

Esercizi Distribuzioni

Tommaso Pedroni

Esercizio 1F

Si consideri la sequenza di funzioni $u_j \in C^\infty(\mathbb{R})$ definita dalla relazione $u_j(x) = e^{ijx}$. Si dimostri che la sequenza converge puntualmente solo se $x = 2k\pi$ con k intero, mentre è sempre convergente in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Soluzione. Analizziamo separatamente la convergenza puntuale e la convergenza nel senso delle distribuzioni.

Convergenza Puntuale. Fissiamo $x \in \mathbb{R}$. Dobbiamo studiare il comportamento del limite:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} e^{ijx}.$$

Distinguiamo due casi:

1. Sia $x = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. In tal caso, per ogni $j \in \mathbb{N}$:

$$u_j(2k\pi) = e^{ij(2k\pi)} = (e^{i2\pi})^{jk} = 1^j = 1.$$

La successione numerica è costante e quindi converge a 1.

2. Sia $x \neq 2k\pi$. Consideriamo la successione complessa $z_j = e^{ijx}$. Si osserva che $z_{j+1} = e^{ix} z_j$. Se il limite $L = \lim_{j \rightarrow \infty} z_j$ esistesse finito, allora dovrebbe soddisfare:

$$L = \lim_{j \rightarrow \infty} z_{j+1} = \lim_{j \rightarrow \infty} e^{ix} z_j = e^{ix} L \implies L(1 - e^{ix}) = 0.$$

Poiché $x \neq 2k\pi$, si ha $e^{ix} \neq 1$, dunque deve essere $L = 0$. Tuttavia, $|z_j| = |e^{ijx}| = 1$ per ogni j , il che implica $|L| = 1$. Abbiamo raggiunto una contraddizione ($0 = 1$), pertanto la successione non converge.

Concludiamo che la convergenza puntuale si ha se e solo se $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Convergenza in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Dobbiamo verificare se esiste un limite per la successione $\{u_j\}$ nella topologia debole-* di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Sia $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_0^\infty(\mathbb{R})$ una funzione test arbitraria. Valutiamo l'azione di u_j su ϕ :

$$\langle u_j, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u_j(x) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ijx} \phi(x) dx.$$

Riconosciamo nell'integrale la trasformata di Fourier di ϕ , definita come $\hat{\phi}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \phi(x) dx$, valutata in $\xi = -j$:

$$\langle u_j, \phi \rangle = \hat{\phi}(-j).$$

Poiché $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (spazio di Schwartz), anche la sua trasformata di Fourier $\hat{\phi}$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. In particolare, $\hat{\phi}(\xi)$ decade all'infinito più rapidamente di qualsiasi potenza inversa di $|\xi|$. Possiamo invocare il **Lemma di Riemann-Lebesgue**, il quale assicura che:

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{\phi}(\xi) = 0.$$

Pertanto, passando al limite per $j \rightarrow \infty$:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle u_j, \phi \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \hat{\phi}(-j) = 0 = \langle 0, \phi \rangle.$$

Poiché questo vale per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, concludiamo che:

$$u_j \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Convergenza in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (Approccio per parti). Indaghiamo la convergenza nel senso delle distribuzioni, ovvero nella topologia debole-*. Dobbiamo verificare il comportamento del limite $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle u_j, \phi \rangle$ per una generica funzione test $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Scriviamo l'azione della distribuzione:

$$\langle u_j, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ijx} \phi(x) dx.$$

Per $j \neq 0$, possiamo sfruttare l'identità differenziale $e^{ijx} = \frac{1}{ij} \frac{d}{dx} (e^{ijx})$. Sostituendo nell'integrale ed integrando per parti, otteniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{ij} \left(\frac{d}{dx} e^{ijx} \right) \phi(x) dx = \underbrace{\left[\frac{e^{ijx}}{ij} \phi(x) \right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \frac{1}{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ijx} \phi'(x) dx.$$

Il termine di bordo si annulla identicamente poiché ϕ ha supporto compatto (si annulla fuori da un intervallo limitato). Possiamo ora stimare il modulo dell'integrale residuo:

$$|\langle u_j, \phi \rangle| = \left| -\frac{1}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ijx} \phi'(x) dx \right| \leq \frac{1}{j} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{|e^{ijx}|}_{=1} |\phi'(x)| dx = \frac{1}{j} \|\phi'\|_{L^1}.$$

Essendo $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, la sua derivata ϕ' è limitata e a supporto compatto, dunque $\|\phi'\|_{L^1}$ è una costante finita $C < \infty$. Passando al limite:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} |\langle u_j, \phi \rangle| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{C}{j} = 0.$$

Ne concludiamo che $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle u_j, \phi \rangle = 0 = \langle 0, \phi \rangle$ per ogni $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pertanto, la successione u_j converge alla distribuzione nulla:

$$u_j \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} 0.$$

Esercizio 2F

Sia $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Si mostri che la restrizione di u a $\mathcal{D}(\Omega)$ identifica un elemento di $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Soluzione. Sia $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Questo significa che per ogni successione $\phi_j \rightarrow 0$ in $\mathcal{E}(\Omega)$, si ha $\langle u, \phi_j \rangle \rightarrow 0$.

Consideriamo la restrizione di u alle funzioni test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Poiché $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$, l'espressione $\langle u, \phi \rangle$ è ben definita. La linearità è ovvia. Dobbiamo dimostrare la **continuità** rispetto alla convergenza in $\mathcal{D}(\Omega)$ (che chiamiamo convergenza \mathcal{D}).

Ricordiamo la definizione di convergenza in $\mathcal{D}(\Omega)$: una successione $\phi_j \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ se:

1. Esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $\text{supp}(\phi_j) \subset K$ per ogni j .
2. Per ogni multi-indice α , $\partial^\alpha \phi_j \rightarrow 0$ uniformemente su K .

Ricordiamo ora la definizione di convergenza in $\mathcal{E}(\Omega)$ (convergenza \mathcal{E}): una successione $\psi_j \rightarrow 0$ in $\mathcal{E}(\Omega)$ se:

1. Per ogni compatto $H \subset \Omega$ e per ogni α , $\partial^\alpha \psi_j \rightarrow 0$ uniformemente su H .

Passaggio chiave: Se una successione ϕ_j converge a 0 nel senso di \mathcal{D} , essa converge a 0 anche nel senso di \mathcal{E} . Infatti, se $\phi_j \rightarrow 0$ in \mathcal{D} , le derivate convergono uniformemente sul compatto fisso K . Poiché le funzioni sono nulle fuori da K , la convergenza uniforme è garantita su qualsiasi altro compatto H (poiché su $H \setminus K$ le funzioni sono identicamente nulle).

Dunque abbiamo l'implicazione:

$$\phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \implies \phi_j \xrightarrow{\mathcal{E}} 0.$$

Poiché u è continuo su \mathcal{E} per ipotesi ($u \in \mathcal{E}'$), sappiamo che $\phi_j \xrightarrow{\mathcal{E}} 0$ implica $\langle u, \phi_j \rangle \rightarrow 0$. Combinando le due cose:

$$\phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0 \implies \langle u, \phi_j \rangle \rightarrow 0.$$

Questo dimostra che u è sequenzialmente continuo su $\mathcal{D}(\Omega)$, e quindi definisce una distribuzione in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Identificazione (Densità). Resta da chiarire perché tale elemento è "identificato" univocamente. Ciò deriva dal fatto che $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $\mathcal{E}(\Omega)$. Due funzionali continui su $\mathcal{E}(\Omega)$ che coincidono sul sottoinsieme denso $\mathcal{D}(\Omega)$ devono coincidere ovunque. Pertanto, l'operazione di restrizione è iniettiva e possiamo vedere $\mathcal{E}'(\Omega)$ come un sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Esercizio 3F

Si risolvano separatamente in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ le seguenti equazioni:

$$1) \quad xu' = 1 \quad \text{e} \quad 2) \quad (x^3 - 3x + 2)u = 0.$$

Soluzione. 1) Equazione $xu' = 1$.

Poniamo $v = u' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. L'equazione diventa $xv = 1$. Sappiamo che una soluzione particolare di questa equazione algebrica è la distribuzione Valore Principale di $1/x$, denotata con $\text{PV}(1/x)$. Infatti, $x \text{PV}(1/x) = 1$ nel senso delle distribuzioni. La soluzione generale dell'equazione omogenea associata $xv_h = 0$ è data da $v_h = C_1 \delta$, dove δ è la delta di Dirac e C_1 una costante arbitraria. Pertanto, la derivata di u ha la forma:

$$u' = \text{PV}\left(\frac{1}{x}\right) + C_1 \delta.$$

Per trovare u , dobbiamo trovare una primitiva di ciascun termine.

- Una primitiva di $\text{PV}(1/x)$ è $\ln|x|$. Infatti, $(\ln|x|)' = \text{PV}(1/x)$.
- Una primitiva di δ è la funzione di Heaviside $\Theta(x)$ (definita come 1 per $x > 0$ e 0 per $x < 0$).

Aggiungendo una costante di integrazione arbitraria C_2 (che rappresenta la soluzione dell'equazione $u' = 0$), otteniamo la soluzione generale:

$$u(x) = \ln|x| + C_1 \Theta(x) + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Si può anche provare che sia quella la soluzione semplicemente scaricando su una test funzione.

2) Equazione $(x^3 - 3x + 2)u = 0$.

Scomponiamo il polinomio coefficiente $P(x) = x^3 - 3x + 2$. Si nota che $P(1) = 1 - 3 + 2 = 0$. Eseguendo la divisione polinomiale o Ruffini, otteniamo:

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2) = (x - 1)(x - 1)(x + 2) = (x - 1)^2(x + 2).$$

L'equazione è dunque:

$$(x - 1)^2(x + 2)u = 0.$$

Una distribuzione u che soddisfa $f(x)u = 0$, con $f \in C^\infty$, deve avere supporto contenuto nell'insieme degli zeri di f , ovvero $Z(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$. In questo caso, $\text{supp}(u) \subseteq \{1, -2\}$.

In base al Teorema di struttura delle distribuzioni con supporto puntuale (cfr. Hörmander o Friedlander), se una distribuzione è annullata da una potenza $(x - x_0)^k$, essa deve essere una combinazione lineare della delta in x_0 e delle sue derivate fino all'ordine $k - 1$.

Possiamo scrivere $u = u_1 + u_2$, dove $\text{supp}(u_1) \subseteq \{1\}$ e $\text{supp}(u_2) \subseteq \{-2\}$. Poiché i supporti sono disgiunti, l'equazione deve valere localmente attorno a ciascun punto.

- **Intorno a $x = 1$:** Il fattore rilevante è $(x - 1)^2$. Poiché $(x + 2)$ non si annulla in un intorno di 1, possiamo dividere per esso (localmente è una funzione C^∞ invertibile), riducendo l'equazione a $(x - 1)^2 u_1 = 0$. La soluzione generale è una combinazione lineare di $\delta(x - 1)$ e $\delta'(x - 1)$:

$$u_1 = c_0 \delta(x - 1) + c_1 \delta'(x - 1).$$

- **Intorno a $x = -2$:** Il fattore rilevante è $(x + 2)$ con molteplicità 1. Analogamente, $(x - 1)^2$ è invertibile attorno a -2 . L'equazione ridotta è $(x + 2)u_2 = 0$. La soluzione è proporzionale a $\delta(x + 2)$:

$$u_2 = d_0 \delta(x + 2).$$

Complessivamente, la soluzione generale in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è:

$$u(x) = c_0 \delta(x - 1) + c_1 \delta'(x - 1) + d_0 \delta(x + 2), \quad c_0, c_1, d_0 \in \mathbb{C}.$$

Esercizio 4F

Sia $u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ e $v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Si mostri che:

$$\tau_a(u \star v) = (\tau_a u) \star v = u \star (\tau_a v).$$

Soluzione. Basta applicare le definizioni e osservare come agisce la traslazione sull'argomento della funzione test.

Ricordiamo che per definizione $\langle u \star v, \phi \rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi(x+y) \rangle$.

Valutiamo l'azione dei tre termini su una generica $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

1. **Termine** $\tau_a(u \star v)$:

$$\langle \tau_a(u \star v), \phi \rangle = \langle u \star v, \tau_{-a}\phi \rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi(x+y+a) \rangle.$$

2. **Termine** $(\tau_a u) \star v$: Sfruttando la definizione di convoluzione e spostando la traslazione dalla distribuzione alla funzione test:

$$\langle (\tau_a u) \star v, \phi \rangle = \langle (\tau_a u)_x \otimes v_y, \phi(x+y) \rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi((x+a)+y) \rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi(x+y+a) \rangle.$$

3. **Termine** $u \star (\tau_a v)$: Analogamente:

$$\langle u \star (\tau_a v), \phi \rangle = \langle u_x \otimes (\tau_a v)_y, \phi(x+y) \rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi(x+(y+a)) \rangle = \langle u_x \otimes v_y, \phi(x+y+a) \rangle.$$

Poiché tutte e tre le espressioni portano allo stesso risultato $\langle u_x \otimes v_y, \phi(x+y+a) \rangle$ per ogni ϕ , l'uguaglianza è dimostrata.

Esercizio 5 (Lemma di Riemann-Lebesgue) F

Si dimostri che se $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{\phi}(k) = 0.$$

(Suggerimento: si parta da $n = 1$ e si consideri la sequenza di funzioni caratteristiche).

Soluzione. Utilizziamo la densità delle funzioni semplici in $L^1(\mathbb{R}^n)$. La dimostrazione si articola in tre passi logici.

Passo 1: Calcolo per una funzione caratteristica in \mathbb{R}^1 . Sia $n = 1$. Consideriamo la funzione caratteristica di un intervallo limitato $I = [a, b]$, definita come $\chi_I(x) = 1$ se $x \in [a, b]$ e 0 altrimenti. La sua trasformata di Fourier è:

$$\hat{\chi}_I(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_I(x) e^{-ikx} dx = \int_a^b e^{-ikx} dx.$$

Se $k \neq 0$, integriamo direttamente:

$$\hat{\chi}_I(k) = \left[\frac{e^{-ikx}}{-ik} \right]_a^b = \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{ik}.$$

Passando al modulo:

$$|\hat{\chi}_I(k)| = \frac{|e^{-ika} - e^{-ikb}|}{|k|} \leq \frac{|e^{-ika}| + |e^{-ikb}|}{|k|} = \frac{2}{|k|}.$$

È evidente che $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |\hat{\chi}_I(k)| = 0$.

Passo 2: Estensione alle funzioni semplici. Una funzione semplice ψ (a supporto compatto) è definita come una combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di intervalli (o rettangoli in \mathbb{R}^n). Sia:

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^M c_j \chi_{I_j}(x), \quad c_j \in \mathbb{C}.$$

Per la linearità della trasformata di Fourier:

$$\hat{\psi}(k) = \sum_{j=1}^M c_j \hat{\chi}_{I_j}(k).$$

Poiché il limite è un operatore lineare e la somma è finita, segue dal Passo 1 che:

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{\psi}(k) = \sum_{j=1}^M c_j \lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{\chi}_{I_j}(k) = 0.$$

(Nota: In \mathbb{R}^n , si considerano rettangoli $R = \prod [a_i, b_i]$. La trasformata è il prodotto delle trasformate monodimensionali. Se $|k| \rightarrow \infty$, almeno una componente $|k_j| \rightarrow \infty$, portando a zero l'intero prodotto).

Passo 3: Approssimazione per densità in $L^1(\mathbb{R}^n)$. Sia ora $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Poiché le funzioni semplici sono dense in $L^1(\mathbb{R}^n)$, per ogni $\epsilon > 0$ esiste una funzione semplice ψ_ϵ tale che:

$$\|\phi - \psi_\epsilon\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Ricordiamo la stima fondamentale per la trasformata di Fourier ($L^1 \rightarrow L^\infty$):

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}.$$

Valutiamo ora $|\hat{\phi}(k)|$ utilizzando la disuguaglianza triangolare:

$$|\hat{\phi}(k)| = |\hat{\phi}(k) - \hat{\psi}_\epsilon(k) + \hat{\psi}_\epsilon(k)| \leq |\widehat{\phi - \psi_\epsilon}(k)| + |\hat{\psi}_\epsilon(k)|.$$

Il primo termine è maggiorato dalla norma L^1 della differenza:

$$|\widehat{\phi - \psi_\epsilon}(k)| \leq \|\phi - \psi_\epsilon\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dunque abbiamo:

$$|\hat{\phi}(k)| < \frac{\epsilon}{2} + |\hat{\psi}_\epsilon(k)|.$$

Poiché ψ_ϵ è una funzione semplice, per il risultato del Passo 2 sappiamo che $\hat{\psi}_\epsilon(k) \rightarrow 0$. Esiste quindi un $R > 0$ tale che per ogni $|k| > R$ si ha $|\hat{\psi}_\epsilon(k)| < \frac{\epsilon}{2}$.

In conclusione, per ogni $\epsilon > 0$, esiste $R > 0$ tale che per $|k| > R$:

$$|\hat{\phi}(k)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Questo dimostra che $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{\phi}(k) = 0$.

Esercizio 1

Sia $\square = -\partial_t^2 + \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i}^2$ l'operatore d'onda su \mathbb{R}^4 . Si stabilisca se esistono dei valori di $\kappa \in \mathbb{C}$ per cui

$$G^- = \kappa \Theta(t) \delta(t^2 - |x|^2)$$

è soluzione fondamentale per \square .

Soluzione. Consideriamo l'espressione formale $\delta(t^2 - |x|^2)$. Per definire rigorosamente questa distribuzione, osserviamo l'argomento della delta come funzione della variabile radiale $r = |x|$. Poniamo $g(r) = t^2 - r^2$. Poiché il supporto di G^- è limitato a $t > 0$ e operiamo con coordinate radiali $r \geq 0$, l'unica radice rilevante di $g(r) = 0$ è $r = t$. Fattorizzando l'argomento abbiamo $t^2 - r^2 = (t + r)(t - r)$. Nell'intorno della radice $r = t$, il fattore $(t + r)$ è strettamente positivo e pari a $2t$ (o equivalentemente $2r$ sul supporto). Utilizzando la proprietà di scalamento della delta $\delta(hy) = \frac{1}{|h|}\delta(y)$, otteniamo la decomposizione radiale:

$$\delta(t^2 - |x|^2) = \frac{\delta(t - r)}{t + r} = \frac{\delta(t - r)}{2r}.$$

Possiamo quindi scrivere l'azione di G^- su una funzione test $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$ come un integrale su \mathbb{R}^3 dove la variabile temporale è vincolata a $|x|$:

$$\langle G^-, \phi \rangle = \frac{\kappa}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x|} \phi(|x|, x) dx.$$

Coordinate sferiche e funzione ausiliaria. Per calcolare l'azione del D'Alembertiano, è conveniente passare a coordinate polari sferiche per la parte spaziale. Introduciamo la ****media sferica**** della funzione test, definita come:

$$\tilde{\phi}(t, r) := \int_{S^2} \phi(t, y_r) d\sigma,$$

dove l'integrale è calcolato sulla superficie della sfera unitaria S^2 e y_r indica il punto sulla sfera di raggio r . Introduciamo inoltre la funzione ausiliaria pesata:

$$\Psi(t, r) := r \tilde{\phi}(t, r).$$

Sfruttando la decomposizione della misura di Lebesgue $dx = r^2 dr d\sigma$, l'azione della distribuzione diventa un funzionale univariato nella variabile radiale:

$$\langle G^-, \phi \rangle = \frac{\kappa}{2} \int_0^{+\infty} dr r^2 \frac{1}{r} \tilde{\phi}(r, r) = \frac{\kappa}{2} \int_0^{+\infty} \Psi(r, r) dr.$$

Applicazione dell'operatore d'onda. Per verificare la condizione di soluzione fondamentale, calcoliamo $\langle \square G^-, \phi \rangle = \langle G^-, \square \phi \rangle$. In coordinate sferiche, il Laplaciano in \mathbb{R}^3 si scompone in una parte radiale e una angolare:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2},$$

dove Δ_{S^2} è l'operatore di Laplace-Beltrami sulla sfera unitaria (che contiene solo derivate rispetto agli angoli θ, φ).

Consideriamo ora la media sferica della funzione $\Delta \phi$:

$$(\widetilde{\Delta \phi})(t, r) = \int_{S^2} \left(\partial_r^2 \phi + \frac{2}{r} \partial_r \phi + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2} \phi \right) d\sigma.$$

Poiché l'integrazione avviene solo sulle variabili angolari, le derivate radiali ∂_r possono essere portate fuori dall'integrale. Il termine cruciale è l'integrale del Laplaciano angolare:

$$\int_{S^2} \Delta_{S^2} \phi d\sigma = 0.$$

Questo integrale è nullo per il teorema della divergenza sulla varietà chiusa senza bordo S^2 (o equivalentemente perché le armoniche sferiche di grado zero sono costanti, e l'integrale di Δ_{S^2} contro una costante è nullo).

Di conseguenza, la media sferica del D'Alembertiano agisce solo tramite la parte radiale e temporale:

$$(\widetilde{\square \phi})(t, r) = \left(-\partial_t^2 + \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) \tilde{\phi}(t, r).$$

Per semplificare ulteriormente, utilizziamo l'identità operatoriale valida per funzioni radiali:

$$\left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r \right) f(r) = \frac{1}{r} \partial_r^2 (r f(r)).$$

Moltiplicando l'espressione della media per r per passare alla funzione ausiliaria $\Psi(t, r) = r\tilde{\phi}(t, r)$, otteniamo:

$$r(\square\tilde{\phi})(t, r) = -r\partial_t^2\tilde{\phi} + \frac{1}{r}\partial_r^2(r\tilde{\phi}) \cdot r = (-\partial_t^2 + \partial_r^2)\Psi(t, r).$$

Questo passaggio è chiave: riduce l'operatore d'onda radiale in 3D (che ha il termine $2/r$) all'operatore d'onda 1D standard (senza termini del primo ordine) applicato alla funzione pesata Ψ . Sostituendo questo risultato nell'integrale di definizione di G^- :

$$\langle G^-, \square\phi \rangle = \frac{\kappa}{2} \int_0^{+\infty} [(\partial_r^2 - \partial_t^2)\Psi(t, r)]_{t=r} dr.$$

Riduzione a derivata totale. Sfruttiamo la fattorizzazione dell'operatore d'onda unidimensionale $(\partial_r^2 - \partial_t^2) = (\partial_r + \partial_t)(\partial_r - \partial_t)$. Osserviamo che la derivata totale rispetto a r valutata lungo la caratteristica $t = r$ è data da $\frac{d}{dr} = \partial_r + \partial_t$. Pertanto, l'integrando è una derivata totale esatta:

$$[(\partial_r + \partial_t)(\partial_r - \partial_t)\Psi(t, r)]_{t=r} = \frac{d}{dr} [(\partial_r\Psi - \partial_t\Psi)(t, r)]_{t=r}.$$

L'azione diventa:

$$\langle \square G^-, \phi \rangle = \frac{\kappa}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dr} ((\partial_r\Psi - \partial_t\Psi)(r, r)) dr.$$

Per il Teorema Fondamentale del Calcolo, il valore dell'integrale è la differenza della funzione valutata agli estremi.

1. Per $r \rightarrow +\infty$: ϕ è a supporto compatto, quindi Ψ e le sue derivate sono nulle.
2. Per $r \rightarrow 0$: dobbiamo valutare il limite $L = \lim_{r \rightarrow 0} -\frac{\kappa}{2}(\partial_r\Psi - \partial_t\Psi)(r, r)$.

Valutazione al bordo $r = 0$. Ricordando che $\Psi(t, r) = r\tilde{\phi}(t, r)$, calcoliamo le derivate:

$$\partial_t\Psi = r\partial_t\tilde{\phi} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0,$$

$$\partial_r\Psi = \tilde{\phi} + r\partial_r\tilde{\phi} \xrightarrow{r \rightarrow 0} \tilde{\phi}(0, 0).$$

La media sferica nell'origine coincide con il valore della funzione nel punto, moltiplicato per l'area della sfera unitaria (si vede facilmente portando il limite dentro gli integrali sferici con Lebesgue):

$$\tilde{\phi}(0, 0) = \int_{S^2} \phi(0, 0) d\sigma = 4\pi\phi(0, 0).$$

Quindi il termine di bordo vale:

$$-\frac{\kappa}{2}(4\pi\phi(0, 0)) = -2\pi\kappa\phi(0, 0) = -2\pi\kappa\langle \delta, \phi \rangle.$$

Imponendo la condizione $\square G^- = \delta$, otteniamo l'equazione $-2\pi\kappa = 1$, da cui il valore cercato:

$$\kappa = -\frac{1}{2\pi}.$$

Esercizio 1 in Fourier

Sia $\square = -\partial_t^2 + \Delta_x$ l'operatore d'onda su \mathbb{R}^4 . Vogliamo determinare $\kappa \in \mathbb{C}$ affinché la distribuzione

$$G^-(t, x) = \kappa\Theta(t)\delta(t^2 - |x|^2)$$

sia la soluzione fondamentale, ovvero soddisfi $\square G^- = \delta(t) \otimes \delta(x)$.

Soluzione. Utilizziamo la trasformata di Fourier parziale rispetto alle variabili spaziali $x \in \mathbb{R}^3$, definita per una distribuzione temperata u tramite l'azione su una funzione test $\phi(x)$ (o direttamente sull'esponenziale nel senso delle distribuzioni a supporto compatto):

$$\hat{u}(k) = \langle u, e^{-ik \cdot x} \rangle.$$

1. L'Equazione nello Spazio delle Frequenze

Trasformiamo l'equazione differenziale $\square G^- = \delta(t) \otimes \delta(x)$.

- Per la parte spaziale: $\mathcal{F}_x[\Delta G^-] = -|k|^2 \widehat{G^-}(t, k)$.
- Per la parte temporale: $\mathcal{F}_t[\partial_t^2 G^-] = \partial_t^2 \widehat{G^-}(t, k)$.
- Per la sorgente: $\mathcal{F}_x[\delta(t) \otimes \delta(x)] = \delta(t) \cdot 1 = \delta(t)$.

L'equazione che $\widehat{G^-}$ deve soddisfare è dunque:

$$(-\partial_t^2 - |k|^2) \widehat{G^-}(t, k) = \delta(t) \iff (\partial_t^2 + |k|^2) \widehat{G^-}(t, k) = -\delta(t). \quad (1)$$

2. Calcolo della Trasformata della Candidata

Calcoliamo ora esplicitamente $\widehat{G^-}$ partendo dalla definizione data nel testo. Per $t < 0$, $\widehat{G^-} = 0$ a causa della $\Theta(t)$. Per $t > 0$, dobbiamo valutare l'azione della distribuzione $\delta(t^2 - |x|^2)$ sulla funzione test (parametrica in k) $\phi_k(x) = e^{-ik \cdot x}$.

Utilizziamo coordinate sferiche (r, ω) dove $x = r\omega$ con $\omega \in S^2$. La misura di Lebesgue è $dx = r^2 dr d\sigma(\omega)$. La distribuzione radiale $\delta(t^2 - r^2)$ con $t, r > 0$ si scompone rigorosamente (regola della composizione $\delta(g(r))$) come:

$$\delta(t^2 - r^2) = \frac{\delta(r - t)}{|2t|} = \frac{\delta(r - t)}{2t}.$$

Applicando la definizione di trasformata come azione distribuzionale:

$$\widehat{G^-}(t, k) = \kappa \Theta(t) \left\langle \frac{\delta(r - t)}{2t}, \int_{S^2} e^{-ik \cdot (r\omega)} d\sigma(\omega) \right\rangle_{\mathbb{R}^+}.$$

L'azione della delta radiale fissa $r = t$. Notiamo che il termine r^2 dello Jacobiano si semplifica parzialmente con il denominatore $2t$, valutando in $r = t$:

$$\widehat{G^-}(t, k) = \kappa \Theta(t) \frac{t^2}{2t} \int_{S^2} e^{-itk \cdot \omega} d\sigma(\omega) = \frac{\kappa t}{2} \Theta(t) \int_{S^2} e^{-itk \cdot \omega} d\sigma(\omega).$$

L'integrale sulla sfera è standard. Fissiamo l'asse polare lungo k (cosicché $k \cdot \omega = |k| \cos \theta$):

$$\int_{S^2} e^{-it|k| \cos \theta} d\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta e^{-it|k| \cos \theta} d\theta = 2\pi \left[\frac{e^{-it|k|u}}{-it|k|} \right]_1^{-1} = 4\pi \frac{\sin(t|k|)}{t|k|}.$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione di $\widehat{G^-}$:

$$\widehat{G^-}(t, k) = \frac{\kappa t}{2} \Theta(t) \left(4\pi \frac{\sin(t|k|)}{t|k|} \right).$$

Le t si elidono. Otteniamo la forma esplicita in Fourier:

$$\widehat{G^-}(t, k) = 2\pi \kappa \Theta(t) \frac{\sin(t|k|)}{|k|}. \quad (2)$$

3. Verifica e Determinazione di κ

Ora verifichiamo se l'espressione (2) soddisfa l'equazione differenziale (1). Poniamo $C = 2\pi\kappa$ e $S(t) = \frac{\sin(t|k|)}{|k|}$. Abbiamo $\widehat{G^-} = C\Theta(t)S(t)$. Calcoliamo le derivate nel senso delle distribuzioni rispetto al tempo t :

Derivata Prima. Utilizziamo la regola del prodotto $\partial_t(\Theta f) = \delta f + \Theta f'$:

$$\partial_t \widehat{G^-} = C [\delta(t)S(t) + \Theta(t)S'(t)].$$

Poiché $S(t) \propto \sin(t|k|)$, si ha $S(0) = 0$. Dunque il termine $\delta(t)S(t)$ svanisce nel senso delle distribuzioni.

$$\partial_t \widehat{G^-} = C\Theta(t) \cos(t|k|).$$

Derivata Seconda. Deriviamo nuovamente:

$$\partial_t^2 \widehat{G^-} = C \left[\delta(t) \cos(t|k|) + \Theta(t) \frac{d}{dt} \cos(t|k|) \right].$$

Qui $\cos(0) = 1$, quindi $\delta(t) \cos(t|k|) = \delta(t)$.

$$\partial_t^2 \widehat{G^-} = C\delta(t) - C\Theta(t)|k| \sin(t|k|).$$

Notiamo che il secondo termine è esattamente $-|k|^2 \left(C\Theta(t) \frac{\sin(t|k|)}{|k|} \right) = -|k|^2 \widehat{G^-}$.

Inserimento nell'Operatore. Calcoliamo l'azione dell'operatore d'onda in Fourier $(\partial_t^2 + |k|^2)$:

$$(\partial_t^2 + |k|^2) \widehat{G^-} = \left(C\delta(t) - |k|^2 \widehat{G^-} \right) + |k|^2 \widehat{G^-} = C\delta(t).$$

Conclusione. Affinché questa espressione sia uguale alla sorgente $-\delta(t)$ dell'equazione (1), dobbiamo imporre:

$$C = -1 \implies 2\pi\kappa = -1.$$

Dunque:

$$\kappa = -\frac{1}{2\pi}.$$

Esercizio 2

Detti H_n i polinomi di Hermite e sapendo che vale la formula di Mehler:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{\rho^n}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left(\frac{4xy\rho - (1+\rho^2)(x^2+y^2)}{2(1-\rho^2)} \right),$$

si mostri che la funzione

$$K(x, y, t) = \frac{\Theta(t)}{\sqrt{2\pi i \sin(2t)}} \exp \left(-i \cot(2t) \frac{x^2 + y^2}{2} + i \frac{xy}{\sin(2t)} \right)$$

è soluzione fondamentale dell'equazione $L = -i\partial_t + \partial_x^2 - x^2$.

Soluzione. Per dimostrare che $K(x, y, t)$ è soluzione fondamentale, verifichiamo l'azione dell'operatore L sulla distribuzione. Utilizziamo la formula di Mehler per identificare lo sviluppo spettrale di K .

Identificazione spettrale del nucleo. Consideriamo le autofunzioni dell'oscillatore armonico:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}},$$

che soddisfano $(-\partial_x^2 + x^2)\psi_n = E_n\psi_n$ con $E_n = 2n + 1$.

Analizziamo la parte regolare di K per $t > 0$. Scegliamo come parametro per la formula di Mehler $\rho = e^{2it}$.

Con questa sostituzione il prefattore diviene:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e^{4it}}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2it}(e^{-2it} - e^{2it})}} = \frac{e^{-it}}{\sqrt{-2i \sin(2t)}}.$$

Notiamo che il termine $\sqrt{-2i \sin(2t)}$ al denominatore corrisponde al prefattore nella definizione di K (a meno del fattore $\sqrt{\pi}$).

Sostituendo $\rho = e^{2it}$ nell'esponenziale della formula di Mehler, otteniamo:

$$\frac{4xye^{2it} - (1 + e^{4it})(x^2 + y^2)}{2(1 - e^{4it})} = \frac{2xy - \cos(2t)(x^2 + y^2)}{-2i \sin(2t)} = i \frac{xy}{\sin(2t)} - i \cot(2t) \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Questo riproduce esattamente l'esponente di $K(x, y, t)$. Possiamo dunque riscrivere la serie di Mehler moltiplicando ambo i membri per $\frac{e^{it}}{\sqrt{\pi}}$ (il termine e^{it} cancella l' e^{-it} del prefattore):

$$\sum_{n \geq 0} i e^{it} \frac{(e^{2it})^n}{\sqrt{\pi} 2^n n!} H_n(x) H_n(y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{2i \sin(2t)}} \exp(\dots).$$

Riconoscendo a sinistra $e^{it} e^{2int} = e^{i(2n+1)t} = e^{iE_n t}$, otteniamo la rappresentazione spettrale:

$$K(x, y, t) = i\Theta(t) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{iE_n t} \psi_n(x) \psi_n(y).$$

Calcolo della derivata distribuzionale. Applichiamo l'operatore $L = -i\partial_t + (\partial_x^2 - x^2)$. Notiamo che $(\partial_x^2 - x^2) = -H$. Poiché $H\psi_n = -E_n\psi_n$, l'azione sulla parte spaziale è:

$$(\partial_x^2 - x^2)\psi_n(x) = -E_n\psi_n(x).$$

Calcoliamo la derivata temporale della distribuzione:

$$\partial_t K = \delta(t) i \sum_n \psi_n(x) \psi_n(y) - \Theta(t) \sum_n E_n e^{iE_n t} \psi_n(x) \psi_n(y)$$

Valutazione dell'operatore completo. Applicando L :

$$\begin{aligned} LK = & -i \left[\delta(t) i \sum_n \psi_n(x) \psi_n(y) - \Theta(t) \sum_n E_n e^{iE_n t} \psi_n(x) \psi_n(y) \right] \\ & + i\Theta(t) \sum_n e^{iE_n t} (-E_n) \psi_n \psi_n \end{aligned}$$

Per $t > 0$, i termini regolari si cancellano perfettamente:

$$\Theta(t) \sum_n [iE_n - iE_n] (\dots) = 0$$

Rimane il termine singolare all'istante $t = 0$:

$$LK = \delta(t) \sum_{n=0}^{+\infty} \psi_n(x) \psi_n(y) = \delta(t) \delta(x - y).$$

Il nucleo è quindi soluzione fondamentale.

Dimostrazione della Convergenza in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$

Vogliamo dimostrare che la serie spettrale che definisce il nucleo $K(x, y, t)$ converge nel senso delle distribuzioni temperate. Consideriamo la successione delle somme parziali:

$$S_N(x, y, t) = \sum_{n=0}^N e^{iE_n t} \psi_n(x) \psi_n(y),$$

dove ψ_n sono le funzioni di Hermite (autofunzioni dell'oscillatore armonico) e $E_n = 2n + 1$.

Criterio di Convergenza Debole

Affinché S_N converga a una distribuzione $K \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$, è sufficiente mostrare che per ogni funzione test $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ (lo spazio di Schwartz), la successione numerica $\langle S_N, g \rangle$ ammette limite finito per $N \rightarrow \infty$. Scriviamo l'azione della distribuzione sulla funzione test:

$$\langle S_N, g \rangle = \sum_{n=0}^N e^{iE_n t} \iint_{\mathbb{R}^2} \psi_n(x) \psi_n(y) g(x, y) dx dy.$$

Definiamo il coefficiente spettrale di g rispetto alla base prodotto:

$$c_n(g) \doteq \iint_{\mathbb{R}^2} \psi_n(x) \psi_n(y) g(x, y) dx dy.$$

Poiché $|e^{iE_n t}| = 1$, la serie converge assolutamente se dimostriamo che i coefficienti $|c_n(g)|$ decadono sufficientemente in fretta rispetto a n .

Decadimento dei Coefficienti (Metodo dell'Operatore Differenziale)

Sfruttiamo l'equazione agli autovalori soddisfatta dalle funzioni di Hermite:

$$H_x \psi_n(x) = E_n \psi_n(x), \quad \text{con } H_x = -\partial_x^2 + x^2.$$

Possiamo inserire una potenza k -esima dell'autovalore nell'espressione del coefficiente e usare l'autoaggiunzione dell'operatore differenziale. Per ogni intero $k \geq 1$:

$$E_n^k c_n(g) = \iint_{\mathbb{R}^2} \underbrace{(E_n^k \psi_n(x))}_{=H_x^k \psi_n(x)} \psi_n(y) g(x, y) dx dy.$$

Utilizzando l'**integrazione per parti**, scarichiamo l'operatore differenziale H_x^k dalla ψ_n alla funzione test g . Poiché $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, i termini di bordo all'infinito si annullano identicamente. Essendo H_x un operatore simmetrico reale:

$$E_n^k c_n(g) = \iint_{\mathbb{R}^2} \psi_n(x) \psi_n(y) (H_x^k g(x, y)) dx dy.$$

Definiamo la funzione trasformata $G_k(x, y) \doteq H_x^k g(x, y) = (-\partial_x^2 + x^2)^k g(x, y)$.

Stabilità dello Spazio di Schwartz. Lo spazio \mathcal{S} è chiuso rispetto alla moltiplicazione per polinomi e alla derivazione. Pertanto, se $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, allora anche $G_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Di conseguenza, $G_k \in L^2(\mathbb{R}^2)$ e i suoi coefficienti di Fourier-Hermite sono limitati (per la disuguaglianza di Bessel, la loro somma quadratica è finita, quindi il termine n -esimo tende a zero). Esiste quindi una costante $M_k < \infty$ tale che:

$$\left| \iint \psi_n(x) \psi_n(y) G_k(x, y) dx dy \right| \leq M_k.$$

Stima finale. Sostituendo nella relazione precedente, otteniamo la stima:

$$|c_n(g)| \leq \frac{M_k}{E_n^k} = \frac{M_k}{(2n+1)^k}.$$

Scegliendo ad esempio $k = 2$, abbiamo che $|c_n(g)| \sim \frac{1}{n^2}$. La serie totale è maggiorata da:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |e^{iE_n t}| |c_n(g)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_2}{(2n+1)^2} < \infty.$$

La convergenza assoluta della serie numerica per ogni $g \in \mathcal{S}$ implica la convergenza della successione di distribuzioni S_N a una distribuzione temperata $K \in \mathcal{S}'$. □

Esercizio 3

Si calcoli il seguente limite in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x - i\epsilon)}{x - i\epsilon}.$$

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che l'espressione all'interno del limite può essere riscritta come la derivata complessa di una funzione più regolare. Nello specifico:

$$\frac{\ln(x - i\epsilon)}{x - i\epsilon} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \ln^2(x - i\epsilon) \right).$$

Sia $T_\epsilon \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribuzione regolare associata alla funzione $f_\epsilon(x) = \frac{\ln(x - i\epsilon)}{x - i\epsilon}$. Vogliamo calcolare il limite $T = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} T_\epsilon$ nella topologia debole-* di $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Per ogni funzione test $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \langle T_\epsilon, \phi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \ln^2(x - i\epsilon) \right) \phi(x) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2(x - i\epsilon) \phi'(x) dx, \end{aligned}$$

dove nel secondo passaggio abbiamo integrato per parti scaricando la derivata sulla funzione test (i termini di bordo si annullano poiché ϕ ha supporto compatto).

Passaggio al limite puntuale. Studiamo il limite puntuale della funzione $g_\epsilon(x) = \ln^2(x - i\epsilon)$ per $\epsilon \rightarrow 0^+$. Utilizziamo la determinazione principale del logaritmo con taglio lungo il semiasse reale negativo. Poiché $\epsilon > 0$, il numero complesso $z = x - i\epsilon$ si trova nel semipiano inferiore.

- Per $x > 0$: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (x - i\epsilon) = x$. L'argomento è nullo, quindi $\ln(x - i\epsilon) \rightarrow \ln(x)$.
- Per $x < 0$: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (x - i\epsilon) = x$. L'argomento tende a $-\pi$ (avvicinandosi al taglio da sotto). Quindi $\ln(x - i\epsilon) \rightarrow \ln|x| - i\pi$.

Ne segue che, puntualmente quasi ovunque:

$$g(x) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln^2(x - i\epsilon) = \begin{cases} \ln^2(x) & x > 0 \\ (\ln|x| - i\pi)^2 = \ln^2|x| - \pi^2 - 2i\pi \ln|x| & x < 0. \end{cases}$$

Giustificazione dello scambio limite-integrale. Per applicare il Teorema della Convergenza Dominata di Lebesgue all'integrale parametrico

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2(x - i\epsilon) \phi'(x) dx,$$

dobbiamo determinare una funzione dominante $G \in L^1(\mathbb{R})$ tale che, per ogni $\epsilon \in (0, 1)$, valga la maggiorazione:

$$|\ln^2(x - i\epsilon) \phi'(x)| \leq G(x) \quad \text{per quasi ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Sia $K = \text{supp}(\phi)$ il supporto compatto della funzione test e sia $R > 0$ tale che $K \subset [-R, R]$. Sia inoltre $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\phi'(x)|$.

Consideriamo il modulo del termine logaritmico. Ricordando che $\ln(z) = \ln|z| + i \arg(z)$, si ha:

$$|\ln(x - i\epsilon)| \leq |\ln|x - i\epsilon|| + |\arg(x - i\epsilon)|.$$

Poiché $x - i\epsilon$ giace nel semipiano inferiore, l'argomento è limitato da π . Il modulo è $\sqrt{x^2 + \epsilon^2}$. Dunque:

$$|\ln(x - i\epsilon)| \leq \left| \frac{1}{2} \ln(x^2 + \epsilon^2) \right| + \pi.$$

Per costruire la dominante, analizziamo il termine $L_\epsilon(x) := \frac{1}{2} \ln(x^2 + \epsilon^2)$ distinguendo due casi per $x \in K$:

1. Regione dove l'argomento è grande ($x^2 + \epsilon^2 \geq 1$):

In questo caso $L_\epsilon(x) \geq 0$. Poiché $x \in [-R, R]$ e $\epsilon < 1$, abbiamo $x^2 + \epsilon^2 \leq R^2 + 1$. Dunque:

$$|L_\epsilon(x)| = L_\epsilon(x) \leq \frac{1}{2} \ln(R^2 + 1).$$

Il termine è limitato da una costante C_1 .

2. Regione dove l'argomento è piccolo ($x^2 + \epsilon^2 < 1$):

In questo caso $0 < x^2 + \epsilon^2 < 1$, quindi il logaritmo è negativo: $L_\epsilon(x) < 0$. Sfruttando la monotonia del logaritmo, poiché $x^2 \leq x^2 + \epsilon^2$, vale:

$$\ln(x^2) \leq \ln(x^2 + \epsilon^2) < 0.$$

Passando ai valori assoluti (che inverte la disuguaglianza per numeri negativi), otteniamo:

$$|L_\epsilon(x)| = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + \epsilon^2) \leq -\frac{1}{2} \ln(x^2) = |\ln|x||.$$

Unendo i due casi, per ogni $x \in K$ e $\epsilon \in (0, 1)$, vale la maggiorazione uniforme:

$$|\ln(x - i\epsilon)| \leq |\ln|x|| + C,$$

dove $C = \frac{1}{2} \ln(R^2 + 1) + \pi$. Elevando al quadrato (usando $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$):

$$|\ln^2(x - i\epsilon)| \leq 2 \ln^2|x| + 2C^2.$$

Possiamo quindi definire la funzione dominante come:

$$G(x) = M \cdot (2 \ln^2|x| + 2C^2) \cdot \chi_K(x),$$

dove χ_K è la funzione caratteristica del supporto di ϕ . Poiché la singolarità logaritmica è integrabile attorno allo zero ($\int_0^1 \ln^2 x \, dx < \infty$), si ha $G \in L^1(\mathbb{R})$. Le ipotesi del Teorema della Convergenza Dominata sono soddisfatte.

Giustificazione dello scambio limite-integrale (Versione Rapida). Sia K il supporto compatto di ϕ' e sia $R > 0$ tale che $K \subset [-R, R]$. Per ogni $\epsilon \in (0, 1)$ e $x \in K$, valgono le disuguaglianze:

$$|x| \leq |x - i\epsilon| = \sqrt{x^2 + \epsilon^2} \leq \sqrt{R^2 + 1}.$$

Dobbiamo maggiorare $|\ln(x - i\epsilon)| \leq |\ln|x - i\epsilon|| + \pi$. Analizziamo il termine $|\ln|x - i\epsilon||$ distinguendo rapidamente due comportamenti, ma unificandoli in una sola stima:

- Se $|x - i\epsilon| < 1$, allora per la monotonia del logaritmo vale $\ln|x| \leq \ln|x - i\epsilon| < 0$. Passando ai moduli si inverte la disuguaglianza: $|\ln|x - i\epsilon|| \leq |\ln|x||$.
- Se $|x - i\epsilon| \geq 1$, allora $0 \leq \ln|x - i\epsilon| \leq \ln\sqrt{R^2 + 1}$.

In entrambi i casi, vale la maggiorazione uniforme su K :

$$|\ln|x - i\epsilon|| \leq |\ln|x|| + C, \quad \text{con } C = \ln\sqrt{R^2 + 1}.$$

Sostituendo nella stima iniziale ed elevando al quadrato (usando $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$):

$$|\ln^2(x - i\epsilon)| \leq 3 \ln^2|x| + 3C^2 + 3\pi^2.$$

Definiamo quindi la funzione dominante $G \in L^1(\mathbb{R})$ come:

$$G(x) = M \cdot (3 \ln^2|x| + \text{cost.}) \cdot \chi_K(x),$$

dove $M = \sup|\phi'|$. Essendo la singolarità logaritmica integrabile in 0 ($x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$), G è sommabile e il Teorema della Convergenza Dominata è applicabile.

Calcolo della distribuzione limite. Possiamo ora portare il limite sotto il segno di integrale:

$$\begin{aligned} \langle T, \phi \rangle &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \phi'(x) \, dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^0 (\ln^2|x| - \pi^2 - 2i\pi \ln|x|) \phi'(x) \, dx + \int_0^{+\infty} \ln^2 x \phi'(x) \, dx \right]. \end{aligned}$$

Raggruppiamo i termini per analizzarli separatamente:

$$\langle T, \phi \rangle = \underbrace{-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln^2 |x| \phi'(x) dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{\pi^2}{2} \int_{-\infty}^0 \phi'(x) dx}_{I_2} + \underbrace{i\pi \int_{-\infty}^0 \ln |x| \phi'(x) dx}_{I_3}.$$

Analisi di I_1 : Riconosciamo la derivata distribuzionale della funzione localmente integrabile $\ln^2 |x|$:

$$I_1 = \left\langle \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\ln^2 |x|), \phi \right\rangle.$$

Calcolando la derivata nel senso delle distribuzioni, si ha $\frac{d}{dx} (\ln^2 |x|) = 2 \frac{\ln |x|}{x}$. Poiché $\frac{\ln |x|}{x}$ non è in L^1_{loc} attorno all'origine ma è dispari, la sua regolarizzazione canonica è il valore principale:

$$I_1 = \left\langle \text{PV} \left(\frac{\ln |x|}{x} \right), \phi \right\rangle.$$

Analisi di I_2 : L'integrale è immediato:

$$I_2 = \frac{\pi^2}{2} [\phi(x)]_{-\infty}^0 = \frac{\pi^2}{2} (\phi(0) - 0) = \left\langle \frac{\pi^2}{2} \delta, \phi \right\rangle.$$

Analisi di I_3 : Consideriamo la distribuzione $S = \Theta(-x) \ln |x|$. La sua derivata distribuzionale agisce come:

$$\langle S', \phi \rangle = -\langle S, \phi' \rangle = -\int_{-\infty}^0 \ln |x| \phi'(x) dx.$$

Il nostro integrale I_3 è esattamente $-i\pi \langle S', \phi \rangle$. La derivata S' corrisponde, a meno del segno, alla parte finita di $1/|x|$ sul semiasse negativo, indicata spesso con $\text{Pf}(x_-^{-1})$. Formalmente, manteniamo la notazione derivata per rigore:

$$I_3 = \left\langle -i\pi \frac{d}{dx} (\Theta(-x) \ln |x|), \phi \right\rangle = \langle i\pi \text{Pf}(x_-^{-1}), \phi \rangle.$$

Conclusione. Sommando i contributi I_1, I_2, I_3 , il limite distribuzionale cercato è:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x - i\epsilon)}{x - i\epsilon} = \text{PV} \left(\frac{\ln |x|}{x} \right) + \frac{\pi^2}{2} \delta + i\pi \text{Pf}(x_-^{-1}).$$

Esercizio 4

Sia $C_\alpha^\infty(\mathbb{R}^+) \doteq \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \mid f(0) + \alpha f'(0) = 0\}$ con $\mathbb{R}^+ \doteq [0, \infty)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Detto $C_D^\infty(\mathbb{R}^+) \doteq \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \mid f(0) = 0\}$, sia

$$T : C_\alpha^\infty(\mathbb{R}^+) \rightarrow C_D^\infty(\mathbb{R}^+), \quad f \mapsto T(f) \doteq h = f + \alpha \frac{df}{dx}.$$

Si discuta se la restrizione di T a $C_\alpha^\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$ è invertibile e, nel caso, si esibisca l'inversa.

Soluzione. Definiamo lo spazio di partenza (dominio ristretto) come $\mathcal{D}_\alpha \doteq C_\alpha^\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$ e osserviamo che l'immagine sarà contenuta in uno spazio di funzioni a supporto compatto. Studiamo l'equazione $T(f) = h$ per $h \in C_D^\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$.

Distinguiamo due casi in base al valore del parametro α .

Caso $\alpha = 0$. In questo caso, la definizione degli spazi e dell'operatore si semplifica:

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^+) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^+) \mid f(0) = 0\} = C_D^\infty(\mathbb{R}^+).$$

L'operatore diventa l'identità $T(f) = f$. La restrizione è quindi banalmente invertibile e $T^{-1} = I$ (a patto di restringere l'immagine per renderlo suriettivo).

Caso $\alpha \neq 0$. Consideriamo l'equazione differenziale lineare del primo ordine:

$$f(x) + \alpha f'(x) = h(x) \iff f'(x) + \frac{1}{\alpha} f(x) = \frac{1}{\alpha} h(x).$$

1. Iniettività. Sia $h \equiv 0$. L'equazione omogenea associata è $f' + \frac{1}{\alpha} f = 0$, la cui soluzione generale è:

$$f(x) = ce^{-x/\alpha}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Poiché stiamo cercando soluzioni in $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$ (a supporto compatto), deve esistere un $K > 0$ tale che $f(x) = 0$ per ogni $x > K$. Dato che la funzione esponenziale non si annulla mai, l'unica possibilità è che la costante c sia nulla. Dunque $f \equiv 0$, il che implica $\ker(T|_{\mathcal{D}_\alpha}) = \{0\}$. L'operatore è iniettivo.

2. Suriettività e calcolo dell'inversa. Per $h \in C_D^\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$, risolviamo l'equazione non omogenea utilizzando il fattore integrante $e^{x/\alpha}$:

$$\frac{d}{dx} \left(f(x)e^{x/\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha} h(x)e^{x/\alpha}.$$

Integrando su $[0, x]$:

$$f(x)e^{x/\alpha} - f(0) = \frac{1}{\alpha} \int_0^x h(t)e^{t/\alpha} dt \implies f(x) = e^{-x/\alpha} \left(f(0) + \frac{1}{\alpha} \int_0^x h(t)e^{t/\alpha} dt \right).$$

Dobbiamo determinare $f(0)$ affinché f abbia supporto compatto. Sia $K > 0$ tale che $\text{supp}(h) \subset [0, K]$. Per $x > K$, $h(x) = 0$ e l'integrale diventa costante ($\int_0^x = \int_0^\infty$). Per $x > K$ si ha:

$$f(x) = e^{-x/\alpha} \left(f(0) + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty h(t)e^{t/\alpha} dt \right).$$

Affinché $f(x)$ si annulli per x grandi (condizione necessaria per appartenere a \mathcal{E}'), il termine in parentesi deve essere nullo. Questo vincola univocamente il valore iniziale:

$$f(0) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\infty h(t)e^{t/\alpha} dt.$$

Sostituendo questo valore nell'espressione di $f(x)$ e usando la proprietà $\int_0^x - \int_0^\infty = -\int_x^\infty$, otteniamo l'espressione dell'inversa:

$$f(x) = -\frac{1}{\alpha} e^{-x/\alpha} \int_x^\infty h(t)e^{t/\alpha} dt = -\frac{1}{\alpha} \int_x^\infty h(t)e^{(t-x)/\alpha} dt.$$

Verifica delle condizioni al bordo. Dobbiamo infine verificare che la funzione trovata appartenga al dominio, ovvero che soddisfi $f(0) + \alpha f'(0) = 0$. Dall'equazione differenziale sappiamo che $f(x) + \alpha f'(x) = h(x)$. Valutando in $x = 0$:

$$f(0) + \alpha f'(0) = h(0).$$

Poiché $h \in C_D^\infty(\mathbb{R}^+)$, per definizione $h(0) = 0$. Pertanto la condizione $f(0) + \alpha f'(0) = 0$ è soddisfatta.

Conclusione. La restrizione è invertibile e l'operatore inverso $T^{-1} : C_D^\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+) \rightarrow C_\alpha^\infty(\mathbb{R}^+) \cap \mathcal{E}'(\mathbb{R}^+)$ è dato da:

$$T^{-1}(h)(x) = -\frac{1}{\alpha} \int_x^\infty e^{\frac{t-x}{\alpha}} h(t) dt.$$

Esercizio 5

Si consideri per ogni funzione $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ la funzione

$$H_f(t) \doteq \frac{1}{\pi} \text{PV} \int_{\mathbb{R}} d\tau \frac{f(\tau)}{t - \tau},$$

dove PV è il valor principale di Cauchy. Si mostri che $H_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e che H_f è estendibile ad un operatore limitato su $L^2(\mathbb{R})$.

Soluzione. L'integrale definito nel testo corrisponde alla convoluzione tra la funzione test f e la distribuzione temperata $T = \frac{1}{\pi} \text{PV} \left(\frac{1}{t} \right)$. Possiamo quindi scrivere:

$$H_f = \frac{1}{\pi} \text{PV} \left(\frac{1}{\cdot} \right) * f.$$

Per analizzare le proprietà di H_f , passiamo allo spazio delle frequenze utilizzando la trasformata di Fourier. Ricordiamo che la trasformata di Fourier trasforma la convoluzione in un prodotto.

1. Calcolo del moltiplicatore di Fourier (non dovuto perchè fatto in classe) Determiniamo innanzitutto la trasformata di Fourier della distribuzione T . Consideriamo la funzione segno, $\text{sgn}(t)$, la quale è una distribuzione temperata. La sua derivata nel senso delle distribuzioni è:

$$\frac{d}{dt} \text{sgn}(t) = 2\delta(t).$$

Applicando la trasformata di Fourier \mathcal{F} ad ambo i membri e usando la proprietà $\mathcal{F}[u'](\xi) = i\xi\widehat{u}(\xi)$, otteniamo:

$$i\xi\widehat{\text{sgn}}(\xi) = 2.$$

La soluzione di questa equazione nell'algebra delle distribuzioni, considerando che sgn è una funzione dispari (e quindi la sua trasformata deve essere dispari, escludendo termini proporzionali a $\delta(\xi)$), è:

$$\widehat{\text{sgn}}(\xi) = \frac{2}{i} \text{PV} \left(\frac{1}{\xi} \right).$$

Per le proprietà di dualità e simmetria della trasformata di Fourier, si ricava la trasformata del valor principale:

$$\mathcal{F} \left[\text{PV} \left(\frac{1}{t} \right) \right] (\xi) = -i\pi \text{sgn}(\xi).$$

2. Appartenenza a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e limitatezza su $L^2(\mathbb{R})$. Tornando al nostro operatore H_f , la trasformata di Fourier è data da:

$$\widehat{H_f}(\xi) = \frac{1}{\pi} \underbrace{\mathcal{F} \left[\text{PV} \left(\frac{1}{t} \right) \right] (\xi)}_{-i\pi \text{sgn}(\xi)} \cdot \widehat{f}(\xi) = -i \text{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi).$$

Osserviamo che:

- Poiché $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, allora $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e di conseguenza $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.
- La funzione $m(\xi) = -i \text{sgn}(\xi)$ è limitata ($|m(\xi)| = 1$ quasi ovunque).

Il prodotto di una funzione limitata per una funzione di Schwartz appartiene a $L^2(\mathbb{R})$. Poiché $L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, ne segue che $\widehat{H_f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e, per isomorfismo della trasformata di Fourier su \mathcal{S}' , anche $H_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Per mostrare la limitatezza su $L^2(\mathbb{R})$, calcoliamo la norma L^2 usando il teorema di Plancherel (che afferma l'isometria della trasformata di Fourier, a meno di costanti di normalizzazione che qui assumiamo unitarie per semplicità notazionale, o coerenti con la definizione):

$$\|H_f\|_{L^2} = \|\widehat{H_f}\|_{L^2} = \|-i \text{sgn}(\cdot) \widehat{f}\|_{L^2}.$$

Poiché $|-i \text{sgn}(\xi)| = 1$ per quasi ogni $\xi \in \mathbb{R}$, abbiamo:

$$\int_{\mathbb{R}} |-i \text{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\widehat{f}\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2.$$

Dunque $\|H_f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$. L'operatore conserva la norma (è un'isometria su L^2) ed è quindi limitato con norma operatoriale pari a 1.

Densità di C_0^∞ in L^2 . Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Si approssimi dapprima f con funzioni a supporto compatto $g_k = f \cdot \chi_{B_k} \rightarrow f$ in norma L^2 . Successivamente, si regolarizzi tramite convoluzione con una successione di mollificatori ρ_ϵ : le funzioni $h_{k,\epsilon} = g_k * \rho_\epsilon$ appartengono a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e convergono a g_k (e dunque a f) in L^2 per $\epsilon \rightarrow 0$.

Esercizio 6

Per ogni $s \in \mathbb{R}$ sia $H^s(\mathbb{R}^n) \doteq \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \langle k \rangle^s \widehat{u}(k) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$, $n \geq 1$, dove $\langle k \rangle$ è la parentesi giapponese di k . Si mostri se, dato $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ con $\widehat{u} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$, allora, detto Δ l'operatore laplaciano su \mathbb{R}^n :

$$\Delta u \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n).$$

Soluzione. Preliminarmente, fissiamo la definizione standard (cfr. Friedlander-Joshi) per la *parentesi giapponese* e per la norma di Sobolev, al fine di garantire la coerenza dimensionale tra l'ordine di derivazione e l'indice dello spazio. Poniamo $\langle k \rangle := (1 + |k|^2)^{1/2}$. Di conseguenza, la condizione di appartenenza a $H^s(\mathbb{R}^n)$ è data dalla finitezza della seguente norma:

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^s |\widehat{u}(k)|^2 dk < \infty.$$

Ricordiamo inoltre che, nello spazio di Fourier, l'azione del Laplaciano corrisponde alla moltiplicazione per $-|k|^2$, ovvero $\Delta u(k) = -|k|^2 \widehat{u}(k)$.

L'esercizio richiede di verificare la validità della doppia implicazione.

Implicazione $\Leftarrow (u \in H^{s+2} \implies \Delta u \in H^s)$: Assumiamo che $\|u\|_{H^{s+2}} < \infty$. Dobbiamo stimare la norma H^s di Δu :

$$\|\Delta u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^s \left| -|k|^2 \widehat{u}(k) \right|^2 dk = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^s |k|^4 |\widehat{u}(k)|^2 dk.$$

Poiché vale la disuguaglianza banale $|k|^2 < 1 + |k|^2$, abbiamo $|k|^4 < (1 + |k|^2)^2$. Sostituendo nell'integrale:

$$\|\Delta u\|_{H^s}^2 < \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^s (1 + |k|^2)^2 |\widehat{u}(k)|^2 dk = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^{s+2} |\widehat{u}(k)|^2 dk = \|u\|_{H^{s+2}}^2.$$

Essendo il termine a destra finito per ipotesi, concludiamo che $\Delta u \in H^s(\mathbb{R}^n)$.

Implicazione $\implies (\Delta u \in H^s \implies u \in H^{s+2})$: Assumiamo $\Delta u \in H^s$. Dobbiamo mostrare che l'integrale

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |k|^2)^{s+2} |\widehat{u}(k)|^2 dk$$

è finito. Spezziamo l'integrale in due regioni: la palla unitaria $B = \{k \in \mathbb{R}^n : |k| \leq 1\}$ (basse frequenze) e il suo complemento B^c (alte frequenze).

$$I = \underbrace{\int_B (1 + |k|^2)^{s+2} |\widehat{u}(k)|^2 dk}_{I_1} + \underbrace{\int_{B^c} (1 + |k|^2)^{s+2} |\widehat{u}(k)|^2 dk}_{I_2}.$$

- **Analisi di I_1** : Sull'insieme compatto B , la funzione peso $(1 + |k|^2)^{s+2}$ è continua e limitata (maggiorata da 2^{s+2}). Poiché per ipotesi $\widehat{u} \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$, l'integrale di $|\widehat{u}|^2$ su un compatto è finito. Dunque $I_1 < \infty$.
- **Analisi di I_2** : Nella regione $|k| > 1$, vale la stima $1 < |k|^2$, da cui segue $1 + |k|^2 < 2|k|^2$. Possiamo quindi maggiorare il peso:

$$(1 + |k|^2)^{s+2} = (1 + |k|^2)^s (1 + |k|^2)^2 \leq (1 + |k|^2)^s (2|k|^2)^2 = 4(1 + |k|^2)^s |k|^4.$$

Inserendo questa stima in I_2 :

$$I_2 \leq 4 \int_{B^c} (1 + |k|^2)^s |k|^4 |\widehat{u}(k)|^2 dk = 4 \int_{B^c} (1 + |k|^2)^s \left| \widehat{\Delta u}(k) \right|^2 dk.$$

L'ultimo integrale è maggiorato da $4\|\Delta u\|_{H^s}^2$, che è finito per ipotesi.

Poiché $I = I_1 + I_2 < \infty$, concludiamo che $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$.

L'equivalenza è dunque **dimostrata**.

Osservazione. È fondamentale notare che la definizione standard $\langle k \rangle = (1 + |k|^2)^{1/2}$ è necessaria affinché l'enunciato sia vero. Se avessimo interpretato letteralmente il testo (omettendo l'esponente frazionario nella definizione della parentesi giapponese, i.e., ponendo $\langle k \rangle_{alt} = 1 + |k|^2$), l'implicazione \implies sarebbe risultata **falsa**.

Infatti, con tale definizione alternativa, la condizione $\Delta u \in H^s$ controllerebbe il comportamento asintotico di $|\widehat{u}|^2$ con un peso $\sim |k|^{4s+4}$, mentre l'appartenenza a H^{s+2} richiederebbe un controllo con peso $\sim |k|^{4(s+2)} = |k|^{4s+8}$. Il divario di fattore $|k|^4$ permetterebbe di costruire controesempi (ad esempio in dimensione $n = 1$ con $s = 0$, la funzione $\widehat{u}(k) = \chi_{\{|k|>1\}} |k|^{-3}$ renderebbe vera l'ipotesi ma falsa la tesi).

Esercizio 7

Si consideri un punto $y \in \mathbb{R}^3$ e sia $v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione tale che

$$v_j(x) = \frac{x_j - y_j}{\|x - y\|^3}, \quad j = 1, 2, 3$$

dove il pedice j indica la componente del vettore lungo una delle tre direzioni cartesiane, mentre $\|\cdot\|$ rappresenta la norma euclidea su \mathbb{R}^3 . Si mostri che

$$\operatorname{div}(v) = 4\pi\delta_y.$$

Soluzione. Il campo vettoriale $v(x)$ presenta una singolarità in $x = y$. Procediamo in due passi: prima calcoliamo la divergenza classica per $x \neq y$, poi calcoliamo la divergenza distribuzionale.

1. Calcolo puntuale per $x \neq y$ Poniamo $r = \|x - y\|$. Il campo può essere scritto in notazione vettoriale come:

$$v(x) = \frac{x - y}{r^3}.$$

Calcoliamo la divergenza classica $\nabla \cdot v$. Utilizzando la regola di derivazione del prodotto $\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = \nabla f \cdot \mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{A})$ con $f = r^{-3}$ e $\mathbf{A} = (x - y)$, otteniamo:

$$\nabla \cdot \left(\frac{x - y}{r^3} \right) = \nabla(r^{-3}) \cdot (x - y) + \frac{1}{r^3} \nabla \cdot (x - y).$$

Sapendo che $\nabla r = \frac{x - y}{r}$ e $\nabla \cdot (x - y) = 3$, calcoliamo i termini:

- $\nabla(r^{-3}) = -3r^{-4}\nabla r = -3r^{-4}\frac{x - y}{r} = -3\frac{x - y}{r^5};$
- Quindi il primo termine è: $-3\frac{x - y}{r^5} \cdot (x - y) = -3\frac{\|x - y\|^2}{r^5} = -3\frac{r^2}{r^5} = -\frac{3}{r^3}.$

Sommando i contributi:

$$\nabla \cdot v(x) = -\frac{3}{r^3} + \frac{1}{r^3}(3) = 0 \quad \forall x \neq y.$$

Dunque la divergenza è nulla ovunque tranne che nella singolarità.

2. Calcolo nel senso delle distribuzioni Definisco $D_\varepsilon := \mathbb{R}^3 \setminus B_\varepsilon(0)$ allora si trova che

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot v, f) &= - \sum_i (v_i, \partial_i f) \\ &\stackrel{*}{=} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_D d^3x \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin \theta \int_\varepsilon^\infty dr \cdot r^2 \frac{\vec{r} \cdot \hat{r}}{r^3} \frac{\partial f}{\partial r} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi f(\varepsilon, \theta, \phi) \end{aligned}$$

ma $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \implies \exists M > 0$ t.c. $|f(x)| \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$

$$\implies |f(\varepsilon, \theta, \phi)| \leq M \quad \forall (\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$$

Inoltre:

- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon, \theta, \phi) = f(0)$ per continuità di f in $\underline{x} = 0$.
- $M \in \mathcal{L}^1([0, \pi] \times [0, 2\pi])$

Per convergenza dominata:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi f(\varepsilon, \theta, \phi) = f(0) \cdot 4\pi \quad \underline{ok}$$

* Questa uguaglianza è vera per definizione stessa di integrale improprio

Ecco un 2° modo

Poiché v è singolare in y , isoliamo la singolarità considerando il dominio $\Omega_\epsilon = \mathbb{R}^3 \setminus B_\epsilon(y)$, dove $B_\epsilon(y)$ è la palla di raggio ϵ centrata in y . Possiamo scrivere l'integrale come limite:

$$\langle \operatorname{div}(v), \varphi \rangle = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} v(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx.$$

Usiamo l'identità vettoriale $v \cdot \nabla \varphi = \nabla \cdot (\varphi v) - \varphi(\nabla \cdot v)$. Sostituendo nell'integrale:

$$\int_{\Omega_\epsilon} v \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega_\epsilon} \nabla \cdot (\varphi v) dx - \int_{\Omega_\epsilon} \underbrace{\varphi(\nabla \cdot v)}_{=0} dx.$$

Il secondo termine è nullo per quanto calcolato al punto 1. Per il primo termine, applichiamo il Teorema della Divergenza (di Gauss):

$$\int_{\Omega_\epsilon} \nabla \cdot (\varphi v) dx = \int_{\partial \Omega_\epsilon} \varphi v \cdot n dS,$$

dove n è il versore normale **uscente** da Ω_ϵ . Poiché $\partial \Omega_\epsilon$ è la superficie della sfera $\partial B_\epsilon(y)$, la normale uscente dal dominio "esterno" punta verso l'interno della sfera, cioè verso y . Quindi:

$$n = - \frac{x - y}{\|x - y\|} = - \frac{x - y}{\epsilon}.$$

Valutiamo il prodotto scalare $v \cdot n$ sulla superficie ($\|x - y\| = \epsilon$):

$$v(x) \cdot n = \frac{x - y}{\epsilon^3} \cdot \left(- \frac{x - y}{\epsilon} \right) = - \frac{\|x - y\|^2}{\epsilon^4} = - \frac{\epsilon^2}{\epsilon^4} = - \frac{1}{\epsilon^2}.$$

Dobbiamo valutare il limite:

$$L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \oint_{\partial B_\epsilon(y)} \varphi(x) dS.$$

Per i più precisi : [Passiamo a coordinate sferiche centrate in y . Parametizziamo la superficie della sfera di raggio ϵ con gli angoli $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$:

$$x(\theta, \phi) = y + (\epsilon \sin \theta \cos \phi, \epsilon \sin \theta \sin \phi, \epsilon \cos \theta).$$

] Oppure basta dire che l'elemento di superficie è $dS = \epsilon^2 \sin \theta d\theta d\phi$. Sostituendo nell'integrale:

$$L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(x(\theta, \phi)) (\epsilon^2 \sin \theta) d\theta d\phi.$$

Il termine ϵ^2 si semplifica:

$$L = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(y + \epsilon \mathbf{n}(\theta, \phi)) \sin \theta d\theta d\phi.$$

Poiché φ è una funzione test (C_0^∞), essa è limitata. Inoltre, il dominio di integrazione angolare è limitato. Possiamo applicare il Teorema della Convergenza Dominata di Lebesgue (o semplicemente usare la continuità di φ) per portare il limite sotto il segno di integrale:

$$L = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi(y + \epsilon \mathbf{n}(\theta, \phi)) \right] \sin \theta d\theta d\phi.$$

Per la continuità di φ , il limite dell'integranda è $\varphi(y)$. Dato che $\varphi(y)$ non dipende più dagli angoli, lo portiamo fuori:

$$L = \varphi(y) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta.$$

Gli integrali angolari restituiscono l'angolo solido totale 4π (poiché $\int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2$ e $\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi$).

$$L = \varphi(y) \cdot 4\pi.$$

Conclusion Abbiamo ottenuto che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$:

$$\langle \operatorname{div}(v), \varphi \rangle = 4\pi\varphi(y) = \langle 4\pi\delta_y, \varphi \rangle.$$

Pertanto, nel senso delle distribuzioni:

$$\operatorname{div}(v) = 4\pi\delta_y.$$

Esercizio 8 - Metodo Giapponese

Si mostri che, per ogni $v \in H^2(\mathbb{R})$ esiste $C \geq 0$ tale che

$$\|v \star \rho_\epsilon - v\|_{H^1} \leq C\epsilon\|v\|_{H^2},$$

dove $\rho_\epsilon = \epsilon^{-1}\rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} dx \rho = 1$.

Soluzione. Utilizziamo la definizione di norma nello spazio di Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ tramite la trasformata di Fourier. Ricordiamo che per $u \in H^s(\mathbb{R})$:

$$\|u\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi, \quad \text{dove } \langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}.$$

Consideriamo la quantità $\|v \star \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2$. Applicando la trasformata di Fourier e sfruttando la proprietà della convoluzione ($\mathcal{F}(f \star g) = \hat{f}\hat{g}$), otteniamo:

$$\mathcal{F}(v \star \rho_\epsilon - v)(\xi) = \hat{v}(\xi)\hat{\rho}_\epsilon(\xi) - \hat{v}(\xi) = \hat{v}(\xi)(\hat{\rho}_\epsilon(\xi) - 1).$$

Ricordando la definizione di $\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}\rho(x/\epsilon)$, la proprietà di scalatura della trasformata di Fourier implica:

$$\hat{\rho}_\epsilon(\xi) = \hat{\rho}(\epsilon\xi).$$

Possiamo quindi riscrivere il quadrato della norma H^1 come:

$$\|v \star \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2) |\hat{v}(\xi)|^2 |\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1|^2 d\xi. \quad (3)$$

Stima del moltiplicatore. Dato che $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, la sua trasformata $\hat{\rho}$ appartiene allo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Inoltre, per ipotesi $\int \rho dx = 1$, il che implica $\hat{\rho}(0) = 1$. Applicando il Teorema del Valor Medio (o un'espansione di Taylor al primo ordine) alla funzione $\hat{\rho}$ attorno all'origine, per ogni $\eta \in \mathbb{R}$ abbiamo:

$$\hat{\rho}(\eta) - 1 = \hat{\rho}(\eta) - \hat{\rho}(0) = \eta \cdot \hat{\rho}'(\zeta),$$

per un certo ζ compreso tra 0 e η . Poiché $\hat{\rho} \in \mathcal{S}$, la sua derivata prima è uniformemente limitata su \mathbb{R} . Definiamo $K := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{\rho}'(\xi)| < \infty$. Otteniamo la stima puntuale:

$$|\hat{\rho}(\eta) - 1| \leq K|\eta|.$$

Sostituendo $\eta = \epsilon\xi$, abbiamo:

$$|\hat{\rho}(\epsilon\xi) - 1| \leq K\epsilon|\xi|.$$

Conclusion. Inseriamo la stima appena ottenuta nell'integrale (3):

$$\|v \star \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2 \leq \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2) |\hat{v}(\xi)|^2 \cdot (K\epsilon|\xi|)^2 d\xi = K^2\epsilon^2 \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2) |\xi|^2 |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi.$$

Osserviamo ora che per ogni $\xi \in \mathbb{R}$, vale banalmente $|\xi|^2 \leq 1 + |\xi|^2$. Moltiplicando ambo i membri per la quantità positiva $(1 + |\xi|^2)$, otteniamo la disuguaglianza algebrica:

$$(1 + |\xi|^2) |\xi|^2 \leq (1 + |\xi|^2)^2 = \langle \xi \rangle^4.$$

Utilizzando questa maggiorazione nell'integrale:

$$\|v \star \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2 \leq K^2\epsilon^2 \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^4 |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi.$$

L'integrale a destra coincide esattamente con la definizione della norma $\|v\|_{H^2}^2$. Pertanto:

$$\|v \star \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2 \leq K^2 \epsilon^2 \|v\|_{H^2}^2.$$

Estraendo la radice quadrata, otteniamo la tesi con $C = K = \sup |\hat{\rho}'|$:

$$\|v \star \rho_\epsilon - v\|_{H^1} \leq C \epsilon \|v\|_{H^2}.$$

Osservazione. Nella dimostrazione abbiamo usato la definizione di norma H^2 tramite potenziali di Bessel ($\langle \xi \rangle^s$), che equivale a:

$$\|v\|_{H^2}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + 2\|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2}^2.$$

Questa norma è equivalente, ma non isometrica, alla norma standard definita come somma delle norme delle derivate ($\sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha v\|_{L^2}^2$), che manca del fattore 2 sul termine misto. Ai fini della stima asintotica in ϵ , questa distinzione è irrilevante in quanto assorbita dalle costanti, ma è fondamentale per la precisione formale sugli spazi di Hilbert.

Esercizio 8 - Metodo Italiano

Si mostri che, per ogni $v \in H^2(\mathbb{R})$ esiste $C \geq 0$ tale che

$$\|v \star \rho_\epsilon - v\|_{H^1} \leq C \epsilon \|v\|_{H^2},$$

dove $\rho_\epsilon = \epsilon^{-1} \rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} dx \rho = 1$.

Soluzione. Definiamo l'errore di approssimazione come:

$$G_\epsilon(v) := v \star \rho_\epsilon - v.$$

L'obiettivo è stimare la norma H^1 di $G_\epsilon(v)$, che è definita da:

$$\|G_\epsilon(v)\|_{H^1}^2 = \|G_\epsilon(v)\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{d}{dx} G_\epsilon(v) \right\|_{L^2}^2. \quad (4)$$

Procediamo analizzando separatamente i due termini della somma.

Passo 1: Stima della norma L^2 Utilizziamo la trasformata di Fourier. Ricordando che $\widehat{f \star g} = \hat{f} \hat{g}$ e che $\widehat{\rho_\epsilon}(\xi) = \hat{\rho}(\epsilon \xi)$, la trasformata di $G_\epsilon(v)$ è:

$$\widehat{G_\epsilon(v)}(\xi) = \hat{v}(\xi) \hat{\rho}(\epsilon \xi) - \hat{v}(\xi) = \hat{v}(\xi) (\hat{\rho}(\epsilon \xi) - 1).$$

Per il Teorema di Plancherel, abbiamo:

$$\|G_\epsilon(v)\|_{L^2}^2 = \left\| \widehat{G_\epsilon(v)} \right\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} |\hat{v}(\xi)|^2 |\hat{\rho}(\epsilon \xi) - 1|^2 d\xi.$$

Poiché ρ è un mollificatore, sappiamo che $\int \rho dx = 1$, il che implica $\hat{\rho}(0) = 1$. Essendo $\rho \in C_0^\infty$, $\hat{\rho}$ è derivabile con derivata limitata. Applicando il Teorema del Valor Medio (o sviluppo di Taylor al primo ordine), esiste una costante $K > 0$ tale che:

$$|\hat{\rho}(\eta) - \hat{\rho}(0)| \leq K|\eta|.$$

Ponendo $\eta = \epsilon \xi$, otteniamo:

$$|\hat{\rho}(\epsilon \xi) - 1| \leq K \epsilon |\xi|.$$

Sostituendo questa stima nell'integrale:

$$\|G_\epsilon(v)\|_{L^2}^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |\hat{v}(\xi)|^2 K^2 \epsilon^2 |\xi|^2 d\xi = K^2 \epsilon^2 \int_{\mathbb{R}} |\xi \hat{v}(\xi)|^2 d\xi.$$

Ricordando la proprietà della trasformata della derivata, $|\xi \hat{v}(\xi)| = \left| \widehat{v'}(\xi) \right|$, concludiamo che:

$$\|G_\epsilon(v)\|_{L^2}^2 \leq K^2 \epsilon^2 \|v'\|_{L^2}^2. \quad (5)$$

Passo 2: Stima della derivata Consideriamo ora il secondo termine di (4). Sfruttando la proprietà di commutazione tra derivata e convoluzione ($\frac{d}{dx}(f * g) = f' * g$), possiamo scrivere:

$$\frac{d}{dx}G_\epsilon(v) = \frac{d}{dx}(v * \rho_\epsilon - v) = v' * \rho_\epsilon - v' = G_\epsilon(v').$$

Dobbiamo quindi stimare la norma L^2 di $G_\epsilon(v')$. Poiché per ipotesi $v \in H^2$, allora $v' \in H^1$. Possiamo dunque applicare la disuguaglianza (5) dimostrata nel Passo 1, sostituendo v con v' :

$$\left\| \frac{d}{dx}G_\epsilon(v) \right\|_{L^2}^2 = \|G_\epsilon(v')\|_{L^2}^2 \leq K^2 \epsilon^2 \|(v')'\|_{L^2}^2 = K^2 \epsilon^2 \|v''\|_{L^2}^2. \quad (6)$$

Conclusione Sommando i risultati (5) e (6), otteniamo la stima per la norma H^1 :

$$\begin{aligned} \|G_\epsilon(v)\|_{H^1}^2 &= \|G_\epsilon(v)\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{d}{dx}G_\epsilon(v) \right\|_{L^2}^2 \\ &\leq K^2 \epsilon^2 \|v'\|_{L^2}^2 + K^2 \epsilon^2 \|v''\|_{L^2}^2 \\ &= K^2 \epsilon^2 \left(\|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2}^2 \right). \end{aligned}$$

Notiamo che la quantità tra parentesi è limitata dalla norma H^2 al quadrato (dato che $\|v\|_{H^2}^2 = \|v\|_2^2 + \|v'\|_2^2 + \|v''\|_2^2$):

$$\|v'\|_{L^2}^2 + \|v''\|_{L^2}^2 \leq \|v\|_{H^2}^2.$$

Pertanto:

$$\|v * \rho_\epsilon - v\|_{H^1}^2 \leq K^2 \epsilon^2 \|v\|_{H^2}^2.$$

Estraendo la radice quadrata e ponendo $C = K$, si ottiene la tesi:

$$\|v * \rho_\epsilon - v\|_{H^1} \leq C \epsilon \|v\|_{H^2}.$$

Esercizio 9

Si calcolino le soluzioni fondamentali di Δ^2 in \mathbb{R}^3 dove Δ è l'operatore di Laplace.

Soluzione. Cerchiamo una distribuzione $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ tale che:

$$\Delta^2 E = \delta \quad \text{in } \mathbb{R}^3. \quad (7)$$

Possiamo riscrivere l'equazione come l'azione iterata del Laplaciano:

$$\Delta(\Delta E) = \delta.$$

Ricordiamo che la soluzione fondamentale del Laplaciano in \mathbb{R}^3 , denotata con E_Δ , soddisfa $\Delta E_\Delta = \delta$ ed è data da:

$$E_\Delta(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}.$$

Ponendo $u = \Delta E$, l'equazione (7) si riduce al sistema:

$$\begin{cases} \Delta E = u \\ \Delta u = \delta \end{cases} \implies u = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}.$$

Dobbiamo ora risolvere $\Delta E = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$. Data la simmetria radiale del termine noto, cerchiamo una soluzione radiale $E = E(r)$ con $r = |\mathbf{x}|$.

L'operatore di Laplace per funzioni a simmetria radiale in \mathbb{R}^3 si scrive come:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

L'equazione diventa (per $r > 0$):

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dE}{dr} \right) = -\frac{1}{4\pi r}.$$

Moltiplicando per r^2 e integrando una prima volta rispetto a r :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dE}{dr} \right) = -\frac{r}{4\pi} \implies r^2 \frac{dE}{dr} = -\frac{r^2}{8\pi} + C_1.$$

Dividendo per r^2 e integrando nuovamente:

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{1}{8\pi} + \frac{C_1}{r^2} \implies E(r) = -\frac{r}{8\pi} - \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Analizziamo i termini ottenuti:

- Il termine C_2 è una costante armonica ($\Delta C_2 = 0$).
- Il termine $-C_1/r$ è proporzionale alla soluzione fondamentale del Laplaciano (che mappa in δ tramite un Laplaciano, e quindi in $\Delta\delta$ tramite il bilaplaciano, ma noi cerchiamo solo δ). Possiamo porre $C_1 = 0$ per trovare la soluzione particolare.
- Il termine $-\frac{r}{8\pi}$ è il candidato per la soluzione fondamentale cercata.

Verifichiamo rigorosamente nel senso delle distribuzioni che $E(\mathbf{x}) = -\frac{|\mathbf{x}|}{8\pi}$ sia la soluzione corretta. Calcoliamo $\Delta|\mathbf{x}|$ in \mathbb{R}^3 . Poiché $|\mathbf{x}|$ è una funzione continua e differenziabile ovunque tranne nell'origine, e la singolarità in 0 è debole (localmente integrabile insieme alle sue derivate prime), possiamo calcolare il Laplaciano in senso classico per $r \neq 0$:

$$\Delta r = \frac{2}{r}.$$

Non ci sono contributi deltaformi al primo passo perché la funzione r non è abbastanza singolare. Ora applichiamo il secondo Laplaciano:

$$\Delta^2 \left(-\frac{|\mathbf{x}|}{8\pi} \right) = \Delta \left(-\frac{1}{8\pi} \Delta|\mathbf{x}| \right) = \Delta \left(-\frac{1}{8\pi} \frac{2}{|\mathbf{x}|} \right) = -\frac{1}{4\pi} \Delta \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} \right).$$

Utilizzando l'identità nota $\Delta(1/|\mathbf{x}|) = -4\pi\delta$, otteniamo:

$$-\frac{1}{4\pi}(-4\pi\delta) = \delta.$$

La soluzione fondamentale del bilaplaciano in \mathbb{R}^3 è dunque:

$$E(\mathbf{x}) = -\frac{|\mathbf{x}|}{8\pi}.$$

Esercizio 10

Sia $\square = -\partial_t^2 + \partial_x^2$ l'operatore d'onda su \mathbb{R}^2 . Si mostri che, detta Θ la funzione di Heaviside, sono soluzioni fondamentali per l'operatore d'onda:

$$G^+ = \Theta(t) \frac{\Theta(t^2 - x^2)}{2} \quad \text{e} \quad G^- = -\Theta(-t) \frac{\Theta(t^2 - x^2)}{2}.$$

Soluzione. Per verificare che G^+ sia soluzione fondamentale, dobbiamo mostrare che $\square G^+ = \delta$ nel senso delle distribuzioni. Analizziamo innanzitutto il supporto della distribuzione per definire correttamente l'integrale di accoppiamento con una funzione test $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Definizione del dominio di integrazione. La distribuzione G^+ è definita dal prodotto di due funzioni gradino:

1. $\Theta(t)$ impone che la distribuzione sia non nulla solo per $t > 0$.
2. $\Theta(t^2 - x^2)$ impone $t^2 - x^2 > 0$, ovvero $t^2 > x^2$. Poiché $t > 0$, estraendo la radice otteniamo $|x| < t$, che equivale a $-t < x < t$.

L'intersezione di queste condizioni definisce il cono luce futuro. Pertanto, l'azione di G^+ su ϕ è data dall'integrale di Lebesgue limitato a questo dominio:

$$\langle G^+, \phi \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dt \int_{-t}^t \phi(t, x) dx.$$

Calcolo del D'Alembertiano. Per definizione di derivata nel senso delle distribuzioni, calcoliamo $\langle \square G^+, \phi \rangle = \langle G^+, \square \phi \rangle$. Sostituendo $\square \phi = (-\partial_t^2 + \partial_x^2)\phi$:

$$\langle \square G^+, \phi \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} dt \left(\int_{-t}^t \partial_x^2 \phi(t, x) dx - \int_{-t}^t \partial_t^2 \phi(t, x) dx \right).$$

Analisi del termine spaziale. Per il primo integrale interno, applichiamo il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale nella variabile x :

$$\int_{-t}^t \partial_x^2 \phi(t, x) dx = [\partial_x \phi(t, x)]_{x=-t}^{x=t} = \partial_x \phi(t, t) - \partial_x \phi(t, -t).$$

Analisi del termine temporale e derivate totali. Per gestire il secondo termine, utilizziamo la regola di Leibniz per la derivazione sotto segno di integrale. Sia $I(t) = \int_{-t}^t \partial_t \phi(t, x) dx$. Derivando totalmente rispetto a t :

$$\frac{d}{dt} \int_{-t}^t \partial_t \phi(t, x) dx = \int_{-t}^t \partial_t^2 \phi(t, x) dx + \partial_t \phi(t, t) \cdot (1) - \partial_t \phi(t, -t) \cdot (-1).$$

Da cui ricaviamo l'espressione per l'integrale della derivata seconda temporale:

$$-\int_{-t}^t \partial_t^2 \phi(t, x) dx = -\frac{d}{dt} \int_{-t}^t \partial_t \phi(t, x) dx + \partial_t \phi(t, t) + \partial_t \phi(t, -t).$$

Sintesi. Sommando i contributi spaziali e temporali, l'integrando in dt diventa:

$$(\partial_x \phi(t, t) + \partial_t \phi(t, t)) - (\partial_x \phi(t, -t) - \partial_t \phi(t, -t)) - \frac{d}{dt} \int_{-t}^t \partial_t \phi dx.$$

Riconosciamo nei primi termini le derivate totali della funzione ϕ valutata lungo le caratteristiche $x = t$ e $x = -t$:

$$\frac{d}{dt} [\phi(t, t)] = \partial_t \phi(t, t) + \partial_x \phi(t, t), \quad \frac{d}{dt} [\phi(t, -t)] = \partial_t \phi(t, -t) - \partial_x \phi(t, -t).$$

Quindi l'intero argomento dell'integrale in dt è una derivata totale esatta:

$$\langle \square G^+, \phi \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(\phi(t, t) + \phi(t, -t) - \int_{-t}^t \partial_t \phi(t, x) dx \right) dt.$$

Integrando tra 0 e $+\infty$ otteniamo il valore al bordo (poiché a $+\infty$ la funzione test a supporto compatto si annulla):

$$-\frac{1}{2} \left[\phi(0, 0) + \phi(0, 0) - \int_0^0 \partial_t \phi(0, x) dx \right] = -\frac{1}{2} (2\phi(0, 0)) = -\phi(0, 0) = -\langle \delta, \phi \rangle.$$

Dunque $\square G^+ = -\delta$.

Il caso G^- . Per G^- il ragionamento è del tutto analogo e si può ottenere velocemente osservando la simmetria temporale. G^- è supportata nel cono luce passato ($t < -|x| \leq 0$). Effettuando il cambio di variabile $t \rightarrow -t$ nell'integrale, l'azione su una funzione test si riconduce alla forma precedente, ma con un segno globale differente derivante dalla definizione di G^- (che ha un meno davanti) e dagli estremi di integrazione. La struttura delle derivate totali lungo le caratteristiche rimane invariata, portando nuovamente ad una singolarità nell'origine che restituisce la delta di Dirac.

Esercizio 10 - Metodo di Fourier

Sia $\square = -\partial_t^2 + \partial_x^2$ l'operatore d'onda su \mathbb{R}^2 . Si mostri che, detta Θ la funzione di Heaviside, sono soluzioni fondamentali per l'operatore d'onda:

$$G^+ = \Theta(t) \frac{\Theta(t^2 - x^2)}{2} \quad \text{e} \quad G^- = -\Theta(-t) \frac{\Theta(t^2 - x^2)}{2}.$$

Soluzione. L'obiettivo è verificare che $\square G^\pm = \pm \delta(t)\delta(x)$ (a meno di un segno globale dipendente dalla convenzione sulla sorgente). Utilizziamo la trasformata di Fourier parziale rispetto alla variabile spaziale x , definita come $\mathcal{F}[f](k) = \hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ikx}dx$.

L'equazione nello spazio delle frequenze diventa:

$$\widehat{\square G} = (-\partial_t^2 - k^2)\hat{G}(t, k) = \delta(t).$$

1. Analisi del Propagatore Ritardato G^+

Decomposizione geometrica. Per $t > 0$, il supporto definito da $\Theta(t^2 - x^2)$ corrisponde all'intervallo $|x| < t$. Possiamo riscrivere la funzione caratteristica utilizzando le funzioni segno traslate:

$$\Theta(t^2 - x^2) = \frac{1}{2} [\text{sgn}(x+t) - \text{sgn}(x-t)], \quad \text{per } t > 0.$$

Infatti, nell'intervallo $-t < x < t$, abbiamo $\text{sgn}(x+t) = 1$ e $\text{sgn}(x-t) = -1$, la cui differenza fa 2. Fuori dall'intervallo la differenza è nulla. Dunque:

$$G^+(t, x) = \frac{\Theta(t)}{4} [\text{sgn}(x+t) - \text{sgn}(x-t)].$$

Trasformata di Fourier. Ricordando che $\widehat{\text{sgn}}(k) = \frac{2}{ik}$ (nel senso del valor principale) e usando la proprietà di traslazione $\mathcal{F}[f(x-x_0)] = e^{-ikx_0}\hat{f}(k)$:

- $\mathcal{F}[\text{sgn}(x+t)] = e^{ikt} \frac{2}{ik}$ (traslazione $x_0 = -t$)
- $\mathcal{F}[\text{sgn}(x-t)] = e^{-ikt} \frac{2}{ik}$ (traslazione $x_0 = t$)

Sostituendo in G^+ :

$$\hat{G}^+(t, k) = \frac{\Theta(t)}{4} \left[e^{ikt} \frac{2}{ik} - e^{-ikt} \frac{2}{ik} \right] = \frac{\Theta(t)}{2ik} \underbrace{(e^{ikt} - e^{-ikt})}_{2i \sin(kt)} = \Theta(t) \frac{\sin(kt)}{k}.$$

Calcolo dell'operatore d'onda. Calcoliamo le derivate distribuzionali rispetto al tempo di \hat{G}^+ :

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{G}^+ &= \delta(t) \frac{\sin(kt)}{k} + \Theta(t) \cos(kt) = \Theta(t) \cos(kt) \quad (\text{poiché } \sin(0) = 0) \\ \partial_t^2 \hat{G}^+ &= \delta(t) \cos(kt) - k\Theta(t) \sin(kt) = \delta(t) - k\Theta(t) \sin(kt). \end{aligned}$$

Applicando l'operatore trasformato $(-\partial_t^2 - k^2)$:

$$(-\partial_t^2 - k^2)\hat{G}^+ = -(\delta(t) - k\Theta(t) \sin(kt)) - k^2 \left(\Theta(t) \frac{\sin(kt)}{k} \right).$$

I termini oscillanti si cancellano perfettamente:

$$= -\delta(t) + k\Theta(t) \sin(kt) - k\Theta(t) \sin(kt) = -\delta(t).$$

Antitrasformando, otteniamo $\square G^+ = -\delta(t)\delta(x)$, perchè antitrasformando una costante, risulta nella $\delta(x)$.

2. Analisi del Propagatore Avanzato G^-

Decomposizione geometrica. Definito come $G^- = -\frac{1}{2}\Theta(-t)\Theta(t^2 - x^2)$. Per $t < 0$, la condizione $t^2 - x^2 > 0$ implica $|x| < |t| = -t$, ovvero $t < x < -t$. In questo caso la decomposizione corretta è:

$$\Theta(t^2 - x^2) = \frac{1}{2} [\text{sgn}(x-t) - \text{sgn}(x+t)], \quad \text{per } t < 0.$$

Verifica: per $x \in (t, -t)$, dato che t è negativo, $x-t > 0$ ($\text{sgn} = 1$) e $x+t < 0$ ($\text{sgn} = -1$). La differenza è $1 - (-1) = 2$. Quindi:

$$G^-(t, x) = -\frac{\Theta(-t)}{4} [\text{sgn}(x-t) - \text{sgn}(x+t)].$$

Trasformata di Fourier. Procediamo come nel caso precedente:

$$\hat{G}^-(t, k) = -\frac{\Theta(-t)}{4} \left[e^{-ikt} \frac{2}{ik} - e^{ikt} \frac{2}{ik} \right] = -\frac{\Theta(-t)}{2ik} \underbrace{(e^{-ikt} - e^{ikt})}_{-2i \sin(kt)}.$$

$$\hat{G}^-(t, k) = \Theta(-t) \frac{\sin(kt)}{k}.$$

Notiamo che \hat{G}^- ha la stessa forma funzionale di \hat{G}^+ ma supportata su $t < 0$.

Calcolo dell'operatore d'onda.

$$\partial_t \hat{G}^- = -\delta(t) \frac{\sin(kt)}{k} + \Theta(-t) \cos(kt) = \Theta(-t) \cos(kt).$$

$$\partial_t^2 \hat{G}^- = -\delta(t) \cos(kt) - k\Theta(-t) \sin(kt) = -\delta(t) - k\Theta(-t) \sin(kt).$$

Applicando l'operatore $(-\partial_t^2 - k^2)$:

$$\begin{aligned} (-\partial_t^2 - k^2) \hat{G}^- &= -(-\delta(t) - k\Theta(-t) \sin(kt)) - k\Theta(-t) \sin(kt). \\ &= \delta(t) + k\Theta(-t) \sin(kt) - k\Theta(-t) \sin(kt) = \delta(t). \end{aligned}$$

Antitrasformando, otteniamo $\square G^- = \delta(t)\delta(x)$ (perchè antitrasformando una costante, risulta nella $\delta(x)$)

Conclusione

Abbiamo dimostrato rigorosamente utilizzando la trasformata di Fourier spaziale e la decomposizione in funzioni segno che:

- $\square G^+ = -\delta(t)\delta(x)$
- $\square G^- = +\delta(t)\delta(x)$

Entrambe sono dunque soluzioni fondamentali dell'operatore d'onda (a meno del segno, che dipende dalla convenzione scelta per la definizione della funzione di Green causale rispetto alla sorgente).