

Teoria dei gruppi

Teoria dei gruppi e delle rappresentazioni

Indice

1	Introduzione alla teoria dei gruppi	3
2	Sottogruppi normali	5
3	Primo teorema di isomorfismo	7
4	Rappresentazioni dei gruppi	9
5	Irriducibili	11
5.1	Rappresentazione regolare	14
6	Costruzione della tavola dei caratteri	14
6.1	Tavola dei caratteri di C_3	15
6.2	Prodotto tensore	16
7	Rappresentazioni Indotte	16
7.1	Costruzione ed Esistenza	17
7.2	Proprietà Universale e Reciprocità di Frobenius	17
7.3	Carattere della Rappresentazione Indotta	18
8	L'Algebra del Gruppo CG	18
8.1	Decomposizione di Wedderburn	18
8.2	Analisi di Fourier su Gruppi Finiti	19
9	Gruppi continui	20
9.1	Gruppi di Lie e Gruppi Compatti	20
9.2	Algebre di Lie	21
9.2.1	Motivazione e il Primo Principio	21
9.2.2	La Rappresentazione Aggiunta	21
9.2.3	Definizione Formale e Secondo Principio	23
10	La Mappa Esponenziale	23
10.1	Sottogruppi a un Parametro	23
10.2	Proprietà Fondamentali	23
10.3	La Formula di Campbell-Hausdorff	24
10.4	Sottoalgebre e Sottogruppi	24
10.5	Teoremi di Lie	25
10.6	$SO(2)$	26
10.6.1	Decomposizione della Rappresentazione Fondamentale	27
10.6.2	Serie di Clebsch-Gordan	27
10.7	L'Algebra di Lie $\mathfrak{so}(2)$	27
10.8	Il Gruppo $SO(3)$ e l'Algebra di Lie $\mathfrak{so}(3)$	29
10.8.1	Generatori Infinitesimi di $\mathfrak{so}(3)$	30
10.8.2	I Generatori Fisici (Momento Angolare)	31
11	Teorema di addizione dei momenti angolari	32
11.1	Il Teorema di Weyl	34
11.2	Dimostrazione per Gruppi Compatti (come $SO(3)$)	34
12	Operatore Tensoriale	35
12.1	Il Teorema di Wigner-Eckart	36

13	Struttura di $SU(N)$ e Costruzione delle Irreps	37
13.1	Generatori Hermitiani e Prodotto Scalare	37
13.2	Costruzione Formale dei Diagrammi di Young	38
13.2.1	Notazione e Semantica dei Diagrammi	38
13.2.2	Proprietà e Utilizzo (da S_k a $SU(N)$)	39
14	Regole di Decomposizione (Littlewood-Richardson)	40
14.1	Algoritmo di Littlewood-Richardson	40
14.2	Fondamenti della Regola di Littlewood-Richardson e Dualità di Schur-Weyl	41
14.3	Esempio: $SU(3) \implies \mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$	43
15	Young Tableaux e Momento Angolare ($SU(2)$)	44
15.1	Definizione Formale degli Spazi j	44
15.2	Decomposizione $(j_1 \otimes j_2)$ via Regole di Littlewood-Richardson	45
15.3	Calcolo dei Coefficienti di CG tramite Proiettori di Young	45
15.3.1	Procedura Formale di Calcolo	46
15.3.2	Esempi (Analisi Concettuale)	46
15.4	Commento sull'Equivalenza dei Metodi	47

1 Introduzione alla teoria dei gruppi

Definizione (Gruppo)

Un gruppo è una coppia $(G, *)$ dove G è un insieme non vuoto e $*$: $G \times G \rightarrow G$ è un'operazione binaria tale che valgono le seguenti proprietà:

1. **Associatività:** per ogni $a, b, c \in G$ vale $(a * b) * c = a * (b * c)$;
2. **Elemento neutro:** esiste un elemento $e \in G$ tale che per ogni $a \in G$ si ha $e * a = a * e = a$;
3. **Inverso:** per ogni $a \in G$ esiste un elemento $a^{-1} \in G$ tale che $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Se inoltre vale la proprietà di **commutatività**, ossia $a * b = b * a$ per ogni $a, b \in G$, allora il gruppo si dice abeliano.

Esempio (Gruppi puntiformi)

- $(\mathbb{Z}, +)$: l'insieme degli interi con l'addizione è un gruppo abeliano; l'elemento neutro è 0 e l'inverso di a è $-a$.
- $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$: l'insieme dei razionali non nulli con la moltiplicazione è un gruppo abeliano; l'elemento neutro è 1 e l'inverso di a è a^{-1} .
- $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$ e $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$ sono anch'essi gruppi abeliani rispetto alla moltiplicazione.

Esempio (Gruppi di permutazione)

Sia S_n l'insieme di tutte le permutazioni di un insieme di n elementi. Con la composizione di funzioni come operazione, S_n forma un gruppo detto gruppo simmetrico di grado n .

- L'elemento neutro è la permutazione identità id ;
- Ogni permutazione $\sigma \in S_n$ è invertibile, e il suo inverso è σ^{-1} ;
- La composizione è associativa ma non commutativa per $n \geq 3$.

Esempio (Gruppo alternante)

Il gruppo alternante A_n è il sottogruppo di S_n formato da tutte le permutazioni pari, ossia quelle ottenibili come composizione di un numero pari di trasposizioni. A_n ha ordine $\frac{n!}{2}$.

Teorema (Cayley)

Ogni gruppo finito G di ordine n è isomorfo a un sottogruppo del gruppo simmetrico S_n . In particolare, ad ogni elemento $g \in G$ si associa la permutazione $\phi_g : G \rightarrow G$ definita da

$$\phi_g(x) = g * x \quad \forall x \in G.$$

La mappa $g \mapsto \phi_g$ è un omomorfismo iniettivo da G in S_G , che realizza l'isomorfismo richiesto.

Definizione (Gruppo simmetrico)

Dato un insieme finito $X = \{1, 2, \dots, n\}$, si definisce gruppo simmetrico su n elementi, indicato con S_n , l'insieme di tutte le permutazioni di X , ossia di tutte le funzioni biettive

$$\sigma : X \rightarrow X.$$

La composizione di due permutazioni, definita come la composizione ordinaria di funzioni, fornisce a S_n una struttura di gruppo.

Formalmente:

$$S_n = \{ \sigma : X \rightarrow X \mid \sigma \text{ biettiva} \},$$

con l'operazione di gruppo

$$(\sigma \circ \tau)(i) = \sigma(\tau(i)).$$

L'identità è la permutazione identica $e(i) = i$, e ogni elemento σ ha un inverso σ^{-1} , che è anch'esso una permutazione di X .

Esempio (Gruppo simmetrico su due elementi)

Il gruppo S_2 contiene due permutazioni:

$$S_2 = \{e, (12)\},$$

dove e è l'identità e (12) è la permutazione che scambia 1 e 2. Questo gruppo è abeliano e isomorfo a C_2 .

Esempio (Gruppo simmetrico su tre elementi)

Il gruppo S_3 contiene tutte le permutazioni di $\{1, 2, 3\}$, ossia sei elementi:

$$S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}.$$

La composizione delle permutazioni segue la legge di composizione delle funzioni. S_3 è non abeliano ed è isomorfo al gruppo diedrale D_3 , il gruppo delle simmetrie di un triangolo equilatero.

Definizione (Gruppi diedrali D_n)

Il gruppo diedrale D_n è il gruppo delle isometrie del piano che preservano un poligono regolare con n lati. Contiene tutte le rotazioni e le riflessioni che lasciano invariato il poligono.

Formalmente, D_n è generato da due elementi b e c che soddisfano le relazioni:

$$c^n = e, \quad b^2 = e, \quad bcb = c^{-1}.$$

L'elemento c rappresenta una rotazione di $\frac{2\pi}{n}$ radianti, mentre b rappresenta una riflessione. Il gruppo ha ordine $2n$.

Definizione (Partizione di un insieme)

Una partizione di un insieme X è una famiglia di sottoinsiemi non vuoti $\{A_i\}_{i \in I}$ tali che:

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ per } i \neq j, \quad \bigcup_{i \in I} A_i = X.$$

In altre parole, una partizione suddivide X in blocchi disgiunti la cui unione ricopre tutto l'insieme.

Definizione (Classe di coniugazione completa)

Sia G un gruppo e sia $g \in G$. La classe di coniugazione di g è

$$\text{Cl}(g) = \{xgx^{-1} \mid x \in G\}.$$

Diciamo che l'insieme delle classi di coniugazione di G è completo nel senso usuale: le classi di coniugazione formano una partizione di G (cioè ogni elemento di G appartiene esattamente a una classe di coniugazione) e la loro unione è G .

Proprietà importanti.

- Le classi di coniugazione hanno tutte la stessa cardinalità di G divisa per la cardinalità del centralizzatore di g :

$$[\text{Cl}(g)] = [G : C_G(g)], \quad C_G(g) = \{x \in G \mid xg = gx\}.$$

dove $[G : C_G(g)]$ è l'indice di C_G in G , cioè il numero di classi laterali distinte di C_G in G

- La classe di coniugazione di e è $\{e\}$.
- Le classi di coniugazione sono stabili per l'azione coniugazione di G su G ; in particolare la partizione in classi di coniugazione è un esempio canonico di partizione naturale associata a un'azione di gruppo.

Definizione (Sottogruppo e sottogruppo proprio)

Un sottoinsieme $H \subseteq G$ è detto sottogruppo di G se H è chiuso rispetto all'operazione di G , contiene l'elemento neutro ed è chiuso rispetto agli inversi. In tal caso si scrive $H \leq G$.
 Se inoltre $H \neq \{e\}$ e $H \neq G$, allora H è detto sottogruppo proprio, e si scrive $H < G$.

Definizione (Classi laterali)

Sia $H \leq G$ un sottogruppo e $g \in G$. Si definiscono:

$$gH = \{gh \mid h \in H\} \quad (\text{classe laterale sinistra}), \quad Hg = \{hg \mid h \in H\} \quad (\text{classe laterale destra}).$$

Le classi laterali di H in G formano una partizione di G . Sono chiamate anche coset.

Teorema (Teorema di Lagrange)

Sia G un gruppo finito e $H \leq G$ un suo sottogruppo. Allora:

$$[G] = s[H],$$

dove s è l'indice di H in G , cioè il numero di classi laterali distinte di H in G . Mentre $[H]$ è l'ordine di H ossia il numero di elementi distinti in H .

Esempio (Applicazione del teorema di Lagrange)

Nel gruppo $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, ogni sottogruppo ha ordine che divide 12. Ad esempio, il sottogruppo generato da 4, ossia

$$\langle 4 \rangle = \{0, 4, 8\},$$

ha ordine 3, e infatti 3 divide 12, in accordo con il teorema di Lagrange.

2 Sottogruppi normali

Definizione (Sottogruppo normale)

Un sottogruppo N di G è detto normale (si scrive $N \trianglelefteq G$) se per ogni $g \in G$ vale

$$gNg^{-1} = N,$$

ossia $gng^{-1} \in N$ per ogni $n \in N$. Esso è composto di classi di coniugazione complete.

Caratterizzazioni equivalenti.

- $N \trianglelefteq G$ se e solo se tutte le coset sinistre coincidono con le coset destre: $gN = Ng$ per ogni $g \in G$.
- $N \trianglelefteq G$ se e solo se l'insieme delle coset sinistre $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ è chiuso rispetto al prodotto indotto $(gN)(hN) = (gh)N$.
- Se $\varphi: G \rightarrow Q$ è un omomorfismo di gruppi allora $\ker \varphi \trianglelefteq G$.

Definizione (Gruppo quoziente)

Se $N \trianglelefteq G$ allora il gruppo quoziente G/N è l'insieme delle coset sinistre $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ dotato dell'operazione

$$(gN) \cdot (hN) = (gh)N.$$

Questa operazione è ben definita perché N è normale.

Proprietà dei gruppi quoziente

- $[G/N] = [G : N]$ (se G è finito).
- Esiste l'omomorfismo naturale (proiezione) $\pi: G \rightarrow G/N$, $\pi(g) = gN$, il cui nucleo è esattamente N .

- Primo teorema omomorfismo: se $\varphi: G \rightarrow H$ è un omomorfismo allora $G/\ker \varphi \cong \text{Im } \varphi$.
- Se N e M sono normali in G e $N \subseteq M$, allora $(G/N)/(M/N) \cong G/M$.

Esempio (Sottogruppi e prodotto di coset in D_3)

Ricordiamo la struttura di D_3 : $D_3 = \{e, c, c^2, b, bc, bc^2\}$, dove c è la rotazione di ordine 3 e b è una riflessione. Sia

$$H = \{e, c, c^2\} = \langle c \rangle,$$

cioè il sottogruppo ciclico delle rotazioni. Allora le due coset sinistre sono

$$eH = H = \{e, c, c^2\} = E, \quad bH = \{b, bc, bc^2\} = B.$$

Moltiplicazione delle coset: definendo il prodotto delle coset come $(gH)(hH) = (gh)H$ (che è ben definito perché $H \trianglelefteq D_3$?) osserviamo che nel caso specifico H è normale: infatti D_3 agisce per coniugazione sulle rotazioni ma queste rimangono rotazioni, quindi $c^k \mapsto c^k$ up to permutazione; in particolare $H \trianglelefteq D_3$. Le coset formano allora un gruppo quoziente D_3/H di ordine 2, con elementi E e B , che è isomorfo a $C_2 = \{e, b\}$. Vediamo le moltiplicazioni:

$$E^2 = (eH)(eH) = e^2H = H = E, \quad EB = (eH)(bH) = ebH = bH = B,$$

e simmetricamente $BE = B$, $B^2 = (bH)(bH) = b^2H = eH = E$. Pertanto $\{E, B\}$ è un gruppo di ordine 2, come mostrato nelle foto. Si può anche verificare elemento per elemento che ad esempio

$$E^2 = \{e, c, c^2\}\{e, c, c^2\} = \{e, c, c^2\},$$

e

$$BE = \{b, bc, bc^2\}\{e, c, c^2\} = \{b, bc, bc^2\},$$

cioè i calcoli concordano con la descrizione astratta.

Controesempio (non normalità): sia invece $K = \{e, b\}$. Questo K non è un sottogruppo normale di D_3 (si può verificare che $cbc^{-1} = cb$ non appartiene a K in generale). Se proviamo a moltiplicare coset arbitrari come $(cK)(cK)$ otteniamo insiemi che non sono più coset singole di K . Ad esempio, nella foto si calcola

$$cKcK = \{c, cb\}\{c, cb\} = \{c^2, c^2b, b, e\} = c^2K \cup eK,$$

quindi il prodotto di due sottoinsiemi di quella forma non è una singola coset di K . Questo illustra che la moltiplicazione ben definita tra coset (necessaria per avere G/K gruppo) richiede la normalità di K .

Definizione (Prodotto diretto interno di sottogruppi)

Siano $A, B \leq G$. Diremo che G è il prodotto diretto interno di A e B , scritto $G = A \times B$, se valgono le due condizioni:

1. ogni elemento di A commuta con ogni elemento di B (cioè $ab = ba$ per tutti $a \in A, b \in B$);
2. ogni elemento $g \in G$ si scrive in modo unico come prodotto $g = ab$ con $a \in A, b \in B$.

Conseguenze formali

- Da (1) e (2) segue che $A \cap B = \{e\}$ e che sia A sia B sono sottogruppi normali di G . Infatti, per $a \in A$ e $g = a_1b_1 \in G$ si ha

$$gag^{-1} = a_1b_1a(a_1b_1)^{-1} = a_1(b_1ab_1^{-1})a_1^{-1} = a_1aa_1^{-1} \in A,$$

usando la commutatività incrociata e l'unicità della decomposizione.

- Il prodotto in G si scompone coordinata per coordinata:

$$(a_1b_1)(a_2b_2) = (a_1a_2)(b_1b_2).$$

- Si ottiene l'isomorfismo naturale $G \cong A \times B$ (il prodotto diretto esterno) via $ab \mapsto (a, b)$.

- Inoltre $G/A \cong B$ e $G/B \cong A$.

Esempio (Esempio e controesempio: D_2 e D_3)

Consideriamo D_2 (il gruppo diedrale del quadrato con due riflessioni adatte): sia a, b tali che $a^2 = b^2 = (ab)^2 = e$. Allora D_2 contiene due sottogruppi di ordine 2, $A = \langle a \rangle$ e $B = \langle b \rangle$, che commutano ciascuno con l'altro (qui infatti $ab = ba$) e ogni elemento di D_2 si può scrivere univocamente come $a^i b^j$ con $i, j \in \{0, 1\}$. Pertanto $D_2 \cong C_2 \times C_2$.

Perché questo funziona: le condizioni della definizione sono soddisfatte, quindi si possono moltiplicare le componenti separatamente e concludere che D_2 è il prodotto diretto di due copie di C_2 .

Controesempio D_3 : nel caso di D_3 abbiamo che $D_3/C_3 \cong C_2$ (dove $C_3 = \langle c \rangle$ è il sottogruppo delle rotazioni), ma D_3 non è isomorfo a $C_2 \times C_3$. Una ragione semplice: $C_2 \times C_3 \cong C_6$ è un gruppo abeliano, mentre D_3 non è abeliano (le riflessioni e le rotazioni non commutano), dunque non possono essere isomorfi. Questo mostra che avere due fattori di ordine relativi coprimi e quozienti opportuni non è sufficiente: serve la decomposizione interna con la commutatività incrociata e la rappresentazione unica.

Teorema (Condizione necessaria per il prodotto diretto)

Se G è finito e $G = AB$ con $A \cap B = \{e\}$ e $[A] \cdot [B] = [G]$ e $ab = ba$ per ogni $a \in A, b \in B$, allora ogni $g \in G$ si scrive in modo unico come ab e quindi $G \cong A \times B$.

Applicazione pratica. Per verificare che un gruppo è prodotto diretto interno di due sottogruppi conviene controllare: (i) la generazione $G = AB$; (ii) l'intersezione banale $A \cap B = \{e\}$; (iii) la commutatività incrociata $ab = ba$. Se G è finito, condizione (ii) e l'uguaglianza dei prodotti degli ordini implicano già (i).

Nota finale. Le nozioni di classi di coniugazione, sottogruppo normale e quoziente sono strettamente collegate: le classi di coniugazione descrivono l'azione coniugazione e la normalità è la condizione che rende l'azione compatibile con la struttura di quoziente. Gli esempi su D_3 mostrano concretamente quando il prodotto di coset determina un gruppo quoziente (caso normale $H = \langle c \rangle$) e quando fallisce (caso non normale $K = \{e, b\}$). Il prodotto diretto interno richiede invece forti condizioni strutturali (commutatività incrociata e decomposizione univoca) che non sono soddisfatte in molti diedrali non banali (p. es. D_3).

3 Primo teorema di isomorfismo

Definizione (Omomorfismo)

Un omomorfismo è una mappa $f : A \rightarrow B$ tale che preserva una struttura matematica. Nel caso dei gruppi, la struttura preservata è la moltiplicazione del gruppo.

$$f(a_1 a_2) = f(a_1) f(a_2)$$

Proposizione (Proprietà dell'omomorfismo)

- L'immagine di f è un sottogruppo di B
- Il kernel di f è un sottogruppo di A

Teorema (Primo teorema di isomorfismo)

Sia $f : G \rightarrow G'$ un omomorfismo di gruppi, con nucleo $K = \ker f$. Allora vale la corrispondenza biunivoca

$$\text{Im } f \cong G/K,$$

che rispetta la struttura di gruppo.

Dimostrazione. Costruiamo una corrispondenza biunivoca tra $\text{Im } f$ e G/K che preservi le operazioni di gruppo. Tale corrispondenza è data da

$$f(g) \longleftrightarrow gK,$$

associando l'immagine di un elemento $g \in G$ con la classe laterale gK .

Per mostrare che questa corrispondenza è ben definita e che rispetta la struttura di gruppo, verifichiamo i seguenti punti:

1. **La mappa $f(g) \mapsto gK$ è ben definita.** Potrebbe sorgere un dubbio, poiché un elemento di $\text{Im } f$ potrebbe essere immagine di due elementi distinti $g, g' \in G$. In tal caso, la mappa bidirezionale assocerebbe lo stesso elemento a gK e a $g'K$. Tuttavia, se $f(g') = f(g)$, allora

$$f(g'g^{-1}) = e,$$

da cui $g'g^{-1} \in K$. Segue che $g'K = gK$, e dunque la mappa è ben definita.

2. **La mappa inversa $gK \mapsto f(g)$ è ben definita.** Anche qui può sorgere il dubbio che la mappa dipenda dal rappresentante g scelto nella classe gK . Ma l'argomento precedente funziona in senso inverso: se g' è un altro rappresentante della stessa classe, cioè $g'g^{-1} \in K$, allora

$$f(g') = f(g'g^{-1}g) = f(g'g^{-1})f(g) = ef(g) = f(g),$$

quindi la mappa è ben definita anche in questo senso.

3. **La struttura di gruppo è preservata.** Dobbiamo verificare che

$$f(g)f(g') \longleftrightarrow (gK)(g'K).$$

Poiché f è un omomorfismo, abbiamo

$$f(g)f(g') = f(gg'),$$

che corrisponde alla classe laterale $gg'K$. Ma per la legge di composizione delle classi laterali, $(gK)(g'K) = gg'K$. Segue quindi che la corrispondenza preserva l'operazione di gruppo.

In conclusione, l'omomorfismo f induce una corrispondenza biunivoca tra gli elementi di $\text{Im } f$ e le classi laterali di K in G . Il sottogruppo normale K è mandato sull'identità $e' \in G'$, e ciascuna classe laterale gK è associata a un unico elemento $f(g) \in \text{Im } f$. Pertanto,

$$\text{Im } f \cong G/K.$$

□

Corollario (Corollario per gruppi finiti)

I possibili ordini delle immagini dell'omomorfismo del gruppo G sono $[G]/r$ dove r è l'ordine di un sottogruppo normale di G . Quindi dato che tutti gli elementi di una stessa classe laterale in G vengono mandati nello stesso elemento $f(g)$ e ogni classe laterale contiene esattamente r elementi, questa mappa manda r elementi in 1 ossia $r \rightarrow 1$.

Esempio (Esempio di applicazione: Il gruppo D_3)

Come già osservato in precedenza, l'unico sottogruppo normale proprio di D_3 è

$$C_3 = \{e, c, c^2\}.$$

Un omomorfismo avente questo come kernel avrebbe un'immagine costituita da due elementi, diciamo E e B , con una struttura isomorfa a

$$D_3/C_3 \cong C_2.$$

La mappa corrispondente sarebbe dunque di tipo $3 \rightarrow 1$, con

$$\{e, c, c^2\} \mapsto E \quad e \quad \{b, bc, bc^2\} \mapsto B.$$

Vi sono due casi particolari degni di nota, che corrispondono alle due estremità possibili per il kernel:

1. $K = G$: corrisponde all'applicazione triviale, data da

$$f(g) = e \quad \forall g \in G.$$

2. $K = \{e\}$: in questo caso la mappa è un isomorfismo, ossia una corrispondenza biunivoca (1:1) che preserva la moltiplicazione.

Il gruppo di arrivo G' non deve necessariamente essere distinto da G ; può infatti coincidere con esso. In tal caso, si introduce una terminologia specifica:

- Un omomorfismo da un gruppo in sé stesso si chiama **endomorfismo**.
- Un isomorfismo da un gruppo in sé stesso si chiama **automorfismo**.

Ad esempio, nel gruppo C_3 :

- La mappa $c \mapsto e$ è un endomorfismo **triviale**.
- La mappa $c \mapsto c$ è l'automorfismo **identico**.
- La mappa $c \mapsto c^2$ definisce un automorfismo **non banale**.

4 Rappresentazioni dei gruppi

Definizione (Rappresentazione Lineare)

Sia G un gruppo e V uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} . Una **rappresentazione** di G su V è un omomorfismo di gruppi:

$$\rho : G \rightarrow GL(V) \quad (1)$$

dove $GL(V)$ denota il gruppo generale lineare, ovvero l'insieme degli isomorfismi lineari da V in sé stesso. La dimensione della rappresentazione è definita come $n = \dim_{\mathbb{K}}(V)$. Esplicitamente, per ogni $g, h \in G$, la mappa soddisfa:

$$\rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h) \quad e \quad \rho(e) = \mathbb{1}_V \quad (2)$$

Definizione (Rappresentazione Fedele)

Una rappresentazione (V, ρ) si dice **fedele** se l'omomorfismo ρ è iniettivo. In termini algebrici, il nucleo della rappresentazione deve essere banale:

$$\ker(\rho) = \{g \in G \mid \rho(g) = \mathbb{1}_V\} = \{e\} \quad (3)$$

Intuitivamente, una rappresentazione fedele preserva tutta l'informazione del gruppo G senza "collassare" elementi distinti nello stesso operatore lineare.

Osservazione (Struttura di $\mathbb{K}[G]$ -modulo)

Una rappresentazione (V, ρ) induce naturalmente su V una struttura di modulo sull'algebra del gruppo $\mathbb{K}[G]$. L'azione scalare "generalizzata" di un elemento $g \in G$ su un vettore $v \in V$ è definita come:

$$g \cdot v := \rho(g)(v) \quad (4)$$

Questa identificazione permette di utilizzare gli strumenti dell'algebra omologica, come il prodotto tensore su anelli $\otimes_{\mathbb{K}[H]}$, per definire le rappresentazioni indotte.

Definizione (Equivalenza di rappresentazioni)

Due rappresentazioni di un gruppo sono equivalenti se $\exists S \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che

$$D^{(1)}(g) = S D^{(2)}(g) S^{-1} \quad \forall g \in G$$

Si dimostra che questa definizione è ben data perchè si comporta bene con la composizione.

Definizione (Carattere)

Il carattere di una rappresentazione D di un gruppo G è il set $\chi = \{\chi(g) \mid g \in G\}$ dove

$$\chi(g) := \text{Tr}(D(g))$$

Proposizione

Due rappresentazioni equivalenti hanno lo stesso carattere in quanto la traccia è invariante per permutazioni cicliche. In realtà la teoria delle rappresentazioni dimostra anche che vale la freccia inversa.

Definizione (Riducibilità)

Una rappresentazione è detta riducibile se $D(g)$ prende la forma

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$$

dove A, B, C sono blocchi. Se esiste una rappresentazione equivalente del gruppo G dove C è la matrice nulla, allora si dice che D è **completamente riducibile o decomponibile** e si scrive

$$D(g) = A(g) \oplus B(g)$$

Si mostrerà che il teorema di Maschke garantisce che ogni gruppo finito ammette una rappresentazione in termini di irriducibili (ossia rappresentazioni che non ammettono riduzioni).

Definizione (G-Modulo)

Un G -Modulo è uno spazio vettoriale V che ammette un omomorfismo tra gli elementi del gruppo G e una trasformazione lineare che agisce su V . In questo caso la rappresentazione viene denominata $T(g)$.

In questo contesto la riducibilità si traduce nella richiesta di esistenza di un sottospazio (sottomodulo) chiuso rispetto alla trasformazione $T(g)$, perchè in quel caso avremo che, wlog scegliendo una base, i primi m vettori di base vengono trasformati secondo una matrice del genere:

$$T(g) = \begin{pmatrix} A(g) & C(g) \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$$

con $A \in GL(m, \mathbb{R})$. Si può mostrare che esiste una base nella quale C è la matrice nulla, passando per il fatto che ogni rappresentazione di un gruppo finito è unitaria.

Teorema (Rappresentazioni unitarie)

Ogni rappresentazione unitaria riducibile che ammette un G -modulo V è decomponibile.

Dimostrazione. Prendiamo la rappresentazione $T(g)$ e il sottomodulo U , chiuso rispetto a T . Decoriamo V con un prodotto scalare hermitiano e costruiamo con Gram-Schmidt una base ortonormale per U , a questo punto sappiamo che

$$\forall u \in U \quad T(u) \in U$$

ma completando la base ad una base per tutto V notiamo che i vettori aggiunti sono ortogonali con i primi, quindi possiamo dire che $W := \text{span} \langle v_{m+1}, \dots, v_n \rangle$ è il complemento ortogonale di U . Usiamo ora l'unitarietà di T

$$(T(g)w, u) = (w, T^{-1}(g)u) \quad u \in U \quad w \in W$$

ma la chiusura di U ci dice che $T^{-1}(g)u = T(g^{-1})u = u' \in U$, quindi

$$(w, T^{-1}(g)u) = (w, u') = 0 = (T(g)w, u)$$

quindi $T(g)w \in W$ e quindi W è chiuso rispetto a T . Questo mostra che la rappresentazione matriciale di T deve avere C nullo. \square

Ora, per dimostrare anche la freccia inversa basta trovare un modo per definire un prodotto scalare che, per un dato T , sia unitario rispetto a T stesso.

Definizione (Prodotto scalare invariante per gruppi)

$$(v, v') = \frac{1}{[g]} \sum_g (T(g)v, T(g)v')$$

si dimostra facilmente che è una buona definizione per composizione e che rende unitaria la trasformazione T . La definizione risulta essere ben data anche per un gruppo compatto cioè un gruppo continuo con infiniti elementi, nella quale però la somma si sostituisce con un'integrazione convergente gruppo-invariante, in quanto è cruciale per la definizione l'esistenza di una somma (o integrale) gruppo-invariante ossia che

$$\sum_g = \sum_{g'}$$

In questo modo si può enunciare il seguente teorema.

Teorema (Maschke)

Ogni rappresentazione riducibile di un gruppo finito è completamente riducibile.

Questo teorema può anche essere ricavato dal seguente risultato dell'algebra.

Teorema

Supponiamo che G sia un gruppo finito e che V sia una rappresentazione di G su un campo \mathbb{F} di caratteristica (il numero di volte che devi sommare 1 per ottenere lo 0 del campo, se non esiste è 0) che non divida $|G|$. Supponiamo inoltre che W sia una sottorappresentazione di V . Allora esiste un'ulteriore sottorappresentazione W' di V tale che

$$V \cong W \oplus W'$$

5 Irriducibili

Lemma (Primo lemma di Schur)

Sia D una rappresentazione irriducibile di un gruppo G su uno spazio vettoriale V , e sia $A : V \rightarrow V$ un operatore lineare tale che

$$AD(g) = D(g)A \quad \forall g \in G.$$

Allora A è un multiplo dell'identità, cioè

$$A = \lambda I, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Dimostrazione. Poiché A commuta con ogni $D(g)$, lo spazio vettoriale V può essere decomposto in sottospazi invarianti rispetto ad A . Sia μ un autovalore di A e sia V_μ il relativo autospazio:

$$V_\mu = \{v \in V \mid Av = \mu v\}.$$

Per ogni $g \in G$ e $v \in V_\mu$,

$$A(D(g)v) = D(g)Av = D(g)(\mu v) = \mu D(g)v,$$

da cui $D(g)v \in V_\mu$. Pertanto V_μ è un sottospazio invariante per D . Ma D è irriducibile, dunque l'unico sottospazio invariante non nullo è tutto V . Ne segue che $V_\mu = V$, quindi $A = \mu I$, con $\mu \in \mathbb{C}$. \square

Lemma (Secondo lemma di Schur)

Siano D e D' due rappresentazioni irriducibili di un gruppo G , aventi rispettivamente spazi vettoriali V e V' . Sia $A : V \rightarrow V'$ un'applicazione lineare tale che

$$AD(g) = D'(g)A \quad \forall g \in G.$$

Allora:

1. *Se D e D' non sono equivalenti, allora $A = 0$.*
2. *Se D e D' sono equivalenti, allora A è proporzionale a un isomorfismo di equivalenza, cioè*

$$A = \lambda I \quad \text{per qualche } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Dimostrazione. Supponiamo che $AD(g) = D'(g)A$ per ogni $g \in G$. Poiché A intreccia le due rappresentazioni, il suo nucleo $\ker A$ e la sua immagine $\text{Im } A$ sono sottospazi invarianti sotto l'azione del gruppo:

$$v \in \ker A \implies AD(g)v = D'(g)Av = 0 \implies D(g)v \in \ker A,$$

e in modo analogo $\text{Im } A$ è invariante poiché $D'(g)Av = AD(g)v \in \text{Im } A$.

Ora:

- Se D e D' sono irriducibili e non equivalenti, l'unico sottospazio invariante possibile per $\ker A$ è $\{0\}$ o tutto V . Ma se $\ker A = \{0\}$, allora A è iniettivo e la sua immagine $\text{Im } A = V'$ è invariante; dunque D' sarebbe equivalente a D , in contraddizione. Quindi deve essere $\ker A = V$, cioè $A = 0$.

- Se invece D e D' sono equivalenti, possiamo scegliere una base in cui $D = D'$. Allora la condizione $AD(g) = D(g)A$ mostra che A commuta con tutti gli operatori $D(g)$. Ma, per irriducibilità, l'unico operatore che commuta con tutti $D(g)$ è un multiplo dell'identità (per il lemma di Schur stesso), cioè $A = \lambda I$ con $\lambda \in \mathbb{C}$.

□

Teorema (Relazioni di ortogonalità fondamentali)

Sia G un gruppo finito e siano $\{D^{(\alpha)}\}_\alpha$ rappresentazioni irriducibili complessificate di G , di dimensione n_α . Si può scegliere ogni rappresentazione unitaria. Allora valgono le seguenti relazioni di ortogonalità.

(A) Ortogonalità delle matrici di rappresentazione. Per ogni α, β e per indici $i, i' \in \{1, \dots, n_\alpha\}$, $j, j' \in \{1, \dots, n_\beta\}$ si ha

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} D_{ii'}^{(\alpha)}(g) \overline{D_{jj'}^{(\beta)}(g)} = \frac{1}{n_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta_{i'j'}.$$

(B) Ortogonalità dei caratteri. Se $\chi_\alpha(g) = \text{Tr } D^{(\alpha)}(g)$ è il carattere della rappresentazione irriducibile α , allora

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\alpha(g) \overline{\chi_\beta(g)} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Dimostrazione. Scegliamo per ogni rappresentazione $D^{(\alpha)}$ una realizzazione unitaria (questo è sempre possibile per gruppi finiti). Pertanto $(D^{(\alpha)}(g))^{-1} = (D^{(\alpha)}(g))^\dagger = \overline{D^{(\alpha)}(g)}^T$.

Passo 1 — costruzione di un operatore intrecciante. Siano $D^{(\alpha)}$ e $D^{(\beta)}$ due rappresentazioni irriducibili di dimensioni n_α e n_β . Sia B una qualsiasi matrice $n_\alpha \times n_\beta$ (considerata come applicazione lineare $V_\beta \rightarrow V_\alpha$). Definiamo l'operatore

$$T = \sum_{g \in G} D^{(\alpha)}(g) B (D^{(\beta)}(g))^{-1}.$$

Per ogni $h \in G$ si verifica immediatamente che T intreccia $D^{(\beta)}$ e $D^{(\alpha)}$:

$$D^{(\alpha)}(h) T = \sum_g D^{(\alpha)}(hg) B (D^{(\beta)}(g))^{-1} = \sum_{g'} D^{(\alpha)}(g') B (D^{(\beta)}(h^{-1}g'))^{-1} = T D^{(\beta)}(h),$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo fatto il cambio di somma $g' = hg$.

Passo 2 — uso dei Lemmi di Schur. Per i Lemmi di Schur si ha:

- se $\alpha \not\cong \beta$ (rappresentazioni non equivalenti), allora ogni operatore che intreccia le due rappresentazioni è nullo, quindi $T = 0$;
- se $\alpha \cong \beta$ (stessa rappresentazione irriducibile), allora T è un multiplo dell'identità su V_α : $T = \lambda I_{n_\alpha}$ per qualche scalare λ .

Passo 3 — scelta di B e ricavo della relazione per gli elementi di matrice. Prendiamo per B la matrice elementare $E_{i'j'}$ (con 1 in posizione (i', j') e 0 altrove). Calcoliamo gli elementi di T :

$$T_{ij} = \sum_{g \in G} \sum_{a,b} (D^{(\alpha)}(g))_{ia} (E_{i'j'})_{ab} ((D^{(\beta)}(g))^{-1})_{bj} = \sum_{g \in G} D_{ii'}^{(\alpha)}(g) (D^{(\beta)}(g)^{-1})_{j'j}.$$

Usando l'unitarietà si ha $(D^{(\beta)}(g)^{-1})_{j'j} = \overline{D_{jj'}^{(\beta)}(g)}$, perciò

$$T_{ij} = \sum_{g \in G} D_{ii'}^{(\alpha)}(g) \overline{D_{jj'}^{(\beta)}(g)}.$$

Se $\alpha \not\cong \beta$ allora $T = 0$ e quindi la somma è nulla per ogni scelta di indici:

$$\sum_{g \in G} D_{ii'}^{(\alpha)}(g) \overline{D_{jj'}^{(\beta)}(g)} = 0.$$

Se $\alpha \cong \beta$ allora $T = \lambda I$. Per determinare λ calcoliamo la traccia:

$$\text{Tr } T = \sum_{i=1}^{n_\alpha} T_{ii} = \sum_{g \in G} \sum_i D_{ii'}^{(\alpha)}(g) \overline{D_{ii'}^{(\alpha)}(g)} = \sum_{g \in G} \text{Tr}(D^{(\alpha)}(g) E_{i'i'} D^{(\alpha)}(g)^{-1}).$$

Ma $\text{Tr}(D^{(\alpha)}(g) E_{i'i'} D^{(\alpha)}(g)^{-1}) = \text{Tr}(E_{i'i'}) = 1$, quindi $\text{Tr } T = |G|$. D'altra parte $\text{Tr } T = \lambda n_\alpha$, dunque

$$\lambda = \frac{|G|}{n_\alpha}.$$

Inserendo questo valore in $T_{ij} = \lambda \delta_{ij}$ otteniamo, per $\alpha = \beta$,

$$\sum_{g \in G} D_{ii'}^{(\alpha)}(g) \overline{D_{jj'}^{(\alpha)}(g)} = \frac{|G|}{n_\alpha} \delta_{ij} \delta_{i'j'}.$$

Dividendo per $|G|$ si ricava immediatamente la relazione desiderata:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} D_{ii'}^{(\alpha)}(g) \overline{D_{jj'}^{(\beta)}(g)} = \frac{1}{n_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta_{i'j'}.$$

Passo 4 — ortogonalità dei caratteri. Poiché $\chi_\alpha(g) = \sum_{i=1}^{n_\alpha} D_{ii}^{(\alpha)}(g)$, usando la relazione matriciale con $i = i'$ e $j = j'$ e sommando sugli indici si ottiene

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\alpha(g) \overline{\chi_\beta(g)} = \sum_{i,j} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} D_{ii}^{(\alpha)}(g) \overline{D_{jj}^{(\beta)}(g)} = \sum_{i,j} \frac{1}{n_\alpha} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} = \delta_{\alpha\beta}.$$

Questo completa la dimostrazione delle relazioni di ortogonalità. \square

Corollari

- Le relazioni di ortogonalità mostrano che, nella base delle funzioni di classe su G , i caratteri irriducibili formano un sistema ortonormale; in particolare il numero di rappresentazioni irriducibili (non equivalenti) è uguale al numero di classi di coniugio di G .
- Dalla versione matriciale si ricavano le ortogonalità delle colonne e delle righe delle matrici di rappresentazione (quando le rappresentazioni sono unitarie).

Osservazione (Vincolo sul numero di rappresentazioni irriducibili)

In virtù del risultato dimostrato alla fine del capitolo precedente, possiamo assumere senza perdita di generalità che tutte le rappresentazioni irriducibili $D^{(\mu)}$ siano unitarie. In tal caso, la relazione di ortogonalità può essere scritta nella forma

$$\sum_{g \in G} D_{ir}^{(\mu)}(g) D_{js}^{(\nu)*}(g) = \frac{|G|}{n_\mu} \delta^{\mu\nu} \delta_{ij} \delta_{rs}. \quad (*)$$

Consideriamo ora una rappresentazione irriducibile fissata $D^{(\mu)}$ e poniamo $\nu = \mu$. Per indici i, r fissati, l'insieme di elementi $\{D_{ir}^{(\mu)}(g_1), D_{ir}^{(\mu)}(g_2), \dots, D_{ir}^{(\mu)}(g_{|G|})\}$ può essere visto come un vettore colonna in uno spazio complesso di dimensione $|G|$. Il membro sinistro dell'equazione (*) rappresenta allora il prodotto scalare complesso di due tali vettori, etichettati dalle coppie di indici (i, r) e (j, s) . Ciascuno di questi indici può assumere n_μ valori distinti, quindi esistono in totale n_μ^2 vettori di questo tipo, che risultano tutti ortogonali tra loro.

Lo stesso ragionamento vale per qualunque altra rappresentazione irriducibile $D^{(\nu)}$ con $\nu \neq \mu$, e i vettori costruiti dalle diverse rappresentazioni risultano anch'essi ortogonali rispetto a quelli di $D^{(\mu)}$. Pertanto, considerando tutte le rappresentazioni irriducibili, possiamo formare un insieme di

$$\sum_{\mu} n_\mu^2$$

vettori complessi a due a due ortogonali.

Poiché il numero totale di vettori ortogonali in uno spazio complesso di dimensione $|G|$ non può superare $|G|$ stesso, otteniamo immediatamente la disuguaglianza fondamentale

$$\sum_{\mu} n_{\mu}^2 \leq |G|.$$

Poiché ogni $n_{\mu} \geq 1$, questa relazione implica che il numero delle rappresentazioni irriducibili di un gruppo finito è necessariamente limitato. In seguito si dimostrerà che tale disuguaglianza è in realtà un'uguaglianza:

$$\sum_{\mu} n_{\mu}^2 = |G|.$$

Quindi ogni rappresentazione di un gruppo finito o compatto ammette una decomposizione in irriducibili

$$D = \bigoplus_{\nu} a_{\nu} D^{(\nu)} \quad \chi(g) = \sum_{\nu} a_{\nu} \chi^{(\nu)}(g) \quad (R)$$

da quest'ultima otteniamo

$$\sum_g \chi^{(\mu)}(g^{-1}) \chi(g) = \sum_{\nu} \sum_g \chi^{(\mu)}(g^{-1}) a_{\nu} \chi^{(\nu)}(g)$$

dalle relazioni di ortogonalità precedenti otteniamo

$$a_{\mu} = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi^{(\mu)}(g^{-1}) \chi(g).$$

Non c'era però effettivamente bisogno di esplicitare tutto, in quanto potevamo usare il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ben definito nel seguente modo

$$a_{\mu} = \langle \chi^{(\mu)}, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_g \chi^{(\mu)}(g^{-1}) \chi(g)$$

5.1 Rappresentazione regolare

Richiamiamo all'attenzione il teorema di Cayley che ci garantisce un isomorfismo tra un gruppo finito G e un sottogruppo del gruppo simmetrico S_n tramite un omomorfismo con la moltiplicazione a sinistra. Abbiamo quindi che

$$gg_j = \sum_i D_{ji}(g) g_i$$

dove D è la matrice delle permutazione che definisce la cosiddetta rappresentazione regolare. Quindi $g_i = gg_j \neq g_j$ solo quando $g \neq e$, quindi la matrice non ha elementi diagonali, invece quando $g = e$ è l'identità. In più non ha può avere più di un valore diverso da zero su ogni colonna e riga. Quindi

$$\chi(g) = 0 \quad \text{se } g \neq e \quad \text{e} \quad \chi(g) = |G| \quad \text{se } g = e$$

e quindi avremo che

$$a_{\mu} = \chi^{(\mu)}(e) = n_{\mu}$$

che è la dimensione dell'irriducibile $D^{(\mu)}$, inoltre mettendo $g = e$ nella relazione (R) otteniamo

$$|G| = \sum_{\nu} n_{\nu} n_{\nu}$$

e abbiamo ottenuto l'uguaglianza vista sopra.

6 Costruzione della tavola dei caratteri

I caratteri sono spesso presentati in una tabella, le righe sono i diversi irriducibili mentre le colonne sono le classi di coniugazione. Gli strumenti che usiamo sono:

1. numero degli irriducibili = numero delle classi di coniugazione: $r = k$
2. $\sum_{\mu} n_{\mu}^2 = |G|$
3. $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_{\alpha}(g) \overline{\chi_{\beta}(g)} = \delta_{\alpha\beta}$
4. qualsiasi altra informazione

6.1 Tavola dei caratteri di C_3

Il gruppo $C_3 = \{e, c, c^2\}$ è generato da un elemento c tale che $c^3 = e$. Poiché la rappresentazione deve rispettare la moltiplicazione del gruppo, imponiamo

$$\chi(c^2) = (\chi(c))^2 \quad \text{e} \quad (\chi(c))^3 = \chi(c^3) = \chi(e) = 1.$$

Ne segue che $\chi(c)$ deve essere una radice cubica dell'unità, cioè

$$1, \quad \omega := e^{2\pi i/3}, \quad \omega^2 = e^{4\pi i/3}.$$

Possiamo quindi scrivere la tavola dei caratteri nella forma:

C_3	e	c	c^2
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	ω	ω^2
$D^{(3)}$	1	ω^2	ω

La rappresentazione $D^{(1)}$ è la rappresentazione *triviale*, in cui ogni elemento è mandato nell'unità. In notazione cristallografica è indicata con A . Sebbene $D^{(2)}$ e $D^{(3)}$ siano anch'esse rappresentazioni unidimensionali, esse sono complesse coniugate tra loro e in molte situazioni fisiche corrispondono agli stessi livelli energetici. Per questo motivo, spesso vengono considerate come una singola rappresentazione bidimensionale E in notazione cristallografica.

Pensando alle rappresentazioni come applicazioni da C_3 in $\text{GL}(1, \mathbb{C})$, possiamo identificare i rispettivi nuclei. Questi devono essere sottogruppi normali di C_3 . Poiché C_3 non ha sottogruppi propri, le uniche possibilità sono l'intero gruppo o l'identità sola. Per $D^{(1)}$ si realizza il primo caso (nucleo = C_3), mentre per $D^{(2)}$ e $D^{(3)}$ il nucleo è l'identità, dunque esse sono rappresentazioni *fedeli*.

Verifichiamo ora l'ortogonalità delle righe:

$$\langle \chi^{(1)}, \chi^{(2)} \rangle = \frac{1}{3}(1 + \omega^2 + \omega) = 0,$$

grazie alla fattorizzazione di $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$. Allo stesso modo $\langle \chi^{(1)}, \chi^{(3)} \rangle = 0$ e $\langle \chi^{(2)}, \chi^{(3)} \rangle = 0$. La normalizzazione è assicurata dal fatto che tutti i caratteri hanno modulo 1, essendo numeri unitari (rappresentazioni unitarie).

Consideriamo ora la rappresentazione vettoriale D^V , che agisce sui componenti x, y, z , ossia quella che corrisponderebbe a 3 rotazioni in \mathbb{R}^3 . Il carattere è

$$\chi^V = (\chi^V(e), \chi^V(c), \chi^V(c^2)) = (3, 0, 0).$$

Possiamo scrivere

$$\chi^V = a_1 \chi^{(1)} + a_2 \chi^{(2)} + a_3 \chi^{(3)}.$$

Per ispezione, risulta evidente che

$$\chi^V = \chi^{(1)} + \chi^{(2)} + \chi^{(3)}.$$

In alternativa, i coefficienti si ottengono da

$$a_v = \langle \chi^V, \chi^{(v)} \rangle = \frac{1}{3}(3\chi^{(v)}(e)) = 1.$$

Dunque la rappresentazione vettoriale si decompone come somma diretta:

$$D^V = D^{(1)} \oplus D^{(2)} \oplus D^{(3)}.$$

È possibile identificare le combinazioni di coordinate su cui D^V agisce irriducibilmente. Il coordinato z rimane invariato da tutte le rotazioni di C_3 , quindi forma la base della rappresentazione triviale $D^{(1)}$. Per $D^{(2)}$ e $D^{(3)}$, consideriamo le combinazioni $x \pm iy$:

$$x' \pm iy' = x(\cos \theta \pm i \sin \theta) + iy(\cos \theta \pm i \sin \theta) = (x \pm iy)e^{\pm i\theta}.$$

Per l'elemento c , con $\theta = 2\pi/3$, si ha $e^{i\theta} = \omega$ e c^2 dà il fattore moltiplicativo ω^2 . Quindi $x + iy$ forma la base di $D^{(2)}$, mentre $x - iy$ quella di $D^{(3)}$.

La tavola finale dei caratteri è dunque:

C_3	e	c	c^2
$A : D^{(1)}$	1	1	1
$E : D^{(2)}$	1	ω	ω^2
$E : D^{(3)}$	1	ω^2	ω

6.2 Prodotto tensore

Siano $D^{(\mu)}$ e $D^{(\nu)}$ due rappresentazioni irriducibili di un gruppo G . Definiamo il prodotto tensoriale

$$D_{bd;ac}^{(\mu \times \nu)}((g_1, g_2)) := D_{ba}^{(\mu)}(g_1) D_{dc}^{(\nu)}(g_2).$$

È immediato verificare che, se $D^{(\mu)}$ e $D^{(\nu)}$ sono irriducibili, allora anche $D^{(\mu)} \otimes D^{(\nu)}$, così definita, è una rappresentazione irriducibile del gruppo prodotto $G \times G$.

Tuttavia, se limitiamo il caso a trasformazioni con la *stessa* azione di gruppo su entrambi i fattori, cioè $g_1 = g_2 = g$, stiamo rappresentando G stesso e la rappresentazione $D^{(\mu)} \otimes D^{(\nu)}$ in generale non è più irriducibile.

La decomposizione di tale prodotto nelle sue componenti irriducibili si scrive:

$$D^{(\mu)} \otimes D^{(\nu)} = \bigoplus_{\sigma} a_{\sigma} D^{(\sigma)},$$

e viene detta *serie di Clebsch–Gordan*. Essa riveste un ruolo fondamentale nelle applicazioni fisiche della teoria delle rappresentazioni.

Il carattere della rappresentazione prodotto è dato, per definizione, da

$$\chi^{(\mu \times \nu)}(g) = D_{AA}^{(\mu \times \nu)}(g) = D_{aa}^{(\mu)}(g) D_{cc}^{(\nu)}(g) = \chi^{(\mu)}(g) \chi^{(\nu)}(g).$$

Cioè, il carattere della rappresentazione prodotto è semplicemente il prodotto dei caratteri.

Applicando la relazione di ortogonalità dei caratteri, i coefficienti di molteplicità a_{σ} si determinano come

$$a_{\sigma} = \langle \chi^{(\sigma)}, \chi^{(\mu)} \chi^{(\nu)} \rangle.$$

7 Rappresentazioni Indotte

In questa sezione formalizziamo la costruzione che permette di produrre rappresentazioni di un gruppo G a partire da rappresentazioni di un suo sottogruppo H . Questa operazione è in un certo senso l'inverso della restrizione.

Sia $H \subset G$ un sottogruppo. Se V è una rappresentazione di G , essa si restringe naturalmente a una rappresentazione di H , denotata con $\text{Res}_H^G V$ (o semplicemente $\text{Res } V$). Per definire l'operazione inversa, consideriamo prima il caso in cui una rappresentazione di G contenga una rappresentazione di H come sottospazio.

Definizione (Rappresentazione Indotta)

Sia V una rappresentazione di G e sia $W \subset V$ un sottospazio che è H -invariante (ovvero W è una rappresentazione di H). Per ogni $g \in G$, il sottospazio $g \cdot W = \{g \cdot w \mid w \in W\}$ dipende solo dalla classe laterale sinistra (coset) gH , poiché per ogni $h \in H$ si ha $gh \cdot W = g \cdot (h \cdot W) = g \cdot W$. Denotiamo con $\sigma \cdot W$ il sottospazio associato alla classe $\sigma \in G/H$.

Diciamo che V è **indotta** da W se ogni elemento di V può essere scritto in modo unico come somma di elementi in tali traslati di W . In altre parole, se V si decompone come somma diretta indicizzata dalle classi laterali:

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma \cdot W \tag{5}$$

In questo caso, scriviamo $V = \text{Ind}_H^G W = \text{Ind } W$.

7.1 Costruzione ed Esistenza

È possibile dimostrare che, data una qualsiasi rappresentazione W di H , esiste sempre una rappresentazione V di G che soddisfa la definizione sopra. Costruiamola esplicitamente.

Scegliamo un rappresentante $g_\sigma \in G$ per ogni classe laterale $\sigma \in G/H$. Lo spazio vettoriale V è definito formalmente come la somma diretta di copie di W , una per ogni classe:

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W^\sigma \quad (6)$$

dove ogni elemento $v \in V$ si scrive univocamente come $v = \sum_\sigma g_\sigma w_\sigma$, con $w_\sigma \in W$.

Per definire l'azione di un generico $g \in G$, osserviamo che per ogni σ , il prodotto $g \cdot g_\sigma$ apparterrà a una nuova classe laterale τ , quindi $g \cdot g_\sigma = g_\tau \cdot h$ per un certo $h \in H$. Definiamo l'azione su un elemento della base "traslata" come:

$$g \cdot (g_\sigma w) = g_\tau (h \cdot w) \quad (7)$$

Questa costruzione è indipendente dalla scelta dei rappresentanti e rende V un G -modulo ben definito.

Osservazione (Confronto con il prodotto tensore)

La costruzione sopra è isomorfa alla definizione algebrica tramite prodotto tensore:

$$\text{Ind}_H^G W \cong \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$$

Il sottospazio $g_\sigma W$ nella definizione geometrica corrisponde al sottospazio $g_\sigma \otimes W$ nel prodotto tensore.

Esempio

- Se W è la rappresentazione banale unidimensionale di H , allora $\text{Ind}_H^G W$ è la **rappresentazione di permutazione** di G che agisce sull'insieme delle classi laterali G/H .
- Se W è la rappresentazione regolare di H , allora $\text{Ind}_H^G W$ è isomorfa alla rappresentazione regolare di G .

7.2 Proprietà Universale e Reciprocità di Frobenius

La rappresentazione indotta gode di una proprietà universale che lega gli omomorfismi di H -moduli con quelli di G -moduli.

Proposizione (Proprietà Universale)

Sia W una rappresentazione di H e U una rappresentazione di G . Supponiamo che $V = \text{Ind}_H^G W$. Allora ogni omomorfismo di H -moduli $\varphi : W \rightarrow \text{Res}_H U$ si estende in modo unico a un omomorfismo di G -moduli $\Phi : V \rightarrow U$. Vale l'isomorfismo canonico:

$$\text{Hom}_H(W, \text{Res}_H^G U) \cong \text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G W, U) \quad (8)$$

Questa relazione di aggiunzione porta direttamente alla celebre Reciprocità di Frobenius per i caratteri. Poiché la dimensione dello spazio degli omomorfismi tra due rappresentazioni è legata al prodotto scalare dei loro caratteri (lemma di Schur), otteniamo:

Corollario (Reciprocità di Frobenius)

Sia W una rappresentazione di H e U una rappresentazione di G . Siano χ_W e χ_U i rispettivi caratteri. Allora vale l'uguaglianza tra i prodotti scalari:

$$\langle \chi_{\text{Ind } W}, \chi_U \rangle_G = \langle \chi_W, \chi_{\text{Res } U} \rangle_H \quad (9)$$

In termini pratici, se W e U sono irriducibili, il numero di volte che U appare nella decomposizione di $\text{Ind } W$ è uguale al numero di volte che W appare nella decomposizione della restrizione $\text{Res } U$.

7.3 Carattere della Rappresentazione Indotta

È possibile calcolare il valore del carattere indotto $\chi_{\text{Ind } W}$ sugli elementi di G partendo dai valori di χ_W su H . Poiché G permuta le copie $g_\sigma W$, gli unici termini che contribuiscono alla traccia sono quelli per cui g manda il sottospazio $g_\sigma W$ in sé stesso, ovvero quando $gg_\sigma H = g_\sigma H$, il che implica $g_\sigma^{-1}gg_\sigma \in H$.

La formula per il carattere è data da:

$$\chi_{\text{Ind } W}(g) = \sum_{g_\sigma \in G/H, g_\sigma^{-1}gg_\sigma \in H} \chi_W(g_\sigma^{-1}gg_\sigma) \quad (10)$$

Se g non è coniugato a nessun elemento di H , il carattere è zero. Nel caso particolare in cui W sia la rappresentazione banale, il carattere conta semplicemente il numero di classi laterali fissate dall'azione di g .

8 L'Algebra del Gruppo $\mathbb{C}G$

Associamo a un gruppo finito G uno spazio vettoriale $\mathbb{C}G$ avente come base l'insieme degli elementi del gruppo $\{e_g \mid g \in G\}$. Un generico elemento $\alpha \in \mathbb{C}G$ è una combinazione lineare formale:

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g e_g, \quad a_g \in \mathbb{C} \quad (11)$$

Definiamo la struttura di algebra (prodotto) estendendo per linearità l'operazione del gruppo:

$$\left(\sum_g a_g e_g \right) \cdot \left(\sum_h b_h e_h \right) = \sum_{g,h} a_g b_h e_{gh} \quad (12)$$

Esiste una corrispondenza biunivoca tra le rappresentazioni di G e i $\mathbb{C}G$ -moduli. Se $\rho : G \rightarrow GL(V)$ è una rappresentazione, possiamo estenderla a un omomorfismo di algebre $\tilde{\rho} : \mathbb{C}G \rightarrow \text{End}(V)$ ponendo:

$$\tilde{\rho} \left(\sum a_g e_g \right) = \sum a_g \rho(g) \quad (13)$$

Viceversa, ogni $\mathbb{C}G$ -modulo sinistro definisce una rappresentazione restringendo l'azione agli elementi di base e_g . In particolare, la rappresentazione regolare di G corrisponde al modulo $\mathbb{C}G$ visto come modulo su se stesso.

8.1 Decomposizione di Wedderburn

Il risultato fondamentale sulla struttura di $\mathbb{C}G$ stabilisce che l'algebra del gruppo si decompone in una somma diretta di algebre di matrici.

Proposizione (3.29)

Siano W_1, \dots, W_k le rappresentazioni irriducibili non isomorfe di G . Esiste un isomorfismo di algebre:

$$\mathbb{C}G \cong \bigoplus_{i=1}^k \text{End}(W_i) \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{d_i}(\mathbb{C}) \quad (14)$$

dove $d_i = \dim(W_i)$.

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione $\varphi : \mathbb{C}G \rightarrow \bigoplus_i \text{End}(W_i)$ definita estendendo le rappresentazioni irriducibili:

$$\varphi(\alpha) = (\tilde{\rho}_1(\alpha), \tilde{\rho}_2(\alpha), \dots, \tilde{\rho}_k(\alpha)) \quad (15)$$

Questa mappa è un omomorfismo di algebre. Poiché la rappresentazione regolare è fedele e contiene tutte le irriducibili, il nucleo di φ è banale, dunque φ è iniettiva. Confrontando le dimensioni:

$$\dim(\mathbb{C}G) = |G| \quad \text{e} \quad \dim \left(\bigoplus_i \text{End}(W_i) \right) = \sum_i d_i^2 \quad (16)$$

Dalla teoria dei caratteri sappiamo che $\sum d_i^2 = |G|$. Poiché le dimensioni coincidono e la mappa è iniettiva, φ è un isomorfismo. \square

8.2 Analisi di Fourier su Gruppi Finiti

L'isomorfismo φ discusso sopra può essere interpretato come una Trasformata di Fourier. Identifichiamo un elemento $\alpha = \sum a_g e_g \in \mathbb{C}G$ con una funzione $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\phi(g) = a_g$.

Definizione (Trasformata di Fourier)

Sia $\phi : G \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione. La sua trasformata di Fourier in ρ (dove ρ è una rappresentazione di G) è l'operatore lineare:

$$\widehat{\phi}(\rho) = \sum_{g \in G} \phi(g) \rho(g) \in \text{End}(V_\rho) \quad (17)$$

L'isomorfismo (14) ci dice che conoscere la funzione ϕ è equivalente a conoscere la collezione delle matrici $\widehat{\phi}(\rho_i)$ per tutte le rappresentazioni irriducibili.

1. Teorema di Convoluzione

Date due funzioni ϕ, ψ su G , la loro convoluzione è definita come:

$$(\phi * \psi)(g) = \sum_{h \in G} \phi(h) \psi(h^{-1}g) \quad (18)$$

Teorema: $\widehat{\phi * \psi}(\rho) = \widehat{\phi}(\rho) \cdot \widehat{\psi}(\rho)$.

Dimostrazione. Calcoliamo la trasformata della convoluzione per definizione:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi * \psi}(\rho) &= \sum_{g \in G} (\phi * \psi)(g) \rho(g) \\ &= \sum_{g \in G} \left(\sum_{h \in G} \phi(h) \psi(h^{-1}g) \right) \rho(g) \end{aligned}$$

Poniamo $k = h^{-1}g$, da cui $g = hk$. Poiché h scorre su tutto G , per ogni h fissato anche k copre tutto G . Sostituiamo nella somma:

$$\begin{aligned} &= \sum_{h \in G} \sum_{k \in G} \phi(h) \psi(k) \rho(hk) \\ &= \sum_{h \in G} \sum_{k \in G} \phi(h) \psi(k) \rho(h) \rho(k) \quad (\text{poiché } \rho \text{ è omomorfismo}) \\ &= \left(\sum_{h \in G} \phi(h) \rho(h) \right) \cdot \left(\sum_{k \in G} \psi(k) \rho(k) \right) \\ &= \widehat{\phi}(\rho) \cdot \widehat{\psi}(\rho) \end{aligned}$$

Questo dimostra che la trasformata di Fourier converte la convoluzione (operazione complessa in $\mathbb{C}G$) nel prodotto di matrici (operazione puntuale nello spazio trasformato). \square

2. Formula di Inversione di Fourier

Possiamo ricostruire la funzione originale ϕ conoscendo le sue trasformate. **Formula:**

$$\phi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} \dim(V_\rho) \cdot \text{Trace}(\rho(g^{-1}) \widehat{\phi}(\rho)) \quad (19)$$

Dimostrazione. Sostituiamo la definizione di $\widehat{\phi}(\rho)$ nel membro destro (RHS):

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \frac{1}{|G|} \sum_{\rho} d_\rho \text{Trace} \left(\rho(g^{-1}) \sum_{h \in G} \phi(h) \rho(h) \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \phi(h) \sum_{\rho} d_\rho \text{Trace}(\rho(g^{-1}h)) \end{aligned}$$

Notiamo che $\text{Trace}(\rho(x)) = \chi_\rho(x)$. Usiamo la *Seconda Relazione di Ortogonalità* per i caratteri, che afferma:

$$\sum_{\rho \in \text{Irr}(G)} \chi_\rho(x) \chi_\rho(e) = \sum_{\rho} d_\rho \chi_\rho(x) = \begin{cases} |G| & \text{se } x = e \\ 0 & \text{se } x \neq e \end{cases} \quad (20)$$

Nel nostro caso $x = g^{-1}h$. La somma interna è non nulla (e vale $|G|$) solo quando $g^{-1}h = e$, ovvero $h = g$. Tutti i termini della somma su h si annullano tranne quello per $h = g$:

$$\text{RHS} = \frac{1}{|G|} \cdot \phi(g) \cdot |G| = \phi(g)$$

□

3. Formula di Plancherel

Esiste una relazione che conserva il prodotto scalare (o l'energia) tra lo spazio delle funzioni e lo spazio delle matrici. **Formula:**

$$\sum_{g \in G} \phi(g^{-1}) \psi(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\rho} d_\rho \text{Trace}(\widehat{\phi}(\rho) \widehat{\psi}(\rho)) \quad (21)$$

Dimostrazione. Osserviamo che il membro sinistro è esattamente il valore della convoluzione $(\phi * \psi)$ calcolato nell'identità e :

$$(\phi * \psi)(e) = \sum_h \phi(h) \psi(h^{-1}e) = \sum_h \phi(h) \psi(h^{-1}) \quad (22)$$

(Nota: ponendo $g = h^{-1}$, otteniamo la forma $\sum \phi(g^{-1}) \psi(g)$). Applichiamo la Formula di Inversione alla funzione $\Theta = \phi * \psi$ valutata in $g = e$:

$$\begin{aligned} (\phi * \psi)(e) &= \frac{1}{|G|} \sum_{\rho} d_\rho \text{Trace}(\rho(e^{-1}) \widehat{\Theta}(\rho)) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\rho} d_\rho \text{Trace}(\mathbf{1} \cdot \widehat{\phi * \psi}(\rho)) \end{aligned}$$

Usando il Teorema di Convoluzione $\widehat{\phi * \psi} = \widehat{\phi} \cdot \widehat{\psi}$, otteniamo:

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{\rho} d_\rho \text{Trace}(\widehat{\phi}(\rho) \widehat{\psi}(\rho)) \quad (23)$$

□

9 Gruppi continui

In questa sezione, introduciamo i concetti fondamentali di gruppo di Lie e algebra di Lie, stabilendo la connessione tra queste due strutture attraverso i generatori infinitesimali e la mappa esponenziale.

9.1 Gruppi di Lie e Gruppi Compatti

Definizione (Gruppo di Lie)

Un **gruppo di Lie** G è una struttura algebrica che è contemporaneamente:

1. Un **gruppo** (dotato di un'operazione \cdot , un elemento neutro e , e un'inversa g^{-1}).
2. Una **varietà differenziabile** C^∞ (reale o complessa).

Inoltre, si richiede che le operazioni di gruppo siano compatibili con la struttura differenziabile, ovvero le mappe:

- *Moltiplicazione:* $\mu : G \times G \rightarrow G$, data da $\mu(g_1, g_2) = g_1 \cdot g_2$
- *Inversione:* $i : G \rightarrow G$, data da $i(g) = g^{-1}$

devono essere **mappe differenziabili** (o lisce, C^∞).

Esempio

Esempi classici di gruppi di Lie includono:

- Il gruppo generale lineare $GL(n, \mathbb{R})$, l'insieme delle matrici $n \times n$ invertibili.
- Il gruppo ortogonale $O(n)$ e il gruppo ortogonale speciale $SO(n)$ (rotazioni).
- Il gruppo unitario $U(n)$ e il gruppo unitario speciale $SU(n)$.

Definizione (Gruppo Compatto)

Un gruppo di Lie G è detto **compatto** se la sua topologia sottostante (ereditata dalla struttura di varietà) è quella di uno **spazio topologico compatto**.

Osservazione

Intuitivamente, la compattezza implica che il gruppo è "chiuso" e "limitato".

- $SO(n)$ e $SU(n)$ sono esempi di gruppi di Lie compatti.
- $GL(n, \mathbb{R})$ e il gruppo additivo $(\mathbb{R}, +)$ non sono compatti.

La compattezza ha implicazioni profonde sulla teoria delle rappresentazioni: ad esempio, ogni rappresentazione di un gruppo compatto è completamente riducibile (somma diretta di irreps).

9.2 Algebre di Lie

Lo studio delle rappresentazioni dei gruppi di Lie richiede il passaggio dalla struttura globale del gruppo a quella locale e linearizzata dell'algebra di Lie. In questa sezione introduciamo formalmente le definizioni di Algebra di Lie, le mappe esponenziale e aggiunta, e i principi fondamentali che legano i gruppi alle loro algebre.

9.2.1 Motivazione e il Primo Principio

Il punto di partenza è l'osservazione che la struttura di un gruppo di Lie connesso è interamente determinata dal comportamento locale attorno all'identità.

Lemma

Sia G un gruppo di Lie connesso e $U \subset G$ un qualsiasi intorno dell'identità. Allora U genera G .

Questa proprietà implica che un omomorfismo è determinato localmente. Formuliamo questo concetto come il **Primo Principio**:

Teorema (Primo Principio)

Siano G e H gruppi di Lie, con G connesso. Una mappa $\rho : G \rightarrow H$ è univocamente determinata dal suo differenziale all'identità, $d\rho_e : T_e G \rightarrow T_e H$.

Questo riduce il problema di descrivere un omomorfismo tra gruppi a una mappa lineare tra spazi vettoriali. Tuttavia, sorge la domanda inversa: quali mappe lineari tra $T_e G$ e $T_e H$ provengono da omomorfismi di gruppi? La risposta risiede nella struttura algebrica addizionale che lo spazio tangente possiede, ovvero il *bracket* di Lie.

9.2.2 La Rappresentazione Aggiunta

Per definire una struttura sullo spazio tangente $T_e G$, dobbiamo considerare un'azione del gruppo che fissi l'identità. La moltiplicazione sinistra o destra non è adatta poiché non fissa e . Consideriamo invece l'azione per coniugio $\Psi_g : G \rightarrow G$, definita da:

$$\Psi_g(h) = ghg^{-1} \quad (24)$$

Poiché $\Psi_g(e) = e$, possiamo calcolarne il differenziale all'identità.

Definizione (Rappresentazione Aggiunta Ad)

Definiamo la mappa $Ad : G \rightarrow \text{Aut}(T_e G)$ ponendo:

$$Ad(g) = (d\Psi_g)_e : T_e G \rightarrow T_e G \quad (25)$$

Questa è una rappresentazione del gruppo G sul proprio spazio tangente, detta **rappresentazione aggiunta**.

La condizione che $\rho : G \rightarrow H$ sia un omomorfismo implica che ρ rispetti l'azione di coniugio, ovvero il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\rho} & H \\ \Psi_g \downarrow & & \downarrow \Psi_{\rho(g)} \\ G & \xrightarrow{\rho} & H \end{array}$$

Passando ai differenziali all'identità, otteniamo che il differenziale $d\rho$ deve essere un omomorfismo di rappresentazioni rispetto all'azione aggiunta. Per ogni $v \in T_e G$:

$$d\rho(\text{Ad}(g)(v)) = \text{Ad}(\rho(g))(d\rho(v)) \quad (26)$$

Ovvero, il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} T_e G & \xrightarrow{d\rho} & T_e H \\ \text{Ad}(g) \downarrow & & \downarrow \text{Ad}(\rho(g)) \\ T_e G & \xrightarrow{d\rho} & T_e H \end{array}$$

La condizione (26) coinvolge ancora il gruppo G . Per linearizzare completamente il problema, deriviamo la mappa $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(T_e G)$ all'identità. Lo spazio tangente di $\text{Aut}(T_e G)$ (che è un sottoinsieme aperto di $\text{End}(T_e G)$) è identificato con $\text{End}(T_e G)$ stesso.

Definizione (Mappa aggiunta ad)

Il differenziale della rappresentazione aggiunta all'identità è denotato con minuscolo ad :

$$\text{ad} = (d\text{Ad})_e : T_e G \rightarrow \text{End}(T_e G) \quad (27)$$

Questa è una mappa lineare. Per due vettori tangenti $X, Y \in T_e G$, definiamo il **bracket di Lie** come:

$$[X, Y] := \text{ad}(X)(Y) \quad (28)$$

La condizione che ρ rispetti la struttura di gruppo si traduce, a livello di algebra, nel fatto che $d\rho$ rispetti l'azione aggiunta infinitesimale. Differenziando la relazione (26), otteniamo che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} T_e G & \xrightarrow{d\rho} & T_e H \\ \text{ad}(v) \downarrow & & \downarrow \text{ad}(d\rho(v)) \\ T_e G & \xrightarrow{d\rho} & T_e H \end{array}$$

Formalmente, per ogni coppia di vettori tangenti $X, Y \in T_e G$:

$$d\rho([X, Y]) = [d\rho(X), d\rho(Y)] \quad (29)$$

Sebbene la definizione tramite ad sia astratta, essa coincide con il commutatore di matrici nel caso dei gruppi lineari. Sia $G = GL_n(\mathbb{R})$. In questo caso $T_e G \cong M_n(\mathbb{R})$. L'azione aggiunta è il coniugio di matrici: $\text{Ad}(g)(M) = gMg^{-1}$. Siano $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$. Sia $\gamma(t)$ una curva in G tale che $\gamma(0) = I$ e $\gamma'(0) = X$. Allora:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \text{ad}(X)(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Ad}(\gamma(t))(Y)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\gamma(t)Y\gamma(t)^{-1}) \end{aligned}$$

Applicando la regola di Leibniz e ricordando che $\frac{d}{dt}(\gamma^{-1}) = -\gamma^{-1}\dot{\gamma}\gamma^{-1}$ (che in $t = 0$ vale $-X$), otteniamo:

$$\begin{aligned} &= \gamma'(0)Y\gamma(0)^{-1} + \gamma(0)Y(-\gamma'(0)\gamma(0)^{-1}) \\ &= X \cdot Y \cdot I + I \cdot Y \cdot (-I \cdot X \cdot I) \\ &= XY - YX \end{aligned}$$

Questo giustifica la notazione a parentesi e dimostra che il bracket misura la non commutatività infinitesimale.

9.2.3 Definizione Formale e Secondo Principio

Il bracket soddisfa due proprietà fondamentali derivanti dalla sua natura di commutatore (o dalla definizione tramite ad):

1. **Antisimmetria:** $[X, Y] = -[Y, X]$.
2. **Identità di Jacobi:** $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Siamo ora pronti per dare la definizione generale.

Definizione (Algebra di Lie)

Un'algebra di Lie \mathfrak{g} è uno spazio vettoriale dotato di una mappa bilineare antisimmetrica $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ che soddisfa l'identità di Jacobi.

Infine, formuliamo il risultato che risponde alla domanda iniziale sull'esistenza degli omomorfismi.

Teorema (Secondo Principio)

Siano G e H gruppi di Lie, con G connesso e semplicemente connesso. Esiste una corrispondenza biunivoca tra gli omomorfismi di gruppi di Lie $\rho : G \rightarrow H$ e gli omomorfismi di algebre di Lie $d\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$. Specificamente, ogni mappa lineare $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ che preserva il bracket (cioè $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$) è il differenziale di un unico omomorfismo di gruppi ρ .

Osservazione

È importante notare che non definiamo il bracket come $XY - YX$ in generale, perché il prodotto XY non è definito in un'algebra di Lie astratta. Il prodotto è definito solo quando l'algebra è immersa in un'algebra di endomorfismi $\text{End}(V)$ (o $\mathfrak{gl}(V)$). Tuttavia, il commutatore $XY - YX$ è sempre un elemento dell'algebra di Lie indipendentemente dall'immersione scelta.

9.3 La Mappa Esponenziale

Lo strumento fondamentale per stabilire il collegamento tra la struttura globale di un gruppo di Lie G e la struttura locale della sua algebra di Lie \mathfrak{g} è la mappa esponenziale.

Sia $X \in \mathfrak{g} \cong T_e G$ un vettore tangente all'identità. Dalla teoria delle equazioni differenziali ordinarie sulle varietà, sappiamo che esiste un unico campo vettoriale sinistro-invariante v_X su G tale che $(v_X)_e = X$. Le curve integrali di questo campo vettoriale che passano per l'identità hanno una struttura molto specifica.

Definizione (Sottogruppo a un parametro)

Un **sottogruppo a un parametro** di G è un omomorfismo di gruppi di Lie $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G$. Ovvero, una curva differenziabile tale che:

$$\varphi(s + t) = \varphi(s)\varphi(t) \quad \forall s, t \in \mathbb{R} \quad (30)$$

Per ogni $X \in \mathfrak{g}$, esiste un unico sottogruppo a un parametro $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ tale che il suo vettore tangente all'origine sia X , ossia $\varphi'_X(0) = X$.

Definizione (Mappa Esponenziale)

La mappa esponenziale $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ è definita ponendo:

$$\exp(X) := \varphi_X(1) \quad (31)$$

Grazie alla proprietà di omomorfismo, si ha che $\varphi_X(t) = \exp(tX)$.

9.3.1 Proprietà Fondamentali

La mappa esponenziale è un diffeomorfismo locale da un intorno dello zero in \mathfrak{g} a un intorno dell'identità in G . Inoltre, essa è *naturale*, nel senso che commuta con gli omomorfismi di gruppi di Lie.

Proposizione (Naturalità di exp)

Sia $\psi : G \rightarrow H$ un omomorfismo di gruppi di Lie e sia $d\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ il suo differenziale all'identità. Il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g} & \xrightarrow{d\psi} & \mathfrak{h} \\ \exp_G \downarrow & & \downarrow \exp_H \\ G & \xrightarrow{\psi} & H \end{array}$$

Ovvero, $\psi(\exp_G(X)) = \exp_H(d\psi(X))$ per ogni $X \in \mathfrak{g}$.

Nel caso specifico in cui $G = GL_n(\mathbb{K})$ (e quindi $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{K})$ è l'algebra delle matrici $n \times n$), la mappa esponenziale coincide con la classica esponenziale di matrice definita dalla serie di potenze:

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} = I + X + \frac{X^2}{2} + \dots \quad (32)$$

Questa serie converge per ogni matrice X .

9.3.2 La Formula di Campbell-Hausdorff

Poiché \exp è un diffeomorfismo locale, possiamo definire localmente la sua inversa, il logaritmo ($\log : G \rightarrow \mathfrak{g}$). Questo ci permette di trasportare l'operazione di moltiplicazione del gruppo G nello spazio vettoriale \mathfrak{g} . Siano $X, Y \in \mathfrak{g}$ sufficientemente vicini all'origine. Definiamo l'operazione:

$$X * Y := \log(\exp(X) \cdot \exp(Y)) \quad (33)$$

La domanda cruciale è: come si esprime $X * Y$ in termini di operazioni in \mathfrak{g} ? Se G è commutativo, $e^X e^Y = e^{X+Y}$, quindi $X * Y = X + Y$. Nel caso non commutativo, la formula di Campbell-Hausdorff asserisce che $X * Y$ può essere espresso interamente in termini di X, Y e del loro bracket $[X, Y]$ (e bracket annidati), senza mai usare il prodotto di matrici XY isolatamente.

Espandendo in serie (per $G \subset GL_n$):

$$\begin{aligned} \exp(X) \exp(Y) &= \left(I + X + \frac{X^2}{2} + \dots \right) \left(I + Y + \frac{Y^2}{2} + \dots \right) \\ &= I + (X + Y) + \left(\frac{X^2}{2} + XY + \frac{Y^2}{2} \right) + \dots \end{aligned}$$

Utilizzando l'espansione di $\log(A) = (A - I) - (A - I)^2/2 + \dots$, si ottiene l'approssimazione ai primi ordini:

$$X * Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] + [Y, [Y, X]]) + \dots \quad (34)$$

Questo risultato è di enorme importanza teorica: dimostra che la struttura del gruppo (la moltiplicazione) in un intorno dell'identità è interamente determinata dalla struttura dell'algebra di Lie (il bracket).

9.3.3 Sottoalgebre e Sottogruppi

La corrispondenza tra G e \mathfrak{g} si estende ai sottostrutture.

Proposizione (Corrispondenza Sottogruppi-Sottoalgebre)

Sia G un gruppo di Lie e \mathfrak{g} la sua algebra.

1. Se $H \subset G$ è un sottogruppo di Lie, allora la sua algebra tangente $\mathfrak{h} = T_e H$ è una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} (ovvero è chiusa rispetto al bracket).
2. Viceversa, sia $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ una sottoalgebra di Lie. Allora esiste un unico sottogruppo di Lie connesso immerso $H \subset G$ tale che $T_e H = \mathfrak{h}$. Il sottogruppo H è generato dall'immagine $\exp(\mathfrak{h})$.

Questo risultato completa la giustificazione del **Secondo Principio** introdotto precedentemente: un omomorfismo di algebre di Lie $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ (che ha come grafico una sottoalgebra di $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$) si integra a un omomorfismo di gruppi $G \rightarrow H$ (se G è semplicemente connesso).

Idea della dimostrazione. La condizione necessaria (chiusura rispetto al bracket) deriva dalla naturalità del bracket. Per la condizione sufficiente, nel caso $G = GL_n$, si usa la formula di Campbell-Hausdorff: se $X, Y \in \mathfrak{h}$, allora X, Y e tutti i loro bracket stanno in \mathfrak{h} . La formula mostra che $\exp(X)\exp(Y) = \exp(Z)$ dove Z è una serie di Lie in X, Y , quindi $Z \in \mathfrak{h}$ (poiché \mathfrak{h} è chiusa). Pertanto, il prodotto di esponenziali rimane nell'immagine esponenziale di \mathfrak{h} , definendo una struttura di sottogruppo. \square

9.4 Teoremi di Lie

Per la seguente trattazione, sia G un gruppo di Lie con algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(G) = T_e G$, e sia H un gruppo di Lie con algebra $\mathfrak{h} = \mathcal{L}(H) = T_e H$. Tutte le algebre di Lie sono assunte essere a dimensione finita sul campo \mathbb{R} .

Teorema (Primo Teorema di Lie)

Ad ogni gruppo di Lie G è associata un'unica (a meno di isomorfismi) algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(G)$, data dallo spazio tangente all'identità $T_e G$ e dotata della parentesi di Lie.

Inoltre, ogni omomorfismo di gruppi di Lie $\Phi : G \rightarrow H$ induce canonicamente un unico omomorfismo di algebre di Lie $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$, definito come il differenziale di Φ all'identità:

$$\phi = d\Phi_e : T_e G \rightarrow T_e H$$

Tale mappa ϕ preserva la parentesi di Lie, ovvero:

$$\phi([X, Y]_{\mathfrak{g}}) = [\phi(X), \phi(Y)]_{\mathfrak{h}} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

Questo stabilisce che $\mathcal{L} : (\text{Gruppi di Lie}) \rightarrow (\text{Algebre di Lie})$ è un **funtore covariante**.

Teorema (Secondo Teorema di Lie)

Siano G e H due gruppi di Lie con algebre $\mathfrak{g} = \mathcal{L}(G)$ e $\mathfrak{h} = \mathcal{L}(H)$. Sia $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ un omomorfismo di algebre di Lie.

Se il gruppo di Lie G è **connesso e semplicemente connesso**, allora esiste un **unico** omomorfismo di gruppi di Lie $\Phi : G \rightarrow H$ tale che il suo differenziale all'identità sia ϕ :

$$d\Phi_e = \phi$$

Osservazione

La condizione che G sia semplicemente connesso è cruciale. Ad esempio, si considerino $G_1 = U(1) \cong SO(2)$ e $G_2 = \mathbb{R}$. Le loro algebre di Lie sono entrambe isomorfe all'algebra Abelliana 1-dimensionale $\mathfrak{u}(1) \cong \mathfrak{so}(2) \cong \mathbb{R}$. L'omomorfismo identità $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è un isomorfismo di algebre. Tuttavia, G_1 non è semplicemente connesso, mentre G_2 lo è. L'omomorfismo $\Phi : G_2 \rightarrow G_1$ dato da $t \mapsto e^{it}$ ha $d\Phi_e = \phi$, ma non esiste alcun omomorfismo (non banale) $\Psi : G_1 \rightarrow G_2$ che induca ϕ .

Teorema (Terzo Teorema di Lie)

Per ogni algebra di Lie \mathfrak{g} reale e a dimensione finita, esiste un **unico** (a meno di isomorfismi) gruppo di Lie G **connesso e semplicemente connesso** tale che la sua algebra di Lie $\mathcal{L}(G)$ sia isomorfa a \mathfrak{g} :

$$\mathcal{L}(G) \cong \mathfrak{g}$$

Definizione (Gruppo di Lie Universale)

Il gruppo G connesso e semplicemente connesso menzionato nel Terzo Teorema di Lie è spesso chiamato il **rivestimento universale** (o gruppo di Lie universale) associato all'algebra \mathfrak{g} .

Corollario (Equivalenza delle Categorie)

I teoremi di Lie, presi insieme, stabiliscono un'**equivalenza di categorie** tra:

1. La categoria delle **algebre di Lie reali a dimensione finita** (i cui morfismi sono gli omomorfismi di algebre di Lie).
2. La categoria dei **gruppi di Lie connessi e semplicemente connessi** (i cui morfismi sono gli omomorfismi di gruppi di Lie).

Il funtore $\mathcal{L} : G \mapsto \mathfrak{g}$ fornisce tale equivalenza.

Corollario (Corrispondenza Sottogruppi-Sottoalgebre)

Sia G un gruppo di Lie con algebra \mathfrak{g} . Esiste una corrispondenza biunivoca tra le **sottoalgebre di Lie** $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ e i **sottogruppi di Lie connessi** $H \subseteq G$.

- Se H è un sottogruppo di Lie connesso di G , $\mathcal{L}(H)$ è una sottoalgebra di \mathfrak{g} .
- Viceversa, per ogni sottoalgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$, esiste un unico sottogruppo di Lie connesso H di G tale che $\mathcal{L}(H) = \mathfrak{h}$.

Inoltre, H è un sottogruppo normale (invariante) connesso di G se e solo se \mathfrak{h} è un ideale di \mathfrak{g} .

Proposizione (Gruppi e Algebre Abeliane)

Un gruppo di Lie G è **Abeliano** (commutativo) se e solo se la sua algebra di Lie \mathfrak{g} è **Abeliana**, ovvero se tutte le parentesi di Lie sono nulle:

$$[X, Y] = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

9.5 $SO(2)$

Il gruppo $SO(2)$ è il **gruppo ortogonale speciale** in due dimensioni. È definito come l'insieme di tutte le matrici $R \ 2 \times 2$ a coefficienti reali che soddisfano due condizioni:

1. **Ortogonalità:** $R^T R = I$ (dove I è la matrice identità).
2. **Specialità:** $\det(R) = 1$.

Queste matrici rappresentano le **rotazioni nel piano euclideo** attorno all'origine. Una generica matrice in $SO(2)$ può essere parametrizzata da un singolo angolo φ :

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

L'operazione di gruppo è la moltiplicazione di matrici, che corrisponde alla somma degli angoli: $R(\varphi_1)R(\varphi_2) = R(\varphi_1 + \varphi_2)$. Questo dimostra che $SO(2)$ è un gruppo *Abeliano* (commutativo).

Come menzionato negli appunti, $SO(2)$ è un **gruppo compatto**. Per i gruppi compatti continui, la media sul gruppo (usata per i gruppi finiti, $\frac{1}{|G|} \sum_g$) è generalizzata da un integrale sul parametro del gruppo. Per $SO(2)$, il parametro è l'angolo φ che varia nell'intervallo finito $[0, 2\pi]$, quindi la media del gruppo diventa:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi}$$

Poiché $SO(2)$ è Abeliano, tutte le sue rappresentazioni irriducibili (irreps) devono essere **1-dimensionali**. Cerchiamo quindi funzioni complesse (matrici 1×1) $D(\varphi)$ tali che:

1. Rispettino la legge di composizione: $D(\varphi_1)D(\varphi_2) = D(\varphi_1 + \varphi_2)$.
2. Siano periodiche (univoche): $D(\varphi + 2\pi) = D(\varphi)$.

L'unica funzione che soddisfa la prima condizione è l'esponenziale. La seconda condizione (periodicità) impone che l'esponente sia un multiplo intero di $i\varphi$.

Le irreps di $SO(2)$ sono quindi indicizzate da un numero intero $m \in \mathbb{Z}$:

$$D^{(m)}(\varphi) = e^{im\varphi}$$

Per le rappresentazioni 1-dimensionali, il **carattere** $\chi^{(m)}(\varphi)$ è semplicemente la rappresentazione stessa (essendo la traccia di una matrice 1×1):

$$\chi^{(m)}(\varphi) = e^{im\varphi}$$

Questi caratteri formano una base ortonormale rispetto all'operazione di media sul gruppo (l'integrale). Come mostrato nell'equazione (6.4) del testo, la relazione di ortonormalità è:

$$\langle \chi^{(m)}, \chi^{(m')} \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} (\chi^{(m)}(\varphi))^* \chi^{(m')}(\varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-im\varphi} e^{im'\varphi} = \delta_{mm'}$$

(Nota: L'equazione (6.4) nel testo, $\int e^{im\varphi} e^{-im'\varphi} d\varphi / 2\pi = \delta_{mm'}$, è $\langle \chi^{(m')}, \chi^{(m)} \rangle$, che è equivalente).

9.5.1 Decomposizione della Rappresentazione Fondamentale

Seguiamo ora gli appunti per decomporre la "rappresentazione di definizione" (defining representation) 2-dimensionale, ovvero le matrici $R(\varphi)$ stesse.

La rappresentazione è $R(\varphi)$. Il suo carattere $\chi_R(\varphi)$ è la traccia della matrice:

$$\chi_R(\varphi) = \text{Tr} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \cos \varphi + \cos \varphi = 2 \cos \varphi$$

Vogliamo decomporre questa rappresentazione R in una somma diretta di irreps: $R = \bigoplus_m a_m D^{(m)}$. I coefficienti a_m si trovano usando l'ortogonalità dei caratteri:

$$a_m = \langle \chi^{(m)}, \chi_R \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} (\chi^{(m)}(\varphi))^* \chi_R(\varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{-im\varphi} (2 \cos \varphi)$$

Usando la formula di Eulero per il coseno, $2 \cos \varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})$, calcoliamo l'integrale (come mostrato nel testo, sebbene il testo ometta il coniugato nel prodotto interno, il risultato è identico poiché $2 \cos \varphi$ è reale):

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) d\varphi$$

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(e^{i(1-m)\varphi} + e^{i(-1-m)\varphi} \right) d\varphi$$

L'integrale $\int_0^{2\pi} e^{ik\varphi} d\varphi$ è 2π se $k = 0$ ed è 0 altrimenti.

- Il primo termine $e^{i(1-m)\varphi}$ è non nullo solo se $1 - m = 0$, cioè $m = 1$.
- Il secondo termine $e^{i(-1-m)\varphi}$ è non nullo solo se $-1 - m = 0$, cioè $m = -1$.

Quindi, i coefficienti sono $a_m = \delta_{m,1} + \delta_{m,-1}$.

Questo significa che $a_1 = 1$, $a_{-1} = 1$ e tutti gli altri a_m sono zero. La decomposizione della rappresentazione 2D è:

$$R = D^{(1)} \oplus D^{(-1)}$$

9.5.2 Serie di Clebsch-Gordan

Infine, come nota il testo (Eq. 6.5), la decomposizione del prodotto di due irreps (serie di Clebsch-Gordan) è molto semplice. Il carattere del prodotto $D^{(m)} \otimes D^{(m')}$ è il prodotto dei caratteri:

$$\chi^{(m)}(\varphi) \cdot \chi^{(m')}(\varphi) = (e^{im\varphi})(e^{im'\varphi}) = e^{i(m+m')\varphi}$$

Questo è esattamente il carattere dell'irrep $D^{(m+m')}$. Pertanto:

$$D^{(m)} \otimes D^{(m')} = D^{(m+m')}$$

9.6 L'Algebra di Lie $\mathfrak{so}(2)$

L'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2)$ associata al gruppo di Lie $G = SO(2)$ è definita come lo spazio tangente al gruppo nell'elemento identità ($T_e G$).

Metodo 1: Derivazione della curva

Possiamo trovare la base dell'algebra di Lie calcolando la derivata della curva parametrizzata $R(\theta)$ rispetto al parametro θ e valutandola all'identità (che corrisponde a $\theta = 0$). L'elemento T così trovato è il **generatore infinitesimo** della rotazione.

$$T = \left. \frac{dR(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0}$$

Calcoliamo la derivata:

$$\frac{dR(\theta)}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix}$$

Valutando in $\theta = 0$:

$$T = \begin{pmatrix} -\sin(0) & -\cos(0) \\ \cos(0) & -\sin(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Metodo 2: Condizione formale sull'algebra

Alternativamente, consideriamo una curva $R(t) \in SO(2)$ tale che $R(0) = \mathbf{1}$. L'elemento $X = R'(0)$ appartiene all'algebra di Lie $\mathfrak{so}(2)$. La condizione $R(t)^T R(t) = \mathbf{1}$ per ogni t , derivata rispetto a t e valutata in $t = 0$, fornisce la condizione per gli elementi dell'algebra.

$$\frac{d}{dt}(R(t)^T R(t)) = R'(t)^T R(t) + R(t)^T R'(t) = 0$$

Per $t = 0$:

$$R'(0)^T R(0) + R(0)^T R'(0) = 0 \implies X^T \mathbf{1} + \mathbf{1} X = 0 \implies X^T + X = 0$$

L'algebra di Lie $\mathfrak{so}(2)$ è quindi l'insieme delle matrici 2×2 reali **antisimmetriche**.

$$\mathfrak{so}(2) = \{X \in M(2, \mathbb{R}) \mid X^T = -X\}$$

Una generica matrice reale 2×2 antisimmetrica ha la forma:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{per } a \in \mathbb{R}$$

Proposizione

L'algebra di Lie $\mathfrak{so}(2)$ è uno spazio vettoriale reale di dimensione 1. Una base per $\mathfrak{so}(2)$ è data dal generatore:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione (Mappa Esponenziale)

Il gruppo di Lie $SO(2)$ può essere recuperato dall'algebra $\mathfrak{so}(2)$ tramite la mappa esponenziale: $R(\theta) = \exp(\theta T)$. Verifichiamo notando che $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{1}$. Usando lo sviluppo in serie di Taylor:

$$\begin{aligned} \exp(\theta T) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\theta T)^n}{n!} = \mathbf{1} + \theta T + \frac{\theta^2 T^2}{2!} + \frac{\theta^3 T^3}{3!} + \dots \\ &= \mathbf{1} + \theta T - \frac{\theta^2 \mathbf{1}}{2!} - \frac{\theta^3 T}{3!} + \frac{\theta^4 \mathbf{1}}{4!} + \dots \\ &= \mathbf{1} \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \right) + T \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \mathbf{1} \cos \theta + T \sin \theta \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta \\ \sin \theta & 0 \end{pmatrix} = R(\theta) \end{aligned}$$

Questo conferma che T è il corretto generatore infinitesimo.

In fisica matematica, in particolare in meccanica quantistica, i generatori delle simmetrie (come le rotazioni) sono richiesti essere operatori **Hermitiani**, poiché rappresentano osservabili fisiche (in questo caso, il momento angolare).

Il nostro generatore $T \in \mathfrak{so}(2)$ è reale e antisimmetrico ($T^T = -T$). Questo implica che è **anti-Hermitiano** (o skew-Hermitian):

$$T^\dagger = (T^T)^* = (-T)^* = -T \quad (\text{poiché } T \text{ è reale})$$

La convenzione fisica per una trasformazione unitaria $U(\theta)$ (e le matrici $R(\theta) \in SO(2)$ sono unitarie, $R^\dagger R = R^T R = \mathbb{1}$) è di esprimerla in termini di un generatore Hermitiano J :

$$U(\theta) = \exp(-i\theta J)$$

Nel nostro caso, $SO(2)$ rappresenta le rotazioni nel piano xy , che avvengono *attorno* all'asse z . Il generatore fisico corrispondente è quindi J_z , la componente z del momento angolare.

Per trovare J_z , confrontiamo le due forme della mappa esponenziale:

$$R(\theta) = \exp(\theta T) \quad (\text{convenzione matematica})$$

$$R(\theta) = \exp(-i\theta J_z) \quad (\text{convenzione fisica})$$

Eguagliando gli esponenti (o le loro derivate in $\theta = 0$), otteniamo la relazione tra il generatore dell'algebra di Lie T e il generatore fisico J_z :

$$\theta T = -i\theta J_z \implies T = -iJ_z$$

Risolvendo per J_z :

$$J_z = iT$$

Sostituendo il valore di T che abbiamo trovato:

$$J_z = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Osservazione

Verifichiamo che questo J_z sia Hermitiano, come richiesto:

$$J_z^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 0^* & i^* \\ (-i)^* & 0^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = J_z$$

L'operatore J_z è effettivamente Hermitiano. È interessante notare che, in questa rappresentazione 2×2 (detta *fondamentale* o *definitoria* per $SO(2)$), il generatore del momento angolare J_z coincide con la matrice di Pauli σ_y :

$$J_z = \sigma_y$$

Sebbene la notazione possa confondere, il nome J_z è corretto in quanto esso genera le rotazioni attorno all'asse z .

9.7 Il Gruppo $SO(3)$ e l'Algebra di Lie $\mathfrak{so}(3)$

Procediamo con lo stesso rigore formale per il gruppo delle rotazioni tridimensionali $SO(3)$.

Definizione (Gruppo Ortogonale Speciale $SO(3)$)

Il gruppo $SO(3)$ è il gruppo delle matrici R reali 3×3 che sono **ortogonali** ($R^T R = \mathbb{1}$) e **speciali** ($\det(R) = +1$).

$$SO(3) = \{R \in M(3, \mathbb{R}) \mid R^T R = \mathbb{1}, \det(R) = 1\}$$

Questo gruppo rappresenta le rotazioni proprie nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 . È un gruppo di Lie reale, compatto, connesso, non Abeliano e di dimensione 3.

L'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$ è lo spazio tangente all'identità. Come derivato per $SO(2)$, la condizione $R^T R = \mathbb{1}$ per una curva $R(t)$ con $R(0) = \mathbb{1}$ implica $X^T + X = 0$ per $X = R'(0) \in \mathfrak{so}(3)$.

Proposizione

L'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3)$ è l'insieme delle matrici 3×3 reali e **antisimmetriche**.

$$\mathfrak{so}(3) = \{X \in M(3, \mathbb{R}) \mid X^T = -X\}$$

9.7.1 Generatori Infinitesimi di $\mathfrak{so}(3)$

Essendo uno spazio vettoriale reale di matrici antisimmetriche 3×3 , $\mathfrak{so}(3)$ ha dimensione 3. Una generica matrice $X \in \mathfrak{so}(3)$ ha la forma:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Possiamo decomporre X in una base di generatori. Una scelta standard, motivata dalle rotazioni attorno agli assi cartesiani, è la seguente:

$$T_1 = T_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Generatore rotazione attorno asse } x)$$

$$T_2 = T_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Generatore rotazione attorno asse } y)$$

$$T_3 = T_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Generatore rotazione attorno asse } z)$$

Cosicché $X = aT_1 + bT_2 + cT_3$. Questi tre generatori T_1, T_2, T_3 formano una base per l'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3)$.

Osservazione

Questi generatori T_i sono anti-Hermitiani ($T_i^\dagger = T_i^T = -T_i$). Una rotazione finita $R_k(\theta)$ attorno all'asse k è data dalla mappa esponenziale $R_k(\theta) = \exp(\theta T_k)$.

Struttura dell'Algebra $\mathfrak{so}(3)$: Relazioni di Commutazione

L'algebra di Lie \mathfrak{g} non è definita solo come spazio vettoriale, ma è dotata del **Lie bracket** (la parentesi di Lie), che per le algebre di matrici è il commutatore: $[A, B] = AB - BA$. Calcoliamo le relazioni di commutazione tra i generatori della nostra base.

- $[T_1, T_2] = T_1T_2 - T_2T_1$

$$T_1T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T_1, T_2] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T_3$$

- $[T_2, T_3] = T_2T_3 - T_3T_2$

$$T_2T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_3T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T_2, T_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = T_1$$

- $[T_3, T_1] = T_3T_1 - T_1T_3$

$$T_3T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_1T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T_3, T_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T_2$$

Teorema (Algebra $\mathfrak{so}(3)$)

L'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3)$ è generata da T_1, T_2, T_3 con le seguenti relazioni di commutazione, che ne definiscono la struttura:

$$[T_i, T_j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} T_k$$

dove ϵ_{ijk} è il tensore (simbolo) di Levi-Civita, definito come:

- $\epsilon_{123} = +1$ e sue permutazioni cicliche ($[T_1, T_2] = T_3$).
- $\epsilon_{213} = -1$ e sue permutazioni anti-cicliche ($[T_2, T_1] = -T_3$).
- $\epsilon_{ijk} = 0$ se due indici sono uguali ($[T_i, T_i] = 0$).

Il fatto che i commutatori non siano nulli ($[T_i, T_j] \neq 0$) riflette il fatto che $SO(3)$ è un gruppo **non Abelian**.

9.7.2 I Generatori Fisici (Momento Angolare)

Come nel caso di $SO(2)$, la convenzione fisica richiede generatori Hermitiani J_i (le componenti dell'operatore momento angolare) tali che la trasformazione unitaria (la rotazione) sia $R(\vec{\theta}) = \exp(-i\vec{\theta} \cdot \vec{J})$. La relazione tra i generatori matematici T_i (anti-Hermitiani) e quelli fisici J_i (Hermitiani) è:

$$R_k(\theta) = \exp(\theta T_k) = \exp(-i\theta J_k) \implies T_k = -iJ_k \quad \text{o} \quad J_k = iT_k$$

I generatori fisici (nella rappresentazione 3×3 , detta "aggiunta" o "vettoriale") sono:

$$J_1 = iT_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_2 = iT_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_3 = iT_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si verifica immediatamente che $J_k^\dagger = J_k$, sono matrici Hermitiane.

Calcoliamo le relazioni di commutazione per questi generatori fisici:

$$[J_i, J_j] = [iT_i, iT_j] = (i)^2 [T_i, T_j] = -[T_i, T_j]$$

Usando il risultato $[T_i, T_j] = \epsilon_{ijk} T_k$:

$$[J_i, J_j] = -(\epsilon_{ijk} T_k) = -\epsilon_{ijk} \left(\frac{J_k}{i} \right) = -\epsilon_{ijk} (-iJ_k)$$

Corollario (Algebra del Momento Angolare)

I generatori Hermitiani J_1, J_2, J_3 soddisfano le relazioni di commutazione canoniche del momento angolare:

$$[J_i, J_j] = i \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} J_k$$

Esplicitamente:

$$[J_1, J_2] = iJ_3 \quad [J_2, J_3] = iJ_1 \quad [J_3, J_1] = iJ_2$$

Questa è la ben nota struttura algebrica che governa il momento angolare in meccanica quantistica. L'algebra di Lie $\mathfrak{so}(3)$ è (isomorfa a) $\mathfrak{su}(2)$.

10 Teorema di addizione dei momenti angolari

Consideriamo due sistemi indipendenti, descritti da spazi di Hilbert $\mathcal{H}_1 = V_{j_1}$ e $\mathcal{H}_2 = V_{j_2}$, con generatori \vec{J}_1 e \vec{J}_2 che agiscono rispettivamente su \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 . Lo spazio totale è il prodotto tensoriale $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = V_{j_1} \otimes V_{j_2}$. La dimensione di questo spazio è $\dim(\mathcal{H}) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$.

Una base naturale per \mathcal{H} è la **base disaccoppiata (o non accoppiata)**, formata dai prodotti tensoriali dei vettori di base dei singoli spazi:

$$\{|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle\} \equiv \{|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle\}$$

Questa base è un'autobase simultanea dei quattro operatori mutuamente commutanti: $J_1^2, J_{1,3}, J_2^2, J_{2,3}$.

Definiamo ora i generatori del momento angolare **totale** \vec{J} come operatori su \mathcal{H} :

$$J_i = J_{1,i} \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes J_{2,i} \quad (\text{spesso scritto come } J_i = J_{1,i} + J_{2,i})$$

dove $\mathbb{1}_k$ è l'identità su \mathcal{H}_k .

Proposizione (Chiusura Algebrica)

I generatori del momento angolare totale J_i soddisfano la stessa algebra di Lie $\mathfrak{so}(3)$:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$$

Dimostrazione. Calcoliamo il commutatore:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= [J_{1,i} + J_{2,i}, J_{1,j} + J_{2,j}] \\ &= [J_{1,i}, J_{1,j}] + [J_{1,i}, J_{2,j}] + [J_{2,i}, J_{1,j}] + [J_{2,i}, J_{2,j}] \end{aligned}$$

Poiché J_1 e J_2 agiscono su sottospazi diversi (sono operatori indipendenti), i loro commutatori misti sono nulli: $[J_{1,i}, J_{2,j}] = 0$ e $[J_{2,i}, J_{1,j}] = 0$.

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= (i\epsilon_{ijk} J_{1,k}) + 0 + 0 + (i\epsilon_{ijk} J_{2,k}) \\ &= i\epsilon_{ijk} (J_{1,k} + J_{2,k}) \\ &= i\epsilon_{ijk} J_k \end{aligned}$$

□

Teorema (Decomposizione di Clebsch-Gordan)

Poiché i generatori totali \vec{J} formano un'algebra $\mathfrak{so}(3)$, la rappresentazione prodotto $D_{j_1} \otimes D_{j_2}$ agente su \mathcal{H} deve essere (in generale) una rappresentazione riducibile. Per il Teorema di Weyl (sulla completa riducibilità delle rappresentazioni di algebre di Lie semi-semplifici), essa si decompone in una somma diretta di rappresentazioni irriducibili D_J :

$$D_{j_1} \otimes D_{j_2} = \bigoplus_J D_J$$

Il teorema di addizione consiste nel determinare quali valori di J appaiono in questa somma.

La decomposizione implica che deve esistere una nuova base per \mathcal{H} , la **base accoppiata**, che diagonalizza simultaneamente gli operatori $J^2 = (\vec{J}_1 + \vec{J}_2)^2$ e $J_3 = J_{1,3} + J_{2,3}$ (oltre a J_1^2 e J_2^2 , che commutano con tutto). Indichiamo questa base con $|(j_1, j_2)J, M\rangle$ o, più brevemente, $|J, M\rangle$ (sottintendendo j_1, j_2).

Per trovare i valori permessi di J , analizziamo gli autovalori di J_3 . Nella base disaccoppiata:

$$J_3|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = (J_{1,3} + J_{2,3})|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = (m_1 + m_2)|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$$

Nella base accoppiata:

$$J_3|J, M\rangle = M|J, M\rangle$$

Affinché le basi siano equivalenti, gli autovalori di J_3 devono essere gli stessi. Quindi, $M = m_1 + m_2$.

1. **Valore Massimo di J :** Il massimo autovalore M possibile è $M_{\max} = (m_1)_{\max} + (m_2)_{\max} = j_1 + j_2$. Questo autovalore è **unico** (non degenere), poiché esiste un solo stato nella base disaccoppiata che lo realizza: $|j_1, j_1; j_2, j_2\rangle$. Questo stato, essendo l'unico con $M = j_1 + j_2$, deve anche essere uno stato della base accoppiata. Poiché M_{\max} può solo corrispondere a J_{\max} , ne consegue che $J_{\max} = j_1 + j_2$.

$$|J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2\rangle = |j_1, j_1; j_2, j_2\rangle$$

Questo stato identifica la presenza della rappresentazione irriducibile $V_{j_1+j_2}$ nella decomposizione.

2. **Valori Successivi:** Consideriamo l'autovalore $M = j_1 + j_2 - 1$. Questo autospazio ha dimensione 2, poiché può essere ottenuto in due modi:

$$|j_1, j_1 - 1; j_2, j_2\rangle \quad \text{e} \quad |j_1, j_1; j_2, j_2 - 1\rangle$$

Una di queste due dimensioni è "occupata" dallo stato $|J = j_1 + j_2, M = j_1 + j_2 - 1\rangle$, ottenuto applicando l'operatore di abbassamento J_- allo stato J_{\max} . L'altro stato (ortogonale al primo) deve essere il "vertice" di una nuova rappresentazione irriducibile. Poiché il suo M è $j_1 + j_2 - 1$, questo deve essere un $J = j_1 + j_2 - 1$. Questo identifica la presenza della irrep $V_{j_1+j_2-1}$.

3. **Generalizzazione:** Questo processo (noto come "conteggio degli stati") continua. La degenerazione $N(M)$ dello spazio con autovalore M aumenta man mano che M diminuisce, e poi diminuisce di nuovo. Ad ogni passo, il numero di nuove rappresentazioni irriducibili V_J che "iniziano" (cioè, con $J = M$) è dato da $N(M) - N(M + 1)$ (assumendo $j_1 \leq j_2$). Il processo si ferma quando si esauriscono tutte le dimensioni. Il valore minimo di J si ottiene quando si considerano tutti gli stati. Il risultato è che J assume tutti i valori:

$$J = j_1 + j_2, \quad j_1 + j_2 - 1, \quad \dots, \quad |j_1 - j_2|$$

Teorema (Addizione dei Momenti Angolari)

La decomposizione (detta serie di Clebsch-Gordan) della rappresentazione prodotto tensoriale è:

$$V_{j_1} \otimes V_{j_2} = \bigoplus_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} V_J$$

La cosiddetta "regola del triangolo" $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$ è la condizione algebrica per la decomposizione.

Osservazione (Verifica delle Dimensioni)

La coerenza algebrica è confermata dal conteggio delle dimensioni:

$$\sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (2J+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)$$

Questa è un'identità algebrica nota.

Avendo stabilito l'esistenza di due basi complete e ortonormali per \mathcal{H} , la trasformazione unitaria che le collega è la "dimostrazione" costruttiva del teorema.

Definizione (Coefficienti di Clebsch-Gordan)

I coefficienti di Clebsch-Gordan (CG) sono gli elementi della matrice di trasformazione unitaria tra la base disaccoppiata e quella accoppiata. Sono definiti come i prodotti interni tra i vettori delle due basi:

$$\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M \rangle \equiv C(j_1, j_2, J; m_1, m_2, M)$$

Questi coefficienti sono, per convenzione (di Condon-Shortley), scelti essere reali.

La trasformazione di base è quindi:

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M\rangle$$

E la sua inversa:

$$|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = \sum_{J=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} |J, M\rangle \langle J, M | j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$$

Proposizione (Regole di Selezione)

I coefficienti di Clebsch-Gordan sono identicamente nulli a meno che non siano soddisfatte le seguenti condizioni algebriche:

1. $M = m_1 + m_2$ (conservazione della proiezione z del momento angolare)
2. $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$ (regola del triangolo)

La prima regola deriva, come visto, dall'azione di J_3 . La seconda regola è il risultato della decomposizione algebrica che abbiamo appena dimostrato.

Il teorema di addizione dei momenti angolari è la conseguenza algebrica diretta del fatto che i generatori totali $J_i = J_{1,i} + J_{2,i}$, agenti sullo spazio prodotto tensoriale $V_{j_1} \otimes V_{j_2}$, obbediscono essi stessi all'algebra $\mathfrak{so}(3)$. Questo impone che lo spazio prodotto, visto come rappresentazione di $\mathfrak{so}(3)$, debba decomporre in una somma diretta di blocchi irriducibili V_J . I coefficienti di Clebsch-Gordan sono i coefficienti numerici che realizzano esplicitamente questa decomposizione.

10.1 Il Teorema di Weyl

Il Teorema di Weyl stabilisce una proprietà fondamentale per le algebre di Lie che più ci interessano in fisica, come $\mathfrak{so}(3)$ e $\mathfrak{su}(n)$.

Definizione (Ideale di un'Algebra di Lie)

Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie. Un sottospazio vettoriale $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ è un **ideale** di \mathfrak{g} se è "assorbente" rispetto alla parentesi di Lie. Formalmente, se per ogni $X \in \mathfrak{h}$ e per ogni $Y \in \mathfrak{g}$:

$$[X, Y] \in \mathfrak{h}$$

(Data l'antisimmetria della parentesi, $[Y, X] = -[X, Y]$, la condizione è automaticamente soddisfatta anche per $[Y, X] \in \mathfrak{h}$). Se è abeliano $[X, Y] = 0 \forall X, Y$

Definizione (Algebra di Lie Semi-Semplice)

Un'algebra di Lie \mathfrak{g} è **semi-semplice** se non possiede ideali Abeliani non banali. Informalmente, non ha "sottostrutture banali". Le algebre $\mathfrak{so}(3)$ (isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$) e $\mathfrak{so}(n), \mathfrak{su}(n), \mathfrak{sp}(n)$ per n opportuni, sono tutte semi-semplici.

Teorema (Teorema di Weyl)

Ogni rappresentazione finito-dimensionale di un'algebra di Lie **semi-semplice** (su un campo di caratteristica 0, come \mathbb{R} o \mathbb{C}) è **completamente riducibile**.

Questo teorema è una pietra miliare. Ci assicura che per algebre come $\mathfrak{so}(3)$, le rappresentazioni irriducibili (le "irrep", V_j) sono i mattoni fondamentali con cui *tutte* le altre rappresentazioni finito-dimensionali possono essere costruite tramite somme dirette.

10.2 Dimostrazione per Gruppi Compatti (come $SO(3)$)

Per i gruppi di Lie **compatti** (come $SO(3)$ e $SU(2)$), il teorema di Weyl può essere dimostrato in modo elegante utilizzando il concetto di unitarietà.

Lemma (Unitarietà delle Rappresentazioni)

Ogni rappresentazione $D(g)$ di un gruppo di Lie compatto G su uno spazio di Hilbert V è equivalente a una rappresentazione **unitaria**.

Idea della dimostrazione: Si può sempre definire un nuovo prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ su V "mediando" il prodotto scalare originale $(\cdot, \cdot)_V$ sull'intero gruppo (usando l'integrale di Haar, $\mu(g)$):

$$\langle v, w \rangle_G = \int_G (D(g)v, D(g)w)_V d\mu(g)$$

Si dimostra che la rappresentazione $D(g)$ è unitaria rispetto a questo nuovo prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$.

Proposizione

Ogni rappresentazione unitaria (finito-dimensionale) è completamente riducibile.

Dimostrazione. Sia D una rappresentazione unitaria su V , e sia $W \subseteq V$ un sottospazio invariante. Dobbiamo dimostrare che anche il suo complemento ortogonale W^\perp è un sottospazio invariante. Sia $v \in W^\perp$ (cioè $\langle v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in W$). Dobbiamo mostrare che $D(X)v \in W^\perp$ (per l'algebra \mathfrak{g}) o $D(g)v \in W^\perp$ (per il gruppo G). Consideriamo il gruppo G . Sia $g \in G$ e $w \in W$:

$$\langle D(g)v, w \rangle = \langle v, D(g)^\dagger w \rangle$$

Poiché D è unitaria, $D(g)^\dagger = D(g)^{-1} = D(g^{-1})$.

$$\langle D(g)v, w \rangle = \langle v, D(g^{-1})w \rangle$$

Dato che W è invariante, $w' = D(g^{-1})w$ è anch'esso un elemento di W .

$$\langle D(g)v, w \rangle = \langle v, w' \rangle \quad \text{con } w' \in W$$

Ma $v \in W^\perp$, quindi $\langle v, w' \rangle = 0$. Dunque $\langle D(g)v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in W$. Questo significa che $D(g)v$ è ortogonale a W , ovvero $D(g)v \in W^\perp$. Quindi W^\perp è un sottospazio invariante. Avendo $V = W \oplus W^\perp$, la rappresentazione è completamente riducibile. \square

Corollario (Teorema di Weyl per $SO(3)$)

*Poiché $SO(3)$ (e il suo gruppo di copertura $SU(2)$) è un gruppo di Lie compatto, ogni sua rappresentazione finito-dimensionale è equivalente a una rappresentazione unitaria. Per la proposizione precedente, ogni rappresentazione unitaria è completamente riducibile. Ne consegue che **ogni rappresentazione finito-dimensionale di $SO(3)$ e della sua algebra $\mathfrak{so}(3)$ è completamente riducibile.***

11 Operatore Tensoriale

In meccanica quantistica, un operatore non è semplicemente un oggetto matematico, ma deve avere proprietà di trasformazione ben definite rispetto alle simmetrie del sistema. Nel caso della simmetria rotazionale $SO(3)$, la definizione formale di un operatore tensoriale si basa sulle sue relazioni di commutazione con i generatori dell'algebra $\mathfrak{so}(3)$, $\vec{J} = (J_1, J_2, J_3)$.

Definizione (Operatore Tensoriale Irriducibile (Sferico))

*Un insieme di $2k + 1$ operatori $\{T_q^{(k)}\}$, con k intero o semi-intero e $q = -k, -k + 1, \dots, +k$, è chiamato **operatore tensoriale irriducibile** (o sferico) di rango k se soddisfa le seguenti relazioni di commutazione con i generatori del momento angolare \vec{J} :*

$$\begin{aligned} [J_3, T_q^{(k)}] &= q T_q^{(k)} \\ [J_\pm, T_q^{(k)}] &= \sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)} T_{q \pm 1}^{(k)} \end{aligned}$$

dove $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$ sono gli operatori di salita e discesa.

Osservazione

Queste relazioni di commutazione sono la versione infinitesimale (algebrica) della definizione a livello di gruppo (globale), $RU(\vec{\theta})T_q^{(k)}U(\vec{\theta})^\dagger = \sum_{q'} T_{q'}^{(k)} D_{q'q}^{(k)}(\vec{\theta})$, dove $D^{(k)}$ è la matrice di Wigner. La definizione algebrica significa, in termini di teoria delle rappresentazioni, che l'operatore $T_q^{(k)}$ si trasforma sotto l'azione aggiunta del gruppo $SO(3)$ (o $SU(2)$) esattamente come lo stato (ket) $|k, q\rangle$.

Esempio (Operatore Scalare, $k = 0$)

Un operatore di rango $k = 0$ ha solo un componente, $T_0^{(0)}$. Le relazioni di commutazione diventano:

$$[J_3, T_0^{(0)}] = 0 \quad e \quad [J_{\pm}, T_0^{(0)}] = 0$$

Questo implica $[J_i, T_0^{(0)}] = 0$ per $i = 1, 2, 3$. Un operatore scalare è un operatore che commuta con tutti i generatori delle rotazioni, ed è quindi un **invariante rotazionale** (ad esempio, l'operatore J^2 stesso, o l'Hamiltoniana di un sistema con simmetria sferica).

Esempio (Operatore Vettoriale, $k = 1$)

Un operatore di rango $k = 1$ (operatore vettoriale) ha tre componenti, $T_q^{(1)}$ con $q = -1, 0, 1$. Un qualsiasi operatore vettoriale $\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$, come la posizione \vec{R} o l'impulso \vec{P} o \vec{J} stesso, soddisfa le relazioni $[J_i, V_j] = i\epsilon_{ijk}V_k$. Le componenti sferiche $T_q^{(1)}$ sono definite in termini delle componenti cartesiane \vec{V} come:

$$T_0^{(1)} = V_z$$

$$T_{\pm 1}^{(1)} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(V_x \pm iV_y)$$

Si può verificare (con un calcolo diretto) che queste componenti $T_q^{(1)}$ soddisfano le relazioni di commutazione della Definizione. Ad esempio:

$$[J_3, T_{\pm 1}^{(1)}] = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}([J_3, V_x] \pm i[J_3, V_y]) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(iV_y \pm i(-iV_x)) = \pm T_{\pm 1}^{(1)}$$

che è $qT_q^{(k)}$ con $q = \pm 1$ e $k = 1$.

11.1 Il Teorema di Wigner-Eckart

Il problema centrale è calcolare gli elementi di matrice di un operatore tensoriale tra autostati del momento angolare, $\langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle$. Qui j, m sono i numeri quantici del momento angolare e α rappresenta tutti gli altri numeri quantici (es. energia, spin, etc.) che commutano con \vec{J} .

Il Teorema di Wigner-Eckart è un risultato fondamentale della teoria delle rappresentazioni che "separa" la geometria del sistema (legata alle rotazioni e ai numeri quantici m, q, m') dalla dinamica specifica (contenuta nell'operatore T e negli stati j, α).

Teorema (Wigner-Eckart)

L'elemento di matrice di un operatore tensoriale irriducibile $T_q^{(k)}$ tra autostati del momento angolare è dato da:

$$\langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle = \langle j, m; k, q | j', m' \rangle \frac{\langle \alpha', j' | T^{(k)} | \alpha, j \rangle}{\sqrt{2j' + 1}}$$

Dove:

1. $\langle j, m; k, q | j', m' \rangle$ è un **coefficiente di Clebsch-Gordan** (CG). Esso contiene tutta la dipendenza "geometrica" dai numeri quantici m, q, m' .
2. $\langle \alpha', j' | T^{(k)} | \alpha, j \rangle$ è l'**elemento di matrice ridotto**. È una costante di proporzionalità che non dipende da m, q, m' , ma solo dai numeri quantici "fisici" $\alpha, \alpha', j, j', k$ e dalla natura dell'operatore T .
3. Il fattore $1/\sqrt{2j' + 1}$ è una convenzione di normalizzazione (altre convenzioni esistono).

La dimostrazione si basa sull'applicazione delle relazioni di commutazione dell'algebra $\mathfrak{so}(3)$.

1. **Azione di J_3 :** Consideriamo l'elemento di matrice $\langle \alpha', j', m' | [J_3, T_q^{(k)}] | \alpha, j, m \rangle$. Usando la definizione dell'operatore tensoriale, questo è $\langle \alpha', j', m' | (qT_q^{(k)}) | \alpha, j, m \rangle$. Espandendo il commutatore:

$$\langle \alpha', j', m' | (J_3 T_q^{(k)} - T_q^{(k)} J_3) | \alpha, j, m \rangle = (m' - m) \langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle$$

Eguagliando i due risultati:

$$(m' - m) \langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle = q \langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle$$

$$(m' - m - q) \langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle = 0$$

Questo dimostra che l'elemento di matrice è nullo a meno che $m' = m + q$. Questa è la prima regola di selezione imposta dal coefficiente di Clebsch-Gordan $\langle j, m; k, q | j', m' \rangle$.

2. **Azione di J_{\pm} :** Consideriamo ora $\langle \alpha', j', m' | [J_{\pm}, T_q^{(k)}] | \alpha, j, m \rangle$. Dalla definizione (LHS):

$$\sqrt{k(k+1) - q(q \pm 1)} \langle \alpha', j', m' | T_{q \pm 1}^{(k)} | \alpha, j, m \rangle$$

Espandendo il commutatore e usando $J_{\pm}^{\dagger} = J_{\mp}$ (RHS):

$$\begin{aligned} & \langle \alpha', j', m' | (J_{\pm} T_q^{(k)} - T_q^{(k)} J_{\pm}) | \alpha, j, m \rangle = \\ & \sqrt{j'(j' + 1) - m'(m' \mp 1)} \langle \alpha', j', m' \mp 1 | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle \\ & - \sqrt{j(j + 1) - m(m \pm 1)} \langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \pm 1 \rangle \end{aligned}$$

Eguagliando LHS e RHS si ottiene una **relazione di ricorsione** che collega l'elemento di matrice per (m, q, m') a quelli per $(m \pm 1, q, m')$ e $(m, q \pm 1, m')$.

3. **Conclusione (Lemma di Schur):** Questa relazione di ricorsione è *identica*, a meno di un fattore di proporzionalità, alla relazione di ricorsione soddisfatta dai coefficienti di Clebsch-Gordan $\langle j, m; k, q | j', m' \rangle$ (che si ottiene dall'applicazione di J_{\pm} allo stato $|j', m'\rangle$ nella base accoppiata). Poiché le relazioni di ricorsione sono identiche, i due insiemi di numeri (gli elementi di matrice e i coefficienti CG) devono essere proporzionali.

$$\langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle \propto \langle j, m; k, q | j', m' \rangle$$

Il fattore di proporzionalità, per costruzione, non può dipendere da m, q, m' (poiché la ricorsione li coinvolge tutti) e viene *definito* come l'elemento di matrice ridotto (normalizzato).

Corollario (Regole di Selezione)

Il Teorema di Wigner-Eckart implica potenti regole di selezione. L'elemento di matrice $\langle \alpha', j', m' | T_q^{(k)} | \alpha, j, m \rangle$ è **nullo** a meno che entrambe le seguenti condizioni (derivate dal coefficiente CG) non siano soddisfatte:

1. $m' = m + q$
2. $|j - k| \leq j' \leq j + k$ (Regola del triangolo)

Questo semplifica enormemente il calcolo degli elementi di matrice in sistemi con simmetria sferica. Ad esempio, per una transizione di dipolo elettrico (un operatore vettoriale, $k = 1$), lo stato finale j' può essere solo $j - 1, j$ o $j + 1$ (con $j = 0 \rightarrow j = 0$ proibito).

12 Struttura di $SU(N)$ e Costruzione delle Irreps

Sebbene le definizioni di $U(N)$ e $SU(N)$ siano date, è fondamentale analizzarne le proprietà strutturali per comprendere la costruzione delle loro rappresentazioni. Ci concentreremo sulla connessione tra il gruppo (matrici U) e la sua algebra (generatori T), e su come i Diagrammi di Young emergano naturalmente da questa struttura.

12.1 Generatori Hermitiani e Prodotto Scalare

La fisica del gruppo $SU(N)$ è interamente contenuta nel modo in cui esso agisce sullo spazio vettoriale \mathbb{C}^N .

Definizione (Preservazione del Prodotto Hermitiano)

Il gruppo unitario $U(N)$ è, per definizione, il gruppo di trasformazioni lineari U che preserva il prodotto hermitiano (o prodotto scalare) $\langle v, w \rangle = v^{\dagger} w$. Per due vettori v', w' trasformati da U , richiediamo:

$$\langle v', w' \rangle = \langle Uv, Uw \rangle = (Uv)^{\dagger} (Uw) = v^{\dagger} U^{\dagger} U w = v^{\dagger} w = \langle v, w \rangle$$

Questa condizione è soddisfatta se e solo se $U^{\dagger} U = \mathbb{I}$.

Teorema (Proprietà dei Generatori di $SU(N)$)

L'algebra di Lie $\mathfrak{su}(N)$ è lo spazio vettoriale reale dei **generatori infinitesimali** del gruppo. In fisica, si parametrizza una trasformazione U vicina all'identità (\mathbb{I}) come:

$$U(\delta\alpha) \approx \mathbb{I} + i \sum_a \delta\alpha_a T_a$$

dove $\delta\alpha_a$ sono parametri reali infinitesimali e T_a sono i generatori. Le due condizioni che definiscono $SU(N)$ impongono due vincoli sui generatori T_a :

1. **Unitarietà** ($U^\dagger U = \mathbb{I}$): Sostituendo l'espansione infinitesimale:

$$(\mathbb{I} + i\delta\alpha_a T_a)^\dagger (\mathbb{I} + i\delta\alpha_a T_a) = (\mathbb{I} - i\delta\alpha_a T_a^\dagger) (\mathbb{I} + i\delta\alpha_a T_a) \approx \mathbb{I} + i\delta\alpha_a (T_a - T_a^\dagger) = \mathbb{I}$$

Per far sì che questo valga per $\delta\alpha_a$ arbitrari, dobbiamo avere $T_a = T_a^\dagger$. I generatori T_a devono essere **matrici Hermitiane**.

2. **Determinante Speciale** ($\det(U) = 1$): Utilizzando la formula di Jacobi, $\det(e^A) = e^{\text{Tr}(A)}$, una trasformazione finita $U = \exp(i\alpha_a T_a)$ deve soddisfare:

$$\det(U) = \det(\exp(i\alpha_a T_a)) = \exp(\text{Tr}(i\alpha_a T_a)) = 1$$

Questo implica $\text{Tr}(i\alpha_a T_a) = 0$. Poiché i parametri α_a sono arbitrari e reali, i generatori devono essere **a traccia nulla**: $\text{Tr}(T_a) = 0$.

Corollario (Algebra $\mathfrak{su}(N)$ e $\mathfrak{su}(3)$)

L'algebra $\mathfrak{su}(N)$ è l'insieme delle matrici $N \times N$ Hermitiane e a traccia nulla. Una matrice $N \times N$ complessa ha $2N^2$ parametri reali. L'Hermiticità ($A = A^\dagger$) impone N^2 vincoli (gli elementi diagonali devono essere reali, $a_{ii} = a_{ii}^*$, e gli elementi fuori diagonale sono legati, $a_{ij} = a_{ji}^*$). Questo lascia N^2 parametri reali. La condizione di traccia nulla, $\text{Tr}(T) = 0$, impone un ulteriore vincolo reale (poiché T_{ii} sono reali). La dimensione di $\mathfrak{su}(N)$ è quindi $\dim(SU(N)) = N^2 - 1$.

Per $SU(3)$, la dimensione è $3^2 - 1 = 8$. I generatori $T_a = \lambda_a/2$ (con $a = 1, \dots, 8$) sono costruiti a partire dalle 8 matrici di Gell-Mann λ_a .

12.2 Costruzione Formale dei Diagrammi di Young

Per comprendere la costruzione delle rappresentazioni di $SU(N)$, lo strumento fondamentale è il Diagramma di Young. Esso fornisce un metodo grafico per classificare le proprietà di simmetria dei tensori, che a loro volta etichettano le rappresentazioni irriducibili (irreps).

12.2.1 Notazione e Semantica dei Diagrammi

Definizione (Partizione e Diagramma di Young)

Un **Diagramma di Young** (o Young Shape) λ è una rappresentazione grafica di una **partizione** di un intero k . Una partizione λ di k è una sequenza di interi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ tali che:

1. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m > 0$ (le lunghezze delle righe sono non-crescenti).
2. $\sum_{i=1}^m \lambda_i = k$ (il numero totale di scatole è k).

Il diagramma λ è costruito con m righe, dove la riga i -esima contiene λ_i scatole.

Osservazione (Semantica Tensoriale: Cosa Rappresentano le Scatole)

Il legame con la fisica dei tensori è il seguente:

- k è il **rango del tensore**, ovvero il numero di indici in un prodotto tensoriale $V^{\otimes k} = V \otimes \dots \otimes V$.
- Ogni **scatola** nel diagramma corrisponde a uno degli k indici del tensore.
- La **posizione** della scatola (riga e colonna) definisce la simmetria richiesta per quel tensore.

La regola fondamentale è:

- Gli indici che si trovano nelle scatole della **stessa riga** devono essere **simmetrici** tra loro.

- Gli indici che si trovano nelle scatole della **stessa colonna** devono essere **antisimmetrici** tra loro.

Per $k = 3$, la partizione $\lambda = (2, 1)$ (l'ottetto in $SU(3)$) corrisponde a un tensore $T^{i_1 i_2 i_3}$ con indici $1, 2, 3$ (per esempio). Il diagramma

1	2
3	

impone $T^{123} = +T^{213}$ (simmetria sulla riga 1) e $T^{123} = -T^{321}$ (antisimmetria sulla colonna 1).

12.2.2 Proprietà e Utilizzo (da S_k a $SU(N)$)

Il legame formale tra diagrammi e simmetria è dato dal *Simmetrizzatore di Young*.

Definizione (Tableau e Simmetrizzatore di Young)

Un **Young Tableau** (plurale: Tableaux) è un Diagramma di Young λ le cui k scatole sono state riempite con i numeri $\{1, 2, \dots, k\}$, che etichettano le posizioni degli indici.

Sia T un tableau di forma λ . Definiamo:

- $P(T)$: L'insieme delle permutazioni p che scambiano solo indici all'interno delle **righe** di T .
- $Q(T)$: L'insieme delle permutazioni q che scambiano solo indici all'interno delle **colonne** di T .

Definiamo l'operatore di simmetrizzazione (di riga) $S = \sum_{p \in P(T)} p$ e l'operatore di antisimmetrizzazione (di colonna) $A = \sum_{q \in Q(T)} \text{sgn}(q) \cdot q$.

Il **Simmetrizzatore di Young** è l'operatore (proiettore non normalizzato) $Y_\lambda = A \cdot S$. Applicato a un tensore generico $T \in V^{\otimes k}$, l'operatore Y_λ proietta T sulla componente irriducibile con la simmetria λ .

Teorema (Dualità di Schur-Weyl (Conseguenza))

I Diagrammi di Young λ con k scatole classificano simultaneamente:

1. Le rappresentazioni irriducibili (irreps) del gruppo simmetrico S_k .
2. Le rappresentazioni irriducibili (irreps) di $GL(N)$ (e quindi $SU(N)$) che appaiono nello spazio tensoriale $V^{\otimes k}$.

Questo significa che per decomporre $V^{\otimes k}$ (con $V = \mathbb{C}^N$) sotto $SU(N)$, è sufficiente trovare tutte le partizioni λ di k .

Teorema (Vincolo Fondamentale di $SU(N)$)

L'uso dei diagrammi per $SU(N)$ (rispetto a $GL(N)$) introduce un vincolo cruciale. Consideriamo un diagramma λ che consiste in una singola colonna di N scatole, $\lambda = (1, 1, \dots, 1)$. Questo corrisponde a un tensore $T^{[i_1 i_2 \dots i_N]}$ totalmente antisimmetrico in N indici. In \mathbb{C}^N , l'unico tensore (a meno di un fattore di scala) con questa proprietà è il tensore di Levi-Civita $\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_N}$. Poiché $\det(U) = 1$ per ogni $U \in SU(N)$, il tensore ϵ è un **invariante** (un singoletto, **1**).

$$U_{j_1}^{i_1} \dots U_{j_N}^{i_N} \epsilon^{j_1 \dots j_N} = \det(U) \epsilon^{i_1 \dots i_N} = \epsilon^{i_1 \dots i_N}$$

Regola di Utilizzo: Qualsiasi colonna completa di N scatole in un diagramma di Young corrisponde a un singoletto e può essere "rimossa" (o ignorata) dal diagramma.

$$\begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline \vdots \\ \hline \cdot \\ \hline \end{array} \quad (N \text{ scatole}) \quad \cong \quad \mathbf{1} \text{ (Singoletto)}$$

Di conseguenza, tutte le irreps non banali di $SU(N)$ sono classificate da diagrammi di Young con al più $N - 1$ righe.

13 Regole di Decomposizione (Littlewood-Richardson)

Quando si calcola un prodotto tensoriale di due rappresentazioni irriducibili (irreps), $D_\lambda \otimes D_\mu$, il risultato è generalmente riducibile. Le regole di Littlewood-Richardson forniscono un algoritmo combinatorio preciso per determinare quali irreps D_ν appaiono nella decomposizione e con quale molteplicità (il coefficiente di Littlewood-Richardson $C_{\lambda\mu}^\nu$):

$$D_\lambda \otimes D_\mu = \bigoplus_{\nu} C_{\lambda\mu}^\nu D_\nu$$

13.1 Algoritmo di Littlewood-Richardson

Formalizziamo le regole presentate nell'immagine, utilizzando T_1 per il diagramma λ e T_2 per μ .

Teorema (Algoritmo di Littlewood-Richardson)

Siano T_1 e T_2 due diagrammi di Young. La decomposizione del loro prodotto si ottiene tramite i seguenti passi:

- (a) Si etichettino le scatole del diagramma T_2 . Tutte le scatole nella riga 1 ricevono l'etichetta 'a'. Tutte le scatole nella riga 2 ricevono l'etichetta 'b', e così via.

$$T_1 \otimes \begin{array}{|c|c|c|} \hline a & a & a \\ \hline b & & \\ \hline \end{array}$$

- (b) Si aggiungano le scatole etichettate di T_2 al diagramma T_1 , una alla volta, in un ordine specifico (prima tutte le 'a', poi tutte le 'b', etc.). Per le scatole con la stessa etichetta (es. 'a'), l'ordine di aggiunta deve rispettare la regola (b.2), solitamente procedendo da destra a sinistra.

Il processo di aggiunta deve obbedire alle seguenti regole ad ogni passo:

- (1) **Forma Valida:** Ogni diagramma intermedio e finale T'_1 (ottenuto aggiungendo una scatola) deve essere un diagramma di Young valido (righe non-crescenti).
- (2) **Non-Ripetizione in Colonna:** Due scatole con la stessa etichetta (es. due 'a') non possono mai trovarsi nella stessa colonna del diagramma finale.
- (3) **Parola di Lattice Valida:** Dopo che tutte le scatole sono state aggiunte, il tableau risultante deve essere valido (o "semi-standard"). Questo si verifica leggendo le etichette delle scatole aggiunte secondo una sequenza (es. per righe, da destra a sinistra, dall'alto in basso). La sequenza di etichette w (la "parola") deve essere una **Parola di Lattice** (o Parola di Yamanouchi).

Definizione (Parola di Lattice)

Una parola w è una Parola di Lattice se, leggendola da sinistra a destra, qualsiasi suo prefisso w_k contiene un numero di 'a' maggiore o uguale al numero di 'b', che è maggiore o uguale al numero di 'c', etc.

$$n_a(w_k) \geq n_b(w_k) \geq n_c(w_k) \geq \dots \quad \forall k$$

(Nota: La regola (b.3) nel Jones è una descrizione non standard e potenzialmente ambigua di questa condizione fondamentale).

- (c) Il coefficiente $C_{\lambda\mu}^\nu$ è il **numero totale di tableaux finali validi** (che soddisfano tutte le regole (b)) che hanno la forma (shape) ν .
- (d) **Vincolo $SU(N)$:** Dopo aver ottenuto tutti i diagrammi ν finali, si applica il vincolo di $SU(N)$. Qualsiasi diagramma che contiene una colonna di N scatole è equivalente a un diagramma identico con quella colonna rimossa (poiché tale colonna è un singoletto **1**).

13.2 Fondamenti della Regola di Littlewood-Richardson e Dualità di Schur-Weyl

La potenza computazionale dei diagrammi di Young e la validità dell'algoritmo di Littlewood-Richardson non sono meri artifici combinatori, ma conseguenze dirette della struttura profonda che lega le rappresentazioni del gruppo lineare generale $GL(V)$ a quelle del gruppo simmetrico S_k . Questa connessione è codificata nel celebre teorema della dualità di Schur-Weyl.

In questa sezione dimostriamo che la decomposizione del prodotto tensoriale di due rappresentazioni irriducibili di $GL(V)$ è equivalentemente descritta dalla decomposizione di una rappresentazione indotta nel gruppo simmetrico. I diagrammi di Young, indicizzando le partizioni λ , fungono da ponte naturale tra questi due mondi.

Definizione (Moduli di Weyl e Moduli di Specht)

Sia V uno spazio vettoriale complesso di dimensione d . Per ogni partizione λ di un intero k (denotato $\lambda \vdash k$):

- Indichiamo con V_λ la rappresentazione irriducibile di $GL(V)$ associata a λ (detta modulo di Weyl o funtore di Schur), non nulla se l'altezza del diagramma di Young è $\ell(\lambda) \leq d$.
- Indichiamo con S_λ la rappresentazione irriducibile del gruppo simmetrico S_k associata a λ (detta modulo di Specht).

La regola di Littlewood-Richardson è l'algoritmo che calcola i coefficienti $c_{\lambda\mu}^\nu$ che appaiono nella decomposizione:

$$V_\lambda \otimes V_\mu \cong \bigoplus_{\nu} c_{\lambda\mu}^\nu V_\nu \quad (35)$$

dove $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash m$ e $\nu \vdash (n+m)$.

Definizione (Rappresentazione Indotta e Ristretta)

Sia G un gruppo finito e $H \subset G$ un suo sottogruppo.

- Data una rappresentazione W di G , la **restrizione** $\text{Res}_H^G(W)$ è lo spazio W visto come rappresentazione di H .
- Data una rappresentazione U di H , la **rappresentazione indotta** $\text{Ind}_H^G(U)$ è lo spazio vettoriale $\mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}[H]} U$. Intuitivamente, essa costruisce una rappresentazione di G "estendendo" U .

Osservazione (Sul prodotto tensoriale su $\mathbb{K}H$)

La notazione $\mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}[H]} U$ indica il prodotto tensoriale di moduli sull'anello $\mathbb{K}[H]$. Esso è il quoziente dello spazio vettoriale $\mathbb{K}[G] \otimes_{\mathbb{K}} U$ rispetto alle relazioni $gh \otimes u - g \otimes hu = 0$ per ogni $g \in G, h \in H, u \in U$. Questa costruzione permette di estendere l'azione di H su U a un'azione di G , permutando le copie di U indicizzate dalle classi laterali G/H .

Il legame tra queste due operazioni è sancito dal seguente lemma fondamentale, che useremo per "spostare" il problema dal sottogruppo prodotto $S_n \times S_m$ al gruppo totale S_{n+m} .

Lemma (Reciprocità di Frobenius)

Siano U una rappresentazione di H e W una rappresentazione di G . Esiste un isomorfismo naturale tra gli spazi degli omomorfismi (intertwining operators):

$$\text{Hom}_G(\text{Ind}_H^G(U), W) \cong \text{Hom}_H(U, \text{Res}_H^G(W)) \quad (36)$$

In termini di caratteri e molteplicità, indicando con $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ il prodotto scalare tra caratteri di G :

$$\langle \chi_{\text{Ind}(U)}, \chi_W \rangle_G = \langle \chi_U, \chi_{\text{Res}(W)} \rangle_H \quad (37)$$

Questo significa che la molteplicità di W nell'indotto di U è uguale alla molteplicità di U nella restrizione di W .

Ora enunciamo il teorema ponte tra $GL(V)$ e S_k .

Teorema (Dualità di Schur-Weyl)

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione d . L'azione naturale di $GL(V)$ e l'azione di permutazione di S_k sullo spazio tensoriale $V^{\otimes k}$ commutano e generano le rispettive algebre commutanti (Teorema del Doppio Commutante). Di conseguenza, lo spazio si decompone come modulo per $GL(V) \times S_k$ in:

$$V^{\otimes k} \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash k \\ \ell(\lambda) \leq d}} V_\lambda \otimes S_\lambda \quad (38)$$

dove:

- V_λ è la rappresentazione irriducibile di $GL(V)$ (Modulo di Weyl).
- S_λ è la rappresentazione irriducibile di S_k (Modulo di Specht).

Una conseguenza cruciale è la corrispondenza delle molteplicità: qualsiasi sottospazio isotipico di $V^{\otimes k}$ rispetto a $GL(V)$ è della forma $V_\lambda \otimes M_\lambda$, dove M_λ deve essere isomorfo a S_λ come S_k -modulo.

La ragione per cui manipoliamo "scatole" e diagrammi per calcolare i coefficienti $c_{\lambda\mu}^\nu$ risiede nella seguente proposizione, che trasferisce il problema dal dominio continuo di $GL(V)$ a quello discreto di S_k .

Proposizione

I coefficienti di Littlewood-Richardson $c_{\lambda\mu}^\nu$ che governano il prodotto tensoriale di rappresentazioni di $GL(V)$ sono identici ai coefficienti di molteplicità della rappresentazione indotta del gruppo simmetrico. Nello specifico:

$$\text{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} (S_\lambda \otimes S_\mu) \cong \bigoplus_{\nu} c_{\lambda\mu}^\nu S_\nu \quad (39)$$

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio tensoriale $V^{\otimes(n+m)}$. Possiamo vederlo come il prodotto tensoriale di due spazi distinti $V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m}$. Applichiamo la dualità di Schur-Weyl separatamente ai due fattori. Abbiamo l'isomorfismo come modulo per $(GL(V) \times S_n) \times (GL(V) \times S_m)$:

$$V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m} \cong \left(\bigoplus_{\lambda \vdash n} V_\lambda \otimes S_\lambda \right) \otimes \left(\bigoplus_{\mu \vdash m} V_\mu \otimes S_\mu \right) \quad (40)$$

Riordinando i termini del prodotto tensoriale, possiamo raggruppare le parti relative a $GL(V)$ e quelle relative ai gruppi simmetrici. Notiamo che l'azione di $GL(V)$ è diagonale su $V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m}$.

$$V^{\otimes(n+m)} \cong \bigoplus_{\lambda, \mu} (V_\lambda \otimes V_\mu) \otimes (S_\lambda \otimes S_\mu) \quad (41)$$

In questa espressione, $S_\lambda \otimes S_\mu$ è una rappresentazione irriducibile del sottogruppo $S_n \times S_m \subset S_{n+m}$.

D'altra parte, applicando la dualità di Schur-Weyl direttamente allo spazio totale $V^{\otimes(n+m)}$ rispetto al gruppo $GL(V) \times S_{n+m}$, otteniamo:

$$V^{\otimes(n+m)} \cong \bigoplus_{\nu \vdash (n+m)} V_\nu \otimes S_\nu \quad (42)$$

Per confrontare la (41) con la (42), dobbiamo restringere l'azione di S_{n+m} al sottogruppo $S_n \times S_m$ nella (42), oppure considerare la struttura di $GL(V)$ -modulo. Concentriamoci sulla decomposizione del prodotto tensoriale di $GL(V)$ definita in (35). Sostituendo $V_\lambda \otimes V_\mu = \bigoplus_{\nu} c_{\lambda\mu}^\nu V_\nu$ nella (41):

$$V^{\otimes(n+m)} \cong \bigoplus_{\lambda, \mu} \left(\bigoplus_{\nu} c_{\lambda\mu}^\nu V_\nu \right) \otimes (S_\lambda \otimes S_\mu) \quad (43)$$

Raccogliendo i termini rispetto ai moduli V_ν irriducibili di $GL(V)$:

$$V^{\otimes(n+m)} \cong \bigoplus_{\nu} V_\nu \otimes \left(\bigoplus_{\lambda, \mu} c_{\lambda\mu}^\nu (S_\lambda \otimes S_\mu) \right) \quad (44)$$

Per il teorema del doppio commutante (una proprietà chiave della dualità di Schur-Weyl), la molteplicità dello spazio V_ν nella decomposizione deve corrispondere esattamente allo spazio S_ν nella (42). Tuttavia, nella (44), lo spazio accoppiato a V_ν è $\bigoplus_{\lambda,\mu} c_{\lambda\mu}^\nu (S_\lambda \otimes S_\mu)$ visto come rappresentazione di $S_n \times S_m$.

Per la reciprocità di Frobenius, la molteplicità di una rappresentazione irriducibile S_ν (di S_{n+m}) contenuta in una rappresentazione indotta da $S_\lambda \otimes S_\mu$ è uguale alla molteplicità di $S_\lambda \otimes S_\mu$ nella restrizione di S_ν a $S_n \times S_m$. Confrontando le strutture, si deduce che lo spazio S_ν in (42) si decompone rispetto a $S_n \times S_m$ con le stesse molteplicità $c_{\lambda\mu}^\nu$. Inversamente, l'indotto $\text{Ind}_{S_n \times S_m}^{S_{n+m}} (S_\lambda \otimes S_\mu)$ si decompone in irriducibili S_ν con molteplicità $c_{\lambda\mu}^\nu$.

Pertanto, i diagrammi di Young funzionano perché forniscono una combinatoria (tramite il riempimento di tableau e la condizione di parola di lattice) che enumera esattamente queste molteplicità nello spazio delle rappresentazioni del gruppo simmetrico, le quali, per dualità, corrispondono ai coefficienti del prodotto tensoriale in $GL(V)$. \square

13.3 Esempio: $SU(3) \implies \mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}}$

Esempio

Vogliamo decomporre il prodotto quark-antiquark in $SU(3)$, con $N = 3$.

$$\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{3}} = ?$$

(a) Identificazione dei Tableau

- $T_1 = \mathbf{3}$, che è $\lambda = (1)$. $T_1 = \square$.
- $T_2 = \bar{\mathbf{3}}$. Per $SU(3)$, questa è l'irrep coniugata, rappresentata dalla colonna $N - 1 = 2$. $\lambda = (1, 1)$.
- Etichettiamo T_2 :

$$T_2 = \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array}$$

(b) Processo di Aggiunta Dobbiamo aggiungere prima 'a' e poi 'b' a $T_1 = \square$.

Passo 1: Aggiungere 'a' a \square

- Percorso 1.1: $\begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & a \\ \hline \end{array}$ (Forma $\lambda = (2)$)
- Percorso 1.2: $\begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline a \\ \hline \end{array}$ (Forma $\lambda = (1, 1)$)

Passo 2: Aggiungere 'b' ai risultati

- Dal Percorso 1.1:
 - (A) $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & a & b \\ \hline \end{array}$ (Forma $\lambda = (3)$)
 - (B) $\begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & a \\ \hline b & \end{array}$ (Forma $\lambda = (2, 1)$)
- Dal Percorso 1.2:
 - (C) $\begin{array}{|c|c|} \hline \cdot & b \\ \hline a & \end{array}$ (Forma $\lambda = (2, 1)$)
 - (D) $\begin{array}{|c|} \hline \cdot \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array}$ (Forma $\lambda = (1, 1, 1)$)

Passo 3: Verifica della Parola di Lattice Controlliamo la validità di (A), (B), (C), (D) usando la Parola di Lattice (letta per righe, $R \rightarrow L$, $T \rightarrow B$). Dobbiamo controllare $n_a(w_k) \geq n_b(w_k)$.

- **Tableau (A):** Parola = (b, a, \dots) . Il prefisso $w_1 = 'b'$ ha $n_a = 0, n_b = 1$. La regola $n_a \geq n_b$ fallisce ($0 \not\geq 1$). \implies **ILLEGALE**.
- **Tableau (B):** Parola = (a, \cdot, b) . $w_1 = 'a' \implies n_a = 1, n_b = 0$. (OK) $w_2 = 'a, \cdot' \implies n_a = 1, n_b = 0$. (OK) $w_3 = 'a, \cdot, b' \implies n_a = 1, n_b = 1$. (OK: $1 \geq 1$) \implies **VALIDO**.

- **Tableau (C):** Parola = (b, \cdot, a) . Il prefisso $w_1 = 'b'$ ha $n_a = 0, n_b = 1$. La regola $n_a \geq n_b$ fallisce ($0 \not\geq 1$). \implies **ILLEGALE**.
- **Tableau (D):** Parola = (\cdot, a, b) . $w_1 = '\cdot'$ $\implies n_a = 0, n_b = 0$. (OK) $w_2 = '\cdot, a'$ $\implies n_a = 1, n_b = 0$. (OK) $w_3 = '\cdot, a, b'$ $\implies n_a = 1, n_b = 1$. (OK: $1 \geq 1$) \implies **VALIDO**.

(c) **Conteggio dei Risultati** Abbiamo prodotto due tableaux finali validi:

1. Il Tableau (B), con forma $\nu_1 = (2, 1)$.
2. Il Tableau (D), con forma $\nu_2 = (1, 1, 1)$.

La decomposizione è quindi $D_{(2,1)} \oplus D_{(1,1,1)}$.

(d) **Applicazione del Vincolo $SU(3)$** Siamo in $SU(N = 3)$.

- $\nu_1 = (2, 1)$ (l'Ottetto). Non ha colonne di 3. $\implies D_{(2,1)} = 8$.
- $\nu_2 = (1, 1, 1)$ (colonna). È una colonna di $N = 3$ scatole. Per la regola (d), questa è la rappresentazione banale **1**.

Conclusione

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

14 Young Tableaux e Momento Angolare ($SU(2)$)

L'apparato dei Diagrammi di Young fornisce un framework unificato per la teoria del momento angolare (rappresentazioni di $SU(2)$). Permette sia di determinare la decomposizione di un prodotto tensoriale (la serie di Clebsch-Gordan), sia di calcolare i coefficienti di cambio base (i coefficienti di Clebsch-Gordan).

14.1 Definizione Formale degli Spazi j

I numeri j (come $0, 1/2, 1, 3/2, \dots$) sono le etichette che classificano le rappresentazioni irriducibili (irreps) del gruppo $SU(2)$, o equivalentemente, della sua algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$.

Definizione (Spazio di Rappresentazione V_j)

L'algebra del momento angolare $\mathfrak{su}(2)$ è definita dai generatori J_1, J_2, J_3 con la relazione di commutazione $[J_i, J_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_k$.

Uno **spazio di rappresentazione irriducibile** V_j (chiamato "spazio j ") è uno spazio vettoriale complesso tale che:

1. Gli operatori J_i agiscono linearmente su V_j .
2. Lo spazio V_j è **irriducibile** (non ha sottospazi invarianti non banali).
3. È uno spazio di autovettori dell'operatore di Casimir $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$, con autovalore $j(j+1)\hbar^2$ per ogni vettore in V_j .

Corollario (Proprietà dello Spazio V_j)

Lo spazio V_j etichettato da j ha:

- **Dimensione:** $\dim(V_j) = 2j + 1$.
- **Base standard:** Una base ortonormale $\{|j, m\rangle\}$ di autovettori di J_3 , dove m assume i $2j + 1$ valori:

$$m = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$$

Esempio

- **Spazio $j = 1/2$:** $V_{1/2}$ ha dimensione 2. Base: $\{|1/2, -1/2\rangle, |1/2, 1/2\rangle\}$.
- **Spazio $j = 1$:** V_1 ha dimensione 3. Base: $\{|1, -1\rangle, |1, 0\rangle, |1, 1\rangle\}$.
- **Spazio $j = 3/2$:** $V_{3/2}$ ha dimensione 4. Base: $\{|3/2, -3/2\rangle, \dots, |3/2, 3/2\rangle\}$.

14.2 Decomposizione ($j_1 \otimes j_2$) via Regole di Littlewood-Richardson

L'algoritmo di Littlewood-Richardson (aggiunta di scatole) determina quali irreps V_J risultano dal prodotto tensoriale $V_{j_1} \otimes V_{j_2}$.

Teorema (Corrispondenza $j \leftrightarrow \text{Tableau}$)

Per $SU(2)$, una irrep \mathbf{j} è costruita come la combinazione **totalmente simmetrica** di $k = 2j$ stati fondamentali $j = 1/2$. Di conseguenza, \mathbf{j} corrisponde a un Diagramma di Young con una **singola riga** di $\mathbf{k} = 2\mathbf{j}$ scatole.

- $j = 1/2 \implies k = 1 \implies \boxed{\cdot}$
- $j = 1 \implies k = 2 \implies \boxed{\cdot} \boxed{\cdot}$
- $j = 3/2 \implies k = 3 \implies \boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot}$

Corollario (Vincolo di $SU(2)$)

Poiché $N = 2$, qualsiasi colonna di 2 scatole $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ è un singoletto ($j = 0$) e può essere rimossa da un diagramma senza alterare la rappresentazione (Regola (d)).

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cong \boxed{\cdot} \quad (\text{per } SU(2))$$

Esempio (Decomposizione $1 \otimes 1/2$)

Vogliamo calcolare $j_1 = 1 \otimes j_2 = 1/2$.

(a) **Scrivere i Tableaux:**

- T_1 (per $j_1 = 1$): $k = 2$. $\implies T_1 = \boxed{\cdot} \boxed{\cdot}$
- T_2 (per $j_2 = 1/2$): $k = 1$. $\implies T_2 = \boxed{a}$

(b) **Aggiungere le scatole:** Aggiungiamo la scatola 'a' a T_1 in tutti i modi validi:

- **Possibilità 1:** $\boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{a}$
- **Possibilità 2:** $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ a & \cdot \end{pmatrix}$

(d) **Interpretare i Risultati (Vincolo $SU(2)$):**

- **Risultato 1:** $\boxed{\cdot} \boxed{\cdot} \boxed{\cdot}$. È una riga di $k = 3$. $j = k/2 = 3/2$. \implies Rappresentazione $\mathbf{j} = 3/2$.
- **Risultato 2:** $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$. Questo diagramma contiene una colonna di 2. Rimuovendo la colonna, rimane $\boxed{\cdot}$. Questo è $k = 1$. $j = k/2 = 1/2$. \implies Rappresentazione $\mathbf{j} = 1/2$.

Conclusione: $1 \otimes 1/2 = 3/2 \oplus 1/2$.

14.3 Calcolo dei Coefficienti di CG tramite Proiettori di Young

In questa sezione, si formalizza il metodo per il calcolo dei coefficienti di Clebsch-Gordan (CG) di $SU(2)$ utilizzando l'algebra del gruppo simmetrico S_k e i proiettori di Young. Questo metodo è concettualmente fondamentale e alternativa diretta al tradizionale metodo degli operatori a scaletta (J_{\pm}).

Il metodo si basa sulla traduzione del problema del momento angolare ($SU(2)$) in un problema di simmetria di permutazione (S_k).

Definizione (Stato Fondamentale e k Particelle)

Ogni stato di spin j è costruito come la combinazione totalmente simmetrica di $k = 2j$ particelle fondamentali di spin $j = 1/2$. Lo spazio fondamentale $V_{1/2}$ ha base $|\uparrow\rangle$ e $|\downarrow\rangle$. Un prodotto $j_1 \otimes j_2$ è un sistema di $k_{\text{tot}} = 2j_1 + 2j_2$ particelle.

Definizione (Le Basi del Problema)

Sia dato un sottospazio con M_{tot} fissato, generato da una base non accoppiata $\{|A\rangle, |B\rangle, \dots\}$.

- **Base Non Accoppiata** (es. $|A\rangle = |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$): Questi stati hanno una simmetria parziale, definita dal sottogruppo $S_{k_1} \times S_{k_2} \subset S_{k_{tot}}$.
- **Base Accoppiata** (es. $|J, M\rangle$): Questi stati hanno una simmetria totale $S_{k_{tot}}$, definita da un diagramma di Young λ_J .

I coefficienti di CG sono la matrice di trasformazione $\langle A|J\rangle$ tra queste due basi.

14.3.1 Procedura Formale di Calcolo

Il coefficiente di CG è un elemento di matrice del Proiettore di Young Y_J (l'operatore Y_{λ_J} associato al diagramma di J).

Calcolo dei Coefficienti (Metodo Y_J) Dato un sottospazio M_{tot} con base non accoppiata $\{|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle, \dots\}$:

1. **Scegliere il J desiderato.** Si identifica il diagramma di Young λ_J corrispondente tramite la decomposizione di Littlewood-Richardson e il vincolo $SU(2)$ (rimozione di colonne $N = 2$).
2. **Definire il Proiettore Y_J .** Si costruisce l'operatore di simmetria mista $Y_J = Y_{\lambda_J} = Q_J P_J$ (dove Q_J è l'antisimmetrizzatore di colonna e P_J il simmetrizzatore di riga) che agisce su $S_{k_{tot}}$.
3. **Scegliere uno Stato di Partenza.** Si seleziona *un solo* stato della base non accoppiata, ad esempio $|A\rangle$.
4. **Costruire lo Stato Accoppiato.** Si calcola il vettore proiettato (non normalizzato) $|\Psi_J\rangle$:

$$|\Psi_J\rangle = Y_J|A\rangle$$

Questo vettore $|\Psi_J\rangle$ è lo stato $|J, M\rangle$ desiderato (a meno di una costante).

5. **Trovare i Coefficienti.** I coefficienti di CG (non normalizzati) a, b, c, \dots sono le componenti di $|\Psi_J\rangle$ nella base non accoppiata. Si ottengono tramite proiezione (prodotto scalare):

$$\begin{aligned} a &= \langle A|\Psi_J\rangle = \langle A|Y_J|A\rangle \\ b &= \langle B|\Psi_J\rangle = \langle B|Y_J|A\rangle \\ c &= \langle C|\Psi_J\rangle = \langle C|Y_J|A\rangle \\ &\dots \end{aligned}$$

6. **Normalizzare.** Il vettore $\vec{v}_J = (a, b, c, \dots)$ è il vettore dei CG. I coefficienti fisici si ottengono normalizzando \vec{v}_J :

$$CG_i = \frac{a_i}{\|\vec{v}_J\|} \quad \text{dove} \quad \|\vec{v}_J\| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + \dots}$$

14.3.2 Esempi (Analisi Concettuale)

Esempio ($1/2 \otimes 1/2 \rightarrow J = 0$)

- $k = 2, S_2. J = 0 \rightarrow \lambda = (1, 1)$. Proiettore $Y_{J=0} = (e - P_{12})$.
- Base $M = 0$: $\{|A\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle, |B\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle\}$.
- $|\Psi_J\rangle = Y_{J=0}|A\rangle = (e - P_{12})|\uparrow\downarrow\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle$.
- $a = \langle A|\Psi_J\rangle = 1$.
- $b = \langle B|\Psi_J\rangle = -1$.
- $\vec{v}_0 = (1, -1)$. Norma $\|\vec{v}_0\| = \sqrt{2}$.
- CGs: $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.

Esempio ($2 \otimes 1 \rightarrow J = 2$ (Il calcolo eseguito))

- $k_{tot} = 6, S_6. J = 2 \rightarrow \lambda = (5, 1)$. Proiettore $Y_{J=2} = Y_{(5,1)}$.

- Base $M = 1$: $\{|A\rangle = |2, 2; 1, -1\rangle, |B\rangle = |2, 1; 1, 0\rangle, |C\rangle = |2, 0; 1, 1\rangle\}$.
- Si calcola lo stato proiettato $|\Psi_J\rangle = Y_{(5,1)}|A\rangle$. (Questo calcolo, come da discussione, ha richiesto l'applicazione del simmetrizzatore $P_{(5,1)}$ (riga 1-5) e dell'antisimmetrizzatore $Q_{(5,1)}$ (colonna 1-6) allo stato $|A\rangle = |\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\rangle$, producendo un vettore somma di 8 kets unici).
- Si calcolano (come eseguito) le proiezioni di $|\Psi_J\rangle$ sulla base:

$$a = \langle A|\Psi_J\rangle = 1/\sqrt{8}$$

$$b = \langle B|\Psi_J\rangle = 1/4$$

$$c = \langle C|\Psi_J\rangle = \sqrt{3}/4$$

- **Normalizzazione:** Si calcola la norma del vettore $\vec{v}_2 = (1/\sqrt{8}, 1/4, \sqrt{3}/4)$:

$$\|\vec{v}_2\|^2 = (1/8) + (1/16) + (3/16) = 2/16 + 1/16 + 3/16 = 6/16 = 3/8$$

La norma è $\|\vec{v}_2\| = \sqrt{3/8}$.

- **Coefficienti di CG Fisici (Valori Assoluti):**

$$- \langle 2, 2; 1, -1|2, 1\rangle = \frac{a}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1/\sqrt{8}}{\sqrt{3/8}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$- \langle 2, 1; 1, 0|2, 1\rangle = \frac{b}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1/4}{\sqrt{3/8}} = \sqrt{\frac{1/16}{3/8}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

$$- \langle 2, 0; 1, 1|2, 1\rangle = \frac{c}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{\sqrt{3}/4}{\sqrt{3/8}} = \sqrt{\frac{3/16}{3/8}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

14.4 Commento sull'Equivalenza dei Metodi

Osservazione (Metodo Y_λ vs. Metodo J_\pm)

I due metodi sono formalmente equivalenti e devono produrre i medesimi coefficienti (a meno di una fase globale, la convenzione di Condon-Shortley).

- **Metodo Operatori a Scaletta (J_\pm):** Sfrutta l'algebra di Lie $\mathfrak{su}(2)$. È un metodo **ricorsivo**. Si parte dallo stato "stretched" (allungato) $|J_{max}, J_{max}\rangle$ (che è unico) e si applica l'operatore di discesa $J_- = J_{1,-} + J_{2,-}$ per generare tutti gli altri stati. È computazionalmente efficiente per $SU(2)$.
- **Metodo Proiettori di Young (Y_λ):** Sfrutta l'algebra del gruppo simmetrico S_k . È un metodo **diretto** (non ricorsivo). Si calcola lo stato $|J, M\rangle$ desiderato direttamente, senza dover prima trovare lo stato $|J, J\rangle$. Il suo svantaggio è l'enorme complessità algebrica (calcolo di plettismi e elementi di matrice di S_k), come visto nell'esempio $2 \otimes 1$.

L'equivalenza risiede nel fatto che entrambi i metodi sono procedure algoritmiche per trovare una base ortonormale per i sottospazi irriducibili V_J all'interno dello spazio prodotto $V_{j_1} \otimes V_{j_2}$.