limite relativo $a < 1$. Ovvero, $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(V)$ ed esistono costanti $a \in [0, 1)$ e $b \geq 0$ tali che:

$$\|V\psi\| \leq a\|T\psi\| + b\|\psi\|, \quad \forall\psi \in \mathcal{D}(T).$$

Si mostri che l'operatore somma $S \doteq T + V$, definito su $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T)$, è autoaggiunto.

Soluzione. La dimostrazione si basa sul criterio di suriettività dei ranghi per operatori simmetrici. L'obiettivo è dimostrare che esiste un valore $\nu > 0$ sufficientemente grande tale che:

$$\mathrm{Ran}(T + V \pm i\nu I) = \mathcal{H}.$$

Se ciò è vero, poiché $T + V$ è simmetrico, esso è necessariamente autoaggiunto.

1. Stime sul Risolvente dell'Operatore Non Perturbato

Consideriamo l'operatore non perturbato T. Poiché T è autoaggiunto, per ogni $\mu > 0$ e per ogni $\phi \in \mathcal{D}(T)$ vale l'identità pitagorica:

$$\|(T \pm i\mu I)\phi\|^2 = \langle (T \pm i\mu I)\phi, (T \pm i\mu I)\phi\rangle = \|T\phi\|^2 + \mu^2\|\phi\|^2.$$

(I termini misti si cancellano per simmetria di T). Da questa uguaglianza seguono immediatamente due disuguaglianze fondamentali. Ponendo $\psi = (T + i\mu I)\phi$ (e quindi $\phi = (T + i\mu I)^{-1}\psi$, dato che quell'operatore è invertibile essendo T autoaggiunto), abbiamo:

1. $\mu^2\|\phi\|^2 \leq \|\psi\|^2 \implies \left\|(T + i\mu I)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\mu}$.
2. $\|T\phi\|^2 \leq \|\psi\|^2 \implies \left\|T(T + i\mu I)^{-1}\right\| \leq 1$.

2. Stima dell'Operatore Perturbativo

Vogliamo stimare "quanto disturba" V rispetto al risolvente di T. Consideriamo il vettore

$$\phi = (T + i\mu I)^{-1}\psi$$

per un generico $\psi \in \mathcal{H}$. Applichiamo la condizione di limitatezza relativa di V (ipotesi c):

$$\|V\phi\| \leq a\|T\phi\| + b\|\phi\|.$$

Sostituendo ϕ con l'espressione in termini di ψ e utilizzando le stime del punto 1:

$$\begin{aligned}
\left\|V(T + i\mu I)^{-1}\psi\right\| &\leq a\left\|T(T + i\mu I)^{-1}\psi\right\| + b\left\|(T + i\mu I)^{-1}\psi\right\| \\
&\leq a \cdot 1 \cdot \|\psi\| + b \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \|\psi\| \\
&= \left(a + \frac{b}{\mu}\right)\|\psi\|.
\end{aligned}$$

3. Costruzione dell'Inversa tramite Serie di Neumann

Definiamo l'operatore $U_\mu \doteq V(T + i\mu I)^{-1}$. Abbiamo appena dimostrato che la sua norma operatoriale è limitata da:

$$\|U_\mu\| \leq a + \frac{b}{\mu}.$$

Poiché per ipotesi $a < 1$, possiamo scegliere un valore $\mu = \nu$ sufficientemente grande tale che:

$$a + \frac{b}{\nu} < 1 \implies \|U_\nu\| < 1.$$

Intanto otteniamo che, avendo la norma limitata è un operatore limitato definito su tutto $\mathcal{H}$. Se la norma di un operatore U_ν è strettamente minore di 1, allora -1 non appartiene al suo spettro ($\sigma(U_\nu)$), e l'operatore $(I + U_\nu)$ è invertibile con inverso limitato). In particolare, il rango di $(I + U_\nu)$ è tutto lo spazio $\mathcal{H}$:

$$\text{Ran}(I + U_\nu) = \mathcal{H}.$$

4. Fattorizzazione e Conclusione

Consideriamo ora l'operatore perturbato $(T + V + i\nu I)$. Possiamo fattorizzarlo come segue per ogni $\phi \in \mathcal{D}(T)$:

$$\begin{aligned}(T + V + i\nu I)\phi &= (T + i\nu I)\phi + V\phi \\ &= \left[I + V(T + i\nu I)^{-1}\right](T + i\nu I)\phi \\ &= (I + U_\nu)(T + i\nu I)\phi.\end{aligned}$$

Analizziamo i ranghi di questa composizione:

- L'operatore $(T + i\nu I)$ mappa suriettivamente $\mathcal{D}(T)$ su $\mathcal{H}$ (poiché T è autoaggiunto).
- L'operatore $(I + U_\nu)$ mappa suriettivamente $\mathcal{H}$ su $\mathcal{H}$ (poiché $\|U_\nu\| < 1$).

La composizione di due mappe suriettive è suriettiva. Dunque:

$$\text{Ran}(T + V + i\nu I) = \mathcal{H}.$$

Un ragionamento perfettamente analogo vale per il segno opposto $-i\nu$, dimostrando che

$$\text{Ran}(T + V - i\nu I) = \mathcal{H}$$

. Avendo dimostrato che gli operatori di difetto sono suriettivi (o equivalentemente che gli indici di difetto sono $(0, 0)$), concludiamo che $T + V$ è autoaggiunto sul dominio $\mathcal{D}(T)$.

□

Traccia dell'Esercizio 9 Versione Soft - Confermata

Siano $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ e $V : \mathcal{D}(V) \to \mathcal{H}$ due operatori su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ tali che:

(a) T è autoaggiunto ($T = T^*$);

(b) V è simmetrico;

(c) V è T-limitato con limite relativo $a < 1$. Ovvero, $T \subset V$ ed esistono costanti $a \in [0, 1)$ e $b \geq 0$ tali che:

$$\|V\psi\| \leq a\|T\psi\| + b\|\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(T).$$

Si mostri che l'operatore somma $S \doteq T + V$, definito su $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T)$, è autoaggiunto.

Soluzione. $S = T + V$ sul dominio di di T è $2T$ che è autoaggiunto.

Traccia dell'Esercizio 10 Metodo I (non corretto)

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert con norma $\|\cdot\|$. Sia $\|\cdot\|'$ una seconda norma su $\mathcal{H}$ tale che $\exists C > 0$:

$$\|\psi\| \leq C \|\psi\|', \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Sia $T : D(T) \to \mathcal{H}$ un operatore simmetrico tale che $\exists \kappa > 0$:

$$\|T\psi\|' \leq \kappa \|\psi\|', \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Mostrare che $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

[Hint: Un operatore lineare chiuso tra spazi di Banach e con dominio denso (inteso come tutto lo spazio) è limitato]

Soluzione. Per dimostrare che $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ovvero che T è limitato rispetto alla norma standard $\|\cdot\|$), utilizzeremo il suggerimento fornito, che è un richiamo al Teorema del Grafico Chiuso. La strategia si divide in due passi logici:

1. Identificazione del dominio e dimostrazione che T è un operatore chiuso su $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$.
2. Applicazione del Teorema del Grafico Chiuso.

1. Analisi del Dominio e Chiusura

La seconda disuguaglianza fornita nel testo afferma che:

$$\|T\psi\|' \leq \kappa \|\psi\|', \quad \forall\psi \in \mathcal{H}.$$

L'uso del quantificatore $\forall\psi \in \mathcal{H}$ implica necessariamente che il dominio di T coincide con l'intero spazio di Hilbert:

$$D(T) = \mathcal{H}.$$

Inoltre, per ipotesi, T è un operatore **simmetrico**. Un operatore simmetrico T definito su tutto lo spazio di Hilbert è sempre un operatore **chiuso**. Dimostriamolo formalmente per completezza (senza dare per scontato il teorema di Hellinger-Toeplitz).

Sia $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ una successione tale che:

$$\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \psi \quad \text{e} \quad T\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \phi.$$

Dobbiamo mostrare che $\phi = T\psi$. Poiché T è simmetrico, per ogni $\eta \in \mathcal{H}$ vale l'uguaglianza:

$$\langle T\psi_n, \eta\rangle = \langle \psi_n, T\eta\rangle.$$

Passando al limite per $n \to \infty$ e sfruttando la continuità del prodotto scalare:

$$\lim_{n\to\infty} \langle T\psi_n, \eta\rangle = \langle \phi, \eta\rangle,$$

$$\lim_{n\to\infty} \langle \psi_n, T\eta\rangle = \langle \psi, T\eta\rangle.$$

Quindi:

$$\langle \phi, \eta\rangle = \langle \psi, T\eta\rangle.$$

Sfruttando nuovamente la simmetria di T sul membro di destra:

$$\langle \phi, \eta\rangle = \langle T\psi, \eta\rangle, \quad \forall\eta \in \mathcal{H}.$$

Poiché l'uguaglianza vale per ogni η, segue che $\phi = T\psi$. Abbiamo così dimostrato che il grafico di T è chiuso rispetto alla topologia indotta dalla norma $\|\cdot\|$.

2. Applicazione del Teorema del Grafico Chiuso

Siamo ora nelle seguenti condizioni:

- $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è un operatore lineare.
- $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert (e quindi di Banach) rispetto alla norma $\|\cdot\|$.
- T è un operatore **chiuso** rispetto a $\|\cdot\|$.
- $D(T) = \mathcal{H}$ (il dominio è l'intero spazio).

Il **Teorema del Grafico Chiuso** afferma che un operatore chiuso definito su tutto uno spazio di Banach a valori in uno spazio di Banach è necessariamente continuo (limitato). Pertanto:

$$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Osservazione (Sulle norme ausiliarie)**.** Le condizioni sulla norma ausiliaria $\|\cdot\|'$ e la limitatezza di T rispetto ad essa (ossia $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \|\cdot\|')$) sono condizioni sufficienti a garantire la buona definizione dell'operatore, ma la dimostrazione della limitatezza in norma standard $\|\cdot\|$ segue direttamente dalla struttura simmetrica dell'operatore e dal fatto che sia definito ovunque (Teorema di Hellinger-Toeplitz). L'esercizio è quindi risolubile in modo rigoroso basandosi primariamente sulle proprietà spettrali (Simmetria + Dominio totale $\implies$ Chiusura $\implies$ Limitatezza).

□

Traccia dell'Esercizio 10 Metodo II (confermato)

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert con norma $\|\cdot\|$. Sia $\|\cdot\|'$ una seconda norma su $\mathcal{H}$ tale che $\exists C > 0$:

$$\|\psi\| \leq C \|\psi\|', \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Sia $T : D(T) \to \mathcal{H}$ un operatore simmetrico tale che $\exists \kappa > 0$:

$$\|T\psi\|' \leq \kappa \|\psi\|', \quad \forall \psi \in \mathcal{H}'.$$

dove per $\mathcal{H}' = (\mathcal{H}, ||\cdot||')$ si intende lo spazio di Hilbert definito dagli elementi di $(\mathcal{H}, ||\cdot||)$ che sono finiti rispetto alla norma $||\cdot||'$ decorato della stessa. Mostrare che T è limitato rispetto alla norma $\|\cdot\|$ (ovvero $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nel senso dell'estensione).

> *[Hint: Un operatore lineare chiuso tra spazi di Banach e con dominio denso (inteso come tutto lo spazio) è limitato]*

Soluzione. L'obiettivo è dimostrare che l'operatore T è limitato rispetto alla norma naturale dello spazio di Hilbert $\|\cdot\|$, ossia che esiste $M > 0$ tale che $\|T\psi\| \leq M\|\psi\|$ per ogni $\psi \in D(T)$.

1. Equivalenza delle Norme

Consideriamo i due spazi di Banach (ridenominiamoli se no si incrociano gli occhi):

$$X \doteq (\mathcal{H}, \|\cdot\|) \quad \text{e} \quad Y \doteq (\mathcal{H}, \|\cdot\|').$$

Definiamo l'operatore **Identità** che mappa dallo spazio con norma standard allo spazio con norma "prima":

$$J : X \to Y, \quad J\psi = \psi.$$

Questo operatore è lineare ed è definito su tutto lo spazio $\mathcal{H}$ (dominio denso e completo). Per poter applicare l'Hint e concludere che J è limitato, dobbiamo verificare che J sia un **operatore chiuso**.

Verifica della chiusura di J: Consideriamo una successione $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ tale che:

1. $\psi_n \to \psi$ nello spazio X (convergenza rispetto a $\|\cdot\|$);
2. $J\psi_n \to \phi$ nello spazio Y (convergenza rispetto a $\|\cdot\|'$).

Dobbiamo mostrare che $J\psi = \phi$, ovvero che $\psi = \phi$.

Sfruttiamo l'ipotesi data dalla traccia: $\|u\| \leq C \|u\|'$. Questa disuguaglianza implica che la convergenza nella norma $\|\cdot\|'$ è più forte della convergenza nella norma $\|\cdot\|$. Poiché $\psi_n \to \phi$ nella norma $\|\cdot\|'$ (punto 2), allora $\psi_n \to \phi$ anche nella norma $\|\cdot\|$. Tuttavia, per il punto 1, sappiamo che $\psi_n \to \psi$ nella norma $\|\cdot\|$. Per l'unicità del limite, deve essere:

$$\psi = \phi.$$

Il grafico di J è dunque chiuso.

Applicazione dell'Hint: L'operatore J soddisfa tutte le condizioni dell'Hint: è lineare, chiuso, e definito su tutto lo spazio di Banach X. Pertanto, J è **limitato**. Esiste quindi una costante $K > 0$ tale che $\|J\psi\|_Y \leq K\|\psi\|_X$, che si traduce in:

$$\|\psi\|' \leq K\|\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}. \tag{3}$$

2. Dimostrazione della Limitatezza di T

Per ogni $\psi \in D(T)$:

$$\begin{aligned} \|T\psi\| &\leq C\,\|T\psi\|' && \text{(Dominazione della norma)} \\ &\leq C \cdot \kappa\,\|\psi\|' && \text{(Limitatezza in } \mathcal{H}'\text{)} \\ &\leq C \cdot \kappa \cdot c\|\psi\| && \text{(Equivalenza inversa 3)} \end{aligned}$$

Posto $M = C\kappa c$, si ha $\|T\psi\| \leq M\|\psi\|$.

3. Estensione a tutto $\mathcal{H}$

Poiché T è limitato su un dominio denso, ammette un'unica estensione continua (BLT Theorem) su tutto $\mathcal{H}$, che coincide con la sua chiusura (essendo T simmetrico). Dunque $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.