Esercizi Operatori

Tommaso Pedroni

Traccia dell'Esercizio

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e sia $T = T^* \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ un operatore compatto autoaggiunto. Dato $\psi_0 \in \mathcal{H}$, si considerino le equazioni:

1. $T\psi = \psi$
2. $T\psi = \psi + \psi_0$

Si mostri che:

(a) Se l'unica soluzione di (1) è $\psi = 0$, allora l'equazione (2) ammette un'unica soluzione.

(b) Se l'equazione (1) ammette soluzioni $\psi \neq 0$, allora l'equazione (2) è risolubile se e solo se ψ_0 è ortogonale ad ogni soluzione di (1).

Soluzione. Definiamo l'operatore $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ come:

$$S := T - I.$$

Poiché T è limitato (in quanto compatto) e I è limitato, S è un operatore limitato. Inoltre, poiché T è autoaggiunto ($T = T^*$) e l'identità è autoaggiunta, S è autoaggiunto:

$$S^* = (T - I)^* = T^* - I^* = T - I = S.$$

Le equazioni date possono essere riscritte come:

1. $S\psi = 0$ (Equazione omogenea)
2. $S\psi = \psi_0$ (Equazione non omogenea, a meno di un segno ininfluente su ψ_0)

Parte (a)

Ipotesi: L'unica soluzione della (1) è $\psi = 0$. Questo implica che $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$.

1. Analisi del Nucleo $\mathrm{Ker}(S)$

Dobbiamo formalizzare che $\mathrm{Ker}(S)$ è un sottospazio vettoriale (banale ma necessario per rigore). Il nucleo è definito come $\mathrm{Ker}(S) = \{\psi \in \mathcal{H} \mid (T - I)\psi = 0\}$.

- **Contiene lo zero:** $S(0) = T(0) - 0 = 0$, quindi $0 \in \mathrm{Ker}(S)$.
- **Chiusura rispetto alle operazioni lineari:** Siano $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Ker}(S)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

  $$S(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \alpha S(\phi_1) + \beta S(\phi_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

  Pertanto $\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \in \mathrm{Ker}(S)$.

Dunque $\mathrm{Ker}(S)$ è un sottospazio lineare. Per l'ipotesi di questa sezione, $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$, il che implica che l'operatore S è **iniettivo**. L'unicità della soluzione, qualora esista, è garantita. Resta da dimostrare l'esistenza (suriettività).

2. Dimostrazione della Chiusura del Rango e Suriettività

Per dimostrare che l'equazione $S\psi = \psi_0$ ammette soluzione per ogni ψ_0, dobbiamo mostrare che $\mathrm{Ran}(S) = \mathcal{H}$. Essendo S autoaggiunto, vale la decomposizione ortogonale:

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Ran}(S)} \oplus \mathrm{Ker}(S).$$

Dato che $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$, segue che $\overline{\mathrm{Ran}(S)} = \mathcal{H}$. Ovvero, l'immagine è densa. Per concludere che $\mathrm{Ran}(S) = \mathcal{H}$, è necessario e sufficiente dimostrare che $\mathrm{Ran}(S)$ è un insieme **chiuso**.

Dimostrazione della chiusura di $\mathrm{Ran}(S)$**.** Sia $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Ran}(S)$ una successione convergente ad un elemento $y \in \mathcal{H}$, cioè $\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0$. Dobbiamo dimostrare che esiste un $x \in \mathcal{H}$ tale che $Sx = y$.

Poiché $y_n \in \mathrm{Ran}(S)$, per ogni n esiste un unico $x_n \in \mathcal{H}$ (per l'iniettività dimostrata al punto 1) tale che:

$$Sx_n = y_n.$$

Passo fondamentale: Limitazione della successione preimmagine. Dobbiamo dimostrare che la successione $\{x_n\}$ è limitata in norma. Procediamo per **assurdo**. Supponiamo che $\{x_n\}$ non sia limitata. Allora esiste una sottosuccessione (che per semplicità di notazione indichiamo ancora con x_n) tale che:

$$\|x_n\| \to \infty \quad \text{per } n \to \infty.$$

Definiamo la successione normalizzata:

$$z_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}.$$

Osserviamo che $\|z_n\| = 1$ per ogni n. Applichiamo l'operatore S:

$$Sz_n = S\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = \frac{1}{\|x_n\|} Sx_n = \frac{y_n}{\|x_n\|}.$$

Poiché $y_n \to y$ (quindi è limitata in norma) e $\|x_n\| \to \infty$, abbiamo:

$$\lim_{n\to\infty} Sz_n = 0.$$

Ricordando che $S = T - I$, possiamo scrivere:

$$(T - I)z_n \to 0 \implies z_n - Tz_n \to 0 \implies z_n \approx Tz_n.$$

Poiché $\{z_n\}$ è una successione limitata (norma unitaria) e l'operatore T è **compatto**, dalla definizione di compattezza segue che esiste una sottosuccessione $\{z_{n_k}\}$ tale che $\{Tz_{n_k}\}$ converge fortemente ad un vettore $z^* \in \mathcal{H}$.

Dalla relazione $z_{n_k} - Tz_{n_k} \to 0$, segue che anche la successione $\{z_{n_k}\}$ deve convergere a z^*:

$$z_{n_k} \to z^*.$$

Per la continuità di S, abbiamo:

$$Sz^* = S(\lim_{k\to\infty} z_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} Sz_{n_k} = 0.$$

Quindi $z^* \in \mathrm{Ker}(S)$. Ma per ipotesi $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$, quindi $z^* = 0$. Tuttavia, sappiamo che $\|z_{n_k}\| = 1$ per ogni k, quindi per continuità della norma:

$$\|z^*\| = \lim_{k\to\infty} \|z_{n_k}\| = 1.$$

Siamo giunti a una contraddizione ($0 = \|z^*\| = 1$). L'ipotesi che $\{x_n\}$ fosse illimitata è falsa. Dunque $\{x_n\}$ è limitata.

Conclusione della chiusura: Poiché $\{x_n\}$ è limitata e T è compatto, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_j}\}$ tale che Tx_{n_j} converge a un qualche vettore w. Dall'equazione $Sx_{n_j} = y_{n_j}$, abbiamo:

$$(T - I)x_{n_j} = y_{n_j} \implies x_{n_j} = Tx_{n_j} - y_{n_j}.$$

Il termine di destra converge (poiché $Tx_{n_j} \to w$ e $y_{n_j} \to y$), quindi x_{n_j} converge ad un elemento $x := w - y$. Per continuità di S:

$$Sx = \lim_{j\to\infty} Sx_{n_j} = \lim_{j\to\infty} y_{n_j} = y.$$

Dunque $y \in \mathrm{Ran}(S)$. Abbiamo dimostrato che $\mathrm{Ran}(S)$ è chiuso.

Conclusione Parte (a): Poiché $\mathrm{Ran}(S)$ è chiuso e $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$, abbiamo:

$$\mathrm{Ran}(S) = (\mathrm{Ker}(S^*))^\perp = (\mathrm{Ker}(S))^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}.$$

L'operatore S è quindi una biiezione su $\mathcal{H}$. L'equazione (2) ammette una ed una sola soluzione.

Parte (b)

Ipotesi: L'equazione (1) ammette soluzioni $\psi \neq 0$. Questo significa che $\mathrm{Ker}(S) \neq \{0\}$. $\mathrm{Ker}(S)$ è l'autospazio di T relativo all'autovalore 1. Poiché T è compatto, questo autospazio ha dimensione finita, ma qui ci basta sapere che non è banale.

Dalla teoria generale (e ricalcando la dimostrazione di chiusura fatta al punto (a), che rimane valida anche se il nucleo non è nullo), sappiamo che $\mathrm{Ran}(S)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$.

Essendo $\mathrm{Ran}(S)$ chiuso, vale esattamente:

$$\mathrm{Ran}(S) = (\mathrm{Ker}(S^*))^{\perp}.$$

Poiché S è autoaggiunto ($S = S^*$), abbiamo:

$$\mathrm{Ran}(S) = (\mathrm{Ker}(S))^{\perp}.$$

L'equazione (2), $S\psi = \psi_0$, ha soluzione se e solo se $\psi_0 \in \mathrm{Ran}(S)$. In virtù dell'uguaglianza sopra, questo equivale a:

$$\psi_0 \in (\mathrm{Ker}(S))^{\perp}.$$

Ovvero, ψ_0 deve essere ortogonale a ogni vettore del nucleo di S. Poiché i vettori di $\mathrm{Ker}(S)$ sono esattamente le soluzioni dell'equazione omogenea (1), l'equazione (2) è risolubile se e solo se ψ_0 è ortogonale ad ogni soluzione della (1).

□

Traccia dell'Esercizio

Sia $g \in L^2([0, 2\pi])$. Definito l'operatore $T : L^2([0, 2\pi]) \to L^2([0, 2\pi])$ come:

$$f \mapsto T(f) \doteq g * f = \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)\,dy$$

si mostri che $T \in \mathcal{B}_\infty(L^2([0, 2\pi]))$ (ovvero T è compatto) e che le funzioni e^{inx} sono autovettori di T.

Soluzione. Per procedere con il dovuto rigore, assumiamo che la funzione g, data in $L^2([0, 2\pi])$, sia estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Questo rende ben definita l'espressione $g(x - y)$ per ogni coppia (x, y).

1. Spettro Puntuale: Gli autovettori

Siano $\phi_n(x) \doteq e^{inx}$ con $n \in \mathbb{Z}$. Verifichiamo direttamente che questi sono autovettori applicando l'operatore integrale.

$$(T\phi_n)(x) = \int_0^{2\pi} g(x-y)e^{iny}\,dy.$$

Operiamo il cambio di variabile $z = x - y$. Di conseguenza $y = x - z$ e $dy = -dz$. Gli estremi di integrazione si trasformano come segue: $y = 0 \to z = x$ e $y = 2\pi \to z = x - 2\pi$.

$$(T\phi_n)(x) = \int_x^{x-2\pi} g(z)e^{in(x-z)}(-dz) = e^{inx}\int_{x-2\pi}^{x} g(z)e^{-inz}\,dz.$$

L'integranda $h(z) = g(z)e^{-inz}$ è il prodotto di funzioni 2π-periodiche, ed è quindi essa stessa 2π-periodica. È fatto noto dell'analisi reale che l'integrale di una funzione periodica su un intervallo pari al periodo è invariante per traslazione degli estremi:

$$\int_{x-2\pi}^{x} h(z)\,dz = \int_0^{2\pi} h(z)\,dz.$$

Sostituendo, otteniamo:

$$(T\phi_n)(x) = e^{inx}\left(\int_0^{2\pi} g(z)e^{-inz}\,dz\right).$$

Definendo lo scalare $\lambda_n \doteq \int_0^{2\pi} g(z)e^{-inz}\,dz$, abbiamo dimostrato che:

$$T\phi_n = \lambda_n\phi_n.$$

Dunque, le funzioni ϕ_n sono autovettori di T relativi agli autovalori λ_n.

2. Completezza del sistema ortonormale

Per poter analizzare le proprietà spettrali globali dell'operatore, dobbiamo assicurarci che gli autovettori trovati generino l'intero spazio. Definiamo il sistema normalizzato:

$$u_n(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Il sistema $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è chiaramente ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di L^2: $\langle u_n, u_m \rangle = \delta_{nm}$.

Per dimostrarne la completezza, mostriamo che il complemento ortogonale del sottospazio generato da $\{u_n\}$ è il solo vettore nullo. Sia $f \in L^2([0, 2\pi])$ tale che $\langle f, u_n \rangle = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

$$\langle f, u_n \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{u_n(x)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\, dx = 0.$$

Gli integrali sopra corrispondono (a meno del fattore di normalizzazione) ai coefficienti di Fourier di f, denotati $\hat{f}_n$. L'ipotesi $\langle f, u_n \rangle = 0, \forall n$ implica $\hat{f}_n = 0, \forall n$. Per il **Teorema di Unicità** della serie di Fourier (conseguenza della densità dei polinomi trigonometrici e della completezza di L^2), una funzione L^2 con tutti i coefficienti di Fourier nulli è nulla quasi ovunque.

$$f = 0 \quad \text{q.o.}$$

Pertanto, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è una base ortonormale completa (Base di Hilbert) per $\mathcal{H}$.

3. Compattezza e Classe di Hilbert-Schmidt

Per dimostrare che T è compatto ($T \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$), dimostreremo la condizione più forte che T è un operatore di Hilbert-Schmidt. Un operatore T è di Hilbert-Schmidt se, data una base ortonormale $\{e_k\}$, la quantità $\|T\|_{HS}^2 \doteq \sum_k \|Te_k\|^2$ è finita.

Scegliamo come base proprio gli autovettori normalizzati $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Poiché $Tu_n = \lambda_n u_n$, abbiamo:

$$\|Tu_n\|^2 = \|\lambda_n u_n\|^2 = |\lambda_n|^2 \|u_n\|^2 = |\lambda_n|^2.$$

La norma Hilbert-Schmidt è dunque data dalla serie degli autovalori al quadrato:

$$\|T\|_{HS}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n|^2.$$

Analizziamo i termini λ_n. Dalla definizione data nel punto 1:

$$\lambda_n = \int_0^{2\pi} g(z)e^{-inz}\, dz.$$

Possiamo riscrivere λ_n in funzione dei coefficienti di Fourier della funzione g rispetto alla base ortonormale $\{u_n\}$. I coefficienti di Fourier sono $\hat{g}_n = \langle g, u_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} g(z)e^{-inz}\, dz$. Risulta evidente che:

$$\lambda_n = \sqrt{2\pi}\, \hat{g}_n.$$

Sostituendo nella somma:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\sqrt{2\pi}\, \hat{g}_n\right|^2 = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2.$$

Poiché per ipotesi $g \in L^2([0, 2\pi])$, l'**Identità di Parseval** garantisce che la somma dei quadrati dei suoi coefficienti di Fourier converga al quadrato della norma della funzione:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2 = \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Di conseguenza:

$$\|T\|_{HS}^2 = 2\pi \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

L'operatore T è dunque di Hilbert-Schmidt. Poiché la classe degli operatori di Hilbert-Schmidt è contenuta in quella degli operatori compatti ($\mathcal{B}_{HS} \subset \mathcal{B}_\infty$), concludiamo che T è un operatore compatto. □

Traccia dell'Esercizio

Sia data una matrice $\sigma \in \mathcal{M}(n;\mathbb{R})$ positiva e sia $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Si mostri che l'operatore

$$L \doteq \operatorname{div}(\sigma\nabla) = \nabla \cdot (\sigma\nabla)$$

è essenzialmente autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, dove ∇ è l'operatore gradiente.

Soluzione. Per affrontare il problema con il dovuto rigore, è necessario specificare il dominio iniziale dell'operatore. Poiché stiamo trattando operatori differenziali su $\mathbb{R}^n$ non limitati, assumiamo come dominio di definizione lo spazio delle funzioni test a supporto compatto:

$$\mathcal{D}(L) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n).$$

L'operatore L è simmetrico su questo dominio. Infatti, per ogni $\phi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, integrando per parti due volte e assumendo che i termini di bordo svaniscano (garantito dal supporto compatto), e sfruttando la simmetria di σ (implicita nella definizione di positività per matrici reali in questo contesto, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$):

$$\langle L\phi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot (\sigma\nabla\phi)\bar{\psi}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} (\sigma\nabla\phi) \cdot \nabla\bar{\psi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\overline{\nabla \cdot (\sigma\nabla\psi)}\, dx = \langle \phi, L\psi\rangle\,.$$

Per dimostrare che L è **essenzialmente autoaggiunto** (ovvero che la sua chiusura $\bar{L}$ è autoaggiunta, $\bar{L} = L^*$), utilizziamo il **Criterio di Von Neumann**. Dobbiamo mostrare che gli indici di difetto sono nulli, ovvero:

$$\ker(L^* - iI) = \{0\} \quad \text{e} \quad \ker(L^* + iI) = \{0\}.$$

Poiché L è a coefficienti reali, è sufficiente studiare una delle due equazioni, in quanto la coniugazione complessa mappa le soluzioni di una in quelle dell'altra. Cerchiamo quindi le soluzioni distribuzionali $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dell'equazione:

$$L\psi = i\psi \implies \nabla \cdot (\sigma\nabla\psi) - i\psi = 0.$$

1. Diagonalizzazione e Cambio di Variabili

La matrice σ è definita positiva. Per il Teorema Spettrale reale, esiste una matrice ortogonale $O \in O(n)$ tale che:

$$O^T\sigma O = D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad \text{con } \lambda_k > 0.$$

Operiamo un cambio di variabili nello spazio $\mathbb{R}^n$ definito dalla rotazione $y = O^T x$. Poiché O è ortogonale, la trasformazione è un'isometria unitaria su $L^2(\mathbb{R}^n)$ (preserva il prodotto scalare e la norma), quindi non altera le proprietà spettrali (come l'appartenenza a L^2). Esprimiamo l'operatore differenziale nelle nuove coordinate y. Notiamo che $\nabla_x = O\nabla_y$. L'operatore diventa:

$$\nabla_x \cdot (\sigma\nabla_x) = (O\nabla_y)^T\sigma(O\nabla_y) = \nabla_y^T(O^T\sigma O)\nabla_y = \nabla_y^T D\nabla_y = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}.$$

L'equazione agli autovalori nelle coordinate ruotate diventa:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2\psi}{\partial y_k^2} - i\psi(y) = 0.$$

2. Analisi delle Soluzioni in L^2

Vogliamo dimostrare che l'unica soluzione $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a questa equazione è $\psi \equiv 0$. Possiamo procedere con la **separazione delle variabili** come suggerito. Cerchiamo soluzioni elementari della forma $\psi(y) = \prod_{k=1}^n f_k(y_k)$. Sostituendo nell'equazione e dividendo per ψ:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{f_k''(y_k)}{f_k(y_k)} = i.$$

Affinché questa uguaglianza valga per ogni y, ogni termine della somma deve essere costante:

$$\lambda_k \frac{f_k''(y_k)}{f_k(y_k)} = c_k, \quad \text{con } \sum_{k=1}^{n} c_k = i.$$

Questo porta a n equazioni differenziali ordinarie:

$$f_k''(y_k) = \frac{c_k}{\lambda_k} f_k(y_k).$$

Poniamo $\mu_k^2 = \frac{c_k}{\lambda_k}$. Le soluzioni generali sono combinazioni lineari di esponenziali:

$$f_k(y_k) = A_k e^{\mu_k y_k} + B_k e^{-\mu_k y_k}.$$

Affinché la soluzione prodotto $\psi(y)$ appartenga a $L^2(\mathbb{R}^n)$, è necessario che ciascun fattore $f_k(y_k)$ appartenga a $L^2(\mathbb{R})$ (o sia nullo). Analizziamo l'appartenenza a $L^2(\mathbb{R})$ della funzione $e^{\mu y}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{\mu y}|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{Re}(\mu) y} dy.$$

Questo integrale converge se e solo se $\mathrm{Re}(\mu) \neq 0$ e l'intervallo è limitato opportunamente, ma su tutto $\mathbb{R}$ diverge sempre a meno che la funzione non sia identicamente nulla.

- Se $\mathrm{Re}(\mu) > 0$, l'esponenziale esplode a $+\infty$.
- Se $\mathrm{Re}(\mu) < 0$, l'esponenziale esplode a $-\infty$.
- Se $\mathrm{Re}(\mu) = 0$ (cioè μ immaginario puro), la funzione è oscillante con modulo costante 1, e quindi non integrabile su $\mathbb{R}$.

Dato che $\sum c_k = i$, almeno uno dei coefficienti c_k (e quindi μ_k) deve essere non nullo e complesso, impedendo l'esistenza di soluzioni decadenti su tutto l'asse reale simultaneamente. Poiché le combinazioni lineari (e limiti L^2) di tali soluzioni generano lo spazio delle soluzioni, concludiamo che:

$$\ker(L^* - iI) = \{0\}.$$

Analogamente, si dimostra che $\ker(L^* + iI) = \{0\}$.

Conclusione

Avendo dimostrato che gli indici di difetto sono $(0, 0)$, per il criterio di Von Neumann l'operatore L definito su $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è essenzialmente autoaggiunto. La sua unica estensione autoaggiunta è la sua chiusura.

$\square$

Traccia dell'Esercizio

Sia dato il dominio $I = [0, 1]$ e si consideri il problema di Dirichlet per $\psi : I \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -\frac{d^2\psi}{dx^2} + \psi = f \\ \psi|_{\partial I} = 0 \end{cases}$$

dove $f \in C^\infty(I)$. Si mostri che esiste ed è unica una soluzione *debole* $\psi_0 \in H_0^1(I)$ tale che:

$$\int_I \psi_0 h \, dx + \int_I \frac{d\psi_0}{dx} \frac{dh}{dx} \, dx = \int_I f h \, dx, \quad \forall h \in H_0^1(I).$$

Soluzione. Per dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione debole, riformuliamo il problema nel linguaggio dell'analisi funzionale sugli spazi di Hilbert, identificando la struttura variazionale dell'equazione.

1. Lo Spazio di Hilbert e il Prodotto Scalare

Consideriamo lo spazio di Sobolev $H^1(I)$, definito come:

$$H^1(I) = \left\{ v \in L^2(I) \mid \frac{dv}{dx} \in L^2(I) \right\}.$$

Questo spazio è dotato del prodotto scalare naturale:

$$\langle u, v \rangle_{H^1} \doteq \int_I u(x)v(x)\, dx + \int_I \frac{du}{dx}(x)\frac{dv}{dx}(x)\, dx,$$

che induce la norma $\|u\|^2_{H^1} = \|u\|^2_{L^2} + \|u'\|^2_{L^2}$.

Lo spazio funzionale di riferimento per il problema di Dirichlet omogeneo è il sottospazio $H^1_0(I)$, che è la chiusura in norma H^1 delle funzioni $C^\infty_0(I)$ a supporto compatto. Essendo un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert, $H^1_0(I)$ è esso stesso uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1}$ ereditato da $H^1(I)$.

2. Analisi del Membro di Sinistra (Forma Bilineare)

Osserviamo il membro sinistro dell'equazione integrale data:

$$A(\psi_0, h) \doteq \int_I \psi_0 h\, dx + \int_I \frac{d\psi_0}{dx}\frac{dh}{dx}\, dx.$$

Confrontando questa espressione con la definizione del prodotto scalare, notiamo immediatamente che:

$$A(\psi_0, h) = \langle \psi_0, h \rangle_{H^1}.$$

Pertanto, il problema variazionale richiede di trovare $\psi_0 \in H^1_0(I)$ tale che il suo prodotto scalare con una generica funzione test h sia uguale a un certo valore determinato da f.

3. Analisi del Membro di Destra (Funzionale Lineare)

Definiamo il funzionale lineare $F : H^1_0(I) \to \mathbb{R}$ associato al termine noto:

$$F(h) \doteq \int_I f(x)h(x)\, dx.$$

Dobbiamo verificare che questo funzionale sia continuo (limitato) su $H^1_0(I)$. Essendo $f \in C^\infty(I)$ su un dominio limitato, certamente $f \in L^2(I)$. Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $L^2(I)$:

$$|F(h)| = \left| \int_I fh\, dx \right| \le \|f\|_{L^2}\|h\|_{L^2}.$$

Dalla definizione della norma in H^1, è evidente che $\|h\|_{L^2} \le \|h\|_{H^1}$ (poiché si aggiunge il termine positivo della derivata). Quindi:

$$|F(h)| \le \|f\|_{L^2}\|h\|_{H^1}.$$

Poiché $\|f\|_{L^2}$ è una costante finita, il funzionale F è limitato:

$$\|F\|_{(H^1_0)^*} \le \|f\|_{L^2} < \infty.$$

Dunque F appartiene allo spazio duale topologico $(H^1_0(I))^*$.

4. Applicazione del Teorema di Riesz-Fréchet

Il problema debole può essere riscritto in forma astratta come segue: Cercare $\psi_0 \in H^1_0(I)$ tale che:

$$\langle \psi_0, h \rangle_{H^1} = F(h), \quad \forall h \in H^1_0(I).$$

Siamo nelle ipotesi del **Teorema di Rappresentazione di Riesz-Fréchet**:

Per ogni funzionale lineare continuo F su uno spazio di Hilbert H, esiste ed è unico un elemento $u \in H$ tale che $F(v) = \langle u, v \rangle_H$ per ogni $v \in H$. Inoltre $\|u\|_H = \|F\|_{H^*}$.

Applicando il teorema con $H = H_0^1(I)$, garantiamo che:

1. **Esistenza:** Esiste un vettore $\psi_0 \in H_0^1(I)$ che rappresenta il funzionale F.
2. **Unicità:** Tale vettore è unico.

Tale ψ_0 è, per definizione, l'unica soluzione debole del problema di Dirichlet assegnato.

$\square$

Traccia dell'Esercizio

Sia $I = [0, 1]$. Si consideri l'equazione differenziale:

$$-\frac{d\psi}{dx} + \psi = f, \quad \text{con } f \in L^2(I).$$

Si definisca la mappa $K : L^2(I) \to L^2(I)$ tale che $\psi = K(f)$ è soluzione dell'equazione. Si discuta se K è limitato, compatto e/o positivo.

Soluzione. Per definire univocamente la mappa lineare K, dobbiamo fissare una condizione al contorno o iniziale, poiché la soluzione generale dell'equazione differenziale dipende da una costante arbitraria. Affinché K sia un operatore lineare ben definito, la scelta canonica è fissare la condizione iniziale omogenea $\psi(0) = 0$ (che corrisponde a porre la costante della soluzione omogenea pari a zero).

1. Costruzione Esplicita dell'Operatore Integrale

L'equazione si riscrive come:

$$\psi'(x) - \psi(x) = -f(x).$$

Utilizzando il metodo del fattore integrante e^{-x}, otteniamo:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\psi(x)\right) = -e^{-x} f(x).$$

Integrando tra 0 e x e imponendo $\psi(0) = 0$:

$$e^{-x}\psi(x) = -\int_0^x e^{-y} f(y)\, dy \implies \psi(x) = -\int_0^x e^{x-y} f(y)\, dy.$$

L'operatore K è quindi un **operatore integrale di Volterra** della forma:

$$(Kf)(x) = \int_0^1 A(x, y) f(y)\, dy,$$

dove il nucleo integrale (kernel) è definito grazie alla funzione gradino di Heaviside $\theta(\cdot)$ come:

$$A(x, y) = -e^{x-y}\theta(x - y) = \begin{cases} -e^{x-y} & \text{se } 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

2. Limitatezza e Compattezza (Classe di Hilbert-Schmidt)

Nel caso di $L^2(I)$, mostriamo che la definizione di operatore di HS coincide con la norma L^2 del nucleo $A(x, y)$. Sia $\{e_n(y)\}$ una base ortonormale completa di $L^2(I)$. Calcoliamo $\|Ke_n\|^2$:

$$\|Ke_n\|^2 = \int_I dx\, |(Ke_n)(x)|^2 = \int_I dx \left| \int_I A(x, y) e_n(y)\, dy \right|^2.$$

Fissiamo x. La quantità interna $\int_I A(x, y) e_n(y)\, dy$ può essere vista come il prodotto scalare (o coefficiente di Fourier, a meno di coniugazione) della funzione $y \mapsto \overline{A(x, y)}$ rispetto al vettore di base $e_n(y)$. Per l'**Identità di Parseval**, la somma dei quadrati dei coefficienti di Fourier di una funzione restituisce la norma quadra della funzione stessa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_I A(x,y)e_n(y)\, dy \right|^2 = \int_I |A(x,y)|^2 \, dy.$$

Inserendo questo risultato nella definizione di norma HS:

$$\|K\|_{HS}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I dx \left| \left\langle \overline{A(x,\cdot)}, e_n \right\rangle_{L^2_y} \right|^2 = \int_I dx \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left\langle \overline{A(x,\cdot)}, e_n \right\rangle \right|^2 \right).$$

$$\|K\|_{HS}^2 = \int_I dx \left(\int_I |A(x,y)|^2 \, dy \right) = \int_{I\times I} |A(x,y)|^2 \, dx \, dy.$$

Abbiamo così dimostrato rigorosamente che verificare che $A \in L^2(I \times I)$ equivale a verificare che l'operatore ha "traccia finita" nel senso HS.

Giustificazione rigorosa dello scambio somma-integrale. Partiamo dall'espressione della norma Hilbert-Schmidt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ke_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I \left| \left\langle \overline{A(x,\cdot)}, e_n \right\rangle_{L^2_y} \right|^2 dx.$$

Definiamo la successione delle somme parziali $S_N : I \to [0, +\infty]$ come:

$$S_N(x) \doteq \sum_{n=1}^{N} \left| \left\langle \overline{A(x,\cdot)}, e_n \right\rangle_{L^2_y} \right|^2.$$

Osserviamo due proprietà fondamentali:

1. I termini della serie sono funzioni misurabili non negative: $x \mapsto |\langle \ldots, \ldots \rangle|^2 \geq 0$.
2. Di conseguenza, la successione $\{S_N(x)\}_{N\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente: $S_{N+1}(x) \geq S_N(x)$ per ogni $x \in I$.

Sotto queste ipotesi, il **Teorema della Convergenza Monotona (Beppo Levi)** garantisce che l'integrale del limite coincida con il limite dell'integrale (che equivale allo scambio serie-integrale):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_I (\ldots)\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_I S_N(x)\, dx = \int_I \lim_{N\to\infty} S_N(x)\, dx = \int_I \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left\langle \overline{A(x,\cdot)}, e_n \right\rangle \right|^2 dx.$$

Un operatore integrale K agente su $L^2(I)$ è sicuramente limitato e compatto se è di classe **Hilbert-Schmidt**. Condizione necessaria e sufficiente affinché K sia Hilbert-Schmidt è che il suo nucleo $A(x,y)$ appartenga a $L^2(I \times I)$, ovvero che:

$$\|K\|_{HS}^2 \doteq \int_0^1 dx \int_0^1 dy\, |A(x,y)|^2 < \infty.$$

Calcoliamo tale norma:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy\, | - e^{x-y}\theta(x-y)|^2 = \int_0^1 dx \int_0^x dy\, e^{2(x-y)}.$$

Calcoliamo l'integrale interno rispetto a y:

$$\int_0^x e^{2x}e^{-2y}\, dy = e^{2x} \left[-\frac{1}{2}e^{-2y} \right]_0^x = e^{2x} \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}.$$

Ora integriamo rispetto a x:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x \right]_0^1 = \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - 0 \right) = \frac{e^2 - 3}{4}.$$

Poiché $e \approx 2.718$, il valore è finito. Essendo $\|K\|_{HS} < \infty$, concludiamo rigorosamente che:

1. K è un operatore **limitato**.
2. K è un operatore **compatto** (poiché ogni operatore Hilbert-Schmidt è compatto).

3. Positività

Un operatore K si dice positivo se $\langle f, Kf\rangle \geq 0$ per ogni $f \in L^2(I)$. Verifichiamo questa proprietà utilizzando una funzione test semplice (controesempio). Sia $f(x) = 1$ (funzione costante unitaria). Calcoliamo Kf:

$$(Kf)(x) = -\int_0^x e^{x-y} \cdot 1\, dy = -e^x \left[-e^{-y}\right]_0^x = -e^x(-e^{-x} + 1) = 1 - e^x.$$

Calcoliamo ora il prodotto scalare:

$$\langle f, Kf\rangle = \int_0^1 1 \cdot (1 - e^x)\, dx = [x - e^x]_0^1 = (1 - e) - (0 - 1) = 2 - e.$$

Sapendo che $e > 2$, otteniamo:

$$\langle f, Kf\rangle = 2 - e < 0.$$

Esiste almeno una funzione f per cui la forma quadratica è negativa. Pertanto, K **non è un operatore positivo**.

□

Traccia dell'Esercizio

Su $L^2(\mathbb{R})$ si consideri l'operatore differenziale:

$$T = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + i\frac{d}{dx}.$$

Si discuta se T ammette estensioni autoaggiunte calcolando eventualmente gli indici di difetto.

Soluzione. Per analizzare le proprietà di autoaggiunzione di T, cerchiamo di ricondurlo a una forma canonica nota tramite una trasformazione unitaria. L'operatore ricorda molto l'Hamiltoniana dell'Oscillatore Armonico unidimensionale ($H_{HO} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$), con l'aggiunta di un termine del primo ordine.

1. Completamento del Quadrato

Riscriviamo l'operatore utilizzando l'operatore momento $p = -i\frac{d}{dx}$ (in unità con $\hbar = 1$). Notiamo che $i\frac{d}{dx} = -p$.

$$T = p^2 + x^2 - p.$$

L'idea è di "completare il quadrato" per la parte dipendente dal momento, trattando p come una variabile algebrica (lecito poiché stiamo cercando una trasformazione unitaria che agisce come una traslazione nello spazio dei momenti). Osserviamo che:

$$\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 = p^2 - p + \frac{1}{4}.$$

Pertanto possiamo scrivere:

$$T = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 - \frac{1}{4}.$$

2. Equivalenza Unitaria

Vogliamo eliminare lo shift $-1/2$ nell'operatore momento. Sappiamo dalla meccanica quantistica che l'operatore di posizione x è il generatore delle traslazioni nello spazio dei momenti. Consideriamo l'operatore unitario $U : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definito dalla moltiplicazione per una fase (trasformazione di gauge):

$$(U\psi)(x) = e^{i\frac{1}{2}x}\psi(x).$$

L'aggiunto è $(U^\dagger\psi)(x) = e^{-i\frac{1}{2}x}\psi(x)$. Calcoliamo come trasforma l'operatore momento p:

$$\begin{aligned}
(U^\dagger pU\psi)(x) &= e^{-ix/2}\left(-i\frac{d}{dx}\right)\left(e^{ix/2}\psi(x)\right) \\
&= e^{-ix/2}\left[-i\left(\frac{i}{2}e^{ix/2}\psi(x) + e^{ix/2}\psi'(x)\right)\right] \\
&= e^{-ix/2}e^{ix/2}\left(\frac{1}{2}\psi(x) - i\psi'(x)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + p\right)\psi(x).
\end{aligned}$$

Quindi $U^\dagger pU = p + \frac{1}{2}$, oppure equivalentemente $U\left(p + \frac{1}{2}\right)U^\dagger = p$. Applichiamo questa trasformazione all'operatore T:

$$\begin{aligned}
\tilde{T} \doteq UTU^\dagger &= U\left[\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 - \frac{1}{4}\right]U^\dagger \\
&= \left[U\left(p - \frac{1}{2}\right)U^\dagger\right]^2 + Ux^2U^\dagger - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Poiché U è funzione solo di x, commuta con x^2. Inoltre, dall'inverso della relazione trovata sopra ($p \to p - 1/2$ sotto l'azione di $U^\dagger \cdot U$), il termine al quadrato diventa semplicemente p^2. Formalmente:

$$U\left(-i\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}\right)U^\dagger = -i\frac{d}{dx}.$$

Dunque l'operatore trasformato è:

$$\tilde{T} = p^2 + x^2 - \frac{1}{4} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - \frac{1}{4}.$$

3. Analisi dell'Operatore Trasformato

L'operatore $\tilde{T}$ è (a meno della costante additiva $-1/4$, che non influenza le proprietà di dominio o autoaggiunzione per la nota qui sotto) l'Hamiltoniana dell'Oscillatore Armonico Quantistico:

$$H_{HO} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2.$$

È un risultato classico e fondamentale (dimostrabile ad esempio notando che ha uno spettro discreto completo di autofunzioni in $L^2(\mathbb{R})$, le funzioni di Hermite) che l'Oscillatore Armonico definito su $C_c^\infty(\mathbb{R})$ (o sullo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) è essenzialmente autoaggiunto. Ciò significa che la sua chiusura $\overline{H}_{HO}$ è autoaggiunta e unica.

Gli indici di difetto di un operatore essenzialmente autoaggiunto sono $(0, 0)$.

Nota: Autoaggiunzione di $S = T - I$. Verifichiamo esplicitamente che $S = T - I$ è autoaggiunto usando la definizione. Per ogni $\phi, \psi \in \mathcal{H}$:

$$\langle \phi, S\psi \rangle = \langle \phi, (T - I)\psi \rangle = \langle \phi, T\psi \rangle - \langle \phi, \psi \rangle.$$

Poiché $T = T^*$ per ipotesi, $\langle \phi, T\psi \rangle = \langle T\phi, \psi \rangle$. Inoltre, banalmente $\langle \phi, \psi \rangle = \langle I\phi, \psi \rangle$. Quindi:

$$\langle \phi, S\psi \rangle = \langle T\phi, \psi \rangle - \langle I\phi, \psi \rangle = \langle (T - I)\phi, \psi \rangle = \langle S\phi, \psi \rangle.$$

Ciò prova che $S^* = S$.

Conclusione

Poiché T è unitariamente equivalente a un operatore essenzialmente autoaggiunto ($\tilde{T}$), anche T è essenzialmente autoaggiunto sul dominio iniziale delle funzioni test.

- T ammette un'unica estensione autoaggiunta (la sua chiusura $\bar{T}$).
- Gli indici di difetto sono $n_+ = n_- = 0$.

Osservazione (Nota sul Metodo della Coniugazione)**.** Si poteva anche osservare che, pur non essendo T reale ($T \neq \bar{T}$), esso commuta con l'operatore anti-unitario $\mathcal{J} = \mathcal{PC}$, dove $\mathcal{P}$ è la parità ($x \to -x$) e $\mathcal{C}$ la coniugazione complessa. Infatti:

$$\mathcal{PC}\left(-\partial_x^2 + x^2 + i\partial_x\right)(\mathcal{PC})^{-1} = -\partial_x^2 + (-x)^2 - i(-\partial_x) = T.$$

La commutazione con una coniugazione antiunitaria garantisce $n_+ = n_-$, assicurando l'esistenza di estensioni autoaggiunte, ma non la loro unicità (essenziale autoaggiunzione). Il metodo della trasformazione unitaria è quindi più forte in questo contesto.

□

Traccia dell'Esercizio

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e si consideri l'equazione:

$$T\psi = \lambda\psi + f,$$

con $T = T^* \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ (operatore compatto autoaggiunto), $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $f \in \mathcal{H}$. Si provi che, se λ è autovalore di T, allora l'equazione ha infinite soluzioni (sottointendendo: qualora sia risolubile).

Soluzione. Riscriviamo l'equazione nella forma operatoriale omogenea:

$$(T - \lambda I)\psi = f.$$

Definiamo l'operatore $S_\lambda \doteq T - \lambda I$.

1. Proprietà Spettrali Preliminari

Poiché T è autoaggiunto, i suoi autovalori sono reali. Essendo λ un autovalore per ipotesi, segue che $\lambda \in \mathbb{R}$. Inoltre, essendo T e I operatori limitati e autoaggiunti, anche S_λ è limitato e autoaggiunto:

$$S_\lambda^* = (T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda} I^* = T - \lambda I = S_\lambda.$$

Dato che T è compatto e $\lambda \neq 0$, l'operatore S_λ è un **operatore di Fredholm** esattamente come nell'esercizio 1. Valgono le seguenti proprietà, dimostrate nell'esercizio 1:

1. Il nucleo $\mathrm{Ker}(S_\lambda)$ ha dimensione finita.
2. Il rango $\mathrm{Ran}(S_\lambda)$ è chiuso in $\mathcal{H}$.

2. Analisi dell'Esistenza e Molteplicità

L'ipotesi che λ sia un autovalore di T implica che il nucleo di S_λ non è banale:

$$\mathrm{Ker}(S_\lambda) \neq \{0\}.$$

Sia $d = \dim(\mathrm{Ker}(S_\lambda)) \geq 1$.

Condizione di Risolubilità. Affinché l'equazione $S_\lambda\psi = f$ ammetta soluzioni, il termine noto f deve appartenere all'immagine dell'operatore. Poiché il rango è chiuso e l'operatore è autoaggiunto, vale la decomposizione ortogonale:

$$\mathrm{Ran}(S_\lambda) = (\mathrm{Ker}(S_\lambda^*))^\perp = (\mathrm{Ker}(S_\lambda))^\perp.$$

Quindi, l'equazione ammette soluzioni se e solo se $f \perp \mathrm{Ker}(S_\lambda)$. *Nota: Se f non soddisfa questa condizione, l'insieme delle soluzioni è vuoto. Assumeremo nel seguito che f sia compatibile o che l'esercizio richieda di discutere la cardinalità dell'insieme delle soluzioni nel caso in cui questo non sia vuoto.*

Struttura dello Spazio delle Soluzioni. Supponiamo che esista almeno una soluzione particolare ψ_p tale che $S_\lambda \psi_p = f$. La soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea è data dalla somma della soluzione particolare e della soluzione generale dell'equazione omogenea associata ($S_\lambda \phi = 0$). L'insieme delle soluzioni Σ è quindi lo spazio affine:

$$\Sigma = \psi_p + \mathrm{Ker}(S_\lambda) = \{\psi_p + \phi \mid \phi \in \mathrm{Ker}(S_\lambda)\}.$$

Poiché λ è un autovalore, esiste almeno un autovettore $u \neq 0$ tale che $u \in \mathrm{Ker}(S_\lambda)$. Consideriamo la famiglia di vettori:

$$\psi_\alpha = \psi_p + \alpha u, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Verifichiamo che sono soluzioni:

$$S_\lambda(\psi_\alpha) = S_\lambda \psi_p + \alpha S_\lambda u = f + \alpha \cdot 0 = f.$$

Essendo α un parametro continuo in $\mathbb{C}$, la famiglia $\{\psi_\alpha\}$ contiene infiniti elementi distinti. Pertanto, se l'equazione è risolubile, essa ammette infinite soluzioni.

□

Traccia dell'Esercizio

Si consideri una particella di massa $m > 0$ in $\mathbb{R}^3$, soggetta a un potenziale centrale $V(r)$. Sia dato l'operatore:

$$T = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}},$$

dove $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\mathbf{p}}$ sono gli operatori posizione e impulso. Si mostri che, per ogni $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ con $\|\psi\| = 1$ (e nel dominio dell'operatore), vale l'equazione di evoluzione:

$$\frac{d}{dt}\langle T \rangle = \frac{2}{m}\left\langle \hat{\mathbf{p}}^2 \right\rangle - 2\left\langle \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V \right\rangle.$$

Soluzione. La risoluzione dell'esercizio si basa sull'applicazione del **Teorema di Ehrenfest**, che lega la derivata temporale del valore di aspettazione di un osservabile al commutatore dell'osservabile con l'Hamiltoniana.

Preliminare: Dimostrazione del Teorema di Ehrenfest

Sia A un generico operatore lineare e sia $|\psi(t)\rangle$ lo stato del sistema che evolve secondo l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle.$$

Il valore di aspettazione di A è definito come $\langle A \rangle_\psi = \langle \psi(t)| A |\psi(t)\rangle$. Derivando rispetto al tempo e applicando la regola di Leibniz:

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle = \left(\frac{\partial}{\partial t}\langle \psi|\right) A |\psi\rangle + \langle \psi| \frac{\partial A}{\partial t} |\psi\rangle + \langle \psi| A \left(\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle\right).$$

Dall'equazione di Schrödinger ricaviamo le derivate temporali degli stati:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \frac{1}{i\hbar} H |\psi\rangle, \\
&\frac{\partial}{\partial t}\langle \psi| = \left(\frac{1}{i\hbar} H |\psi\rangle\right)^\dagger = -\frac{1}{i\hbar}\langle \psi| H^\dagger = -\frac{1}{i\hbar}\langle \psi| H \quad \text{(essendo } H \text{ hermitiano).}
\end{aligned}$$

Sostituendo queste espressioni nella derivata del valore di aspettazione:

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle = -\frac{1}{i\hbar}\langle \psi| HA |\psi\rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\langle \psi| AH |\psi\rangle.$$

Raccogliendo il fattore $\frac{1}{i\hbar}$:

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle\psi|(AH - HA)|\psi\rangle + \left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[A,H]\rangle + \left\langle\frac{\partial A}{\partial t}\right\rangle.$$

Nel nostro caso specifico, l'operatore T non dipende esplicitamente dal tempo ($\partial_t T = 0$), quindi l'equazione si riduce a:

$$\frac{d}{dt}\langle T\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[T,H]\rangle.$$

Calcolo del Commutatore

L'Hamiltoniana per una particella in un potenziale $V(r)$ è data da:

$$H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}).$$

Dobbiamo calcolare $[T,H]$. Per linearità:

$$[T,H] = \left[T, \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\right] + [T, V(\hat{\mathbf{r}})].$$

1. Commutatore con l'Energia Cinetica

Calcoliamo $\left[T, \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\right] = \frac{1}{2m}[\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2]$. Poiché l'operatore impulso commuta con se stesso ($[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = 0$), il termine $\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{r}}$ si semplifica notevolmente usando la regola $[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$:

$$[\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = \hat{\mathbf{p}}\cdot[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] + \underbrace{[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2]}_{0}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{p}}\cdot[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2].$$

Analogamente per il primo termine:

$$[\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2]\cdot\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{r}}\cdot\underbrace{[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2]}_{0} = [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2]\cdot\hat{\mathbf{p}}.$$

Utilizziamo l'identità fondamentale $[x_j, \hat{\mathbf{p}}^2] = 2i\hbar p_j$, che in notazione vettoriale si scrive $[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = 2i\hbar\hat{\mathbf{p}}$. Sostituendo:

- Primo termine: $[\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = (2i\hbar\hat{\mathbf{p}})\cdot\hat{\mathbf{p}} = 2i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2$.
- Secondo termine: $[\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = \hat{\mathbf{p}}\cdot(2i\hbar\hat{\mathbf{p}}) = 2i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2$.

Sommando i contributi:

$$\left[T, \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\right] = \frac{1}{2m}(2i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2 + 2i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2) = \frac{4i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} = \frac{2i\hbar}{m}\hat{\mathbf{p}}^2.$$

2. Commutatore con l'Energia Potenziale

Calcoliamo $[T, V(\hat{\mathbf{r}})]$. Poiché $V(\hat{\mathbf{r}})$ è funzione solo delle coordinate, commuta con $\hat{\mathbf{r}}$. Quindi:

$$[\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{p}}, V] = \hat{\mathbf{r}}\cdot[\hat{\mathbf{p}}, V] \quad \text{e} \quad [\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{r}}, V] = [\hat{\mathbf{p}}, V]\cdot\hat{\mathbf{r}}.$$

Utilizziamo la relazione fondamentale $[\hat{\mathbf{p}}, V] = -i\hbar\nabla V$.

- Primo termine: $\hat{\mathbf{r}}\cdot[\hat{\mathbf{p}}, V] = \hat{\mathbf{r}}\cdot(-i\hbar\nabla V) = -i\hbar(\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla V)$.
- Secondo termine: $[\hat{\mathbf{p}}, V]\cdot\hat{\mathbf{r}} = (-i\hbar\nabla V)\cdot\hat{\mathbf{r}} = -i\hbar(\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla V)$ (dato che V è scalare).

Sommando i contributi:

$$[T,V] = -2i\hbar(\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla V).$$

Conclusione

Unendo i risultati parziali, il commutatore totale è:

$$[T, H] = \frac{2i\hbar}{m}\hat{\mathbf{p}}^2 - 2i\hbar(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V).$$

Inserendo questo risultato nell'equazione di Ehrenfest derivata all'inizio:

$$\frac{d}{dt}\langle T\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle \frac{2i\hbar}{m}\hat{\mathbf{p}}^2 - 2i\hbar(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V)\right\rangle.$$

Semplificando il fattore $i\hbar$, otteniamo la tesi:

$$\frac{d}{dt}\langle T\rangle = \frac{2}{m}\left\langle \hat{\mathbf{p}}^2\right\rangle - 2\left\langle \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V\right\rangle.$$

□

Traccia dell'Esercizio

Siano $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ e $V : \mathcal{D}(V) \to \mathcal{H}$ due operatori su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ tali che:

(a) T è autoaggiunto ($T = T^*$);

(b) V è simmetrico;

(c) V è T-limitato con limite relativo $a < 1$. Ovvero, $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(V)$ ed esistono costanti $a \in [0, 1)$ e $b \geq 0$ tali che:

$$\|V\psi\| \leq a\|T\psi\| + b\|\psi\|, \quad \forall\psi \in \mathcal{D}(T).$$

Si mostri che l'operatore somma $S \doteq T + V$, definito su $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T)$, è autoaggiunto.

Soluzione. La dimostrazione si basa sul criterio di suriettività dei ranghi per operatori simmetrici. L'obiettivo è dimostrare che esiste un valore $\nu > 0$ sufficientemente grande tale che:

$$\mathrm{Ran}(T + V \pm i\nu I) = \mathcal{H}.$$

Se ciò è vero, poiché $T + V$ è simmetrico, esso è necessariamente autoaggiunto.

1. Stime sul Risolvente dell'Operatore Non Perturbato

Consideriamo l'operatore non perturbato T. Poiché T è autoaggiunto, per ogni $\mu > 0$ e per ogni $\phi \in \mathcal{D}(T)$ vale l'identità pitagorica:

$$\|(T \pm i\mu I)\phi\|^2 = \langle (T \pm i\mu I)\phi, (T \pm i\mu I)\phi\rangle = \|T\phi\|^2 + \mu^2\|\phi\|^2.$$

(I termini misti si cancellano per simmetria di T). Da questa uguaglianza seguono immediatamente due disuguaglianze fondamentali. Ponendo $\psi = (T + i\mu I)\phi$ (e quindi $\phi = (T + i\mu I)^{-1}\psi$, dato che quell'operatore è invertibile essendo T autoaggiunto), abbiamo:

1. $\mu^2\|\phi\|^2 \leq \|\psi\|^2 \implies \left\|(T + i\mu I)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\mu}$.
2. $\|T\phi\|^2 \leq \|\psi\|^2 \implies \left\|T(T + i\mu I)^{-1}\right\| \leq 1$.

2. Stima dell'Operatore Perturbativo

Vogliamo stimare "quanto disturba" V rispetto al risolvente di T. Consideriamo il vettore

$$\phi = (T + i\mu I)^{-1}\psi$$

per un generico $\psi \in \mathcal{H}$. Applichiamo la condizione di limitatezza relativa di V (ipotesi c):

$$\|V\phi\| \leq a\|T\phi\| + b\|\phi\|.$$

Sostituendo ϕ con l'espressione in termini di ψ e utilizzando le stime del punto 1:

$$\begin{aligned}\left\|V(T+i\mu I)^{-1}\psi\right\| &\leq a\left\|T(T+i\mu I)^{-1}\psi\right\| + b\left\|(T+i\mu I)^{-1}\psi\right\| \\ &\leq a\cdot 1\cdot\|\psi\| + b\cdot\frac{1}{\mu}\cdot\|\psi\| \\ &= \left(a+\frac{b}{\mu}\right)\|\psi\|.\end{aligned}$$

3. Costruzione dell'Inversa tramite Serie di Neumann

Definiamo l'operatore $U_\mu \doteq V(T+i\mu I)^{-1}$. Abbiamo appena dimostrato che la sua norma operatoriale è limitata da:

$$\|U_\mu\| \leq a + \frac{b}{\mu}.$$

Poiché per ipotesi $a<1$, possiamo scegliere un valore $\mu=\nu$ sufficientemente grande tale che:

$$a+\frac{b}{\nu}<1 \implies \|U_\nu\|<1.$$

Intanto otteniamo che, avendo la norma limitata è un operatore limitato definito su tutto $\mathcal{H}$. Se la norma di un operatore U_ν è strettamente minore di 1, allora -1 non appartiene al suo spettro ($\sigma(U_\nu)$), e l'operatore $(I+U_\nu)$ è invertibile con inverso limitato). In particolare, il rango di $(I+U_\nu)$ è tutto lo spazio $\mathcal{H}$:

$$\mathrm{Ran}(I+U_\nu)=\mathcal{H}.$$

4. Fattorizzazione e Conclusione

Consideriamo ora l'operatore perturbato $(T+V+i\nu I)$. Possiamo fattorizzarlo come segue per ogni $\phi\in\mathcal{D}(T)$:

$$\begin{aligned}(T+V+i\nu I)\phi &= (T+i\nu I)\phi + V\phi \\ &= \left[I+V(T+i\nu I)^{-1}\right](T+i\nu I)\phi \\ &= (I+U_\nu)(T+i\nu I)\phi.\end{aligned}$$

Analizziamo i ranghi di questa composizione:

- L'operatore $(T+i\nu I)$ mappa suriettivamente $\mathcal{D}(T)$ su $\mathcal{H}$ (poiché T è autoaggiunto).
- L'operatore $(I+U_\nu)$ mappa suriettivamente $\mathcal{H}$ su $\mathcal{H}$ (poiché $\|U_\nu\|<1$).

La composizione di due mappe suriettive è suriettiva. Dunque:

$$\mathrm{Ran}(T+V+i\nu I)=\mathcal{H}.$$

Un ragionamento perfettamente analogo vale per il segno opposto $-i\nu$, dimostrando che

$$\mathrm{Ran}(T+V-i\nu I)=\mathcal{H}$$

. Avendo dimostrato che gli operatori di difetto sono suriettivi (o equivalentemente che gli indici di difetto sono $(0,0)$), concludiamo che $T+V$ è autoaggiunto sul dominio $\mathcal{D}(T)$.

□

Traccia dell'Esercizio

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert con norma $\|\cdot\|$. Sia $\|\cdot\|'$ una seconda norma su $\mathcal{H}$ tale che $\exists C>0$:

$$\|\psi\| \leq C\,\|\psi\|', \quad \forall\psi\in\mathcal{H}.$$

Sia $T: D(T)\to\mathcal{H}$ un operatore simmetrico tale che $\exists\kappa>0$:

$$\|T\psi\|' \leq \kappa\,\|\psi\|', \quad \forall\psi\in\mathcal{H}.$$

Mostrare che $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

[Hint: Un operatore lineare chiuso tra spazi di Banach e con dominio denso (inteso come tutto lo spazio) è limitato]

Soluzione. Per dimostrare che $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ovvero che T è limitato rispetto alla norma standard $\|\cdot\|$), utilizzeremo il suggerimento fornito, che è un richiamo al Teorema del Grafico Chiuso. La strategia si divide in due passi logici:

1. Identificazione del dominio e dimostrazione che T è un operatore chiuso su $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$.
2. Applicazione del Teorema del Grafico Chiuso.

1. Analisi del Dominio e Chiusura

La seconda disuguaglianza fornita nel testo afferma che:

$$\|T\psi\|' \leq \kappa \|\psi\|', \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

L'uso del quantificatore $\forall \psi \in \mathcal{H}$ implica necessariamente che il dominio di T coincide con l'intero spazio di Hilbert:

$$D(T) = \mathcal{H}.$$

Inoltre, per ipotesi, T è un operatore **simmetrico**. Un operatore simmetrico T definito su tutto lo spazio di Hilbert è sempre un operatore **chiuso**. Dimostriamolo formalmente per completezza (senza dare per scontato il teorema di Hellinger-Toeplitz).

Sia $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ una successione tale che:

$$\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \psi \quad \text{e} \quad T\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \phi.$$

Dobbiamo mostrare che $\phi = T\psi$. Poiché T è simmetrico, per ogni $\eta \in \mathcal{H}$ vale l'uguaglianza:

$$\langle T\psi_n, \eta \rangle = \langle \psi_n, T\eta \rangle .$$

Passando al limite per $n \to \infty$ e sfruttando la continuità del prodotto scalare:

$$\lim_{n\to\infty} \langle T\psi_n, \eta \rangle = \langle \phi, \eta \rangle ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \langle \psi_n, T\eta \rangle = \langle \psi, T\eta \rangle .$$

Quindi:

$$\langle \phi, \eta \rangle = \langle \psi, T\eta \rangle .$$

Sfruttando nuovamente la simmetria di T sul membro di destra:

$$\langle \phi, \eta \rangle = \langle T\psi, \eta \rangle , \quad \forall \eta \in \mathcal{H}.$$

Poiché l'uguaglianza vale per ogni η, segue che $\phi = T\psi$. Abbiamo così dimostrato che il grafico di T è chiuso rispetto alla topologia indotta dalla norma $\|\cdot\|$.

2. Applicazione del Teorema del Grafico Chiuso

Siamo ora nelle seguenti condizioni:

- $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è un operatore lineare.
- $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert (e quindi di Banach) rispetto alla norma $\|\cdot\|$.
- T è un operatore **chiuso** rispetto a $\|\cdot\|$.
- $D(T) = \mathcal{H}$ (il dominio è l'intero spazio).

Il **Teorema del Grafico Chiuso** afferma che un operatore chiuso definito su tutto uno spazio di Banach a valori in uno spazio di Banach è necessariamente continuo (limitato). Pertanto:

$$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Osservazione (Sulle norme ausiliarie)**.** Le condizioni sulla norma ausiliaria $\|\cdot\|'$ e la limitatezza di T rispetto ad essa (ossia $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \|\cdot\|')$) sono condizioni sufficienti a garantire la buona definizione dell'operatore, ma la dimostrazione della limitatezza in norma standard $\|\cdot\|$ segue direttamente dalla struttura simmetrica dell'operatore e dal fatto che sia definito ovunque (Teorema di Hellinger-Toeplitz). L'esercizio è quindi risolubile in modo rigoroso basandosi primariamente sulle proprietà spettrali (Simmetria + Dominio totale $\implies$ Chiusura $\implies$ Limitatezza).

□

Traccia dell'Esercizio

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert con norma $\|\cdot\|$. Sia $\|\cdot\|'$ una seconda norma su $\mathcal{H}$ tale che $\exists C > 0$:

$$\|\psi\| \leq C \|\psi\|', \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Sia $T : D(T) \to \mathcal{H}$ un operatore simmetrico (con $D(T)$ denso in $\mathcal{H}$) tale che $\exists \kappa > 0$:

$$\|T\psi\|' \leq \kappa \|\psi\|', \quad \forall \psi \in D(T).$$

Mostrare che T è limitato rispetto alla norma $\|\cdot\|$ (ovvero $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nel senso dell'estensione).

[Hint: Un operatore lineare chiuso tra spazi di Banach e con dominio denso è limitato]

Soluzione. L'obiettivo è dimostrare che l'operatore T è limitato rispetto alla norma naturale dello spazio di Hilbert $\|\cdot\|$, ossia che esiste $M > 0$ tale che $\|T\psi\| \leq M\|\psi\|$ per ogni $\psi \in D(T)$.

Per fare ciò, sfrutteremo l'Hint interpretando lo spazio $(\mathcal{H}, \|\cdot\|')$ come uno spazio di Banach e utilizzando il **Teorema dell'Isomorfismo di Banach** (o dell'Applicazione Inversa) per stabilire l'equivalenza tra le due norme.

1. Equivalenza delle Norme

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{H}$ equipaggiato con le due norme.

- $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach (essendo di Hilbert).
- Assumiamo, coerentemente con l'Hint, che anche $(\mathcal{H}, \|\cdot\|')$ sia uno spazio di Banach.

Consideriamo l'operatore identità $I : (\mathcal{H}, \|\cdot\|') \to (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$. Per ipotesi, vale la disuguaglianza:

$$\|I\psi\| = \|\psi\| \leq C \|\psi\|'.$$

Questo implica che l'operatore identità è continuo (limitato) da $(\mathcal{H}, \|\cdot\|')$ in $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$.

Poiché entrambi gli spazi sono di Banach e l'applicazione è biunivoca (è l'identità) e continua, per il **Teorema dell'Isomorfismo di Banach** (conseguenza del Teorema della Mappa Aperta), l'applicazione inversa $I^{-1} : (\mathcal{H}, \|\cdot\|) \to (\mathcal{H}, \|\cdot\|')$ è anch'essa continua.

Esiste quindi una costante $c > 0$ tale che:

$$\|\psi\|' \leq c\|\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}. \tag{1}$$

Le due norme sono pertanto equivalenti: $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$.

2. Dimostrazione della Limitatezza di T

Vogliamo stimare la norma $\|T\psi\|$. Utilizziamo in sequenza: la dominazione della norma $\|\cdot\|$ da parte di $\|\cdot\|'$, l'ipotesi di limitatezza di T nella norma $\|\cdot\|'$, e infine l'equivalenza dimostrata in (1).

Per ogni $\psi \in D(T)$:

$$\begin{aligned}
\|T\psi\| &\leq C \|T\psi\|' && \text{(Ipotesi 1: dominazione)} \\
&\leq C \cdot \kappa \|\psi\|' && \text{(Ipotesi 2: limitatezza in } \|\cdot\|'\text{)} \\
&\leq C \cdot \kappa \cdot c\|\psi\| && \text{(Eq. 1: equivalenza inversa)}
\end{aligned}$$

Ponendo $M = C\kappa c$, otteniamo:

$$\|T\psi\| \leq M\|\psi\|, \quad \forall \psi \in D(T).$$

Abbiamo così dimostrato che T è un operatore limitato rispetto alla norma dello spazio di Hilbert.

3. Estensione a tutto $\mathcal{H}$

Poiché T è un operatore lineare limitato definito su un sottospazio denso $D(T) \subset \mathcal{H}$, per il **Teorema di Estensione (BLT Theorem)**, T ammette un'unica estensione continua $\overline{T}$ definita su tutto $\mathcal{H}$:

$$\overline{T} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad \text{con } \|\overline{T}\| = \|T\|.$$

Essendo T simmetrico, la sua chiusura coincide con la sua estensione continua. Pertanto, possiamo concludere che l'operatore (inteso nella sua estensione) appartiene a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.