

# Appendici

## Meccanica Quantistica

---

### Indice

<b>1</b>	<b>Esempi ed osservazioni utili</b>	<b>2</b>
1.1	Spazi di Hilbert . . . . .	2
1.2	Spazio di Successioni . . . . .	2
1.3	Spazi di Funzioni $L^p(\mathbb{R}^n)$ ( $p \in [1, +\infty]$ ) . . . . .	4
1.4	Spazi $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	5
1.5	Richiami di Complementi di Analisi III . . . . .	5
1.6	Spazi di Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	6
1.7	Operatori . . . . .	7
1.8	Varie su operatori . . . . .	10
1.9	Distribuzioni . . . . .	12
1.10	Osservazioni sulla MQ . . . . .	13
1.10.1	Il caso dell'Idrogeno . . . . .	13
1.11	Indici di difetto e Criteri . . . . .	14
1.12	Varie su distribuzioni . . . . .	17
1.13	Esempi di equazioni distribuzionali . . . . .	17
1.14	La distribuzione $\frac{1}{x}$ . . . . .	17
1.14.1	Soluzione Omogenea . . . . .	17
1.14.2	Soluzione Particolare . . . . .	18
1.14.3	Verifica Formale . . . . .	18
1.14.4	Soluzione Generale . . . . .	18
1.14.5	Analisi Complessa e Regolarizzazione . . . . .	19
1.14.6	Calcolo dei residui sui semicerchi . . . . .	19
1.15	Prodotto tensore . . . . .	19
1.15.1	Prodotto Tensore di Distribuzioni . . . . .	20
1.16	Convoluzione . . . . .	21
1.17	L'operatore derivazione nel problema "Particle in a box" . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Analisi tramite la Teoria di Von Neumann</b>	<b>22</b>
2.1	Struttura del Dominio Autoaggiunto $D_\alpha$ . . . . .	22
2.2	Dimostrazione dell'Impossibilità di Dirichlet . . . . .	23

# 1 Esempi ed osservazioni utili

## A cosa serve uno spazio normato e il prodotto scalare?

Prendo un SR e fisso una  $(O, e_1, e_2, \dots, e_n)$  a questo punto un vettore diventa

$$v = (x, y) = xe_1 + ye_2$$

con

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} & x(v) &= x = (e_1, v) \\ y : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} & y(v) &= y = (e_2, v) \end{aligned}$$

$x$  e  $y$  dipendono quindi dalla base. La norma di un vettore invece non dipende dalla base. Il prodotto scalare invece mi serve per distinguere due vettori della stessa norma.

## Norma su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

Si prenda  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  lo spazio delle funzioni reali  $C^\infty$  a supporto compatto. Posso definirci sopra la norma  $\|\cdot\|_p$  si può fare perchè è liscia e avendo supporto compatto è limitata.

## 1.1 Spazi di Hilbert

### Spazi non separabili

- **Oscilloscopio**

Vorrei ricostruire  $\psi(x) = \sum c_n e^{i\omega_n x}$ . Il problema però è che quando si vuole ricostruire un suono per esempio si fa uno spettro continuo in frequenze (oppure non sono dei seni multipli). Non ho infatti periodicità e quindi nessuna serie di Fourier.

- **Funzioni quasi-periodiche**

Prendiamo  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$(f, g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R dx \overline{g(x)} f(x)$$

questo permette di costruire uno spazio di Hilbert  $B_2(\mathbb{R})$  con la  $\|\cdot\|_2$ . Una base è  $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ . Questo spazio di Hilbert non è separabile.

### Insiemi densi

E' possibile lavorare con un certo insieme di funzioni e ottenere risultati che valgono per tutte le altre? Questo ci porta al concetto di insieme denso.

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  sono densi in  $L^2(\mathbb{R})$ . Non ha senso lavorarci in dimensione finita.

### Perchè usiamo $L^2$

Perchè non vogliamo imporre limiti geometrici a priori sul modello.

## 1.2 Spazio di Successioni

- $l^p = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \mid \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}$ ,  $1 \leq p < \infty$
- $l^\infty = \{(x_n) \subset \mathbb{K} \mid (x_n) \text{ è limitata}\}$   
 $(x_n) \in l^\infty \Leftrightarrow \exists C > 0 \text{ t.c. } \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \leq C < \infty$
- $c = \{(x_n) \subset \mathbb{K} \mid (x_n) \text{ ammette limite } < \infty\}$
- $c_0 = \{(x_n) \subset \mathbb{K} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$
- $c_{00} = \{(x_n) \subset \mathbb{K} \mid x_n \text{ definitivamente nulla}\}$

### Norme

- Su  $l^p$ :  $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{1/p}$
- Su  $l^\infty, c, c_0, c_{00}$ :  $\|x\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$

## Inclusioni Naturali tra Spazi $l^p/c/c_0/c_{00}$

Per  $1 \leq p < r < \infty$ :

$$c_{00} \subset l^p \subset l^r \subset c_0 \subset c \subset l^\infty$$

$c_{00}$  è denso in  $l^p$  (per  $p < \infty$ ) e in  $c_0$ . Le inclusioni sono continue.

- $(l^p, \|\cdot\|_p)$  è Banach.
- $(l^2, \|\cdot\|_2)$  con  $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n$  è Hilbert.
- $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$  e  $(c, \|\cdot\|_\infty)$  sono Banach (sono sottospazi chiusi di  $l^\infty$ ).
- $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$  NON è banach (perchè non è completo).

Controesempio: Si consideri la successione  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $c_{00}$  data da  $x_n^k = \begin{cases} 1/n & \text{se } 1 \leq n \leq k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .

– È una successione di Cauchy in  $l^\infty$ : per  $l \geq 1$ ,

$$\|x^k - x^{k+l}\|_\infty = \sup_{n=k+1}^{k+l} \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

- Ma  $(x^k)$  converge in  $l^\infty$  alla successione  $x = (1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- $x \in c_0$  (perché  $1/n \rightarrow 0$ ), ma  $x \notin c_{00}$  (non è definitivamente nulla).
- Quindi  $c_{00}$  non è uno spazio chiuso in  $c_0$ , perciò non è completo.

## Disuguaglianza di Hölder

$\forall x \in l^p, \forall y \in l^q$  t.c.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

Se  $p = q = 2 \implies$  Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

## Separabilità di $l^p$

- $l^p$  è separabile per  $1 \leq p < \infty$ . ( $l^\infty$  non è separabile).
- Uno spazio è separabile  $\Leftrightarrow \exists$  un sottospazio denso numerabile.
- $c_{00}$  (in particolare l'insieme delle successioni a valori razionali) è denso in  $(l^p, \|\cdot\|_p)$  per  $1 \leq p < \infty$ .
- $\overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_p} = l^p$ .
- $(\forall x \in l^p, \exists (x^k) \subset c_{00}$  t.c.  $\|x^k - x\|_p \rightarrow 0)$

## Riflessività

Def: Uno spazio normato  $(X, \|\cdot\|_X)$  è riflessivo se l'immersione canonica  $J : X \rightarrow X^{**}$  è suriettiva.

- $J : x \mapsto \delta_x$
- $\delta_x : X^* \rightarrow \mathbb{K}$  è un funzionale lineare e continuo (un elemento del bidual  $X^{**}$ ) definito da:

$$f \mapsto \delta_x(f) = f(x)$$

- $X^* = \{f : X \rightarrow \mathbb{K}, \text{lineare e continuo}\}$  (duale topologico)
- $X^{**} = (X^*)^*$  (bidual topologico)
- La riflessività vale per  $(l^p, \|\cdot\|_p)$  con  $1 < p < \infty$ .
- Tutti gli spazi di Hilbert sono riflessivi.

### 1.3 Spazi di Funzioni $L^p(\mathbb{R}^n)$ ( $p \in [1, +\infty]$ )

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto e  $\mu$  la misura di Lebesgue.

- $L^p(\Omega) = \{[f] : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \int_{\Omega} |f(x)|^p d^n x < \infty\}$ , per  $1 \leq p < \infty$ .
- $L^\infty(\Omega) = \{[f] : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \exists C > 0 \text{ t.c. } |f(x)| \leq C \text{ q.o. in } \Omega\}$
- La norma in  $L^\infty$  è  $\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C > 0 \mid |f(x)| \leq C \text{ q.o. in } \Omega\}$  (estremo superiore essenziale).

Si considerano classi di equivalenza  $[f]$  (funzioni uguali quasi ovunque) affinché  $\|f\|_{L^p} = 0 \Leftrightarrow f = 0$  q.o.

#### Disuguaglianza di Hölder per $L^p$

Siano  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^q(\Omega)$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Allora  $fg \in L^1(\Omega)$  e

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| d^n x \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p d^n x \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} |g(x)|^q d^n x \right)^{1/q}$$

ovvero  $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ .

#### Inclusioni Naturali

Se  $\text{mis}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 d^n x < \infty$  (misura finita) e  $1 \leq p < r \leq \infty$ :

$$L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

L'inclusione è continua.

#### Riflessività

- $L^p(\Omega)$  è riflessivo per  $1 < p < \infty$ .
- $L^1(\Omega)$  e  $L^\infty(\Omega)$  non sono riflessivi (in generale).

#### Separabilità

- $L^p(\Omega)$  è separabile per  $1 \leq p < \infty$ .
- $L^\infty(\Omega)$  non è separabile (in generale).
- $C_0^\infty(\Omega)$  (funzioni  $C^\infty$  a supporto compatto in  $\Omega$ ) è denso in  $L^p(\Omega)$  per  $p < \infty$ .
- $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^p}} = L^p(\Omega)$ .

#### Convergenza Debole e Forte in $X^*$

Sia  $(X, \|\cdot\|_X)$  uno spazio normato e  $\{f_n\} \subset X^*$ .

- **Convergenza Debole (puntuale):**  $f_n \rightharpoonup f$  se  $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in X$ .
- **Convergenza Forte (in norma):**  $f_n \rightarrow f$  se  $\|f_n - f\|_{X^*} \rightarrow 0$ .
- forte  $\implies$  debole.
- debole  $\implies$  forte se  $\dim X < \infty$ .

## 1.4 Spazi $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Def:  $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$  (spazio delle funzioni localmente  $p$ -integrabili),  $1 \leq p \leq \infty$ , se:

$$\forall K \subset \mathbb{R}^n \text{ compatto, } f \in L^p(K)$$

(cioè  $\int_K |f(x)|^p dx < \infty$ ).

Esempi:

- $f(x) \equiv c \in \mathbb{R}$ . Se  $c \neq 0$ ,  $f \notin L^1(\mathbb{R})$  ma  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  (e  $L^p_{loc}$  per ogni  $p$ ).
- $f \in C^0(\mathbb{R}^n) \implies f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$  per ogni  $p$ , perché  $f$  è limitata sui compatti.
- $f(x) = 1/x$  (con  $f(0) = 0$ ) non è in  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Basta prendere un compatto  $K$  che contiene 0, ad esempio  $K = [-1, 1]$ , e si ha  $\int_{-1}^1 |1/x| dx = \infty$ .

Valgono le seguenti inclusioni:

$$L^p(\mathbb{R}^n), C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

### Lemma (Fondamentale Calcolo Variazioni, caso 1D)

Sia  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $f \in L^1_{loc}((a, b))$ . Se vale:

$$\int_a^b f(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty((a, b))$$

allora  $\exists c \in \mathbb{R}$  t.c.  $f(x) = c$  per q.o.  $x \in (a, b)$ .

## 1.5 Richiami di Complementi di Analisi III

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto.

### Teorema (Teorema di Beppo Levi (Convergenza Monotona))

Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$  una successione di funzioni tale che:

- $f_n \geq 0$  q.o.
- $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$  q.o.  $\forall n \in \mathbb{N}$  (monotona non decrescente).

Sia  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  q.o. (il limite esiste, eventualmente  $+\infty$ ). Allora:

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx$$

### Teorema (Lemma di Fatou)

Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$  una successione di funzioni tale che  $f_n \geq 0$  q.o. Allora:

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx$$

### Teorema (Teorema di Lebesgue (Convergenza Dominata))

Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$  una successione di funzioni tale che:

- $f_n(x) \rightarrow f(x)$  q.o. in  $\Omega$ .
- $\exists g \in L^1(\Omega)$  (una funzione dominante) t.c.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  q.o.

Allora  $f \in L^1(\Omega)$  e  $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$  (cioè  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1$ ).

## 1.6 Spazi di Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$

Esempio (Equazione di Schrödinger per una particella libera):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \underline{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(t, \underline{x})$$

Si cerca  $\psi$  tale che  $\psi(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3)$  (funzione d'onda) per ogni  $t$ . L'equazione contiene  $\Delta \psi = \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}$ . Per dare senso a questo operatore, non basta richiedere  $\psi \in C^2$ . La richiesta corretta (in termini energetici) è  $\psi(t, \cdot) \in H^2(\mathbb{R}^3)$ .

### Definizione $W^{1,p}$ (Derivata Debole)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $1 \leq p < \infty$ . Si dice che  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  se:

1.  $u \in L^p(\Omega)$
2.  $\exists f_1, \dots, f_n \in L^p(\Omega)$  tali che (integrando per parti):

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} f_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, n$$

Le funzioni  $f_i$  sono uniche (q.o.) e sono chiamate **derivate deboli** di  $u$ . Si pone  $f_i =: \frac{\partial u}{\partial x_i}$ .

- Se  $u \in C^1(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ , le derivate deboli coincidono con le derivate classiche.

**Norma  $W^{1,p}$**  La norma standard su  $W^{1,p}(\Omega)$  è:

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p)^{1/p} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{1/p}$$

(Per  $p = \infty$  si usa la somma delle norme  $L^\infty$ ).

**Proprietà**  $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}})$  è uno spazio di Banach.

- È separabile per  $1 \leq p < \infty$ .
- È riflessivo per  $1 < p < \infty$ .
- Per  $p = 2$ :  $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$  è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare:

$$(u, v)_{H^1} := \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx$$

### Definizione $W^{k,p}$

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Per  $k \in \mathbb{N}$ :

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k\}$$

dove  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  è un multi-indice,  $|\alpha| = \sum \alpha_i$  è l'ordine della derivata, e  $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  è la derivata debole.

- $W^{k,2}(\Omega) =: H^k(\Omega)$  (Spazi di Hilbert)
- $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ , quindi  $H^0 = L^2$ .
- Esempio Schrödinger:  $\psi(t, \cdot) \in H^2(\mathbb{R}^3) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid \partial_i \psi \in L^2, \partial_i \partial_j \psi \in L^2\}$ .

## Teoremi di Embedding di Sobolev

I teoremi di Sobolev (o immersioni) stabiliscono relazioni tra gli spazi  $W^{k,p}$  e gli spazi  $C^m$  (spazi di funzioni continue con  $m$  derivate continue).

Se  $k - n/p > m$  (dove  $m$  è un intero  $\geq 0$ ), allora  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset C^m(\mathbb{R}^n)$ .

Una formula sintetica è:  $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \implies u \in C^m(\mathbb{R}^n)$  con  $m = \lfloor k - n/p \rfloor$ .

### Osservazione

- $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ . Qui  $k = 2, p = 2, n = 3$ .
- $m = \lfloor 2 - 3/2 \rfloor = \lfloor 0.5 \rfloor = 0$ .
- Quindi  $H^2(\mathbb{R}^3) \subset C^0(\mathbb{R}^3)$ .
- Questo significa che una funzione  $H^2$  (dopo eventuale modifica su un insieme di misura nulla) è continua e limitata.
- Questo è fondamentale per poter "valutare la funzione  $\psi$  in un punto  $x_0$ ",  $\psi(x_0)$ , operazione che non ha senso per una generica funzione  $L^2$ .

## 1.7 Operatori

### Operatore posizione

Prendiamo  $\mathcal{H} = L^2((0,1))$  e definiamo

$$\hat{X} : L^2((0,1)) \mapsto L^2((0,1)) \quad \hat{X}\psi = x\psi$$

possiamo calcolare la norma usando che

$$\int_0^1 dx |x\psi(x)|^2 \leq \int_0^1 dx |\psi(x)|^2 \Rightarrow \|\hat{X}\| \leq 1$$

Se però  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  allora posso prendere  $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

ma  $\hat{X}\psi \notin L^2(\mathbb{R})$  quindi gli operatori non limitati hanno bisogno di una teoria più estesa. Vogliamo costruire l'aggiunto di  $\hat{X}$ , supponiamo di saperne l'esistenza. Possiamo usare

$$(\phi, \hat{X}\psi) = \int_0^1 dx \overline{\phi(x)} x \psi(x) = \int_0^1 dx x \overline{\phi(x)} \psi(x) = (\hat{X}\phi, \psi)$$

quindi è autoaggiunto.

Prendiamo  $\mathcal{H} = L^2((0,1))$ , proviamo a trovarne gli autovalori

$$\hat{X}\psi = \lambda\psi$$

anche se mi aspetto a priori che  $\lambda = x \ \forall \psi \in [0,1] \ \exists \psi \neq 0 \in W_\lambda$  quindi deve esistere un sottospazio ortogonale a  $W_\lambda$  quindi ho trovato una decomposizione con cardinalità di  $[0,1]$ , ma questo è assurdo perchè  $L^2$  è separabile. Abbiamo postulato che  $\hat{X}$  sia l'operatore giusto per la posizione magari ha autovalori diversi da quelli che ci aspettiamo però  $\forall x$  troviamo il  $\lambda$  tale che

$$x\psi(x) = \lambda\psi(x) \iff \psi(x) = 0$$

quindi non ho autovalori. Proviamo ad estendere la definizione di autovalore. Con le matrici quadrate 1

$$Tv = \lambda v \iff (T - v\mathbb{1}) = 0 \Rightarrow \#(T - v\mathbb{1})^{-1}$$

quindi se esiste l'inversa allora non  $\lambda$  non è un autovalore. In dimensione finita non ho fatto niente. Vediamo il caso di  $\hat{X}$

$$\exists (\hat{X} - \lambda\mathbb{1})^{-1} \text{ t.c. } ((\hat{X} - \lambda\mathbb{1})^{-1}\psi)(x) = \frac{1}{x - \lambda}\psi(x) \Rightarrow (\hat{X} - \lambda\mathbb{1})^{-1} := \frac{1}{x - \lambda}$$

Se  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \setminus [0, 1]$

$$\int_0^1 dx \left| \frac{\psi}{x - \lambda} \right|^2 < \infty$$

quindi ho l'inverso ben definito. Dato che l'unico intervallo in cui quell'integrale non è definito sono  $[0, 1]$  non ho l'inversa quindi sono autovalori. Quindi possiamo introdurre questa nuova definizione pagando il prezzo di non avere più autofunzioni in  $L^2$ , useremo le distribuzioni.

Questo operatore ha un ottimo comportamento nei limitati. Cambiando gli autovalori a seconda dello spazio in cui ci troviamo.

### Operatore parità

Prendiamo  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  e definiamo

$$\hat{P} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \quad \hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$$

possiamo calcolare la norma

$$||\hat{P}|| = 1$$

esso è anche unitario, cioè non cambia le norme.

Troviamo gli autovalori di  $P$

$$P\psi = \lambda\psi \rightarrow \psi(-x) = \lambda\psi(+x)$$

usando  $P^2$  possiamo trovare che  $\lambda^2 = 1$ . Definiamo  $\psi_{\pm} = \frac{\psi(x) \pm \psi(-x)}{2}$  si mostra che sono autovalori di  $P$ . Quindi ogni funzione di  $L^2$  può essere decomposta in due funzioni, la parte pari e la parte dispari.

Prendiamo una carica  $q$  a destra di un semispazio infinito conduttore, prendiamo  $\vec{E}_q = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$  come se non ci fosse la parete e inoltre voglio che  $\vec{E}_q(x=0) = 0$  prendo quindi la parte dispari e rimane una soluzione delle Maxwell. Se invece avessi  $\partial_x \vec{E}_q(x=0) = 0$  prendo la parte pari.

Si può dimostrare che l'operatore che prende la parte pari (dispari) sia un proiettore.

### Operatori finito dimensionali

Un operatore su  $\mathbb{C}^n$  è sempre rappresentabile tramite una matrice ed è sempre limitato. I seguenti sono indipendenti dalla base scelta

- Determinante (dipende dal prodotto degli autovalori)
- Traccia (dipende dalla somma degli autovalori)
- Autovalori

dato che voglio estrarre informazioni da un sistema fisico che è indipendente dalla base, queste devono essere contenute negli autovalori. Da ciò deriva il postulato della misura. Ci interessiamo però di misure reali quindi vorremmo che i nostri autovalori fossero numeri reali. Data una  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  e una b.o.c  $\{e_i\}$  allora  $A_{ij} = (e_i, Ae_j)$  se  $A$  è diagonalizzabile allora esiste una  $U$  tale che

$$UAU^{-1} = \sum \lambda_i P_i \quad \tilde{P}_i := U^{-1} P_i U \Rightarrow A = \sum \lambda_i \tilde{P}_i$$

tramite il teorema spettrale si dimostra che  $A = \bar{A}^\dagger = A^*$

### Operatore impulso

Prendiamo una  $\psi \in L^2$

$$\psi(x) = \begin{cases} x^{-1/4} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

applicando  $\frac{d}{dx}$  usciamo da  $L^2$ . Ora provo a calcolare l'aggiunto

$$\left( \phi, -i \frac{d\psi}{dx} \right) = -i \int_0^1 dx \overline{\phi(x)} \frac{d\psi}{dx}(x) = -i \overline{\phi}|_0^1 + \int_0^1 dx \overline{\left( -i \frac{d\phi}{dx} \right)} \psi$$

questo termine di bordo va rimosso.

Questo operatore ha un ottimo comportamento negli illimitati, sistema il comportamento degli stati all'infinito e peggiora le singolarità in zero. Cambiando gli autovalori a seconda dello spazio in cui ci troviamo. Se lo spazio è limitato  $P$  e  $T$  NON sono più autoaggiunti.



Prendiamo quindi  $\mathcal{H} = L^2(0, \infty)$ , che è assimilabile al caso di una particella contro una parete e supponiamo inizialmente di prendere

$$\hat{P} = -i \frac{d}{dx} \quad D(\hat{P}) = C_0^\infty(0, \infty)$$

stando attenti a prendere l'intervallo aperto e non chiuso se no si ammettono funzioni che non si annullano in 0. Quindi si trova che

$$\left( \phi, -i \frac{d\psi}{dx} \right) = -i \int_0^1 dx \overline{\phi(x)} \frac{d\psi}{dx}(x) = -i \overline{\phi} \psi|_0^1 + \int_0^1 dx \overline{\left( -i \frac{d\phi}{dx} \right)} \psi = \left( \hat{P}^* \phi, \psi \right)$$

dove l'ultima uguaglianza ha senso se e solo se

1. il dominio di  $\hat{P}$  permette l'annullamento del termine di bordo
2.  $\psi \in L^2$  e  $\phi' \in L^2 \Rightarrow \psi \phi' \in L^1$

quindi troviamo che  $D(\hat{P}^*)$  è massimale, cioè tutte le funzioni tali che la loro derivata è in  $L^2$ . A questo punto usiamo la teoria degli indici di difetto di Von Neumann, trovando il  $\ker(P^* \pm i\mathbb{I})$ , risolvendo le due equazioni differenziali si arriva a scartare la soluzione esponenziale crescente perchè non è in  $L^2(0, \infty)$  ma a tenere l'altra. Questo fa sì che le dimensioni degli spazi siano diverse e quindi  $P$  non è autoaggiunto e quindi neanche un'osservabile fisica di quel sistema. Capiamo cosa significa, mettiamo caso di avere l'hamiltoniana di particella libera

$$\hat{H} = \hat{T} \quad \hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$$

(da notare che non ho fatto comparire  $P$ ), che applicata alla soluzione esponenziale negativa mi restituisce un'autovalore negativo. Questo autovalore non è rimuovibile come in fisica classica aggiungendo una costante in quanto in MQ questo non è più valido.  $P$  non può più essere autoaggiunto, in quanto se questo fosse vero, avrei che

$$\hat{P} = \sqrt{(2m\hat{H})}$$

e quindi avrebbe un autovalore complesso, il che non lo renderebbe autoaggiunto (fisico). A livello sperimentale quello che si fa è misurare sempre l'energia e mai l'impulso. Misurando vicino alla parete ci si accorge di questa soluzione e di questo autovalore, mentre mettendoci molto lontano dalle pareti questo effetto non viene distinto dal detector e si può lavorare con l'ipotesi di  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ .

Nel caso  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$  si trova che  $d_+ = d_- = 1$  e quindi  $P$  risulta essere un buon osservabile. Quindi ho una mappa  $U : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tra i due sottospazi  $\mathcal{N}_\pm$  che manda  $z \mapsto e^{i\alpha} z$  rappresentando un'isometria tra i due spazi. Costruendo tramite essa le estensioni autoaggiunte, si può notare che la scelta di  $\alpha$  rappresenta la scelta della condizione al contorno del problema.

## Operatori compatti

Possiamo immaginarceli come matrici infinite. Vorrei fare il conto di  $\langle A \rangle$  con un certo  $\psi = (\alpha, \beta)$  senza utilizzare una base. Non è che forse  $\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A)$  dove

$$\rho = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \bar{\alpha}\beta \\ \bar{\beta}\alpha & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

facendo il conto si trova che è vero. In MQ si può generalizzare uno stato con queste matrici di densità. In spazi infinito-dimensionali abbiamo bisogno di oggetti del genere con traccia finita, quali sono? Operatori classe traccia che sono compatti.

Gli operatori compatti garantiscono che:

1. Gli autovalori ordinati tendono a 0
2. Ogni autovalore ha molteplicità finita

quindi abbiamo speranza che la traccia converga.

## Operatori non limitati

Un esempio generale di operatore non limitato è (con  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ )

$$T = \sum_{k=0}^N c_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$$

se ho  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$   $T\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  e sono tutti stati.

## Operatori densi

Definiamo

$$\hat{T} = -i \frac{d}{dx} \quad \hat{K} = -\frac{d^2}{dx^2}$$

il dominio massimale è quello per cui ha senso applicarci l'impulso.

$$D_{\text{massimale}}(\hat{T}) = H^1(\mathbb{R}) \quad D_{\text{massimale}}(\hat{K}) = H^2(\mathbb{R})$$

dobbiamo anche assicurarci che (la corrente conservata)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\psi} \frac{d\psi}{dx} = 0$$

questa va a 0 solo in una dimensione su  $H^1$  ma non in  $\mathbb{R}^3$ , questa va a 0 ma per tanti altri motivi. Un caso sensato in cui possiamo fare i conti senza soffrire è  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = D_0(\hat{T})$  che è denso in tanti spazi e va tutto bene. Proviamo a trovare l'aggiunto

$$(\phi, T\psi) = -i \int_{\mathbb{R}} \bar{\phi}(x) \frac{d\psi}{dx} = -i \bar{\phi}\psi \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i \int_{\mathbb{R}} \frac{d\bar{\phi}(x)}{dx} \psi(x)$$

dove il termine di bordo muore senza problemi, se avessi usato  $H^1$  andava bene in una dimensione ma in tre assolutamente no. Continua però a non essere definito bene il secondo integrale, potrebbe essere comunque un integrale divergente. Se ho però la derivata di  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  allora va bene perchè il prodotto di due  $L^2$  mi dà una  $L^1$  e quell'integrale si fa. Allora a quel punto posso dire che quel conto fa ( $\hat{T}^*\phi, \psi$ ) ottengo quindi che

$$D(\hat{T}) = \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad D(\hat{T}^*) = H^1(\mathbb{R})$$

però

$$T^*\psi = -i \frac{d\psi}{dx} \Rightarrow T \subset T^*$$

La domanda che mi faccio è, esiste un  $S$  tale che

$$T \subset S \subset T^* \quad \text{t.c.} \quad S = S^*$$

La risposta può essere, non si può fare (operatore  $P$  su una semiretta), si può fare ed è unico (operatore  $P$  su  $\mathbb{R}$ ), ci sono infiniti modi di farlo.

## 1.8 Varie su operatori

### Aggiunto di A

Scelgo  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  e suppongo che  $A\psi = \lambda_1\psi$  quindi il sistema non cambia e io posso confrontarlo con uno stato di controllo  $(\psi, \lambda_1\psi) = (\psi, A\psi) = \lambda_1$  (dato che  $\|\psi\| = 1$ ). In generale posso farlo con un qualunque vettore di controllo o un array di essi. Posso ricavare la stessa informazione agendo sullo stato di controllo invece che sul sistema fisico? In altre parole, esiste un certo  $B$  tale che  $(\phi, A\psi) = (B\phi, \psi)$ ? La risposta ci porta all'aggiunto di  $A$ . Se questo operatore è lo stesso  $A$  si dice che è autoaggiunto e ha autovalori reali.

### Modulo di un operatore

Prendiamo un  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$  diagonalizzabile e prendiamo una funzione  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$A = \sum \lambda_i P_{\lambda_i} \Rightarrow f(A) := \sum f(\lambda_i) P_{\lambda_i}$$

il modulo serve perchè vorrei decomporre una matrice come decompongo un numero complesso in fase e modulo. A questo punto  $f$  la scelgo come la funzione radice.

### Traccia di un operatore

Prendiamo per semplicità una matrice, la traccia di  $A$  posso definirla anche nel caso infinito dimensionale, ma converge? Ipotizziamo che la traccia sia la somma infinita dei suoi autovalori

$$\text{Tr} A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j$$

Per il teorema di Riemann-Dini, dato un numero reale e una serie semplicemente convergente ma non assolutamente convergente (come  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ ), esiste una permutazione di termini di tale successione che ha converge a quel numero. Questo è un problema in MQ perchè potrei avere stati normalizzati a seconda della permutazione della serie. Quindi va richiesta la convergenza assoluta. Facciamo un esempio in cui le cose vanno male.

Prendiamo un operatore  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  e un vettore che scomponiamo sulla base standard  $e_n$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \quad \Rightarrow \quad T\psi := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} c_n e_n$$

$T$  si può mostrare che è limitato quindi  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  e che  $\|T\| \leq 1$ . Però

$$\text{Tr}T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

Ora se cambio base, e quindi scelgo i vettori della nuova base prendendone due dispari e uno pari... cioè  $v_1 = e_1$   $v_2 = e_3$   $v_3 = e_2$   $v_4 = e_5$ ... ottengo che

$$\text{Tr}T = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right] = \frac{3}{2} \ln 2$$

infatti non è classe traccia e non può essere uno stato quantistico.

### Chiusura di un operatore

Negli spazi finito dimensionali è come la continuità però non vediamo così.

Un operatore non chiuso è uno nel dominio non ci sono alcuni punti, come una retta che non ha il punto in zero. Uno che è chiudibile è uno che posso dire il suo valore dove non è definito.

### Teorema (Completezza degli operatori limitati)

Siano  $X$  uno spazio normato e  $Y$  uno spazio di Banach. Allora lo spazio degli operatori lineari limitati  $\mathcal{B}(X, Y)$  è uno spazio di Banach (cioè completo rispetto alla norma operatoriale).

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

In questo caso specifico,  $X = Y = \mathcal{H}$  è Hilbert  $\Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  è Banach.

### Teorema (Norma operatoriale e Spazi di Banach)

Se  $X, Y$  sono spazi normati,  $\mathcal{B}(X, Y)$  è normato con norma  $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ . Se  $Y$  è Banach, allora  $\mathcal{B}(X, Y)$  è Banach. Dimostrazione (cenni): Se  $(T_n)_n$  è Cauchy in  $\mathcal{B}(X, Y)$ , allora per ogni  $x$ ,  $(T_n x)_n$  è Cauchy in  $Y$ . Poiché  $Y$  è completo,  $T_n x \rightarrow y$ . Si definisce  $Tx := y$ . Si dimostra poi che  $T$  è limitato e  $T_n \rightarrow T$  in norma.

### Equivalenza Unitaria

Siano  $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  e  $T' : D(T') \rightarrow \mathcal{H}'$  con  $D(T') = UD(T)$  e  $T' = UTU^{-1}$ , dove  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  è unitario. Provare le seguenti proprietà:

- (1)  **$T$  chiudibile  $\Rightarrow T'$  chiudibile.** Definiamo  $\overline{T'} = U\overline{T}U^{-1}$ . Poiché  $\overline{T}$  è chiuso, si verifica che questa è la chiusura di  $T'$ .

$$\overline{T'}|_{D(T')} = U\overline{T}|_{D(T)}U^{-1} = UTU^{-1} = T'$$

- (2)  **$T$  chiuso  $\iff T'$  chiuso.** Ricordiamo che  $T$  è chiuso se il grafico  $\Gamma(T)$  è chiuso. Sia  $\xi_n = Ux_n \in D(T')$ . Se  $\xi_n \rightarrow \xi$  e  $T'\xi_n \rightarrow \eta$ , dobbiamo mostrare che  $\xi \in D(T')$  e  $T'\xi = \eta$ . Dato che  $U$  è unitario (quindi isometrico e invertibile), la convergenza di  $\xi_n$  implica la convergenza di  $x_n$ . Essendo  $T$  chiuso, le relazioni si trasportano tramite  $U$ .

$$T'\xi_n = UTU^{-1}(Ux_n) = UTx_n \rightarrow UTx = T'\xi$$

- (3)  **$T$  hermitiano  $\Rightarrow T'$  hermitiano.**  $T$  hermitiano:  $\langle y, Tx \rangle = \langle Ty, x \rangle$ . Siano  $x', y' \in D(T')$ . Esistono  $x, y \in D(T)$  tali che  $x' = Ux, y' = Uy$ .

$$\begin{aligned} \langle y', T'x' \rangle_{\mathcal{H}'} &= \langle Uy, UTU^{-1}Ux \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle Uy, UTx \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle y, Tx \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle Ty, x \rangle_{\mathcal{H}} = \langle UTy, Ux \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle T'y', x' \rangle_{\mathcal{H}'} \end{aligned}$$

(4)  **$T$  simmetrico  $\implies T'$  simmetrico.** Simmetrico significa Hermitiano +  $D(T)$  denso. Abbiamo già provato l'hermiticità. La densità di  $D(T')$  segue dalla densità di  $D(T)$  e dalla suriettività/continuità di  $U$ . Se  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{H}$ , allora  $U\varphi_n \rightarrow U\varphi$  in  $\mathcal{H}'$ .

(5)  **$T$  normale  $\iff T'$  normale.** Normale significa  $TT^* = T^*T$ . Calcoliamo l'aggiunto:  $(T')^* = (UTU^{-1})^* = (U^{-1})^*T^*U^* = UT^*U^{-1}$ .

$$T'(T')^* = (UTU^{-1})(UT^*U^{-1}) = UTT^*U^{-1}$$

Se  $T$  è normale,  $UTT^*U^{-1} = UT^*TU^{-1} = (T')^*T'$ .

## 1.9 Distribuzioni

### Distribuzioni tramite funzioni $L^1_{\text{Loc}}$

Sia  $\psi \in L^1(\mathbb{R})$  allora il funzionale  $u_\psi : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

$$f \mapsto u_\psi(f) := \int_{\mathbb{R}} dx f(x) \psi(x)$$

(che esiste sicuramente) è una distribuzione? Cioè è continuo? Si verifica facilmente che è sequenzialmente continua.

$$\left| \int_{\mathbb{R}} dx f_j(x) \psi(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} dx |f_j(x)| |\psi| \leq M \int_{\mathbb{R}} dx |\psi| = M'$$

dove l'ultima disuguaglianza è data perchè è a supporto compatto con  $M$  massimo. Per convergenza dominata posso passare il limite sotto al segno d'integrale e ottengo che tutto tende a 0. Quindi è sequenzialmente continua quindi possiamo scrivere impropriamente che

$$L^1_{\text{Loc}} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

che sono le funzioni integrabili su tutti i compatti di  $\mathbb{R}$ . Inoltre si ha che

$$L^p(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{Loc}} \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

quindi la MQ sta dentro  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  se consideriamo  $p = 2$ .

### Derivata di funzioni non derivabili

La theta di Heaviside è  $L^1_{\text{Loc}}(\mathbb{R})$  ed è il prototipo di situazioni fisiche nelle quali ho un campo tangente a una superficie che dentro di essa deve essere nullo (conduttore, lago, tubo...). La componente tangente salta da un certo numero a 0. Come deriviamo una funzione del genere?

$$\frac{\Theta(x)}{dx}(f) = -\Theta\left(\frac{df}{dx}\right) = -\int_{\mathbb{R}} dx \Theta(x) \frac{df}{dx} = -\int_0^\infty dx \frac{df}{dx} = -f(x)|_0^\infty = f(0) = \delta(f)$$

Ora posso derivare qualunque cosa. Per esempio  $f(x) = |x|$ , derivata otteniamo

$$\text{sign}(x) = \Theta(x) - \Theta(-x)$$

e quindi

$$\frac{d}{dx} \text{sign}(x) = \frac{d}{dx} \Theta(x) - \frac{d}{dx} \Theta(-x) = 2\delta$$

Fondamentalmente quando derivo qualcosa non derivabile (con derivabilità di salto), in ogni punto di salto ottengo una delta.

### Posso integrare su $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ?

Se voglio mantenere la linearità (e quindi l'invarianza per traslazioni) no. Se no si fa e si chiama path integral.

### Serie di Taylor

Prendiamo la serie di Taylor centrata in 0 di una  $f$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} x^n = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \delta^{(n)} \right] (f)$$

si nota che

$$x\delta^{(1)}(f) = \delta^{(1)}(xf) = -\delta(f + xf') = -\delta(f) - 0\delta(f') = -\delta(f)$$

## 1.10 Osservazioni sulla MQ

### Misure in MQ

In MQ ho una corrispondenza biunivoca tra osservabili e operatori su  $L^2(\mathbb{R})$

$$A : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

voglio che il processo di misura restituisca sempre qualcosa nello stesso spazio e voglio che non sia troppo diverso dallo stato iniziale (che non cambino le proprietà topologiche degli insiemi input) i.e. voglio continuità degli operatori. Per esempio prendiamo  $U_a$  operatore che agisce su  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  come

$$(U_a f)(x) = f(x - a)$$

questa cosa funziona perchè l'integrale di Lebesgue è invariante per traslazioni.

Prendo uno stato  $\psi \in \mathcal{H}$  ci faccio agire  $A$  (operatore su questo spazio) e ottengo un nuovo stato. Siamo interessati quale sia la "differenza" tra questo nuovo stato e quello iniziale. Quindi viene introdotta la norma di un operatore.

### Successione di misure

Vorrei inoltre poter fare una successione di misure sul mio sistema che generano una successione di stati che non so neanche se converge. Vorrei che a partire dai dati sperimentali riuscissi a concludere che la successione converge a qualcosa che posso approssimare a meno di un  $\epsilon$ . Devo avere quindi uno spazio in cui Cauchy  $\iff$  Convergente. I limiti sono SEMPRE in norma.

### Perchè la MQ è basata su $L^2(\mathbb{R})$

Si consideri

$$\varepsilon(E, B) = \int_{\mathbb{R}} dx (|E|^2 + |B|^2)$$

quest'integrale ovviamente deve convergere, ma esistono soluzioni delle Maxwell che lo fanno divergere  $e^{x-t}$ . Quindi si richiede che  $E, B \in L^2(\mathbb{R})$ . Gli spazi di Hilbert separabili vogliono mantenere la finitezza di queste grandezze fisiche.

### Statistica di Bose-Einstein e oscillatore armonico quantistico

Si prenda l'oscillatore armonico quantistico

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{Q}^2$$

esso presenta uno spettro discreto  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ , da dove salta fuori l'ipotesi di Planck?

Dato  $\beta = (k_B T)^{-1} > 0$  si può prendere  $e^{-\beta\hat{H}}$  e calcolarne la traccia con una base di autovettori di  $\hat{H}$

$$\text{Tr}(e^{-\beta\hat{H}}) = \sum_n (\psi_n, e^{-\beta\hat{H}} \psi_n) = \sum_n (\psi_n, \sum_{n!} \frac{1}{n!} (-\beta\hat{H})^n \psi_n) = \sum_n e^{-\beta E_n} = e^{-\beta\hbar\omega/2} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

dove nell'ultimo passaggio è stata calcolata la serie geometrica. Si mostra facilmente che  $|\hat{H}| = \hat{H}$  (è positivo e autoaggiunto). L'informazione sulla statistica è contenuta nella traccia dell'Hamiltoniano.

Ci potremmo anche chiedere se  $H$  sia autoaggiunto, la risposta è negli indici di difetto e nelle equazioni differenziali ad esse associate. Quello che si trova è che la soluzione esiste per Picard-Lindelöf (polinomi di Hermite) ma non sono in  $L^2$ .

#### 1.10.1 Il caso dell'Idrogeno

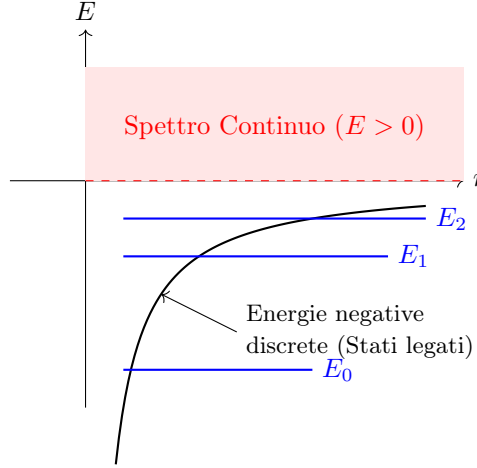
Consideriamo l'evoluzione temporale di uno stato quantistico. Se all'istante iniziale abbiamo:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\psi(0)\rangle$$

L'evoluzione temporale è data da:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |n\rangle$$

**Attenzione:** Questa formula è valida *solo se* l'Hamiltoniana  $H$  ha uno spettro **puramente discreto**. Nel caso dell'atomo di Idrogeno, l'Hamiltoniana  $H$  possiede sia uno spettro continuo che uno spettro discreto.



Non sappiamo a priori se  $|\psi(t)\rangle$  sia uno stato legato o di scattering (o una sovrapposizione). Dobbiamo prendere una base dello spazio  $L^2$ . Se dobbiamo trovare le autofunzioni di  $H$ :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e}{4\pi r} \right] \psi = E\psi$$

Poiché  $H$  ha spettro continuo, le soluzioni  $\psi$  appartengono allo spazio delle distribuzioni  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , non necessariamente a  $L^2$  (non sono normalizzabili nel senso classico). È un'equazione differenziale su  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

## 1.11 Indici di difetto e Criteri

### Definizione (Indici di Difetto)

Dato un operatore simmetrico  $T$ , si definiscono indici di difetto le dimensioni dei sottospazi di difetto (nuclei dell'aggiunto shiftato):

$$d_{\pm}(T) := \dim[\ker(T^* \mp i\mathbb{I})]$$

### Teorema (Estensioni Autoaggiunte e Indici di Difetto)

Se  $d_+(T) = d_-(T) = k$ , allora esistono infinite estensioni autoaggiunte di  $T$ . Tale famiglia di estensioni è parametrizzata da un gruppo a un parametro  $U(\alpha)$  di trasformazioni unitarie (o più in generale da una matrice unitaria  $U(k)$ ). Se  $d_+(T) \neq d_-(T)$ , l'operatore non ammette estensioni autoaggiunte. Se  $d_+(T) = d_-(T) = 0$ , l'operatore è essenzialmente autoaggiunto.

### Teorema (Formula di von Neumann per il Dominio)

Nel caso  $d_+(T) = d_-(T) = 1$ , siano  $\varphi_+ \in \ker(T^* - i\mathbb{I})$  e  $\varphi_- \in \ker(T^* + i\mathbb{I})$  vettori normalizzati. Le estensioni autoaggiunte  $T_\alpha$  sono in corrispondenza biunivoca con le isometrie suriettive tra i sottospazi di difetto (in questo caso fasi  $e^{i\alpha}$ ). Il dominio dell'estensione  $T_\alpha$  è dato da:

$$D(T_\alpha) = \{\psi + z\varphi_+ + ze^{i\alpha}\varphi_- \mid \psi \in D(T), z \in \mathbb{C}\}$$

### Criterio (Autoaggiunzione essenziale tramite base ortonormale)

Se un operatore simmetrico  $T$  possiede una base ortonormale di autostati  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con autovalori reali, allora  $T$  è essenzialmente autoaggiunto, cioè  $d_+(T) = d_-(T) = 0$ .

### Criterio (Coniugazione di von Neumann)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e  $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  un operatore simmetrico. Sia  $C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operatore antilineare (coniugazione) tale che:

1.  $C^2 = \mathbb{I}$ ;
2.  $\langle C\psi, C\varphi \rangle = \overline{\langle \psi, \varphi \rangle}$  per ogni  $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ ;
3.  $C(D(T)) \subseteq D(T)$  e  $[C, T] = 0$  sul dominio di  $T$  (ossia  $CT\psi = TC\psi$ ).

Allora gli indici di difetto sono uguali:  $d_+(T) = d_-(T)$ . Di conseguenza, l'operatore ammette estensioni autoaggiunte.

### Osservazione (Dipendenza dal Dominio Spaziale)

La natura degli indici di difetto e la possibilità di estensioni autoaggiunte dipendono non solo dall'espressione formale dell'operatore differenziale, ma dalla topologia dell'intervallo su cui è definito. Ad esempio, per l'operatore  $T = xp + px$ :

- Su  $\mathbb{R}$ : Essenzialmente autoaggiunto ( $d_{\pm} = 0$ ).
- Su un intervallo limitato  $(a, b)$  (es.  $(1, 2)$ ): Ammette infinite estensioni ( $d_{\pm} = 1$ ).
- Su un intervallo semi-limitato o singolare (es.  $(0, 1)$  dove  $1/x$  non è integrabile): Può accadere che  $d_+ \neq d_-$ , rendendo impossibile l'estensione autoaggiunta.

### Hamiltoniano dell'Oscillatore Armonico e Autoaggiunzione Essenziale

Si consideri l'operatore  $H := -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$  definito su  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Per determinare se è essenzialmente autoaggiunto (senza calcolare esplicitamente gli indici di difetto  $d_{\pm}(H) = 0$ ), utilizziamo il Criterio di Nelson.

#### Teorema (Criterio di Nelson)

Sia  $A$  un operatore simmetrico su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Se il dominio di  $A$ ,  $D(A)$ , contiene un insieme di vettori analitici per  $A$  il cui span è denso in  $\mathcal{H}$ , allora  $A$  è essenzialmente autoaggiunto.

#### Definizione (Vettore Analitico)

Un vettore  $f \in \mathcal{H}$  è detto analitico per  $A$  se esiste  $s > 0$  tale che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n f\| s^n}{n!} < \infty$$

In particolare, gli autovettori propri di  $A$  sono vettori analitici (la serie diventa una serie esponenziale convergente). Per applicare il criterio, è sufficiente provare che gli autostati dell'oscillatore armonico  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  formano un sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) per  $L^2(\mathbb{R})$ . Ricordiamo la forma esplicita:

$$\psi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/4} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

dove  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$  sono i polinomi di Hermite.

#### Dimostrazione: 1. Ortogonalità

Per  $m \neq n$  (assumiamo  $n > m$ ), dobbiamo mostrare  $(\psi_n, \psi_m)_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ . Questo equivale a mostrare l'ortogonalità dei polinomi di Hermite rispetto al peso  $e^{-x^2}$ :

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx$$

Integrando per parti  $n$  volte (i termini di bordo si annullano per la rapida decrescenza della gaussiana):

$$= (-1)^{2n} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (H_m(x)) dx = 0$$

L'ultima uguaglianza vale perché  $H_m(x)$  è un polinomio di grado  $m < n$ , quindi la sua derivata  $n$ -esima è nulla.

#### Dimostrazione: 2. Normalizzazione

Verifichiamo  $\|\psi_n\|^2 = 1$ . Ponendo  $m = n$  nella formula precedente:

$$\|\psi_n\|^2 \propto \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n}{dx^n} (H_n(x)) e^{-x^2} dx$$

Poiché  $H_n(x)$  è di grado  $n$ , la derivata  $n$ -esima è una costante ( $2^n n!$ ). Portandola fuori dall'integrale rimane l'integrale gaussiano  $\int e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ . Combinando i fattori di normalizzazione:

$$\|\psi_n\|^2 = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} (2^n n!) \sqrt{\pi} = 1$$

### Dimostrazione: 3. Completezza

Dobbiamo mostrare che se  $f \in L^2(\mathbb{R})$  è ortogonale a tutti i  $\psi_n$ , allora  $f = 0$ . Lo span dei polinomi di Hermite coincide con lo span di tutti i polinomi. Dobbiamo verificare che  $S := \text{span}\{e^{-x^2/2}p(x) \mid p(x) \text{ polinomio}\}^\perp = \{0\}$ . Sia  $f \in S$ . Allora  $\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2}x^n dx = 0$  per ogni  $n$ . Definiamo  $g(x) := f(x)e^{-x^2/2}$ . Calcoliamo la trasformata di Fourier di  $g$ :

$$G(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2}e^{i\xi x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2}x^n dx = 0$$

Poiché  $G(\xi) = 0$ , per il teorema di Plancherel  $\|g\|_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\|G\|_{L^2} = 0$ , quindi  $g(x) = 0 \implies f(x) = 0$ . Concludiamo che  $H$  è essenzialmente autoaggiunto.

### Interpretazione Fisica: Operatore Cinetico su Semiretta

Abbiamo visto che  $T = -\frac{d^2}{dx^2}$  su  $L^2(0, \infty)$  ammette estensioni autoaggiunte  $T_\alpha$  definite da condizioni al contorno di Robin:

$$f'(0) + \beta f(0) = 0, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \tan \frac{\alpha}{2}\right)$$

Possiamo riscrivere la condizione usando un parametro  $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$  tale che  $\beta = \tan \gamma$ :

$$\cos \gamma f'(0) + \sin \gamma f(0) = 0$$

- $\gamma = 0 \implies f'(0) = 0$  (Neumann).
- $\gamma = \pm\pi/2 \implies f(0) = 0$  (Dirichlet).

### Osservazione (Condizioni di Robin e "Skin Effect" (Stati di Bordo))

Una conseguenza fisica rilevante delle condizioni al contorno di Robin ( $f'(0) + \beta f(0) = 0$ ) nell'estensione autoaggiunta dell'operatore cinetico è la possibilità di supportare stati localizzati al bordo. Come visto precedentemente, per  $\beta > 0$  (corrispondente a  $\theta \in (0, \pi/2)$  con  $\beta = \cot \theta$ ), l'equazione agli autovalori ammette la soluzione:

$$f(x) = Ce^{-\beta x}$$

Questa funzione presenta caratteristiche peculiari:

- **Localizzazione Esponenziale:** La densità di probabilità  $|\psi(x)|^2 \sim e^{-2\beta x}$  è massima al bordo ( $x = 0$ ) e decade esponenzialmente verso l'interno del dominio ("bulk"). Questo comportamento è analogo a uno "Skin Effect" quantistico, dove la particella è confinata sulla superficie del materiale.
- **Energia Negativa:** Tale stato corrisponde a un autovalore di energia negativo  $E = -\beta^2$ . Questo indica uno stato legato creato puramente dalla condizione al contorno, che agisce come una buca di potenziale attrattiva (una "trappola" delta di Dirac al bordo).
- **Dipendenza dal Parametro:** Maggiore è  $\beta$ , più rapido è il decadimento (minore lunghezza di penetrazione  $\lambda \sim 1/\beta$ ) e più forte è il confinamento al bordo. Se  $\beta \rightarrow 0$  (condizione di Neumann), lo stato legato scompare e ci si riconduce allo spettro continuo puro.

In sintesi, le condizioni di Robin permettono di modellizzare interazioni superficiali che possono "catturare" la particella, generando stati che non esistono per le condizioni "pure" di Dirichlet o Neumann.

### Osservazione (Stati Legati e Problema della Radice Quadrata)

Consideriamo la funzione  $f_\theta(x) = e^{-\cot \theta x}$  con  $\theta \in (0, \pi/2)$  (quindi  $\cot \theta > 0$ ). Questa funzione è in  $L^2(0, \infty)$  e soddisfa la condizione al contorno per  $\beta = \cot \theta$ .

$$T_\alpha f_\theta = -\frac{d^2}{dx^2}(e^{-\cot \theta x}) = -(\cot^2 \theta) f_\theta$$

$f_\theta$  è un'autofunzione con autovalore negativo  $(-\cot^2 \theta)$ . Questi sono detti **stati legati**. Ciò implica che l'estensione  $T_\alpha$  non preserva la positività dell'operatore originale  $T$ . **Conseguenza fisica:** Se interpretiamo  $T$  come l'energia cinetica  $P^2$ , non possiamo definire univocamente l'operatore impulso  $P = \sqrt{T_\alpha}$  perché lo spettro contiene valori negativi (la radice sarebbe immaginaria). Questo riflette il fatto che l'operatore impulso  $P = -i\frac{d}{dx}$  su  $(0, \infty)$  ha indici di difetto diversi ( $d_+ = 0, d_- = 1$ ) e non ammette estensioni autoaggiunte.



## Operatore Cinetico su Intervallo Limitato

Per  $T = -\frac{d^2}{dx^2}$  su un intervallo limitato  $(a, b)$ , gli indici di difetto sono  $d_{\pm}(T) = 2$ . Le estensioni autoaggiunte sono parametrizzate da una matrice unitaria  $U \in U(2)$  (dimensione 4). La parametrizzazione può essere scritta come:

$$U = e^{i\theta} M, \quad \text{con } M \in SU(2), \theta \in [0, \pi]$$
$$M = m_0 \mathbb{I} - i \vec{m} \cdot \vec{\sigma}$$

dove  $\vec{\sigma}$  sono le matrici di Pauli e  $m_0^2 + |\vec{m}|^2 = 1$ . Anche in questo caso, le estensioni non garantiscono necessariamente la positività.

## 1.12 Varie su distribuzioni

### Supporto di $\delta$

Consideriamo la delta di Dirac  $\delta$ . Se prendiamo una funzione test  $\varphi$  supportata su  $(x-a, x+b)$  tale che  $0 \notin (x-a, x+b)$ , allora:

$$\delta(\varphi) = 0$$

Quindi su tutti questi insiemi che non contengono l'origine, la  $\delta$  è nulla.

Tuttavia, per ogni  $\varepsilon > 0$ , definendo un intorno  $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ , per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  con  $\text{supp}(\varphi) \subset I_\varepsilon$ , abbiamo:

$$\delta(\varphi) = \varphi(0)$$

che può essere diverso da zero. Quindi il supporto è topologicamente l'insieme  $\{0\}$ . Per la funzione gradino di Heaviside  $\Theta(x)$  (indicata come  $\mathbb{H}$  o  $\Theta$  negli appunti), si può dimostrare che:

$$\text{supp}(\Theta) = [0, \infty)$$

## 1.13 Esempi di equazioni distribuzionali

### Pettine di Dirac

Risolvere  $\sin(x) \cdot u = 0$  con  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R})$ . La soluzione è il cosiddetto **Pettine di Dirac**:

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_{x_k} \quad \text{con } x_k = k\pi$$

### Cristallo unidimensionale

Consideriamo un modello di cristallo descritto dall'Hamiltoniana:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda \delta_k$$

Qui vediamo ogni atomo come una delta di Dirac. **Nota:** Questo operatore  $H$  non può agire rigorosamente su  $L^2(\mathbb{R})$  perché la  $\delta$  non è definita su funzioni di  $L^2$  (necessita continuità, mentre funzioni  $L^2$  sono classi di equivalenza).

## 1.14 La distribuzione $\frac{1}{x}$

Vogliamo risolvere l'equazione distribuzionale:

$$xu = 1 \quad \text{con } u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R})$$

Questa è un'equazione non omogenea. La soluzione generale è data dalla somma di una soluzione particolare  $u_p$  e della soluzione dell'omogenea  $u_0$ :

$$u = u_p + u_0$$

### 1.14.1 Soluzione Omogenea

L'equazione omogenea è  $xu_0 = 0$ . La soluzione è proporzionale alla delta di Dirac (che è supportata in 0, dove  $x = 0$ ):

$$u_0 = c\delta$$

(Definizione di soluzione particolare e omogenea).

### 1.14.2 Soluzione Particolare

Intuitivamente verrebbe da dire  $u_p = \frac{1}{x}$ . Tuttavia, la funzione  $1/x$  classica non appartiene a  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R})$  perché non è localmente integrabile nell'intorno dello zero (la singolarità è troppo forte).

$$\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \implies \text{necessitiamo una regolarizzazione.}$$

Possiamo usare la derivata del logaritmo:

$$\frac{1}{x} = \frac{d \ln |x|}{dx}$$

Sappiamo che  $\ln |x| \in L^1_{\text{loc}}$ , quindi è integrabile e definisce una distribuzione regolare. Possiamo quindi definire la distribuzione "valore principale di  $1/x$ " come:

$$\text{P.V.} \left( \frac{1}{x} \right) := \frac{d}{dx} \ln |x| \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R})$$

### 1.14.3 Verifica Formale

Per ogni funzione test  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ :

$$\left\langle \frac{d \ln |x|}{dx}, f \right\rangle = - \left\langle \ln |x|, \frac{df}{dx} \right\rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \ln |x| \frac{df}{dx}$$

Calcoliamo questo integrale separando la singolarità con un limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ :

$$W(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dx \frac{f(x)}{x} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x} \right]$$

Analizziamo il termine con il logaritmo (usando l'integrazione per parti sul termine distribuzionale):

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( [\ln |x| f(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} + [\ln |x| f(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{|x| > \varepsilon} dx \ln |x| \frac{df}{dx} \right)$$

Consideriamo i termini di bordo a  $\varepsilon$ :

$$[\ln |x| f(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} + [\ln |x| f(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} = \ln |-\varepsilon| f(-\varepsilon) - \ln |\varepsilon| f(\varepsilon)$$

Espandiamo  $f$  in serie di Taylor attorno a 0:  $f(\pm\varepsilon) = f(0) \pm f'(0)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ .

$$\begin{aligned} &= \ln \varepsilon [f(0) - f'(0)\varepsilon] - \ln \varepsilon [f(0) + f'(0)\varepsilon] + \dots \\ &= \ln \varepsilon [f(-\varepsilon) - f(\varepsilon)] = \ln \varepsilon [(f(0) - f'(0)\varepsilon) - (f(0) + f'(0)\varepsilon)] \\ &= \ln \varepsilon [-2\varepsilon f'(0)] \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Il primo termine si annulla (o meglio, i termini divergenti si cancellano grazie alla simmetria del Valore Principale). Quindi:

$$W(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{\varepsilon}^{\infty} dx \frac{f(x) - f(-x)}{x} \right) = \text{P.V.} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x} dx$$

Dunque la distribuzione è ben definita:

$$\left\langle \frac{d \ln |x|}{dx}, f \right\rangle = \text{P.V.} \left\langle \frac{1}{x}, f \right\rangle$$

### 1.14.4 Soluzione Generale

La soluzione dell'equazione  $xu = 1$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R})$  è quindi:

$$u = \text{P.V.} \left( \frac{1}{x} \right) + c\delta$$

### 1.14.5 Analisi Complessa e Regolarizzazione

Possiamo vedere la regolarizzazione attraverso l'integrazione nel piano complesso:

$$\int \frac{f(x)}{x} dx \longrightarrow \oint \frac{f(z)}{z} dz$$

Consideriamo un percorso che evita la singolarità in  $z = 0$  deformando il cammino nel piano complesso.

### 1.14.6 Calcolo dei residui sui semicerchi

1. Percorso  $C_\varepsilon$  (sopra il polo):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{C_\varepsilon} \frac{f(z)}{z} dz = i\pi f(0)$$

(Nota: Il segno dipende dall'orientazione. Per il Lemma di Jordan sul piccolo cerchio in senso orario sarebbe  $-i\pi \text{Res}$ , qui stiamo integrando solo sul semicerchio). Negli appunti è indicato  $\pi i f(0)$ .

2. Percorso  $D_\varepsilon$  (sotto il polo):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z} dz = -i\pi f(0)$$

Questo concetto si lega alle formule di Plemelj-Sokhotski. Spostare il polo  $z \rightarrow z \pm i\varepsilon$  equivale a deformare il contorno:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \mp i\varepsilon} = \text{P.V.} \frac{1}{x} \pm i\pi \delta(x)$$

Negli appunti troviamo la relazione:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \oint_C \frac{f(z)}{z - i\varepsilon} = 2\pi i f(i\varepsilon) \rightarrow 2\pi i f(0)$$

**Domanda:** Quale di questi risultati è quello giusto per  $u$ ? **Risposta:** Tutti. La soluzione generale è  $u = \text{P.V.} \frac{1}{x} + c\delta$ . A seconda della fisica del problema (condizioni al contorno, causalità, ecc.), il valore della costante  $c$  cambia.

### Controesempio finale

La funzione  $e^{1/x}$  **non** è interpretabile come distribuzione. La singolarità essenziale in  $x = 0$  è troppo forte per essere regolarizzata nello spazio delle distribuzioni standard.

## 1.15 Prodotto tensore

Voglio descrivere contemporaneamente due sistemi isolati con due spazi di Hilbert,  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ . Prendiamo due operatori  $\hat{A}$  su  $\mathcal{H}_1$  e  $\hat{B}$  su  $\mathcal{H}_2$ . Dato che  $\psi \in \mathcal{H}_1$  e  $\phi \in \mathcal{H}_2$ , l'intuizione iniziale potrebbe suggerire che lo spazio totale sia la somma diretta:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$

Quindi considero le coppie  $(\psi, \phi) \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ . La somma diretta è molto naturale (analogamente a  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} + \mathbb{R}$ ). Come si sommano questi vettori? Componente per componente:  $(x + x', y + y')$ . Questa è la **somma diretta** tra due elementi di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Voglio costruire un osservabile che misuri sia  $\hat{A}$  che  $\hat{B}$ . Definiamo:

$$\hat{A} \oplus \hat{B} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$

Agisce come:

$$(\psi, \phi) \longmapsto (\hat{A}\psi, \hat{B}\phi)$$

Questa mappa è lineare? Sì, lo si vede velocemente.

### Osservazione (Il problema dell'interazione)

Ho fatto l'assunzione che i due sistemi siano **isolati** (cioè non si "parlano"). Stai anche assumendo che dati  $S_1$  e  $S_2$ , esista un sistema più grande  $S$  che li contiene. Consideriamo sistemi con interazione, per esempio **spin-orbita**. L'operatore è  $\hat{L} \cdot \hat{S}$ , dove  $\hat{L}$  è la parte spaziale e  $\hat{S}$  è la parte di spin.

$$\hat{L} \cdot \hat{S} : L^2(\mathbb{R}^3) \oplus \mathbb{C}^{2s+1} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3) \oplus \mathbb{C}^{2s+1} \quad (\text{Ipotesi})$$

$\hat{L}$  e  $\hat{S}$  sono buone osservabili, ma il loro prodotto deve agire congiuntamente. Se usassimo la somma diretta, sorgerebbe un problema di linearità nel combinare gli stati.

### Controesempio sulla linearità

Prendiamo lo spazio di Hilbert  $\mathbb{R}$ . Definiamo una mappa  $k : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  come:

$$(a, b) \longmapsto (ab, 0)$$

Questa mappa è lineare? **NO**. Verifichiamo la linearità sulla somma:

$$k((a, b) + (c, d)) = k(a + c, b + d) = ((a + c)(b + d), 0)$$

Mentre la somma delle immagini sarebbe:

$$k(a, b) + k(c, d) = (ab, 0) + (cd, 0) = (ab + cd, 0)$$

Chiaramente:

$$(a + c)(b + d) = ab + ad + cb + cd \neq ab + cd$$

Quindi la mappa è multilineare ma **non è lineare**.

Però  $k$  è lineare nei due sottosistemi! Cioè è **bilineare**:

$$k(v_1 + v_2, w) = ((v_1 + v_2)w, 0) = (v_1w + v_2w, 0) = k(v_1, w) + k(v_2, w)$$

Questo è un grande problema! Io voglio un operatore **lineare**. Qui entra in gioco il prodotto tensore.

Vogliamo linearizzare le mappe multilineari.

### Teorema (Proprietà Universale del Prodotto Tensore)

Esiste ed è unico (a meno di isomorfismi) uno spazio  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  e una mappa bilineare  $\otimes : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  tale che per ogni spazio  $W$  e per ogni mappa multilineare  $F : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow W$ , esiste un'unica mappa lineare  $f : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \rightarrow W$  che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \\ \downarrow F \text{ (multilin.)} & \swarrow \exists! f \text{ (lineare)} & \\ W & & \end{array}$$

La relazione è data da:

$$F(\psi, \phi) = f(\psi \otimes \phi)$$

Quindi, se  $f$  è lineare  $\implies$  è una buona osservabile. Il postulato della Meccanica Quantistica (MQ) suggerisce che vogliamo trattare anche le interazioni  $F$  come osservabili. Grazie al teorema di universalità, questo ci porta necessariamente ad usare  $\otimes$ .

#### 1.15.1 Prodotto Tensore di Distribuzioni

Siano  $\phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $\psi(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ . Siano  $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Cos'è  $u \otimes v$ ?

Definiamo il prodotto tensore di funzioni test:

$$(\phi \otimes \psi)(x, y) = \phi(x)\psi(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$$

Se consideriamo le distribuzioni associate  $V_{\phi\psi} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ , definite come:

$$V_{\phi\psi}(f) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} dx dy \phi(x)\psi(y)f(x, y) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$$

Possiamo vedere che agisce come il prodotto delle distribuzioni singole. Se  $f(x, y) = h(x)g(y)$ , allora:

$$V_{\phi\psi}(h \otimes g) = \int dx dy \phi(x)\psi(y)h(x)g(y) = U_\phi(h)Z_\psi(g)$$

dove  $U_\phi$  e  $Z_\psi$  sono le distribuzioni associate rispettivamente a  $\phi$  e  $\psi$ .

## 1.16 Convoluzione

In Meccanica Quantistica, per una particella a spin  $1/2$ , la funzione d'onda appartiene a  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^{2s+1}$ . Possiamo mostrare che:

$$L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^{2s+1} \simeq L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2s+1})$$

Questo ci dice fisicamente che possiamo associare ad ogni punto dello spazio i gradi di libertà interni del sistema (spin). Ho un **campo**.

### Definizione (Convoluzione tra funzioni)

*Date  $\phi, \psi$  funzioni (purché l'integrale sia ben definito):*

$$(\phi * \psi)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} dy \phi(y) \psi(x - y)$$

### Esempio: Ricostruzione di immagini

*Vogliamo generare un'immagine su uno schermo (griglia di pixel). L'interpolazione lineare tra punti discreti crea contorni frastagliati. La convoluzione è lo strumento che ci dice come passare da una funzione "a tratti" (continua ma non liscia, o discreta) a una funzione liscia ( $C^\infty$ ) con un errore controllato.*

### Convoluzione di Distribuzioni

*Poniamoci nel caso in cui  $\phi * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Per ogni  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  (funzione test):*

$$U_{\phi * \psi}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \left( \int_{\mathbb{R}^n} dy \phi(y) \psi(x - y) \right) f(x)$$

*Ponendo  $z = x - y \implies x = y + z$ :*

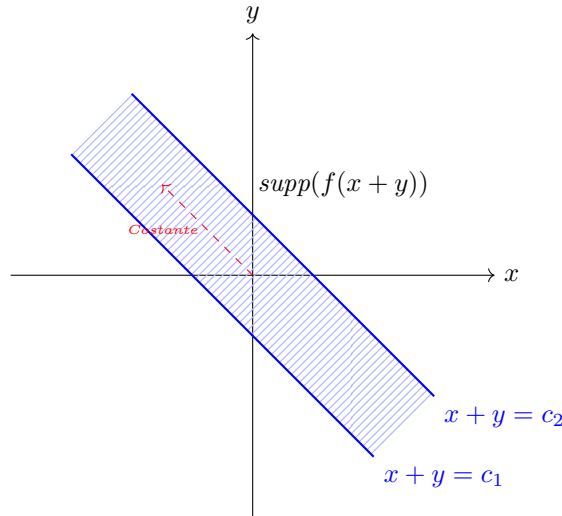
$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} dz dy \phi(y) \psi(z) f(y + z) = \langle \phi \otimes \psi, f(y + z) \rangle$$

*Vorremmo estendere questa definizione a  $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .*

$$\langle u * v, f \rangle := \langle u \otimes v, f(x + y) \rangle \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

### Osservazione (Il problema del Supporto)

*C'è un problema: se  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ha supporto compatto, la funzione  $F(x, y) = f(x + y)$  definita su  $\mathbb{R}^{2n}$  non ha supporto compatto!*



*Se  $f$  ha supporto in  $[-1, 1]$ , allora  $f(x + y)$  è non nulla nella striscia infinita definita da  $-1 \leq x + y \leq 1$ . In un sistema di riferimento ruotato  $(x + y, x - y)$ , la funzione è a supporto compatto in una variabile ma costante (e quindi illimitata) nell'altra. Poiché  $u \otimes v$  è definita su funzioni test a supporto compatto in*

$\mathbb{R}^{2n}$ , la definizione sopra richiede cautela (una delle due distribuzioni deve essere a supporto compatto,  $u \in \mathcal{E}'$ ).

### Regolarizzazione

Possiamo usare la convoluzione per regolarizzare una distribuzione  $u$ . Sia  $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tale che  $\int \rho = 1$  (mollificatore). Costruiamo una successione  $\rho_j(x) = j^n \rho(jx)$  che tende alla  $\delta$  di Dirac.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u * \rho_j = u * \delta = u$$

Ad ogni step,  $u * \rho_j$  è una **funzione liscia** ( $C^\infty$ ). Abbiamo libertà nella scelta di  $\rho$  in base a quale informazione fisica vogliamo preservare o "perdere" (recuperandola solo al limite).

## 1.17 L'operatore derivazione nel problema "Particle in a box"

Si consideri l'operatore differenziale del primo ordine (associato all'operatore momento quantistico  $P = -i \frac{d}{dx}$ ) su un intervallo limitato  $I = [0, 1]$ :

$$A = i \frac{d}{dx}.$$

Vogliamo analizzare le sue proprietà di autoaggiunzione nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$ . È noto che l'operatore definito sul dominio minimale (funzioni lisce a supporto compatto, o che si annullano con le derivate ai bordi) è simmetrico ma non autoaggiunto. La questione centrale che affrontiamo è: **perché non esiste un'estensione autoaggiunta il cui dominio sia esattamente quello delle funzioni che si annullano agli estremi (condizione di Dirichlet)?**

Ovvero, perché non possiamo scegliere come dominio:

$$D_{Dirichlet} = \{\psi \in AC([0, 1]) \mid \psi' \in L^2, \psi(0) = 0, \psi(1) = 0\}?$$

## 2 Analisi tramite la Teoria di Von Neumann

Per rispondere, utilizziamo la teoria delle estensioni di Von Neumann. Gli indici di difetto dell'operatore  $A$  su  $[0, 1]$  sono  $(1, 1)$ . Ciò significa che esiste una famiglia a un parametro di estensioni autoaggiunte, parametrizzata da  $\alpha \in [0, 2\pi)$ . Le autofunzioni dei sottospazi di difetto  $\mathcal{K}_+ = \ker(A^* - i\mathbb{I})$  e  $\mathcal{K}_- = \ker(A^* + i\mathbb{I})$  sono le soluzioni delle equazioni differenziali:

$$i\psi' = \pm i\psi \implies \psi' = \pm \psi.$$

Normalizzando opportunamente (come da riferimento standard), le funzioni generatrici sono:

$$\begin{aligned}\varphi_+(x) &= c_1 e^x \\ \varphi_-(x) &= c_2 e^{-x}\end{aligned}$$

dove  $c_1, c_2$  sono costanti di normalizzazione non nulle. Si osservi un fatto cruciale: **queste funzioni esponenziali non si annullano mai nell'intervallo  $[0, 1]$** . In particolare:

$$\varphi_\pm(0) \neq 0, \quad \varphi_\pm(1) \neq 0.$$

### 2.1 Struttura del Dominio Autoaggiunto $D_\alpha$

Secondo il Teorema di Von Neumann, il dominio di una generica estensione autoaggiunta  $A_\alpha$  è dato dalla somma diretta del dominio minimale e di un sottospazio generato da una specifica combinazione lineare delle funzioni di difetto. Esplicitamente:

$$D_\alpha = \{\psi(x) = f(x) + z(\varphi_+(x) + e^{i\alpha}\varphi_-(x)) \mid f \in D(A_{min}), z \in \mathbb{C}\}.$$

Qui:

- $f(x)$  appartiene alla chiusura del dominio minimale. Per definizione,  $f$  soddisfa le condizioni nulle ai bordi:  $f(0) = f(1) = 0$ .
- $z$  è un coefficiente complesso arbitrario che controlla la "quantità" di funzione di difetto aggiunta.
- $\alpha \in [0, 2\pi)$  è il parametro che distingue le diverse estensioni autoaggiunte.

## 2.2 Dimostrazione dell'Impossibilità di Dirichlet

Supponiamo per assurdo di voler imporre le condizioni di Dirichlet ( $\psi(0) = 0$  e  $\psi(1) = 0$ ) su tutto il dominio  $D_\alpha$ . Questo significherebbe trovare un valore fisso di  $\alpha$  tale che, per ogni  $z \in \mathbb{C}$ , la funzione  $\psi \in D_\alpha$  si annulli ai bordi.

Valutiamo la generica funzione  $\psi \in D_\alpha$  agli estremi  $x = 0$  e  $x = 1$ . Ricordando che  $f(0) = f(1) = 0$ , otteniamo:

$$\psi(x) = z (\varphi_+(x) + e^{i\alpha} \varphi_-(x)).$$

Affinché  $\psi$  appartenga al dominio di Dirichlet per  $z \neq 0$  (cioè per non ricadere nel dominio minimale non autoaggiunto), dobbiamo avere:

$$\begin{cases} \varphi_+(0) + e^{i\alpha} \varphi_-(0) = 0 \\ \varphi_+(1) + e^{i\alpha} \varphi_-(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Sostituendo le espressioni degli esponenziali (assorbendo le costanti di normalizzazione per chiarezza, tanto non sono nulle):

1. In  $x = 0$ :  $c_1 e^0 + e^{i\alpha} c_2 e^0 = 0 \implies c_1 + c_2 e^{i\alpha} = 0$ .
2. In  $x = 1$ :  $c_1 e^1 + e^{i\alpha} c_2 e^{-1} = 0 \implies c_1 e + c_2 e^{-1} e^{i\alpha} = 0$ .

Dalla prima equazione ricaviamo il vincolo su  $\alpha$ :

$$e^{i\alpha} = -\frac{c_1}{c_2}.$$

Sostituendo questo nella seconda equazione:

$$c_1 e + c_2 e^{-1} \left(-\frac{c_1}{c_2}\right) = 0 \implies c_1 e - c_1 e^{-1} = 0.$$

Dividendo per  $c_1$  (che è diverso da zero):

$$e - \frac{1}{e} = 0 \implies e^2 = 1.$$

Questa uguaglianza è palesemente **falsa** in  $\mathbb{R}$ . Abbiamo ottenuto una contraddizione.

### Osservazione (Significato della Contraddizione)

Il sistema (1) è *sovradeterminato*. Abbiamo una sola “manopola” ( $\alpha$ ) per cercare di azzerare la funzione in due punti distinti (0 e 1).

- Possiamo scegliere  $\alpha$  per azzerare la funzione in  $x = 0$ .
- Oppure possiamo scegliere  $\alpha$  per azzerare la funzione in  $x = 1$ .
- **Non possiamo fare entrambe le cose contemporaneamente.**

L'unica soluzione matematica al sistema è  $z = 0$ . Ma se  $z = 0$ , il dominio collassa a  $D(A_{\min})$ , che è un operatore simmetrico ma **non autoaggiunto**.

Il motivo profondo per cui non possiamo prendere il dominio “piccolo” di Dirichlet è legato alla definizione di operatore aggiunto. Ricordiamo che  $D(A^*)$  è l'insieme delle  $\phi$  tali che il termine di bordo nell'integrazione per parti svanisce contro ogni  $\psi \in D(A)$ .

$$\langle \phi, A\psi \rangle - \langle A\phi, \psi \rangle = i [\bar{\phi}(1)\psi(1) - \bar{\phi}(0)\psi(0)].$$

1. Se scegliamo  $D(A) = D_{\text{Dirichlet}}$  (cioè  $\psi(0) = \psi(1) = 0$ ), il termine di bordo a destra è identicamente nullo per **qualsiasi** valore di  $\phi(0)$  e  $\phi(1)$ .
2. Di conseguenza, il dominio dell'aggiunto  $D(A^*)$  diventa massimale: non ha alcuna restrizione ai bordi.
3. Pertanto  $D(A) \subsetneq D(A^*)$ , rompendo l'autoaggiunzione.

Le estensioni autoaggiunte (date dai vari  $\alpha$ ) sono dei compromessi: allargano  $D(A)$  imponendo condizioni del tipo  $\psi(1) = e^{i\theta}\psi(0)$  (condizioni quasi-periodiche). In questo modo, si impone un vincolo anche su  $\phi$  nell'aggiunto, tale da rendere  $D(A) = D(A^*)$ .

In sintesi, per l'operatore momento (indici 1,1) **non ci sono abbastanza gradi di libertà** per forzare la funzione a zero su entrambi i bordi mantenendo la struttura unitaria. Questo è possibile solo per operatori del secondo ordine (come  $P^2$ , indici 2,2), dove i parametri liberi sono quattro.