

# Appendici

## Meccanica Quantistica

---

### Indice

<b>1</b>	<b>Appendici matematiche</b>	<b>3</b>
1.1	Definizione di prodotto tensore . . . . .	3
1.2	Dualità e Riflessività negli Spazi Normati . . . . .	4
1.3	La Notazione di Dirac in uno Spazio di Hilbert . . . . .	5
1.3.1	Duali Algebrici vs. Topologici . . . . .	5
1.4	Gli Spazi di Hilbert Attrezzati (Rigged Hilbert Spaces) . . . . .	6
1.4.1	La Decomposizione di un Vettore di $\mathcal{H}$ . . . . .	7
1.4.2	Perché l'Integrale "Torna" in $\mathcal{H}$ ? . . . . .	7
1.5	PVMs . . . . .	8
1.6	Decomposizione spettrale per operatori autoaggiunti . . . . .	11
1.7	Divergenza della serie di Dyson . . . . .	12
1.8	$C^*$ algebre . . . . .	13
1.8.1	Rappresentazioni di $*$ -algebre . . . . .	15
1.9	Algebre di von Neumann (o $W^*$ -algebre) . . . . .	16
1.9.1	Generazione e Struttura di Reticolo . . . . .	17
1.9.2	Prodotti Tensoriali e Isomorfismi . . . . .	17
1.9.3	Operatori Illimitati e Affiliazione . . . . .	18
1.9.4	Somma Hilbertiana di Algebre di von Neumann . . . . .	18
1.10	Visualizzazione geometrica della convoluzione . . . . .	19
1.10.1	Il Framework Geometrico: Fiber Integration . . . . .	19
1.10.2	Intuizione sull'equazione fondamentale . . . . .	20
1.11	Esempio 1D: Equazione di Trasporto con Decadimento . . . . .	21
1.11.1	Geometria nello Spazio $(y, h)$ . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Fondamenti logico-matematici della Meccanica Quantistica</b>	<b>22</b>
2.1	Grandezze Classiche e Misurabilità . . . . .	22
2.2	La nozione di Reticolo . . . . .	22
2.3	La logica non-Booleana della Meccanica Quantistica . . . . .	24
2.4	Perché le osservabili sono operatori autoaggiunti . . . . .	25
2.5	Il Teorema di Soler . . . . .	26
2.6	Argomenti avanzati su Teoremi di Soler e Piron . . . . .	28
2.6.1	Dagli assiomi allo Spazio Vettoriale Generalizzato . . . . .	28
2.6.2	Il Teorema di Solèr e la natura del campo . . . . .	29
2.7	Il Teorema di Gleason . . . . .	29
2.8	Il Teorema di Gleason Generalizzato . . . . .	31
2.9	Teorema di Bell debole . . . . .	32
2.9.1	Stati Puri e Misti: Struttura convessa . . . . .	32
2.10	Tipologie di Sovrapposizione e Stati Misti . . . . .	33
2.10.1	L'origine dell'Interferenza Quantistica . . . . .	34
2.11	Stati post-misurazione: una critica al postulato del collasso . . . . .	34
2.11.1	Confronto tra i postulati di von Neumann e Lüders . . . . .	35
2.11.2	Dipendenza dello stato dalla procedura di misura . . . . .	36
2.11.3	Misurazioni Non Selettive (Ideali) . . . . .	37
2.11.4	Struttura dei proiettori in un'algebra di Von Neumann . . . . .	37
2.11.5	Fattori e Classificazione di Murray-von Neumann . . . . .	38
2.12	Irriducibilità e Lemma di Schur nelle Algebre di von Neumann . . . . .	39
2.12.1	Sottospazi Riducenti per Operatori Illimitati . . . . .	39
2.13	L'Algebra di von Neumann delle Osservabili . . . . .	40
2.13.1	Osservabili Illimitate e Struttura di Jordan . . . . .	40
2.14	Insiemi Completi di Osservabili Compatibili (CSCO) . . . . .	40
2.14.1	Conseguenze Fisiche: Stati Puri e Commutante Abeliano . . . . .	40

2.15	Caratterizzazione Algebrica degli Stati: Il Teorema di Riesz Non Commutativo . . . . .	41
2.15.1	Stati come Funzionali Lineari . . . . .	41
2.15.2	Analisi del Ragionamento: L'analogia con Riesz . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Teorie Bayesiane Generali (GBT)</b>	<b>43</b>
3.1	Credenze e Probabilità . . . . .	43
3.2	Aggiornamenti Bayesiani e Assiomi di Coerenza . . . . .	43
3.3	Azioni e Coerenza all'Indietro . . . . .	44
3.4	Esperimenti Ideali ed Emergenza del Principio di Esclusività . . . . .	44
3.5	Esempio: La Teoria Quantistica come GBT . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Esempi su operatori</b>	<b>46</b>
4.1	Spazi di Hilbert . . . . .	46
4.2	Spazio di Successioni . . . . .	46
4.3	Spazi di Funzioni $L^p(\mathbb{R}^n)$ ( $p \in [1, +\infty]$ ) . . . . .	48
4.4	Spazi $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	49
4.5	Richiami di Complementi di Analisi III . . . . .	49
4.6	Spazi di Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	50
4.7	Operatori . . . . .	51
4.8	Varie su operatori . . . . .	54
4.9	Osservazioni sulla MQ . . . . .	56
4.9.1	Il caso dell'Idrogeno . . . . .	57
4.10	Indici di difetto e Criteri . . . . .	57
4.11	Prodotto tensore . . . . .	60
4.11.1	Prodotto Tensore di Distribuzioni . . . . .	61
4.12	Convoluzione . . . . .	61
4.13	L'operatore derivazione nel problema "Particle in a box" . . . . .	63
4.14	Particella libera sulla semiretta . . . . .	65
4.15	Oscillatore Armonico . . . . .	67
4.16	Operatore $xp + px$ . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Esempi sulle distribuzioni</b>	<b>70</b>
5.1	Varie su distribuzioni . . . . .	70
5.2	Esempi di equazioni distribuzionali . . . . .	71
5.3	Equazione $xu = 0$ . . . . .	71
5.3.1	Analisi del supporto . . . . .	71
5.3.2	Determinazione dell'ordine . . . . .	72
5.4	La distribuzione $\frac{1}{x}$ . . . . .	74
5.4.1	Soluzione Omogenea . . . . .	74
5.4.2	Soluzione Particolare: Approccio logaritmico . . . . .	74
5.4.3	Soluzione Particolare: Approccio tramite limite complesso . . . . .	75
5.4.4	Relazione tra le soluzioni e formule di Plemelj-Sokhotski . . . . .	75
5.4.5	Giustificazione rigorosa del limite . . . . .	76
5.4.6	Soluzione Generale . . . . .	76
5.5	Definizione e Costruzione delle Funzioni di Green . . . . .	77
5.6	Applicazione all'Equazione di Schrödinger . . . . .	78
5.7	Applicazione all'Equazione delle Onde . . . . .	78
5.8	Calcolo della Trasformata di Fourier per Distribuzioni Temperate . . . . .	79
5.9	La Funzione di Heaviside . . . . .	80
5.10	Funzione Caratteristica e Sinc . . . . .	81
5.11	La Gaussiana . . . . .	82
5.12	Esercizio Riepilogativo . . . . .	83
5.13	Distribuzioni a Supporto su una Ipersuperficie (Teorema di Divisione) . . . . .	84
5.14	Soluzione Fondamentale dell'Operatore di Cauchy-Riemann . . . . .	84

# 1 Appendici matematiche

## 1.1 Definizione di prodotto tensore

### Definizione (Spazio vettoriale libero)

Dato un insieme qualunque  $S$  possiamo definire lo spazio vettoriale libero su un campo  $\mathbb{K}$  l'insieme

$$\mathbb{K}(S) := \{f : S \rightarrow \mathbb{K} \mid f \neq 0 \text{ su un numero finito di elementi di } S\}$$

### Definizione (Funzione caratteristica)

Definisco una funzione  $\chi : S \rightarrow \mathbb{K}(S)$  in modo che un elemento di un qualunque insieme  $S$  sia in relazione con la  $f \in \mathbb{K}(S)$  che fa 1 su quell'elemento e fa 0 su tutti gli altri.

Abbiamo quindi trovato una base  $\mathcal{B}$  di  $\mathbb{K}(S)$  che è l'insieme delle funzioni caratteristiche dell'insieme  $S$  tale che  $\mathcal{B} \subset \mathbb{K}(S)$ . Quindi ci sono elementi di  $\mathbb{K}(S)$  che non sono funzione caratteristica di nessun elemento in  $S$  però possiamo sempre scrivere per un certo  $k \in \mathbb{K}(S)$

$$k = \sum \lambda_i k_i = \sum \lambda_i \chi(s_i)$$

dove  $k_i \in \mathcal{B}$ .

Identifichiamo ora  $S$  con il prodotto cartesiano di una serie di spazi vettoriali  $U_1, \dots, U_n$  su un campo  $\mathbb{K}$ . Definiamo inoltre un sottoinsieme  $\mathcal{R} \subset \mathbb{K}(S)$  nel seguente modo:

- $q \in \mathcal{R} \iff$  dato un certo  $\lambda \in \mathbb{K}$  e un certo  $j \in \mathbb{N}$  esistano due elementi in  $S$ ,  $s_1 = (v_1, \dots, v_n)$  e  $s_2 = (v_1, \dots, \lambda v_j, \dots, v_n)$  tale che

$$q = \lambda \chi(s_1) - \chi(s_2)$$

- $q \in \mathcal{R} \iff$  dato  $j \in \mathbb{N}$  esistano tre elementi in  $S$ ,  $s_1 = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $s_2 = (v_1, \dots, v'_j, \dots, v_n)$  e  $s_3 = (v_1, \dots, v_j + v'_j, \dots, v_n)$  tale che

$$q = \chi(s_1) + \chi(s_2) - \chi(s_3)$$

Ora possiamo quozientare su questo insieme definendo  $U_T := \mathbb{K}(S)/\mathcal{R}$  e una mappa di proiezione  $T : S \rightarrow U_T$  che associa ad ogni elemento la sua classe di equivalenza (definita per esempio associando ogni elemento di  $S$  alla classe di equivalenza di cui fa parte  $\chi(s)$ ).

### Teorema

La mappa  $T$  soddisfa la proprietà di universalità cioè per ogni spazio vettoriale  $W$  e per ogni mappa multilineare  $f : U_1 \times \dots \times U_n \rightarrow W$  esiste un'unica mappa lineare  $f^T : U_T \rightarrow W$  che fa commutare il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} U_1 \times \dots \times U_n & \xrightarrow{T} & U_T \\ & \searrow f & \downarrow f^T \\ & & W \end{array}$$

Quindi  $U_T$  è lo spazio prodotto tensore  $U_T = U_1 \otimes \dots \otimes U_n$

*Dimostrazione.* Definiamo l'applicazione  $\tilde{f} : \mathbb{K}(U_1 \times \dots \times U_n) \rightarrow W$  in modo che, dopo aver fissato la base  $\{k_i\}$ , e preso un  $k = \sum_i a_i k_i$

$$\tilde{f}(k) := \sum_i a_i f(\chi^{-1}(k_i))$$

dato che l'inversa di  $\chi$  esiste per gli elementi della base. Ora, posso prendere  $f^T$  come  $f^T([k]) := \tilde{f}(k)$  dove  $[k]$  è la classe di equivalenza dell'elemento  $k \in \mathbb{K}(S)$  di cui  $k$  è un rappresentativo. Troviamo infatti che in questo modo  $f = f^T \circ T$  che fa commutare il diagramma.

$f^T$  è lineare, infatti

$$f^T(a[v] + b[w]) = f^T([av] + [bw]) = f^T([av + bw]) = f(av + bw) = af(a) + bf(w) = af^T([v]) + bf^T([w])$$

per le proprietà di linearità del modulo e di  $f$ .

Inoltre se io avessi  $f^T$  e  $g^T$  entrambe con le proprietà dimostrate sopra avrei che  $f = f^T \circ T = g^T \circ T$  quindi che

$$(f^T \circ T)(s) = f^T([\chi(s)]) = f^T([k]) = f(s) = (g^T \circ T)(s) = g^T([k])$$

quindi sono uguali in un sistema di generatori per  $U_T$ , in quanto le classi di equivalenza che contengono almeno un rappresentativo della base sono un sistema di generatori per tutto  $U_T$ . Per risultati di algebra lineare si trova che se le due mappe sono uguali su un sistema di generatori allora lo sono per tutto lo spazio.  $\square$

**Notazione** In meccanica quantistica

$$[\chi(v_1, \dots, v_n)] =: |v_1\rangle|v_2\rangle\dots|v_n\rangle$$

## 1.2 Dualità e Riflessività negli Spazi Normati

Per comprendere appieno il framework matematico della meccanica quantistica, dobbiamo introdurre i concetti di spazio duale e riflessività.

### Definizione (Spazio Duale Topologico)

Dato uno spazio normato  $X$  sul campo  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ), il suo **duale topologico**, denotato con  $X^*$ , è lo spazio di tutti i funzionali lineari **continui** (o equivalentemente, limitati)  $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ .

Possiamo iterare questo processo. Il duale di  $X^*$  è  $X^{**} = (X^*)^*$ , chiamato **biduale topologico** di  $X$ .

Esiste un'applicazione "canonica" (naturale)  $\hat{J}: X \rightarrow X^{**}$  che mappa ogni vettore  $x \in X$  in un funzionale lineare continuo su  $X^*$ . Questo funzionale,  $\hat{J}(x)$ , agisce su un elemento  $f \in X^*$  nel seguente modo:

$$(\hat{J}(x))(f) = f(x)$$

Si può dimostrare che  $\hat{J}$  è un'isometria (cioè conserva la norma:  $\|\hat{J}(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X$ ).

### Definizione (Riflessività)

Uno spazio normato  $X$  è detto **riflessivo** se l'immersione canonica  $\hat{J}: X \rightarrow X^{**}$  è **surgettiva**, cioè se  $\hat{J}(X) = X^{**}$ .

In termini semplici, uno spazio è riflessivo se il suo biduale topologico "non è più grande" dello spazio stesso. Ogni elemento di  $X^{**}$  (ogni funzionale lineare continuo sui funzionali lineari continui su  $X$ ) è, di fatto, solo l'immagine di un vettore  $x \in X$  originale.

### Condizioni per la Riflessività

La riflessività è una proprietà potente ma non universale.

#### Spazi Riflessivi (Sì):

- **Tutti gli spazi di Hilbert.** Questo è il risultato più importante per la meccanica quantistica, come vedremo, ed è una conseguenza diretta del Teorema di Riesz-Fréchet.
- Tutti gli spazi normati di dimensione finita.
- Gli spazi  $L^p(\Omega)$  e  $l^p$  per  $1 < p < \infty$ .

#### Spazi Non Riflessivi (No):

- Lo spazio  $L^1(\Omega)$ . Il suo duale è  $L^\infty(\Omega)$ , ma il duale di  $L^\infty(\Omega)$  è uno spazio molto più vasto (lo spazio delle misure di Borel finitamente additive) di  $L^1(\Omega)$ .
- Lo spazio  $L^\infty(\Omega)$ .
- Lo spazio  $C(K)$  delle funzioni continue su un insieme compatto  $K$ .
- Lo spazio  $c_0$  delle successioni che tendono a zero (il suo duale è  $l^1$ , ma il suo biduale è  $l^\infty$ ).

Il motivo per cui gli spazi di Hilbert ( $\mathcal{H}$ ) sono così speciali e "ben comportati" è codificato nel seguente teorema fondamentale.

### Teorema (di Rappresentazione di Riesz-Fréchet)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert. Per ogni funzionale lineare continuo  $f \in \mathcal{H}^*$ , esiste un **unico** vettore  $y_f \in \mathcal{H}$  tale che:

$$f(x) = \langle y_f, x \rangle \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{H}$$

Inoltre,  $\|f\|_{\mathcal{H}^*} = \|y_f\|_{\mathcal{H}}$ .

(Nota: se il prodotto scalare  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è antilineare nel primo argomento, come in fisica, l'isomorfismo è antilineare. Se è antilineare nel secondo, è lineare).

**Conseguenze per la Riflessività:** Questo teorema stabilisce un isomorfismo (anti-lineare) tra  $\mathcal{H}$  e il suo duale  $\mathcal{H}^*$ . Poiché  $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^*$ , segue banalmente che  $\mathcal{H}^* \cong \mathcal{H}^{**}$ . Combinando i due,  $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^{**}$ . Si può dimostrare che questo isomorfismo è esattamente l'immersione canonica  $\hat{J}$ . **Pertanto, ogni spazio di Hilbert è riflessivo.**

## 1.3 La Notazione di Dirac in uno Spazio di Hilbert

La notazione di Dirac è un modo geniale per sfruttare la riflessività di  $\mathcal{H}$ .

1. **Kets:** Un vettore  $\psi$  nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  (ad esempio,  $L^2(\mathbb{R})$ ) è denotato da un "ket":  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ .
2. **Bras:** Un funzionale lineare continuo  $f \in \mathcal{H}^*$  è denotato da un "bra":  $\langle f|$ .
3. **Il Teorema di Riesz in azione:** Grazie a Riesz, per ogni ket  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ , esiste un unico bra  $\langle \psi| \in \mathcal{H}^*$  (il funzionale  $f_\psi(\cdot) = \langle \psi, \cdot \rangle$ ) e viceversa. C'è una corrispondenza biunivoca tra kets e bras.
4. **Il Bracket:** L'azione del bra  $\langle \phi| \in \mathcal{H}^*$  sul ket  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  è scritta come  $\langle \phi|\psi\rangle$ . Matematicamente, questo è:

$$\langle \phi|\psi\rangle \equiv f_\phi(|\psi\rangle) \equiv \langle \phi, \psi \rangle$$

Il risultato è uno scalare (un numero complesso). La notazione "bracket" è la chiusura di un "bra" e un "ket".

La notazione di Dirac brilla per la sua gestione delle "basi continue", come la base della posizione  $\{|x\rangle\}_{x \in \mathbb{R}}$ . Qui sorgono le sottigliezze.

L'oggetto  $|x\rangle$  dovrebbe essere l'autovettore dell'operatore posizione  $\hat{X}$ , tale che  $\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$ . Se lavoriamo in  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ , dove  $\hat{X}$  agisce come  $(\hat{X}\psi)(y) = y \cdot \psi(y)$ , la "funzione d'onda" di  $|x\rangle$  sarebbe  $\psi_x(y) = \delta(y - x)$ , la delta di Dirac. **Problema:** La delta di Dirac non è una funzione e non è in  $L^2(\mathbb{R})$ .

$$\int_{\mathbb{R}} |\delta(y - x)|^2 dy = \infty$$

Quindi,  $|x\rangle$  non è un vettore nel nostro spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ .

### 1.3.1 Duali Algebrici vs. Topologici

Il prompt solleva un punto cruciale: la distinzione tra duale \*algebrico\* e \*topologico\*.

- **Duale Algebrico ( $\mathcal{L}(X)$ ):** Lo spazio di *tutti* i funzionali lineari  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ , senza alcun requisito di continuità.
- **Duale Topologico ( $X^*$ ):** Il sottospazio  $X^* \subset \mathcal{L}(X)$  che contiene solo i funzionali lineari *continui*.

Sempre  $X^* \subseteq \mathcal{L}(X)$ , e  $X^{**} \subseteq \mathcal{L}(X)^*$  (biduali).

Consideriamo il funzionale "valutazione nel punto  $x$ ":

$$E_x : \psi \mapsto \psi(x)$$

Questo funzionale  $E_x$  è lineare. Ma è continuo sulla norma  $L^2$ ? No. Si può costruire una successione di funzioni  $\psi_n \in L^2(\mathbb{R})$  tale che  $\|\psi_n\|_{L^2} \rightarrow 0$  (converge a zero in norma), ma  $\psi_n(x) \rightarrow \infty$  (diverge nel punto  $x$ ). Poiché il funzionale mappa una successione convergente (a 0) in una non convergente,  $E_x$  è **non continuo** (non limitato) sulla topologia di  $L^2$ .

Dunque,  $|x\rangle$  (o più precisamente, il bra  $\langle x|$  che implementa  $E_x$ ) **non è in  $\mathcal{H}^*$** . Risiede nello spazio molto più ampio  $\mathcal{L}(X)$  (il duale algebrico).

Bisogna quindi vedere  $|x\rangle$  come un elemento del **biduale algebrico**  $\mathcal{L}(X)^*$ . In questo caso,  $|x\rangle$  è un funzionale  $F_x : \mathcal{H}^* \rightarrow \mathbb{C}$  che agisce su un bra  $\langle y| \in \mathcal{H}^*$ . Se  $|x\rangle$  è non limitato, allora la sua azione su un elemento  $\langle y| \in \mathcal{H}^*$  non è ben definita in termini semplici.

## 1.4 Gli Spazi di Hilbert Attrezzati (Rigged Hilbert Spaces)

La fisica risolve questo problema in modo più elegante, non usando l'ingestibile duale algebrico (che indicheremo con  $\mathcal{L}(X)$  per uno spazio  $X$ ), ma introducendo una struttura più fine nota come **Spazio di Hilbert Attrezzato** o **Triade di Gelfand**.

### Definizione (Spazio di Hilbert Attrezzato (Gelfand Triple))

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert (ad esempio,  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ ). Uno **Spazio di Hilbert Attrezzato** è una terna di spazi  $(\Phi, \mathcal{H}, \Phi^*)$  con le seguenti proprietà:

1.  $\Phi$  è un sottospazio vettoriale di  $\mathcal{H}$  che è **denso** in  $\mathcal{H}$ .
2.  $\Phi$  è dotato di una sua topologia (spesso derivante da una norma  $\|\cdot\|_\Phi$ ) che è **più fine** (più forte) della topologia indotta da  $\mathcal{H}$ .  
(Ciò significa che  $\|v\|_{\mathcal{H}} \leq C\|v\|_\Phi$  per qualche  $C$ , e quindi ogni successione che converge in  $\Phi$ , converge anche in  $\mathcal{H}$ ).
3.  $\Phi^*$  è il **duale topologico** di  $\Phi$  rispetto alla topologia di  $\Phi$ .

L'esempio canonico è prendere  $\Phi = \mathcal{S}(\mathbb{R})$  (lo spazio delle funzioni  $C^\infty$  a decrescenza rapida) e  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ . La topologia di  $\mathcal{S}$  è più fine di quella  $L^2$ .

Questa costruzione porta a una "triade" di inclusioni canoniche:

$$\Phi \subset \mathcal{H} \subset \Phi^*$$

Spieghiamo la seconda inclusione,  $\mathcal{H} \subset \Phi^*$ :

- Grazie al Teorema di Riesz, identifichiamo  $\mathcal{H}$  con il suo duale topologico  $\mathcal{H}^*$ . Quindi  $\Phi \subset \mathcal{H} \cong \mathcal{H}^*$ .
- L'inclusione  $\Phi \subset \mathcal{H}$  è continua (come visto al punto 2 della definizione).
- Per proprietà generali degli spazi duali, questo implica un'inclusione continua "al contrario" per i loro duali topologici:  $\mathcal{H}^* \subset \Phi^*$ .
- Combinando i passaggi, otteniamo la catena di inclusioni:  $\Phi \subset \mathcal{H} \cong \mathcal{H}^* \subset \Phi^*$ .

Lo spazio  $\Phi^*$  è lo spazio delle **distribuzioni temperate**  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , che è molto più grande di  $L^2(\mathbb{R})$  ma molto più "gestibile" del duale algebrico  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

**Conseguenze per la Notazione di Dirac** Questo formalismo ci permette di collocare rigorosamente ogni oggetto:

- I **"veri" kets** (stati fisici normalizzabili)  $|\psi\rangle$  sono in  $\mathcal{H}$ . Gli stati "particolarmente belli" (es. funzioni d'onda  $C^\infty$  e a decrescenza rapida) sono in  $\Phi$ .
- I **"kets generalizzati"** (autostati non normalizzabili) come  $|x\rangle$  sono **elementi di  $\Phi^*$** .

Il bracket  $\langle y|x\rangle$ , che coinvolge due "kets generalizzati" appartenenti entrambi al duale topologico  $\Phi^*$  (ad esempio  $|x\rangle = \delta_x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ), non può essere interpretato come un prodotto scalare (definito su  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ) né come l'azione di un funzionale su un vettore test (definita su  $\Phi^* \times \Phi$ ). Il suo significato emerge invece operazionalmente considerando la *risoluzione dell'identità*,  $\mathbb{I} = \int dx |x\rangle\langle x|$ . Se applichiamo questa identità a un vettore test  $|\psi\rangle \in \Phi$  e poi proiettiamo sul "bra"  $\langle y| \in \Phi^*$ , otteniamo un'identità:  $\langle y|\psi\rangle = \langle y|\mathbb{I}\psi\rangle$ . Sviluppando il lato destro, assumendo la linearità per scambiare l'integrale con il bracket (un'operazione che richiede il rigore della teoria delle distribuzioni), abbiamo  $\langle y|\mathbb{I}\psi\rangle = \langle y|(\int dx |x\rangle\langle x|)\psi\rangle = \int dx \langle y|x\rangle\langle x|\psi\rangle$ .

La rigorosità menzionata è fondamentale perché l'operazione non è banale:  $\langle y|$  è essa stessa una distribuzione ( $\delta_y \in \Phi^*$ ), non un funzionale continuo su  $\mathcal{H}$ , e l'integrale  $\int dx |x\rangle\psi(x)$  è un integrale "debole"

(o integrale di Bochner generalizzato), poiché l'integrando  $|x\rangle$  appartiene a  $\Phi^*$ , non a  $\mathcal{H}$ . L'atto di "portare il bra dentro l'integrale" (scambiare  $\langle y|\int \dots\rangle \rightarrow \int \langle y|\dots\rangle$ ) è uno scambio tra un funzionale e un'integrazione, analogo allo scambio tra un limite e un integrale, che non è universalmente lecito. Il **Teorema del Nucleo (Kernel Theorem) di Schwartz** fornisce il framework matematico rigoroso per definire tali integrali a valori operatoriali e per giustificare questa procedura, stabilendo che un operatore lineare (come l'Identità) da  $\Phi$  a  $\Phi^*$  può essere rappresentato da un "nucleo"  $K(y, x)$  (una distribuzione in due variabili) tale che la sua azione  $\psi(y)$  è data proprio da  $\int dx K(y, x)\psi(x)$ .

Poiché  $\langle y|\psi\rangle = \psi(y)$  e  $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$ , l'equazione diventa  $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}} dx \langle y|x\rangle \psi(x)$ . Questa relazione definisce  $\langle y|x\rangle$  non come uno scalare, ma come il **nucleo (kernel)**  $K(y, x)$  dell'operatore identità. L'unico oggetto matematico che soddisfa questa proprietà per ogni funzione test  $\psi$  è la **distribuzione delta di Dirac**  $\delta(y - x)$ , che è una distribuzione (un funzionale lineare continuo) definita sullo spazio delle funzioni test in due variabili (es.  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ), non uno scalare.

#### 1.4.1 La Decomposizione di un Vettore di $\mathcal{H}$

Consideriamo ora la decomposizione di un "vero" ket  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  sulla base continua:

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx |x\rangle \langle x|\psi\rangle$$

- $|\psi\rangle \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ .
- $\langle x|\psi\rangle = \psi(x)$ . Questa è la "funzione d'onda", una funzione in  $L^2(\mathbb{R})$ . È uno scalare (complesso) per ogni  $x$ .
- $|x\rangle \in \Phi^*$ . È una distribuzione.

L'integrale è quindi:

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx |x\rangle \psi(x)$$

Questa non è un'integrazione di Riemann o Lebesgue. È un **integrale debole**. È l'oggetto  $|\Psi\rangle \in \Phi'$  definito dalla sua azione su un qualsiasi "bra test"  $\langle\phi| \in \Phi$ :

$$\langle\phi|\Psi\rangle := \int_{\mathbb{R}} dx \langle\phi|x\rangle \psi(x) = \int_{\mathbb{R}} dx \overline{\phi(x)} \psi(x)$$

L'ultimo termine è semplicemente il prodotto scalare  $L^2$ :  $\langle\phi, \psi\rangle_{\mathcal{H}}$ .

#### 1.4.2 Perché l'Integrale "Torna" in $\mathcal{H}$ ?

Qui sta il punto cruciale. Abbiamo definito un oggetto  $|\Psi\rangle$  (l'integrale) che agisce come un funzionale  $f_{\psi}$  su tutti gli elementi  $\phi \in \Phi$ :

$$f_{\psi}(\phi) = \langle\phi|\Psi\rangle = \langle\phi, \psi\rangle_{\mathcal{H}}$$

Questo funzionale  $f_{\psi}$  è definito su  $\Phi$ . Ma è continuo anche sulla norma di  $\mathcal{H}$ ? Sì. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, per ogni  $\phi \in \mathcal{H}$ :

$$|f_{\psi}(\phi)| = |\langle\phi, \psi\rangle| \leq \|\phi\|_{\mathcal{H}} \cdot \|\psi\|_{\mathcal{H}}$$

Poiché  $\psi \in \mathcal{H}$ ,  $\|\psi\|_{\mathcal{H}}$  è finito. Dunque  $f_{\psi}$  è un funzionale lineare **continuo sull'intero spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$** .

Questo significa che l'oggetto  $|\Psi\rangle$  (l'integrale) è un **elemento di  $\mathcal{H}^*$** , il duale topologico di  $\mathcal{H}$ . Infine, per il **Teorema di Riesz-Fréchet**, ogni elemento di  $\mathcal{H}^*$  corrisponde a un unico vettore in  $\mathcal{H}$ . E quale vettore in  $\mathcal{H}$  genera il funzionale  $f_{\psi}(\cdot) = \langle\cdot, \psi\rangle$ ? Per l'unicità garantita da Riesz, è proprio il vettore  $|\psi\rangle$  da cui eravamo partiti.

1. Decomponiamo  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  usando kets "cattivi"  $|x\rangle \in \Phi^*$  e coefficienti "buoni"  $\psi(x) \in L^2$ .
2. L'integrale  $\int dx |x\rangle \psi(x)$  è definito in senso debole (distribuzionale).

3. Questo integrale definisce un funzionale lineare  $f_\psi$  che, grazie al fatto che  $\psi(x) \in L^2$ , risulta essere **continuo su  $\mathcal{H}$** .
4. L'integrale, quindi, "collassa" da  $\Phi'$  (distribuzioni) a  $\mathcal{H}^*$  (duale topologico di  $\mathcal{H}$ ).
5. Poiché  $\mathcal{H}$  è **riflessivo** (via Riesz,  $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}^*$ ), questo elemento  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}^*$  è identificato con un unico elemento in  $\mathcal{H}$ , che è esattamente il  $|\psi\rangle$  originale.

La riflessività dello spazio di Hilbert è la garanzia matematica che la decomposizione di un vettore  $L^2$  lungo una "base" di distribuzioni, pesata con i coefficienti  $L^2$  (la funzione d'onda), ricostruisce fedelmente il vettore  $L^2$  di partenza.

## 1.5 PVMs

### Definizione (Misura complessa)

Sia  $\Sigma(X)$  una  $\sigma$ -algebra su un insieme  $X$ , allora  $\mu : \Sigma(X) \rightarrow \mathbb{C}$  è una *misura complessa* if  $\mu(\emptyset) = 0$  e se vale la  $\sigma$ -addittività in modo che la somma converga nonostante l'ordine (converge assolutamente).

### Definizione (Variazione)

La *variazione*  $|\mu| : \Sigma(X) \rightarrow [0, +\infty)$  è una *misura positiva  $\sigma$ -additiva* definita come

$$|\mu|(E) := \sup \left\{ \sum_{F \in P(E)} |\mu(F)| \mid P(E) \subset \Sigma(X) \text{ al più partizione numerabile di } E \right\}$$

Si dimostra che la *variazione totale*  $\|\mu\| := |\mu|(X)$  è sempre finita.

### Teorema (Radon-Nikodym)

Data una *misura complessa*, esiste una *funzione misurabile*  $h : X \rightarrow \mathbb{C}$  con  $|h(x)| = 1$  rispetto a  $|\mu|$  q.o. che è unica a meno di set di misura nulla, tale che

$$\mu(E) = \int_E h d|\mu| \quad \forall E \in \Sigma(X)$$

### Definizione (Integrale di una funzione misurabile)

la *nozione di integrale* rispetto a  $\mu$  è riservata a *funzioni misurabili* che sono *assolutamente  $\mu$ -integrabili* definito come

$$\int_X f d\mu := \int_X f h d|\mu|$$

tutte le proprietà della *misura positiva* possono essere trasportate a *misure complesse*.

### Definizione (PVMs)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e  $\Sigma(X)$  una  $\sigma$ -algebra su  $X$ . Una *PVM* su  $X$  è una mappa  $P : \Sigma(X) \ni E \mapsto P_E \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$  dove  $\mathcal{P}(\mathcal{H})$  è lo spazio dei proiettori su  $\mathcal{H}$  tale che

1.  $P_X = \mathbb{I}$
2.  $P_E P_F = P_{E \cap F}$
3. Si sommano per famiglie di insiemi disgiunte numerabili

L'ultima proprietà ha senso, in quanto si nota con la disuguaglianza di Bessel, che quella somma converge sempre.

Prendiamo ora  $x, y \in \mathcal{H}, \Sigma(X) \ni E \mapsto \langle x | P_E y \rangle =: \mu_{xy}^{(P)}(E)$ , si noti che è una *misura complessa* con le seguenti proprietà

- $\mu_{xy}^{(P)}(\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_{xy}^{(P)}(E_n)$  per le proprietà del prodotto interno
- $\mu_{xy}^{(P)}(X) = \langle x | y \rangle$
- $\mu_{xx}^{(P)}$  è sempre positiva e finita



Se consideriamo ora una funzione semplice  $s$  e denotiamo con  $h$  la funzione relativa al teorema di Radon vista precedentemente possiamo scrivere

$$\int_X s d\mu_{xy} := \int_X s h d|\mu_{xy}| = \sum s_k \int_{E_k} h d|\mu_{xy}| = \left\langle x \left| \sum_k s_k P_{E_k} y \right. \right\rangle$$

a questo punto possiamo finalmente definire

$$\int_X s(\lambda) dP(\lambda) := \sum s_k P_{E_k}$$

e quindi abbiamo che

$$\int_X s d\mu_{xy} = \left\langle x \left| \int_X s(\lambda) dP(\lambda) y \right. \right\rangle$$

### Esempio di PVM con proiettori numerabili

Se ponessimo che  $\mathcal{H} = \bigoplus_{j \in J} H_j$  e prendessimo come  $\sigma$ -algebra  $\Sigma(J)$  allora avrei che per  $E \in \Sigma(J)$

$$P_E z = \sum_{j \in E} Q_j z$$

con  $Q_j$  proiettore su  $H_j$ , si può dimostrare che  $P_E$  sono una PVM. In particolare se  $f : J \rightarrow \mathbb{C}$  è  $\mu_{xx}$ -integrabile

$$\int_J f(j) d\mu_{xx}(j) = \sum_{j \in J} f(j) \|Q_j x\|^2$$

questo è il cosiddetto integrale su una "counting measure" e si può estendere a mappe generali usando il teorema della convergenza monotona e poi il teorema di Lebesgue.

### Esempio di PVM su boreliani

Prendiamo  $\mathcal{H} = {}^2(\mathbb{R}^n, d^n x)$  e un  $E \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  nella  $\sigma$ -algebra di Borel associato al proiettore ortonormale dato dalla funzione caratteristica sul tale insieme. Si può mostrare che

$$\mu_{hg}^{(P)}(E) = \langle h | P_E g \rangle = \int_E \overline{h(x)} g(x) d^n x$$

### Teorema

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert,  $P$  una PVM e  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione misurabile, si definisca

$$\Delta_f := \left\{ x \in \mathcal{H} \left| \int_X |f(\lambda)|^2 \mu_{xx}^{(P)}(\lambda) < \infty \right. \right\}$$

valgono le seguenti proprietà

- $\Delta_f$  è un sottospazio denso in  $H$  ed esiste un operatore unico

$$\int_X f(\lambda) dP(\lambda) : \Delta_f \rightarrow \mathcal{H} \quad (*)$$

tale che

$$\left\langle x \left| \int_X f(\lambda) dP(\lambda) y \right. \right\rangle = \int_X f(\lambda) d\mu_{xy}^{(P)}(\lambda) \quad \forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in \Delta_f$$

in particolare  $f$  è integrabile

- L'operatore  $\star$  è chiuso e normale
- L'operatore aggiunto è

$$\left( \int_X f(\lambda) dP(\lambda) \right)^\star = \int_X \overline{f(\lambda)} dP(\lambda)$$

- Vale che

$$\left\| \int_X f(\lambda) dP(\lambda) x \right\|^2 = \int_X |f(\lambda)|^2 d\mu_{xx}^{(P)}(\lambda)$$

**Corollario**

Se  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  solo assume valori non negativi reali allora

$$\left\langle x \left| \int_X f dPx \right. \right\rangle \geq 0 \quad \forall x \in \Delta_f$$

Se  $T$  è un operatore con  $D(T) = \Delta_f$  in modo che

$$\langle x | Tx \rangle = \int_X f(\lambda) d\mu_{xx}^{(P)}(\lambda) \quad \forall x \in \Delta_f$$

allora

$$T = \int_X f(\lambda) dP(\lambda)$$

Possiamo ora definire la seguente proprietà.

**Definizione (P-essenzialmente limitatezza)**

Sia  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  misurabile e  $P$  una PVM

$$\|f\|_\infty^{(P)} := \inf\{r \geq 0 | P(x \in X | |f(x)| > r) = 0\}$$

allora se  $\|f\|_\infty^{(P)} < +\infty$ ,  $P$  è essenzialmente limitata.

Allora possiamo dare il seguente teorema devastante per le funzioni limitate.

**Teorema**

1. Una mappa misurabile  $f$  è  $P$ -essenzialmente limitata se e solo se

$$\int_X f(\lambda) dP(\lambda) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}).$$

In quel caso

$$\left\| \int_X f(\lambda) dP(\lambda) \right\| \leq \|f\|_\infty^{(P)} \leq \|f\|_\infty$$

In particolare, se  $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  sono limitate e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente come  $n \rightarrow +\infty$  - o più debolmente  $\|f - f_n\|_\infty^{(P)} \rightarrow 0$  dove  $f$  e tutte le  $f_n$  sono  $P$ -essenzialmente limitate - allora

$$\left\| \int_X f_n(\lambda) dP(\lambda) - \int_X f(\lambda) dP(\lambda) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty.$$

Risulta anche che

$$\left\| \int_X f(\lambda) dP(\lambda) \right\| = \|f\|_\infty^{(P)}$$

2. Abbiamo che

$$\int_X \chi_E dP = P_E, \quad \text{if } E \in \Sigma(X)$$

In particolare,

$$\int_X 1 dP = \mathbb{I}$$

Per una funzione semplice  $s = \sum_{k=1}^n s_k \chi_{E_k}$ , dove  $s_k \in \mathbb{C}$  e  $E_k \in \Sigma(X)$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,

$$\int_X \sum_{k=1}^n s_k \chi_{E_k} dP = \sum_{k=1}^n s_k P_{E_k}$$

3. Sia  $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  funzioni misurabili tali che  $\|f\|_\infty^{(P)}, \|f_n\|_\infty^{(P)} \leq K < +\infty$  per qualche  $K \in \mathbb{R}$  e tutti  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $f_n \rightarrow f$  puntualmente come  $n \rightarrow +\infty$ , allora

$$\int_X f_n dPx \rightarrow \int_X f dPx \quad \text{as } n \rightarrow +\infty, \text{ for every } x \in \mathcal{H}$$

4. If  $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$  sono  $P$ -essenzialmente limitate e  $a, b \in \mathbb{C}$ , allora

$$\int_X (af + bg) dP = a \int_X f dP + b \int_X g dP$$

$$\int_X f dP \int_X g dP = \int_X f \cdot g dP$$

Possiamo quindi estendere a quelle non limitate.

**Teorema**

Consideriamo una PVM  $P : \Sigma(X) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$ , due funzioni misurabili  $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$  e sia  $a \in \mathbb{C}$

1.

$$a \int_X f dP = \int_X a f dP$$

2.  $D(\int_X f dP + \int_X g dP) = \Delta_f \cap \Delta_g$  e

$$\int_X f dP + \int_X g dP \subset \int_X (f + g) dP$$

con l'uguaglianza se e solo se  $\Delta_f \cap \Delta_g = \Delta_{f+g}$

3. Stesso con il prodotto

4. Funziona bene con l'aggiunto

5. Se  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  è un'isometria lineare e suriettiva  $\Sigma(X) \ni E \mapsto P'_E := UP_EU^{-1}$  è una PVM su  $\mathcal{H}'$  e

$$U(\int_X f dP)U^{-1} = \int_X f dP'$$

e il suo dominio è  $U(\Delta_f)$

6. Si può comporre per mappe misurabili del tipo  $\phi : X \rightarrow X'$

## 1.6 Decomposizione spettrale per operatori autoaggiunti

**Notazione.** Denotiamo con  $\mathcal{B}(X)$  la  $\sigma$ -algebra di Borel sullo spazio topologico  $X$ .

**Teorema (Spettrale per operatori autoaggiunti)**

Sia  $A$  un operatore autoaggiunto sullo spazio di Hilbert complesso  $\mathcal{H}$

- Esiste un'unica PVM  $P^{(A)} : \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H})$  chiamata la misura spettrale di  $A$ , tale che

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP^{(A)}(\lambda)$$

In particolare  $D(A) = \Delta_\iota$  dove  $\iota : \mathbb{R} \ni \lambda \rightarrow \lambda$

- Abbiamo inoltre che il supporto della PVM  $P$ , ossia il complemento in  $X$  dell'unione di tutti i set aperti  $O \subset X$  con  $P_O = 0$  è tale che

$$\text{supp}(P^{(A)}) = \sigma(A)$$

e quindi  $P^{(A)}$  è concentrata su  $\sigma(A)$

$$P^{(A)}(E) = P^{(A)}(E \cap \sigma(A)) \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

- $\lambda \in \sigma_p(A)$  se e solo se  $P^{(A)}(\lambda) \neq 0$ , questo succede in particolare quando  $\lambda$  è un punto isolato di  $\sigma(A)$ .  $P^{(A)}(\lambda)$  è il proiettore ortogonale sull'autospazio relativo a  $\lambda$ .
- $\lambda \in \sigma_c(A)$  se e solo se  $P^{(A)}(\lambda) = 0$  ma  $P^{(A)}(E) \neq 0$  se  $E \ni \lambda$  è un aperto in  $\mathbb{R}$ .

### Osservazione

Sia data una PVM  $P$  e  $\iota : \mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \lambda$  possiamo definire l'operatore normale

$$A = \int_{\mathbb{R}} \iota(\lambda) dP(\lambda)$$

che è autoaggiunto dato che  $\iota$  è reale. Dato che il teorema spettrale fornisce il risultato di unicità abbiamo che  $P^{(A)} = P$ , quindi abbiamo una corrispondenza biunivoca tra le PVM reali sui boreliani e gli operatori autoaggiunti su  $\mathcal{H}$ .

Vale inoltre che dato un operatore  $A$  autoaggiunto e una  $f : \sigma(A) \in \mathbb{C}$  mappa continua

$$\sigma(f(A)) = \overline{f(\sigma(A))}$$

dove la chiusura non è necessaria se  $A$  è limitato.

### Teorema (Misura spettrale in comune)

Sia  $\mathfrak{U} := \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  sia un set di operatori autoaggiunti su  $\mathcal{H}$  supponiamo che la loro misura spettrale commuti. Allora esiste un'unica PVM,  $P^{(\mathfrak{U})}$  in modo che

$$P_{E_1 \times E_2 \times \dots}^{(\mathfrak{U})} = P_{E_1}^{(A_1)} \dots P_{E_n}^{(A_n)}$$

$\forall E_i \in \mathcal{B}(X)$ . Inoltre per ogni  $f : \mathbb{R} \in \mathbb{C}$  misurabile

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_k) dP^{(\mathfrak{U})}(x) = f(A_k) := \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dP^{(A_k)} \quad \forall k = 1, \dots, n$$

e infine, ogni proiettore commuta con la misura congiunta se commuta con tutti i  $P^{(A_k)}$ .

### Osservazione (Formalismo in MQ)

Dato uno stato  $\psi \in \mathcal{H}$  descrivente un ensemble di sistemi identici preparati in ugual modo, la probabilità di ottenere il risultato nel boreliano  $E \subset \sigma(A)$  quando misuro  $A$  è

$$\mu_{\psi, \psi}^{(P(A))}(E) := \|P_E^{(A)} \psi\|^2$$

dove  $P^{(A)}$  è la PVM dell'operatore  $A$ . Il valore di aspettazione di  $A$ ,  $\langle A \rangle_{\psi}$  risulta essere

$$\langle A \rangle_{\psi} := \int_{\sigma(A)} \lambda d\mu_{\psi, \psi}^{(P(A))}(\lambda)$$

possiamo derivarne la famosa formula

$$\langle A \rangle_{\psi} = \langle \psi | A \psi \rangle$$

## 1.7 Divergenza della serie di Dyson

Generalmente le serie in fisica non sono convergenti e non importa che lo siano. In particolare, la serie proposta da Dyson per trovare approssimazioni successive dell'operatore evoluzione temporale con Hamiltoniane illimitate e tempo-dipendenti diverge molto velocemente.

### Teorema (Formula di Taylor con Resto di Peano)

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo,  $x_0$  un punto interno ad  $I$ , e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione.

Se  $f$  è derivabile  $n$  volte nel punto  $x_0$ , allora esiste un unico polinomio  $P_n(x)$  di grado minore o uguale a  $n$  tale che

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

Il polinomio  $P_n(x)$  è il **Polinomio di Taylor** di  $f$  centrato in  $x_0$ :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

La notazione  $o((x - x_0)^n)$  (detto **Resto di Peano**) indica una funzione  $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$  tale che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Questo significa che possiamo sempre stimare di quanto stiamo sbagliando se supponiamo di prendere un intervallo delle  $x$  e un'espansione della serie fino all'ordine  $k$ -esimo.

$$|R_n(x)| \leq M|x - x_0|^n$$

dove  $M$  dipende dalla derivata  $n$ -esima e  $|x - x_0|$  è l'intervallo che stiamo considerando.

Calandoci nell'esempio della serie di Dyson (o di qualsiasi altra serie divergente), quello che ci mostra questo teorema è che se io scelgo una certa accuratezza  $\varepsilon$  (dovuta allo strumento) che stimi l'errore, allora  $\forall \varepsilon > 0 \exists x$  t.c.  $M|x - x_0|^n > \varepsilon$  e non solo, infatti  $M$ , cresce con l'ordine della derivata (in questo tipo di serie) e quindi quello che succede è che più si vuole un resto accurato e ad un ordine alto, più si deve accorciare la scala dei tempi ( $x$ ). Queste serie vengono dette asintotiche.

## 1.8 $C^*$ algebre

La coniugazione hermitiana fornisce il pretesto naturale per introdurre uno dei concetti matematici più utili nelle formulazioni avanzate della Meccanica Quantistica: le  $C^*$ -algebre (note in passato anche come  $B^*$ -algebre). Riprenderemo questi concetti nei capitoli successivi per discutere il teorema di decomposizione spettrale e la formulazione algebrica delle teorie quantistiche.

### Definizione ( $*$ -algebra e $C^*$ -algebra)

Sia  $\mathfrak{A}$  un'algebra (commutativa o meno, con unità o meno) sul campo  $\mathbb{C}$ . Un'applicazione  $*$  :  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  è detta **involuzione** se soddisfa le seguenti proprietà per ogni  $x, y \in \mathfrak{A}$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ :

1. **Antilinearità:**  $(\alpha x + \beta y)^* = \bar{\alpha}x^* + \bar{\beta}y^*$ ;
2. **Involutività:**  $(x^*)^* = x$ ;
3. **Antimoltiplicatività:**  $(xy)^* = y^*x^*$ .

La struttura  $(\mathfrak{A}, *)$  è chiamata  **$*$ -algebra**.

Se  $\mathfrak{A}$  è anche un'algebra di Banach (normata e completa), essa è detta **Banach  $*$ -algebra** se l'involuzione è isometrica, ovvero  $\|x^*\| = \|x\|$  (o equivalentemente  $\|x^*x\| \leq \|x\|^2$ ).

Una Banach  $*$ -algebra è detta  **$C^*$ -algebra** se la norma soddisfa l'identità  $C^*$ :

$$\|x^*x\| = \|x\|^2 \quad \text{per ogni } x \in \mathfrak{A}. \quad (1)$$

### Definizione (Morfismi di $*$ -algebre)

Siano  $\mathfrak{A}_1$  e  $\mathfrak{A}_2$  due  $*$ -algebre (con unità). Un omomorfismo di algebre  $f : \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2$  si dice  **$*$ -omomorfismo** se preserva l'involuzione:

$$f(x^*) = f(x)^* \quad \text{per ogni } x \in \mathfrak{A}_1,$$

e preserva l'unità (se presente), ovvero  $f(\mathbb{I}_1) = \mathbb{I}_2$ .

- Se  $f$  è anche biunivoco, si chiama  **$*$ -isomorfismo**.
- Un  $*$ -isomorfismo da  $\mathfrak{A}$  in se stessa ( $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_2$ ) è detto  **$*$ -automorfismo**.

Possiamo classificare gli elementi di una  $*$ -algebra in base al loro comportamento rispetto all'involuzione.

### Definizione (Elementi speciali)

Un elemento  $x$  in una  $*$ -algebra  $\mathfrak{A}$  (con unità  $\mathbb{I}$ ) si dice:

- (i) **Normale:** se commuta con il suo aggiunto,  $x^*x = xx^*$ ;
- (ii) **Hermitiano** (o autoaggiunto): se coincide con il suo aggiunto,  $x^* = x$ ;
- (iii) **Isometria:** se  $x^*x = \mathbb{I}$ ;
- (iv) **Unitario:** se  $x^*x = xx^* = \mathbb{I}$  (cioè l'inverso è l'aggiunto).

### Osservazione (Sottoalgebre e Generatori)

1. Una **\*-sottoalgebra** di  $\mathfrak{A}$  è una sottoalgebra chiusa rispetto all'operazione di involuzione. Nel caso delle  $C^*$ -algebre, una  $C^*$ -**sottoalgebra** deve essere anche chiusa nella topologia della norma (quindi completa).
2. L'intersezione arbitraria di \*-sottoalgebre è ancora una \*-sottoalgebra. Dato un sottoinsieme  $S \subset \mathfrak{A}$ , la \*-algebra **generata** da  $S$  è l'intersezione di tutte le \*-sottoalgebre che contengono  $S$ . Lo stesso vale, *mutatis mutandis*, per le  $C^*$ -sottoalgebre (che saranno chiuse).
3. L'inverso di un \*-isomorfismo è anch'esso un \*-isomorfismo.

Concludiamo con un risultato tecnico utile riguardante gli omomorfismi.

### Proposizione

Siano  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$  due \*-algebre con unità e sia  $\phi : \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2$  una mappa lineare che preserva il prodotto e l'involuzione. Se  $\phi$  è **suriettiva**, allora essa è automaticamente un \*-omomorfismo (ovvero preserva necessariamente l'unità:  $\phi(\mathbb{I}_1) = \mathbb{I}_2$ ).

### Osservazione (Conservazione dell'unità)

Vale un fatto algebrico generale: una mappa lineare suriettiva tra algebre con unità che preserva il prodotto preserva necessariamente anche l'elemento unitario ( $\phi(\mathbb{I}_1) = \mathbb{I}_2$ ).

Elenchiamo alcune proprietà cruciali che discendono direttamente dalla definizione di  $C^*$ -algebra.

### Proposizione (Proprietà fondamentali delle $C^*$ -algebre)

Sia  $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|)$  una  $C^*$ -algebra con involuzione  $*$ .

- (a) Se  $x \in \mathfrak{A}$  è un elemento **normale** ( $x^*x = xx^*$ ), allora per ogni  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\|x^n\| = \|x\|^n.$$

- (b) L'involuzione è un'**isometria**: per ogni  $x \in \mathfrak{A}$ ,

$$\|x^*\| = \|x\|.$$

- (c) Se  $\mathfrak{A}$  possiede unità  $\mathbb{I}$ , allora  $\mathbb{I}^* = \mathbb{I}$ . Inoltre,  $x$  è invertibile se e solo se  $x^*$  lo è, e vale la relazione:

$$(x^{-1})^* = (x^*)^{-1}.$$

È possibile costruire nuove  $C^*$ -algebre a partire da famiglie esistenti.

### Definizione (Somma diretta di $C^*$ -algebre)

Sia  $\{\mathfrak{A}_j\}_{j \in J}$  una famiglia di  $C^*$ -algebre (dove  $J$  ha cardinalità arbitraria). Consideriamo l'insieme delle famiglie  $\{a_j\}_{j \in J}$  (con  $a_j \in \mathfrak{A}_j$ ) che sono limitate in norma, equipaggiato con la norma del sup:

$$\|\{a_j\}_{j \in J}\| := \sup_{j \in J} \|a_j\|_j < +\infty. \quad (2)$$

Dotando questo insieme delle operazioni puntuali (somma, prodotto, involuzione componente per componente), si ottiene una struttura di algebra chiamata **somma diretta** e indicata con:

$$\bigoplus_{j \in J} \mathfrak{A}_j.$$

Tale struttura risulta essere una  $C^*$ -algebra rispetto alla norma definita.

### Osservazione (Rigidità delle $C^*$ -algebre)

La struttura di una  $C^*$ -algebra è notevole perché le sue proprietà topologiche e algebriche sono profondamente intrecciate. Si può dimostrare (e lo vedremo più avanti) che:

- Ogni \*-omomorfismo  $\phi$  tra  $C^*$ -algebre con unità è **automaticamente continuo** (anzi, contrattivo:  $\|\phi(a)\| \leq \|a\|$ ).
- Un \*-omomorfismo è un'**isometria** ( $\|\phi(a)\| = \|a\|$ ) se e solo se è **iniettivo**.

## Esempi principali

1. Le algebre di funzioni complesse (come  $C(K)$  o  $L^\infty$ ) sono esempi di  $C^*$ -algebre **commutative**, dove l'involuzione è la complessa coniugazione.
2. **Operatori limitati:** Se  $\mathcal{H}$  è uno spazio di Hilbert, l'algebra  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  degli operatori lineari limitati è una  $C^*$ -algebra con unità (non commutativa, se  $\dim(\mathcal{H}) > 1$ ), dove l'involuzione è data dall'aggiunto hermitiano.

Prima di addentrarci nelle rappresentazioni, è utile menzionare la struttura dei **quaternioni**  $\mathbb{H}$ . Essa può essere vista come un'algebra reale normata con unità. Sebbene il campo base sia  $\mathbb{R}$ , è possibile definire un'involuzione tramite il coniugato quaternionico, rendendo  $\mathbb{H}$  una  $C^*$ -algebra reale (soddisfa  $\|q^*q\| = \|q\|^2$ ).

Una rappresentazione concreta di  $\mathbb{H}$  è data dalla sottoalgebra reale delle matrici  $2 \times 2$  complesse generata dall'identità  $\mathbb{I}$  e dalle matrici  $-i\sigma_1, -i\sigma_2, -i\sigma_3$  (dove  $\sigma_i$  sono le matrici di Pauli).  $\mathbb{H}$  è un **anello con divisione** (ogni elemento non nullo è invertibile) non commutativo.

Esistono risultati fondamentali che classificano tali strutture, rilevanti per i fondamenti della fisica quantistica (si ricordi il Teorema di Solèr).

### Teorema (Frobenius e Hurwitz)

- **Teorema di Frobenius (1887):** Ogni algebra associativa con divisione a dimensione finita sul campo reale  $\mathbb{R}$  è necessariamente isomorfa a  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{H}$ .
- **Teorema di Hurwitz (1923):** Ogni algebra  $\mathfrak{A}$  con divisione, associativa, normata e unitale su  $\mathbb{R}$  tale che  $\|ab\| = \|a\|\|b\|$  è isometricamente isomorfa a  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{H}$ .

(Rilasciando l'associatività si ottengono anche gli ottetti di Cayley  $\mathbb{O}$ ).

### 1.8.1 Rappresentazioni di $*$ -algebre

Una definizione centrale nelle teorie quantistiche avanzate (come la QFT) è quella di rappresentazione di un'algebra di operatori astratti su uno spazio di Hilbert concreto.

#### Definizione (Rappresentazione)

Sia  $\mathfrak{A}$  una  $*$ -algebra (non necessariamente unitale o  $C^*$ ) e  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert. Un  $*$ -omomorfismo  $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  è detto **rappresentazione** di  $\mathfrak{A}$  su  $\mathcal{H}$ . Si richiede esplicitamente che la rappresentazione preservi l'unità se presente nell'algebra, ovvero  $\pi(\mathbb{I}_{\mathfrak{A}}) = \mathbb{I}_{\mathcal{H}}$ .

Si definiscono le seguenti proprietà per una rappresentazione  $\pi$ :

- (a) **Fedele (Faithful):** se  $\pi$  è iniettiva (il kernel è nullo).
- (b) **Irriducibile:** se non esistono sottospazi chiusi di  $\mathcal{H}$  (diversi da  $\{0\}$  e  $\mathcal{H}$  stesso) che siano invarianti sotto l'azione di  $\pi(\mathfrak{A})$ . Ovvero, se  $M \subset \mathcal{H}$  è chiuso e  $\pi(a)M \subset M$  per ogni  $a \in \mathfrak{A}$ , allora  $M = \{0\}$  o  $M = \mathcal{H}$ .
- (c) **Unitariamente Equivalente:** Due rappresentazioni  $\pi$  su  $\mathcal{H}$  e  $\pi'$  su  $\mathcal{H}'$  sono equivalenti se esiste un'isometria suriettiva (unitario)  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  tale che  $U\pi(a)U^{-1} = \pi'(a)$  per ogni  $a \in \mathfrak{A}$ .

#### Definizione (Vettore Ciclico)

Un vettore  $\psi \in \mathcal{H}$  si dice **ciclico** per la rappresentazione  $\pi$  se l'insieme  $\{\pi(a)\psi \mid a \in \mathfrak{A}\}$  è denso in  $\mathcal{H}$ .

Le proprietà di irriducibilità e ciclicità sono strettamente legate:

#### Proposizione

Sia  $\pi$  una rappresentazione irriducibile di una  $*$ -algebra con unità su  $\mathcal{H} \neq \{0\}$ . Allora **ogni** vettore non nullo  $\psi \in \mathcal{H}$  è ciclico per  $\pi$ .

#### Osservazione (Continuità Automatica)

Se  $\mathfrak{A}$  è una  $C^*$ -algebra con unità, ogni rappresentazione è automaticamente continua (rispetto alla norma di  $\mathfrak{A}$  e alla norma operatoriale su  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ). In particolare, è una contrazione:  $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$ .

Infine, analizziamo il caso in cui una mappa lineare preservi prodotti e involuzioni ma "manchi" l'identità, non qualificandosi come rappresentazione secondo la Definizione 3.52.

**Proposizione (Rappresentazione ridotta)**

Sia  $\mathfrak{A}$  una  $*$ -algebra con unità e  $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  una mappa lineare che preserva prodotti e involuzioni (ma non necessariamente l'unità). Allora lo spazio di Hilbert si decompone come  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\phi \oplus \mathcal{H}_\phi^\perp$ , dove  $\mathcal{H}_\phi = \text{Ran}(\phi(\mathbb{I}))$ . Valgono i seguenti fatti:

1. Entrambi i sottospazi sono invarianti sotto  $\phi(a)$  per ogni  $a$ .
2. La restrizione su  $\mathcal{H}_\phi^\perp$  è nulla:  $\phi(a) \upharpoonright_{\mathcal{H}_\phi^\perp} = 0$ .
3. La restrizione sul complemento  $\pi_\phi : \mathfrak{A} \ni a \mapsto \phi(a) \upharpoonright_{\mathcal{H}_\phi} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\phi)$  è una **rappresentazione** (preserva l'unità su  $\mathcal{H}_\phi$ ).

Inoltre,  $\pi_\phi$  è irriducibile se e solo se  $\phi$  non è la mappa nulla e non esistono sottospazi propri invarianti non banali in  $\mathcal{H}$ .

## 1.9 Algebre di von Neumann (o $W^*$ -algebre)

Un concetto centrale nello studio delle algebre di operatori è quello di commutante, che descrive l'insieme degli operatori che commutano con una data classe.

**Definizione (Commutante)**

Sia  $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  un sottoinsieme di operatori limitati su uno spazio di Hilbert complesso (non necessariamente chiuso o un'algebra). Il **commutante** di  $\mathfrak{M}$  è definito come:

$$\mathfrak{M}' := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid TA - AT = 0 \text{ per ogni } A \in \mathfrak{M}\}.$$

Iterando la costruzione, si definisce il **bicommutante** come  $\mathfrak{M}'' := (\mathfrak{M}')'$ .

**Osservazione (Proprietà algebriche e topologiche)**

1. Se  $\mathfrak{M}$  è chiuso rispetto all'involuzione (un  $*$ -insieme), allora  $\mathfrak{M}'$  è una  $*$ -algebra con unità.
2. Vale sempre l'inclusione  $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}''$ .
3. Non si ottengono nuovi insiemi oltre il secondo commutante, poiché  $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'''$ .
4. Una proprietà cruciale è la chiusura topologica:  $\mathfrak{M}'$  è sempre chiuso non solo nella topologia uniforme, ma anche nelle topologie **debole** e **forte** degli operatori.

Il legame tra proprietà algebriche (il commutante) e topologiche (la chiusura) è sancito da uno dei teoremi più importanti dell'analisi funzionale.

**Teorema (Teorema del Bicommutante di von Neumann)**

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert complesso e  $\mathfrak{A}$  una  $*$ -sottoalgebra con unità di  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . I seguenti fatti sono equivalenti:

- (a)  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}''$  (l'algebra coincide con il suo bicommutante);
- (b)  $\mathfrak{A}$  è chiusa nella topologia debole degli operatori;
- (c)  $\mathfrak{A}$  è chiusa nella topologia forte degli operatori.

Inoltre, se  $\mathfrak{B}$  è una qualunque  $*$ -sottoalgebra con unità, il suo bicommutante  $\mathfrak{B}''$  coincide con la sua chiusura debole e con la sua chiusura forte:

$$\mathfrak{B}'' = \overline{\mathfrak{B}}^w = \overline{\mathfrak{B}}^s.$$

**Definizione (Algebra di von Neumann)**

Sia  $\mathcal{H} \neq \{0\}$  uno spazio di Hilbert complesso. Un'**Algebra di von Neumann** su  $\mathcal{H}$  è una  $*$ -sottoalgebra con unità  $\mathfrak{R} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  che soddisfa la condizione  $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}''$ .



### 1.9.1 Generazione e Struttura di Reticolo

Dato un insieme \*-chiuso  $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , l'algebra di von Neumann **generata** da  $\mathfrak{M}$  è la più piccola algebra di von Neumann che contiene  $\mathfrak{M}$ . Per le proprietà del bicommutante, questa coincide esattamente con  $\mathfrak{M}''$ .

L'insieme di tutte le algebre di von Neumann su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , ordinato per inclusione, possiede una ricca struttura matematica. Siano  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  due algebre di von Neumann. Definiamo le operazioni reticolari:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} &:= \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \\ \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} &:= (\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})''\end{aligned}$$

Si noti che l'unione insiemistica  $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$  non è generalmente un'algebra, motivo per cui è necessario prendere il bicommutante (o la chiusura forte) per definire il join ( $\vee$ ).

#### Proposizione (Dualità e Reticolo)

*Valgono le seguenti leggi di tipo De Morgan per i commutanti:*

- (a)  $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})' = \mathfrak{A}' \wedge \mathfrak{B}'$
- (b)  $(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})' \supset \mathfrak{A}' \vee \mathfrak{B}'$  (l'uguaglianza vale se  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  sono fattori o in casi specifici).

La famiglia delle algebre di von Neumann su  $\mathcal{H}$  forma un **reticolo completo ortocomplementato**, dove:

- L'elemento minimo è  $\mathbf{0} = \{cI\}_{c \in \mathbb{C}}$  (i multipli dell'identità).
- L'elemento massimo è  $\mathbf{1} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .
- L'operazione di ortocomplemento è data dal commutante  $\neg \mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ .

### 1.9.2 Prodotti Tensoriali e Isomorfismi

Per descrivere sistemi quantistici composti, è necessario definire il prodotto tensoriale di algebre. Siano  $\mathfrak{A}_1 \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$  e  $\mathfrak{A}_2 \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$  due algebre di von Neumann. Il semplice prodotto tensoriale algebrico  $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$  non è chiuso nelle topologie debole/forte.

#### Definizione (Prodotto Tensoriale di von Neumann)

*Si definisce il prodotto tensoriale di von Neumann  $\mathfrak{A}_1 \bar{\otimes} \mathfrak{A}_2$  come l'algebra di von Neumann su  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  generata dal prodotto algebrico:*

$$\mathfrak{A}_1 \bar{\otimes} \mathfrak{A}_2 := (\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)''.$$

*Vale la notevole proprietà del commutante:*

$$(\mathfrak{A}_1 \bar{\otimes} \mathfrak{A}_2)' = \mathfrak{A}_1' \bar{\otimes} \mathfrak{A}_2'.$$

Quando si confrontano due algebre di von Neumann  $\mathfrak{A}_1$  su  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathfrak{A}_2$  su  $\mathcal{H}_2$ , distinguiamo due livelli di equivalenza:

1. **Isomorfismo (algebrico):** Esiste un \*-isomorfismo unitario  $\phi : \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_2$ . Per le algebre di von Neumann, un tale isomorfismo è automaticamente isometrico e continuo rispetto alle topologie pre-duali.
2. **Isomorfismo Spaziale:** Esiste un'isometria lineare suriettiva (operatore unitario)  $V : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  tale che l'azione dell'algebra venga preservata:

$$\mathfrak{A}_2 = \{VAV^{-1} \mid A \in \mathfrak{A}_1\}.$$

Questo è un concetto più forte dell'isomorfismo algebrico.

### 1.9.3 Operatori Illimitati e Affiliazione

In meccanica quantistica, molte osservabili fisiche (posizione, momento, energia) sono rappresentate da operatori autoaggiunti *illimitati*, che non appartengono a  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  e quindi non sono elementi dell'algebra di von Neumann in senso stretto. Tuttavia, essi possono essere "affiliati" ad essa.

Sia  $\mathfrak{N}$  un insieme di operatori autoaggiunti (tipicamente illimitati) su  $\mathcal{H}$ .

**Definizione (Commutante esteso e Algebra generata)**

- Il commutante  $\mathfrak{N}'$  è definito come l'insieme di tutti gli operatori limitati  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  che commutano con le misure spettrali  $P^{(A)}$  di ogni  $A \in \mathfrak{N}$ .
- L'algebra di von Neumann generata da  $\mathfrak{N}$  è  $\mathfrak{N}'' := (\mathfrak{N}')'$ .

**Definizione (Operatore Affiliato)**

Un operatore autoaggiunto  $A : D(A) \rightarrow \mathcal{H}$  si dice **affiliato** all'algebra di von Neumann  $\mathfrak{N}$  (si scrive  $A \eta \mathfrak{N}$ ) se le sue proiezioni spettrali appartengono all'algebra:

$$P_E^{(A)} \in \mathfrak{N} \quad \text{per ogni boreliano } E \subset \mathbb{R}.$$

Equivalentemente,  $A \eta \mathfrak{N}$  se e solo se  $A$  commuta con ogni operatore nel commutante  $\mathfrak{N}'$ , ovvero:

$$UAU^{-1} = A \quad (\text{o meglio } UA \subset AU) \quad \forall U \in \mathfrak{N}' \text{ unitario.}$$

**Proposizione (Approssimazione)**

Se  $A \eta \mathfrak{N}$ , allora  $A$  è il limite forte sul suo dominio  $D(A)$  di una successione di operatori limitati  $A_n \in \mathfrak{N}$ . Questo giustifica l'idea che gli operatori affiliati siano "limiti" ideali dell'algebra.

Concludiamo con il caso più semplice e fondamentale.

**Proposizione (Il caso  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ )**

Sia  $\mathcal{H} \neq \{0\}$ . Allora:

- Il commutante dell'intera algebra degli operatori è costituito dai soli scalari:  $\mathcal{B}(\mathcal{H})' = \{c\mathbb{I}\}$ . Di conseguenza,  $\mathcal{B}(\mathcal{H})'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , confermando che è un'algebra di von Neumann.
- Poiché il centro è banale ( $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \cap \{c\mathbb{I}\} = \{c\mathbb{I}\}$ ),  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  è un **fattore**.
- Non esistono sottospazi chiusi non banali che siano invarianti sotto l'azione di tutti gli elementi di  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  (proprietà di transistività o irriducibilità).

### 1.9.4 Somma Hilbertiana di Algebre di von Neumann

Esiste una naturale corrispondenza tra la somma diretta di spazi di Hilbert e la somma diretta di  $C^*$ -algebre, che si specializza nel caso delle algebre di von Neumann.

**Proposizione (Costruzione della Somma Diretta di Operatori)**

Consideriamo una famiglia di spazi di Hilbert non banali  $\{\mathcal{H}_j\}_{j \in J}$  e una famiglia di  $C^*$ -algebre di operatori  $\{\mathfrak{A}_j\}_{j \in J}$ , con  $\mathfrak{A}_j \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_j)$ .

- Isomorfismo Isometrico:** Dato un elemento astratto della somma diretta  $\bigoplus_{j \in J} \mathfrak{A}_j$  (ovvero una famiglia limitata di operatori), possiamo definire l'operatore globale  $\hat{\bigoplus}_{j \in J} A_j$  agente sullo spazio somma  $\bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_j$  come:

$$\left( \hat{\bigoplus}_{j \in J} A_j \right) \left( \bigoplus_{j \in J} x_j \right) := \bigoplus_{j \in J} (A_j x_j). \quad (3)$$

Tale operatore è ben definito e limitato. Inoltre, la norma dell'operatore coincide con la  $C^*$ -norma della somma diretta astratta:

$$\left\| \hat{\bigoplus}_{j \in J} A_j \right\|_{\mathcal{B}(\bigoplus \mathcal{H}_j)} = \left\| \bigoplus_{j \in J} A_j \right\|_{\bigoplus \mathfrak{A}_j} = \sup_{j \in J} \|A_j\|.$$

La mappa che associa la somma astratta all'operatore concreto è un  $*$ -omomorfismo isometrico.

(b) **Commutante della somma:** Il commutante della somma diretta è la somma diretta dei commutanti:

$$\left( \hat{\bigoplus}_{j \in J} \mathfrak{A}_j \right)' = \hat{\bigoplus}_{j \in J} \mathfrak{A}_j'.$$

(c) **Proprietà di von Neumann:** Se ogni componente  $\mathfrak{A}_j$  è un'algebra di von Neumann, allora anche l'algebra somma  $\hat{\bigoplus}_{j \in J} \mathfrak{A}_j$  è un'algebra di von Neumann.

### Definizione (Somma diretta di Algebre di von Neumann)

Sia  $\{\mathfrak{A}_j\}_{j \in J}$  una famiglia di algebre di von Neumann su spazi  $\{\mathcal{H}_j\}_{j \in J}$ . L'algebra di von Neumann definita nella proposizione precedente è chiamata **somma diretta della famiglia di algebre di von Neumann**.

### Osservazione (Notazione semplificata)

Poiché la costruzione definisce un isomorfismo isometrico canonico tra l'algebra astratta delle famiglie limitate e l'algebra concreta degli operatori sullo spazio somma, nel seguito si semplificherà la notazione rimuovendo il simbolo "cappello". Indicheremo con lo stesso simbolo  $\bigoplus_{j \in J} A_j$  sia l'elemento astratto che l'operatore concreto, e con  $\bigoplus_{j \in J} \mathfrak{A}_j$  l'algebra somma.

## 1.10 Visualizzazione geometrica della convoluzione

Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie *indipendenti* con densità di probabilità  $f_X$  e  $f_Y$ . Siamo interessati alla variabile somma  $Z = X + Y$ . È noto che la densità di  $Z$ , denotata con  $f_Z$ , è data dalla convoluzione delle densità:

$$f_Z(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(y) f_Y(z - y) dy$$

Nell'analisi delle PDE, cerchiamo la soluzione  $u$  dell'equazione  $P(D)u = f$ . La soluzione è data dalla convoluzione tra la sorgente  $f$  e la soluzione fondamentale  $E$ :

$$u(x) = (f * E)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) E(x - y) dy$$

Possiamo stabilire il seguente dizionario concettuale:

Teoria della Probabilità ( $Z = X + Y$ )	Teoria delle PDE ( $x = y + h$ )
Valore della V.A. $X$ Densità $f_X$	Posizione della Sorgente $y$ (Causa) Intensità della Sorgente $f$
Valore della V.A. $Y$ Densità $f_Y$	Vettore Spostamento/Propagazione $h$ Soluzione Fondamentale $E$ (Legge Fisica)
Valore della Somma $Z$ Densità della Somma $f_Z$	Punto di Osservazione $x$ (Effetto) Campo Risultante $u$
Indipendenza di $X$ e $Y$	Invarianza per Traslazione (Coeff. Costanti)

### Osservazione

In questa visione, risolvere una PDE significa rispondere alla domanda: "Dato che la sorgente è distribuita come  $f(y)$  e che la fisica impone uno spostamento distribuito come  $E(h)$ , qual è la distribuzione risultante delle posizioni finali  $x = y + h$ ?"

#### 1.10.1 Il Framework Geometrico: Fiber Integration

Per rendere rigorosa questa intuizione, lavoriamo nello **Spazio Prodotto** (l'analogo dello spazio campionario congiunto). Consideriamo lo spazio  $\mathcal{M} = \mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_h^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ . In questo spazio, l'indipendenza delle variabili (o il disaccoppiamento tra sorgente e legge fisica) si traduce nella costruzione di una distribuzione prodotto tensore  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ :

$$T(y, h) = f(y) \otimes E(h)$$

Il supporto di  $T$  è il prodotto cartesiano dei supporti:  $\text{supp}(T) = \text{supp}(f) \times \text{supp}(E)$ . Questo oggetto rappresenta la **densità congiunta** del sistema.

L'operazione di somma  $Z = X + Y$  corrisponde all'applicazione della mappa sommersiva  $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\sigma(y, h) = y + h$$

La soluzione  $u$  è formalmente il **push-forward** (o immagine diretta) della distribuzione  $T$  tramite  $\sigma$ :

$$u = \sigma_*(f \otimes E)$$

### Definizione (Integrazione sulle Fibre)

Geometricamente, valutare  $u$  in un punto target  $x$  significa integrare la distribuzione congiunta  $f(y)E(h)$  lungo la **fibra**  $\sigma^{-1}(x)$ , definita come:

$$\mathcal{F}_x = \{(y, h) \in \mathbb{R}^{2n} : y + h = x\}$$

Questa fibra è l'iperpiano (o retta affine) definita dall'equazione  $h = x - y$ .

Questa è l'esatta controparte geometrica della **marginalizzazione** in probabilità: per trovare la probabilità che  $Z = z$ , sommiamo tutte le probabilità delle coppie  $(X, Y)$  tali che la loro somma sia  $z$ .

### 1.10.2 Intuizione sull'equazione fondamentale

Per comprendere profondamente la struttura della soluzione  $u(x)$ , dobbiamo abbandonare l'idea di calcolarla punto per punto e visualizzare invece l'intero processo come un'operazione geometrica nello spazio delle fasi esteso. Questo processo si articola in tre momenti logici che giustificano l'uso della convoluzione.

1. Il **“Sollevamento” (Lifting) nello Spazio Prodotto**: Risolvere la PDE  $P(D)u = f$  significa determinare come le cause (distribuite secondo  $f$ ) generino effetti (propagati secondo  $E$ ). Nello spazio fisico  $\mathbb{R}^n$ , queste due informazioni sono sovrapposte.

“Sollevare” il problema significa passare dallo spazio fisico  $\mathbb{R}^n$  allo spazio prodotto  $\mathbb{R}_y^n \times \mathbb{R}_h^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ . Qui disaccoppiamo le variabili:

- La variabile  $y$  rappresenta la **posizione della sorgente** (dove nasce l'impulso).
- La variabile  $h$  rappresenta lo **spostamento** (il vettore propagazione permesso dall'operatore differenziale).

In questo spazio a  $2n$  dimensioni, costruiamo l'oggetto  $T(y, h) = f(y) \cdot E(h)$ . Questo prodotto tensore rappresenta la totalità delle possibili interazioni *prima* che venga imposto il vincolo di osservazione. Geometricamente, stiamo “spalmando” la legge fisica  $E$  su ogni punto del supporto della sorgente  $f$ .

2. Il **Vincolo di Osservazione (Slicing)**: Il legame con la soluzione  $u(x)$  avviene quando fissiamo un punto di osservazione  $x$ . La fisica impone che un segnale partito da  $y$  e viaggiato per  $h$  contribuisca al campo in  $x$  se e solo se vettorialmente:

$$y + h = x \quad \implies \quad h = x - y$$

Questa equazione definisce una varietà lineare (una “fetta” o fibra) nello spazio  $\mathbb{R}^{2n}$ . Mentre lo spazio prodotto contiene *tutte* le storie possibili, questa fetta seleziona solo quelle storie che sono geometricamente compatibili con l'osservatore posto in  $x$ .

3. La **Marginalizzazione (Perché la Convoluzione?)**: Poiché l'equazione è lineare, il campo totale  $u(x)$  è la sovrapposizione (somma) di tutti i contributi compatibili. L'operazione di **convoluzione** non è altro che l'integrazione della densità congiunta  $f(y)E(h)$  lungo la fetta selezionata al punto precedente.

Matematicamente, stiamo eseguendo un *push-forward* (o marginalizzazione): stiamo proiettando la massa distribuita nella fetta dello spazio a  $2n$  dimensioni sul singolo punto  $x$ .

$$u(x) = \int_{\text{Fibra } y+h=x} \underbrace{f(y)}_{\text{Causa}} \cdot \underbrace{E(h)}_{\text{Legge}} d\lambda$$

Senza questo passaggio, avremmo una descrizione ridondante di infinite coppie  $(y, h)$ ; con la convoluzione, comprimiamo questa informazione nell'unico valore fisico misurabile  $u(x)$ .

## 1.11 Esempio 1D: Equazione di Trasporto con Decadimento

Analizziamo il caso  $\mathbb{R}^1$  per un'equazione causale, analoga alla somma di una variabile uniforme e una esponenziale.

$$u' + u = f$$

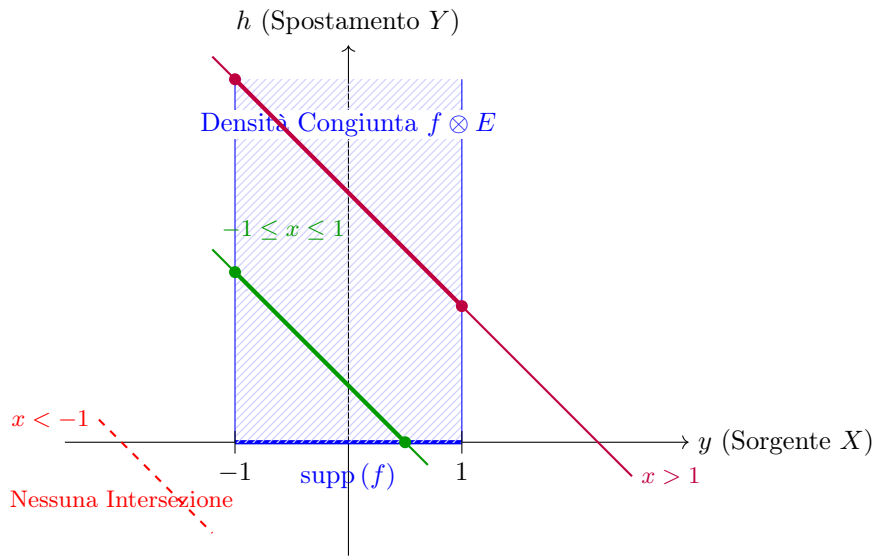
- **Sorgente (V.A. Uniforme):**  $f(y) = \chi_{[-1,1]}(y)$ . La sorgente è attiva solo in  $[-1, 1]$ .
- **Legge Fisica (V.A. Esponenziale):**  $E(h) = H(h)e^{-h}$ . L'informazione viaggia solo in avanti ( $h \geq 0$ ) e decade.

### 1.11.1 Geometria nello Spazio $(y, h)$

Il supporto congiunto  $\text{supp}(f \otimes E)$  è la semistriscia verticale:

$$S = [-1, 1] \times [0, +\infty)$$

Le fibre di integrazione sono rette  $h = x - y$  con pendenza  $-1$ .



Guardando il diagramma, calcoliamo l'integrale della densità congiunta  $e^{-h}$  lungo i segmenti evidenziati.

- **Fase A ( $x < -1$ ):** La retta rossa (somma  $Z = x$ ) non tocca il supporto congiunto. Probabilità zero.

$$u(x) = 0$$

- **Fase B ( $-1 \leq x \leq 1$ ):** La retta verde interseca la striscia. L'integrazione avviene da  $y = -1$  fino a  $y = x$  (dove  $h$  tocca lo zero).

$$u(x) = \int_{-1}^x e^{-(x-y)} dy = e^{-x} [e^y]_{-1}^x = 1 - e^{-(x+1)}$$

*Interpretazione:* La risposta cresce mentre accumuliamo "probabilità".

- **Fase C ( $x > 1$ ):** La retta viola attraversa l'intera larghezza della sorgente, da  $y = -1$  a  $y = 1$ . Non c'è più nuova sorgente.

$$u(x) = \int_{-1}^1 e^{-(x-y)} dy = e^{-x} (e^1 - e^{-1}) = 2 \sinh(1) e^{-x}$$

*Interpretazione:* La risposta decade esponenzialmente ("coda" della distribuzione).

### Osservazione (Regolarità)

Si noti come, analogamente alla somma di V.A., la convoluzione "liscia" il risultato. La sorgente  $f$  era discontinua (funzione rettangolo), ma la soluzione  $u$  è continua ( $C^0$ ) ovunque, incollata dolcemente nei punti  $x = -1$  e  $x = 1$ . Questo è l'effetto regolarizzante del nucleo  $E$ .

## 2 Fondamenti logico-matematici della Meccanica Quantistica

### 2.1 Grandezze Classiche e Misurabilità

Le quantità classiche più complesse di un sistema possono essere descritte mediante funzioni misurabili secondo Borel definite sullo spazio delle fasi  $\Gamma$ . La scelta della  $\sigma$ -algebra di Borel è naturale in quanto determinata dalla topologia che si assume esistere su  $\Gamma$ .

#### Definizione (Grandezza Fisica e Valore di Aspettazione)

Una grandezza fisica è rappresentata da una funzione Borel-misurabile  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ . La misurabilità è un requisito fondamentale che permette di definire operazioni fisiche, come il calcolo del valore di aspettazione quando lo stato è descritto da una misura  $\mu$ :

$$\langle f \rangle_\mu = \int_\Gamma f d\mu.$$

#### Osservazione (Proprietà Elementari)

Le cosiddette “proprietà elementari” del sistema sono descritte da funzioni misurabili che assumono solo valori binari, ovvero  $g : \Gamma \rightarrow \{0, 1\}$ . Queste funzioni sono identificate fedelmente con le funzioni caratteristiche (o indicatrici) di insiemi di Borel. Dato un insieme di Borel  $E_g = g^{-1}(\{1\})$ , si ha infatti  $g = \chi_{E_g}$ . È importante notare che richiedere la continuità per queste funzioni sarebbe troppo restrittivo: le proprietà elementari non sarebbero rappresentabili se ci si limitasse alle mappe continue.

Una generica quantità fisica  $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  è completamente determinata dalla classe degli insiemi di Borel  $E_B^{(f)}$ , definiti come la controimmagine di un insieme  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ :

$$E_B^{(f)} := f^{-1}(B). \quad (4)$$

Il significato fisico dell'insieme  $E_B^{(f)}$  è: “l'insieme degli stati in cui il valore di  $f$  appartiene a  $B$ ”.

#### Proposizione (Proprietà della Mappa Inversa)

La mappa  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto E_B^{(f)}$  permette di ricostruire la funzione  $f$ . La classe degli insiemi  $E_B^{(f)}$  forma una  $\sigma$ -algebra e soddisfa le seguenti proprietà elementari al variare di  $B$  in  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ :

- (Fi)  $E_{\mathbb{R}}^{(f)} = \Gamma$ ;
- (Fii)  $E_B^{(f)} \cap E_C^{(f)} = E_{B \cap C}^{(f)}$ ;
- (Fiii) Se  $N \subset \mathbb{N}$  e  $\{B_k\}_{k \in N} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$  è una famiglia di insiemi a due a due disgiunti ( $B_j \cap B_k = \emptyset$  per  $k \neq j$ ), allora:

$$\bigcup_{j \in N} E_{B_j}^{(f)} = E_{\bigcup_{j \in N} B_j}^{(f)}.$$

#### Osservazione (Commenti sulle proprietà)

Si possono fare alcune precisazioni sulle proprietà sopra elencate:

- (a) Utilizzando (Fi) e (Fiii), la proprietà (Fii) può essere sostituita dalla proprietà sul complemento:  $E_{\mathbb{R} \setminus E}^{(f)} = \Gamma \setminus E_E^{(f)}$ . In particolare, si ha  $E_{\emptyset}^{(f)} = \emptyset$ .
- (b) Le proprietà (Fii) e (Fiii) implicano che la condizione di disgiunzione in (Fiii) non è strettamente necessaria; l'uguaglianza vale anche rimuovendo il vincolo  $B_j \cap B_k = \emptyset$ .
- (c) Infine, invocando le leggi di De Morgan, la proprietà (Fiii) è valida anche sostituendo l'unione  $\cup$  con l'intersezione  $\cap$ .

### 2.2 La nozione di Reticolo

Tornando alla struttura matematica delle proprietà elementari classiche, osserviamo che esse possono essere inquadrare nella nozione algebrica di *reticolo*.

Richiamiamo brevemente che in un insieme parzialmente ordinato (o *poset*)  $(X, \geq)$ , se  $Y \subset X$ , il simbolo  $\sup Y$  denota (se esiste) il più piccolo elemento  $x \in X$  tale che  $x \geq y$  per ogni  $y \in Y$ . Analogamente,  $\inf Y$  denota (se esiste) il più grande elemento  $x \in X$  tale che  $y \geq x$  per ogni  $y \in Y$ .

### Definizione (Reticolo)

Un insieme parzialmente ordinato  $(X, \geq)$  è definito **reticolo** (in inglese *lattice*) se, per ogni coppia di elementi  $a, b \in X$ :

- (a) Esiste in  $X$   $\sup\{a, b\}$ , denominato **join** e indicato con  $a \vee b$ ;
- (b) Esiste in  $X$   $\inf\{a, b\}$ , denominato **meet** e indicato con  $a \wedge b$ .

Si noti che il poset  $(X, \geq)$  non deve necessariamente essere totalmente ordinato. La notazione  $a \leq b$  è equivalente a  $b \geq a$ .

### Osservazione

- (a) Nei casi concreti in cui  $X = \mathcal{B}(\mathbb{R})$  o  $X = \mathcal{B}(\Gamma)$ , la relazione d'ordine  $\geq$  coincide con l'inclusione insiemistica  $\supseteq$ . Di conseguenza, l'operazione di join  $\vee$  corrisponde all'unione  $\cup$ , mentre il meet  $\wedge$  corrisponde all'intersezione  $\cap$ .
- (b) In un reticolo generale, le operazioni  $\vee$  e  $\wedge$  risultano essere associative e commutative. Valgono inoltre le **leggi di assorbimento**:

$$a \vee (a \wedge b) = a \quad e \quad a \wedge (a \vee b) = a.$$

- (c) Esiste una stretta relazione tra l'ordine e le operazioni: in un reticolo,  $a \geq b$  se e solo se  $a \vee b = a$  (o equivalentemente  $a \wedge b = b$ ).

### Definizione (Algebra di Boole)

Un reticolo  $(X, \geq)$  si dice:

- (a) **Distributivo**: se le operazioni  $\vee$  e  $\wedge$  si distribuiscono l'una rispetto all'altra. Per ogni  $a, b, c \in X$ :

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

- (b) **Limitato** (o *bounded*): se ammette un elemento minimo **0** (bottom) e un elemento massimo **1** (top).
- (c) **Ortocomplementato**: se è limitato ed è dotato di una mappa  $X \ni a \mapsto \neg a$ , detta **ortocomplemento** di  $a$ , tale che:

- (i)  $a \vee \neg a = \mathbf{1}$  per ogni  $a \in X$ ;
- (ii)  $a \wedge \neg a = \mathbf{0}$  per ogni  $a \in X$ ;
- (iii)  $\neg(\neg a) = a$  per ogni  $a \in X$  (involutività);
- (iv)  $a \geq b \implies \neg b \geq \neg a$  per ogni  $a, b \in X$  (inversione dell'ordine).

- (d) **completo** (*risp.*  **$\sigma$ -completo**), se ogni insieme (numerabile)  $\{a_j\} \subset X$  ammette  $\inf$ :  $\bigwedge_{j \in J} a_j$  e

$$\sup: \bigvee_{j \in J} a_j.$$

Un reticolo con proprietà (a), (b) e (c) è chiamato **Algebra di Boole**. Un'algebra di Boole che soddisfa (d) con  $J = \mathbb{N}$  è una  $\sigma$ -algebra di Boole.

### Definizione (Sottoreticolo)

Un **sottoreticolo** è un sottoinsieme  $X_0 \subset X$  che eredita la struttura di reticolo da  $X$  nel seguente senso preciso: l'estremo inferiore e l'estremo superiore di ogni coppia di elementi di  $X_0$  devono esistere e coincidere con i corrispondenti estremo inferiore e superiore calcolati in  $X$ .

Facendo riferimento a sottoreticoli limitati (*bounded*) o ortocomplementati, si richiede per definizione che:

- L'elemento minimo (**bottom**) e l'elemento massimo (**top**) della sottostruttura coincidano con quelli della struttura maggiore;
- L'ortocomplemento di un elemento nella sottostruttura coincida con quello definito nella struttura maggiore.

In modo banale si può definire omomorfismi e isomorfismi su reticoli.

### Osservazione (Rappresentazione delle Algebre di Boole)

È naturale chiedersi se un'algebra di Boole astratta corrisponda sempre a un'algebra di insiemi.

- Il **Teorema di Loomis-Sikorski** garantisce che ogni  $\sigma$ -algebra di Boole astratta è isomorfa al quoziente  $\Sigma/\mathcal{N}$  di una  $\sigma$ -algebra concreta  $\Sigma$  su uno spazio di misura, modulo un ideale  $\mathcal{N}$  di insiemi di misura nulla.
- Nel caso più semplice di algebre di Boole (non  $\sigma$ ), il **Teorema di rappresentazione di Stone** prova l'isomorfismo con un'algebra concreta di insiemi.

Pertanto, il reticolo delle proprietà elementari di un sistema classico è a tutti gli effetti una  $\sigma$ -algebra di Boole concreta: è distributivo, limitato (con  $\mathbf{0} = \emptyset$  e  $\mathbf{1} = \Gamma$ ), ortocomplementato (complemento insiemistico) e  $\sigma$ -completo. La mappa definita in precedenza,  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \ni B \mapsto E_B^{(f)} \in \mathcal{B}(\Gamma)$ , è un omomorfismo di  $\sigma$ -algebre di Boole.

## 2.3 La logica non-Booleana della Meccanica Quantistica

Il quadro classico appena descritto diviene insostenibile per i sistemi quantistici. La ragione profonda risiede nell'esistenza di proprietà elementari *incompatibili*. Le idee fondamentali introdotte da von Neumann per formalizzare questa nuova logica si basano sui seguenti postulati:

- (N1) Dato un sistema quantistico, esiste uno spazio di Hilbert complesso e separabile  $\mathcal{H}$  tale che le osservabili elementari (quelle che assumono solo valori in  $\{0, 1\}$ ) sono rappresentate fedelmente dall'insieme  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  dei **proiettori ortogonali** su  $\mathcal{H}$ .
- (N2) Due osservabili elementari  $P, Q$  sono *compatibili* se e solo se i corrispondenti proiettori commutano ( $PQ = QP$ ).

### Osservazione

La richiesta di separabilità in (N1) è utile per molte costruzioni tecniche, ma talvolta può essere omessa o dedotta da requisiti fisici. Inoltre, per sistemi che ammettono regole di superselezione, il postulato (N1) richiede delle modifiche, ma per ora ci atteniamo alla versione standard.

L'insieme  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  possiede una naturale struttura d'ordine parziale indotta dall'inclusione dei sotto-spazi immagine. Scriviamo  $P \geq Q$  se e solo se  $P(\mathcal{H}) \supseteq Q(\mathcal{H})$ . Dotato di questo ordine,  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  diventa un reticolo con proprietà specifiche molto diverse da quelle classiche.

### Proposizione (Struttura del reticolo quantistico $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ )

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert complesso (non necessariamente separabile). Per ogni  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , definiamo l'ortocomplemento  $\neg P := \mathbb{I} - P$  (il proiettore sul complemento ortogonale  $P(\mathcal{H})^\perp$ ). La struttura

$$(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \geq, \mathbf{0}, \mathbb{I}, \neg)$$

è un reticolo limitato, ortocomplementato e completo (e quindi  $\sigma$ -completo), che tuttavia **non è distributivo** se  $\dim(\mathcal{H}) \geq 2$ .

In dettaglio, date  $P, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  e una famiglia  $\{P_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ :

- (i) Il **Join**  $P \vee Q$  è il proiettore ortogonale sulla somma chiusa dei range:

$$P \vee Q = \text{proj su } \overline{P(\mathcal{H}) + Q(\mathcal{H})}.$$

Analogamente,  $\bigvee_{j \in J} P_j$  è il proiettore sullo spazio chiuso generato dall'unione dei range:  $\text{span}\{P_j(\mathcal{H})\}_{j \in J}$ .

- (ii) Il **Meet**  $P \wedge Q$  è il proiettore ortogonale sull'intersezione dei range:

$$P \wedge Q = \text{proj su } P(\mathcal{H}) \cap Q(\mathcal{H}).$$

Analogamente,  $\bigwedge_{j \in J} P_j$  è il proiettore sull'intersezione  $\bigcap_{j \in J} P_j(\mathcal{H})$ .

- (iii) Gli elementi minimo (bottom) e massimo (top) sono rispettivamente l'operatore nullo  $\mathbf{0}$  e l'identità  $\mathbb{I}$ .



(iv) Nel caso numerabile ( $J = \mathbb{N}$ ), le operazioni di reticolo sono legate ai limiti nella topologia forte degli operatori ( $s$ -lim):

$$\bigvee_{n \in \mathbb{N}} P_n = s\text{-}\lim_{k \rightarrow +\infty} \bigvee_{n \leq k} P_n \quad e \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} P_n = s\text{-}\lim_{k \rightarrow +\infty} \bigwedge_{n \leq k} P_n.$$

### Proposizione (Sottoinsiemi Massimali e Algebre di Boole)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert complesso e separabile e si consideri il reticolo ortocomplementato e  $\sigma$ -completo dei proiettori ortogonali  $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \geq, \mathbf{0}, \mathbb{I}, \neg)$ .

Assumiamo che  $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$  sia un sottoinsieme massimale di elementi che commutano a due a due (ovvero, se  $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  commuta con ogni  $P \in \mathcal{L}_0$ , allora  $Q \in \mathcal{L}_0$ ). Valgono i seguenti fatti:

#### 1. Struttura di Sottoreticolo:

- (a)  $\mathcal{L}_0$  contiene l'operatore nullo  $\mathbf{0}$  e l'identità  $\mathbb{I}$ ;
- (b)  $\mathcal{L}_0$  è chiuso rispetto all'ortocomplemento  $(\neg)$ ;
- (c) L'estremo superiore e l'estremo inferiore di successioni di elementi calcolati in  $\mathcal{L}_0$  coincidono con i corrispondenti sup e inf calcolati nell'intero  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

Di conseguenza,  $\mathcal{L}_0$  è un sottoreticolo di  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

#### 2. Struttura Booleana: $\mathcal{L}_0$ è anche una $\sigma$ -algebra di Boole. Inoltre, per ogni $P, Q \in \mathcal{L}_0$ , le operazioni di reticolo assumono la seguente forma algebrica:

- (i)  $P \vee Q = P + Q - PQ$ ;
- (ii)  $P \wedge Q = PQ$ .

#### 3. Generalizzazione: Le identità algebriche riportate al punto (2) sono valide più in generale per qualsiasi coppia di proiettori $P, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , sotto la sola ipotesi che essi commutino ( $PQ = QP$ ).

### Teorema (Caratterizzazione della $\wedge$ logica)

In uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  per ogni  $P, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  e  $x \in \mathcal{H}$

$$(P \wedge Q)x = \lim_{n \rightarrow +\infty} (PQ)^n x$$

### Osservazione (Misurazioni Alternate e Convergenza)

La dimostrazione matematica sui proiettori implica un fatto fisico più forte riguardante le misurazioni consecutive. Si ha infatti che le successioni alternate di proiettori convergono al proiettore sull'intersezione dei sottospazi:

$$Px, QPx, PQPx, \dots \longrightarrow (P \wedge Q)x \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Poiché  $P \wedge Q = Q \wedge P$ , il risultato vale anche scambiando l'ordine. Fisicamente, se assumiamo che lo stato post-misurazione sia descritto dalla proiezione, il lato destro della formula

$$\|(P \wedge Q)x\|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(PQ)^n x\|^2$$

rappresenta la probabilità che una sequenza infinita di misurazioni alternate di  $P$  e  $Q$  (anche incompatibili) dia esito positivo a ogni passo, partendo dallo stato  $x$ .

## 2.4 Perché le osservabili sono operatori autoaggiunti

Siamo ora in grado di chiarire perché, in questo contesto, le osservabili corrispondano alle **PVM** (Projection-Valued Measures) su  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  e, di conseguenza, agli operatori autoaggiunti grazie ai teoremi di integrazione spettrale.

Analogamente al caso classico, un'osservabile  $A$  può essere vista come una collezione di osservabili elementari SI-NO  $\{P_E\}_{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$ , etichettate sugli insiemi di Borel di  $\mathbb{R}$ . Il significato di  $P_E$  è:

$$P_E = \text{"il valore dell'osservabile appartiene a } E\text{"}. \quad (5)$$

Assumendo che queste osservabili elementari siano *a due a due compatibili* (ipotesi cruciale che permette di lavorare in un sottoinsieme massimale  $\mathcal{L}_0$  che si comporta come un'algebra di Boole), ci aspettiamo che soddisfino le proprietà analoghe a quelle classiche (Fi)-(Fiii), tradotte nel linguaggio dei proiettori:

- (i')  $P_{\mathbb{R}} = \mathbb{I}$ ;
- (ii')  $P_E \wedge P_F = P_{E \cap F}$ ;
- (iii') Se  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  sono disgiunti, allora  $\bigvee_{j \in \mathbb{N}} P_{E_j} = P_{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j}$ .

Tenendo conto delle proprietà dei proiettori compatibili e della convergenza nella topologia forte per le serie infinite, queste relazioni diventano la definizione esatta di una PVM su  $\mathbb{R}$ :

- (i)  $P_{\mathbb{R}} = \mathbb{I}$ ;
- (ii)  $P_E P_F = P_{E \cap F}$  (poiché per proiettori commutanti il meet è il prodotto);
- (iii) Per insiemi disgiunti  $\{E_k\}$ , vale la  $\sigma$ -additività nella topologia forte degli operatori:

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} P_{E_j} x = P_{\bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j} x \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{H}.$$

### Teorema (Corrispondenza con Operatori Autoaggiunti)

Le PVM su  $\mathbb{R}$  sono associate in modo biunivoco agli operatori autoaggiunti. Integrando la funzione identità  $\iota : \mathbb{R} \ni r \mapsto r \in \mathbb{R}$  rispetto alla misura  $P$ , otteniamo l'operatore normale:

$$A_P = \int_{\mathbb{R}} r dP(r).$$

Poiché la funzione integranda è a valori reali,  $A_P$  è autoaggiunto. Inoltre,  $P$  è l'unica PVM associata ad  $A_P$  e il supporto di  $P$  coincide con lo spettro  $\sigma(A_P)$ .

Concludiamo che, adottando il framework di von Neumann, le osservabili in Meccanica Quantistica sono naturalmente descritte da operatori autoaggiunti, i cui spettri coincidono con l'insieme dei valori assumibili dalle osservabili stesse.

## 2.5 Il Teorema di Soler

Per affrontare il problema della coordinatizzazione, elenchiamo alcune proprietà speciali del reticolo dei proiettori ortogonali. Poiché la distributività non vale in  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , si introduce la nozione più debole di **ortomodularità**. Un altro concetto centrale è quello di *atomo*.

### Definizione (Atomo)

Sia  $(\mathcal{L}, \geq, \mathbf{0}, \mathbf{1})$  un reticolo limitato. Un elemento  $a \in \mathcal{L} \setminus \{\mathbf{0}\}$  è chiamato **atomo** se  $p \leq a$  implica  $p = \mathbf{0}$  oppure  $p = a$ .

Il seguente teorema raccoglie le proprietà rilevanti del reticolo  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , definendo contestualmente le proprietà astratte che possono applicarsi a reticoli ortocomplementati generici.

### Teorema (Proprietà di $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ )

Nel reticolo ortocomplementato  $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \geq, \mathbf{0}, I, -)$  dei proiettori ortogonali su uno spazio di Hilbert complesso  $\mathcal{H}$ , gli unici atomi sono i proiettori su sottospazi monodimensionali. Inoltre,  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  soddisfa le seguenti proprietà:

- (i) **Separabilità** (per  $\mathcal{H}$  separabile): se una famiglia  $\{P_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  è ortogonale (cioè  $P_i \leq \neg P_j$  per  $i \neq j$ ), allora l'insieme degli indici  $J$  è al più numerabile.
- (ii) **Atomicità e Atomisticità**:
  1. Per ogni  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  esiste un atomo  $A$  tale che  $A \leq P$  (atomicità).
  2. Ogni  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \setminus \{\mathbf{0}\}$  è il join degli atomi che contiene:  $P = \bigvee \{A \leq P \mid A \text{ è un atomo}\}$  (atomisticità).
- (iii) **Ortomodularità**: La relazione d'ordine implica una forma debole di distributività:

$$P \leq Q \implies Q = P \vee ((\neg P) \wedge Q).$$

- (iv) **Proprietà di copertura:** Se  $A$  è un atomo e  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  tali che  $A \wedge P = 0$ , allora valgono specifiche relazioni tra  $P$  e  $A \vee P$  che regolano l'altezza degli elementi nel reticolo.
- (v) **Irriducibilità:** Solo gli operatori  $0$  e  $I$  commutano con ogni elemento di  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

### Teorema (Atomicità $\Rightarrow$ atomisticità)

In un reticolo ortocomplementato  $(\mathcal{L}(\mathcal{H}), \geq, 0, \mathbb{I}, \neg)$  ortomodularità e atomicità implica atomisticità.

È possibile definire le operazioni di negazione logica e compatibilità direttamente sulla struttura astratta del reticolo, senza fare inizialmente riferimento alla natura operatoriale. Tuttavia, queste definizioni astratte si rivelano equivalenti alle nozioni standard sugli operatori.

### Definizione (Ortogonalità e Commutatività in Reticoli)

Sia  $(\mathcal{L}, \geq, 0, 1, \neg)$  un reticolo ortocomplementato e siano  $a, b \in \mathcal{L}$ .

- (a)  $a$  e  $b$  si dicono **ortogonali** (scritto  $a \perp b$ ) se  $a \leq \neg b$  (o equivalentemente  $b \leq \neg a$ ).
- (b)  $a$  e  $b$  si dicono **commutanti** se esistono tre elementi  $a$  due a due ortogonali  $c_1, c_2, c_3$  ( $c_i \perp c_j$  per  $i \neq j$ ) tali che:

$$a = c_1 \vee c_3 \quad e \quad b = c_2 \vee c_3.$$

### Osservazione

La definizione astratta di commutatività è equivalente a richiedere che il sottoreticolo ortocomplementato generato da  $p$  e  $q$  sia Booleano. Questo conferma che la commutatività rappresenta la "compatibilità classica" tra proposizioni.

Queste nozioni astratte recuperano esattamente il loro significato fisico usuale quando applicate al caso concreto dei proiettori.

### Proposizione (Equivalenza con le proprietà degli operatori)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e consideriamo  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  come reticolo ortocomplementato. Due elementi  $P, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ :

- (i) Sono **ortogonali** nel senso della Definizione precedente se e solo se proiettano su sottospazi mutuamente ortogonali, il che equivale alla condizione operatoriale  $PQ = QP = 0$ .
- (ii) **Commutano** nel senso della Definizione precedente se e solo se commutano come operatori, ovvero  $PQ = QP$ .

Piron ha dimostrato che, assumendo l'esistenza di almeno 4 atomi a due a due ortogonali, il reticolo delle proposizioni può essere identificato canonicamente con i sottospazi chiusi di uno spazio di Hilbert generalizzato, dove il campo scalare è sostituito da un **anello con divisione**  $\mathbb{D}$  (dotato di involuzione).

È stato a lungo congetturato che, aggiungendo ipotesi di separabilità e ortomodularità, l'anello  $\mathbb{D}$  si restringesse ai soli casi reali, complessi o quaternionici. La conferma formale è arrivata con il seguente teorema fondamentale.

### Teorema (Teorema di Solèr)

Consideriamo un reticolo separabile, ortomodulare,  $\sigma$ -completo, atomico e irriducibile, che soddisfi la proprietà di copertura.

Se tale reticolo ammette un insieme **infinito** di atomi a due a due ortogonali, allora esso è isomorfo al reticolo dei sottospazi chiusi (ordinati per inclusione insiemistica) di uno spazio di Hilbert separabile definito sul corpo  $\mathbb{K}$ , dove  $\mathbb{K}$  può essere scelto esclusivamente tra:  $\mathbb{R}$   $\mathbb{C}$  o  $\mathbb{H}$ .

Come di consueto, il reticolo dei sottospazi chiusi può essere interpretato come il reticolo  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  dei proiettori ortogonali corrispondenti.

### Osservazione (La natura del corpo e l'irriducibilità)

- **Irriducibilità e Superselezione:** La proprietà di irriducibilità non è strettamente necessaria per la validità fisica. Se fallisce, il reticolo si decompone in sottoreticoli irriducibili. Fisicamente, questa situazione è naturale in presenza di regole di superselezione.

- **La scelta dei numeri complessi:** Il teorema di Solèr lascia aperta la scelta tra  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{H}$ . Perché la fisica standard usa  $\mathbb{C}$ ? Studi recenti suggeriscono che, per sistemi elementari relativistici, la struttura complessa sia imposta dalla simmetria relativistica stessa. Tuttavia, se non diversamente specificato, nel seguito assumeremo l'uso del campo  $\mathbb{C}$  per descrivere i sistemi quantistici.

### Osservazione (Necessità delle ipotesi di Solèr e Spazio-Tempo)

È fondamentale sottolineare che la validità di tutte le proprietà elencate nel Teorema 4.16 (Solèr) è cruciale per ottenere la tesi, ovvero la struttura di spazio di Hilbert. Esistono infatti strutture di reticolo fisicamente rilevanti che soddisfano molte di quelle proprietà, come l'ortomodularità, ma falliscono in altre.

Un esempio notevole è la famiglia degli **insiemi causalmente completi** nello spazio-tempo di Minkowski  $M$ . Definiamo il complemento causale  $\Sigma^\perp$  di un sottoinsieme di Borel  $\Sigma \subset M$  come:

$$\Sigma^\perp := \{x \in M \mid x \notin \Sigma \text{ e } x, y \text{ sono cronologicamente separati per ogni } y \in \Sigma\}.$$

(Ricordiamo che  $x, y$  sono cronologicamente separati se  $x \neq y$  e non esiste alcun segmento di tipo tempo che li congiunge). Una regione  $\Delta$  si dice **causalmente completa** se  $\Delta = (\Delta^\perp)^\perp$ .

Il reticolo costituito da tutte le regioni causalmente completi di  $M$ , ordinato tramite l'inclusione insiemistica, risulta essere:

- Un reticolo non-Booleano, atomico, atomistico, irriducibile e ortomodulare;
- Dotato di ortocomplemento  $\perp$ , con minimo  $\emptyset$  e massimo  $M$ .

Tuttavia, questo reticolo **non soddisfa la proprietà di copertura** (e anche la separabilità è problematica). Il fallimento della proprietà di copertura impedisce di dotare lo spazio-tempo di una naturale struttura di Hilbert generalizzata. Questo risultato distingue strutturalmente la logica quantistica standard dalla logica causale dello spazio-tempo, offrendo forse spunti per una formulazione della gravità quantistica.

## 2.6 Argomenti avanzati su Teoremi di Soler e Piron

Abbiamo finora stabilito che il reticolo dei proiettori  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  soddisfa proprietà specifiche (completezza, ortomodularità, atomicità, proprietà di copertura). Il problema inverso, noto come *problema della coordinatizzazione*, consiste nel dimostrare che un reticolo astratto  $\mathcal{L}$  che soddisfi tali assiomi sia necessariamente isomorfo al reticolo dei sottospazi di uno spazio di Hilbert.

Questo programma di ricerca, avviato da Birkhoff e von Neumann e sviluppato da Jauch, Piron e altri, ha trovato il suo culmine nel Teorema di Solèr (1995).

### 2.6.1 Dagli assiomi allo Spazio Vettoriale Generalizzato

Il primo passo consiste nel recuperare una struttura di spazio vettoriale su un corpo generico.

#### Teorema (Piron-Maeda-Maeda)

Sia  $\mathcal{L}$  un reticolo ortocomplementato, completo, irriducibile e atomistico che soddisfa la **proprietà di copertura**. Supponiamo inoltre che  $\mathcal{L}$  contenga almeno 4 atomi a due a due ortogonali.

Allora esistono:

1. Un anello con divisione (corpo)  $\mathbb{K}$  dotato di un'involuzione antiautomorfa  $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ ;
2. Uno spazio vettoriale "generalizzato"  $E$  su  $\mathbb{K}$ ;
3. Una forma hermitiana  $\langle \cdot | \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  non singolare (tale cioè che  $\langle x | x \rangle = 0 \implies x = 0$ );

tali che  $\mathcal{L}$  è isomorfo al reticolo dei sottospazi "chiusi"  $\mathbf{M} \subset E$  (dove la chiusura è definita algebricamente come  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{\perp\perp}$  rispetto alla forma hermitiana), ordinati per inclusione.

Inoltre,  $\mathcal{L}$  è ortomodulare se e solo se la forma soddisfa la condizione:  $\mathbf{M} + \mathbf{M}^\perp = E$  per ogni sottospazio chiuso  $\mathbf{M}$ .

### 2.6.2 Il Teorema di Solèr e la natura del campo

Il risultato precedente lascia aperta la natura dell'anello  $\mathbb{K}$ . Molti autori congetturarono che l'aggiunta dell'ipotesi di ortomodularità e di infinitezza dimensionale costringesse  $\mathbb{K}$  ad essere uno dei campi classici ( $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ). Questa congettura è stata dimostrata da Solèr (e indipendentemente da Holland per condizioni equivalenti).

#### Teorema (Solèr-Holland)

Consideriamo un reticolo  $\mathcal{L}$  che soddisfi tutte le ipotesi del teorema precedente (ortocomplementato, completo, irriducibile, atomistico, con proprietà di copertura e almeno 4 atomi ortogonali) e assumiamo inoltre che sia **ortomodulare**.

Supponiamo che valga una delle seguenti condizioni equivalenti (che impongono l'infinita dimensionalità):

- (a) **(Solèr)** Esiste una successione ortonormale infinita  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  (ovvero  $\langle e_n | e_n \rangle = 1$ );
- (b) **(Holland)** Esiste una successione ortogonale infinita con norma fissata;
- (c) Lo spazio non ha dimensione finita e il reticolo ammette sufficienti simmetrie unitarie tra gli atomi.

Allora valgono le seguenti conclusioni fondamentali:

1. Il corpo  $\mathbb{K}$  può essere solo uno tra i **Reali**  $\mathbb{R}$ , i **Complessi**  $\mathbb{C}$  o i **Quaternioni**  $\mathbb{H}$ .
2. La forma hermitiana è definita positiva.
3. Lo spazio  $E$  è **completo** rispetto alla norma indotta, ed è quindi uno **Spazio di Hilbert** (reale, complesso o quaternionico).
4. Lo spazio di Hilbert è separabile se e solo se il reticolo  $\mathcal{L}$  è separabile.

#### Osservazione (Significato delle Ipotesi e Fisica)

- **Irriducibilità e Superselezione:** L'ipotesi di irriducibilità non è essenziale. Senza di essa, il reticolo si decompone in sottoreticoli irriducibili. In fisica, questo corrisponde alla presenza di regole di superselezione, dove lo spazio di Hilbert totale è somma diretta di settori coerenti tra i quali non sono possibili sovrapposizioni.
- **Proprietà di Copertura e Gravità Quantistica:** La covering property è invece cruciale. Esistono strutture fisicamente rilevanti che la violano. Ad esempio, il reticolo delle regioni causalmente complete nello spaziotempo di Minkowski soddisfa quasi tutte le proprietà (inclusa l'ortomodularità) ma non la proprietà di copertura. Questo impedisce di associare allo spaziotempo una struttura di Hilbert naturale, suggerendo che in una teoria di Gravità Quantistica la struttura geometrica dello spaziotempo e quella lineare della meccanica quantistica potrebbero divergere.
- **La scelta di  $\mathbb{C}$ :** Il teorema di Solèr ammette ancora  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{H}$ . Risultati recenti (Oppio et al.) mostrano che se si richiede che il sistema supporti un'azione del gruppo di Poincaré (necessaria per le particelle elementari relativistiche), i casi reale e quaternionico possono essere esclusi, lasciando  $\mathbb{C}$  come unica scelta consistente.

### 2.7 Il Teorema di Gleason

Sulla base della struttura di reticolo dei proiettori, possiamo formulare una definizione generale di probabilità in ambito quantistico.

#### Definizione (Misura di Probabilità Quantistica)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert. Una **misura di probabilità quantistica** su  $\mathcal{H}$  è una mappa  $\rho : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, 1]$  che soddisfa i seguenti requisiti:

1.  $\rho(\mathbb{I}) = 1$ ;
2.  $\sigma$ -additività su proiettori ortogonali: se  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$  è una famiglia tale che  $P_h P_k = 0$  per  $h \neq k$ , allora:

$$\rho\left(s\text{-}\sum_{n \in \mathbb{N}} P_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \rho(P_n).$$

L'insieme convesso delle misure di probabilità quantistiche su  $\mathcal{H}$  viene denotato con  $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ .

### Osservazione (Stati e Operatori)

È fondamentale distinguere tra la nozione matematica astratta di misura di probabilità e quella di operatore di stato quantistico. Come caso particolare, ogni vettore unitario  $\psi \in \mathcal{H}$  definisce una misura  $\rho_\psi(P) := \langle \psi | P \psi \rangle$ . Poiché  $\mathcal{M}(\mathcal{H})$  è convesso, anche le combinazioni convesse finite  $\rho = \sum p_k \rho_{\psi_k}$  sono misure. Associando a tale somma l'operatore  $T = \sum p_k |\psi_k\rangle\langle\psi_k|$ , si osserva che il valore della probabilità può essere calcolato tramite la traccia:

$$\rho(P) = \text{tr}(TP).$$

Questo suggerisce la definizione della seguente classe di operatori.

### Definizione (Operatori di Stato Quantistico)

Si definisce l'insieme chiuso e convesso degli **operatori di stato quantistico** (o matrici densità)  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  come il sottoinsieme degli operatori di classe traccia  $\mathfrak{B}_1(\mathcal{H})$  positivi e con traccia unitaria:

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) := \{T \in \mathfrak{B}_1(\mathcal{H}) \mid T \geq 0, \text{tr}(T) = 1\}.$$

La relazione tra le due definizioni è formalizzata dalla seguente proposizione.

### Proposizione

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert. Se  $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ , la mappa

$$\rho_T : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \ni P \mapsto \text{tr}(TP)$$

è ben definita e rappresenta una misura di probabilità quantistica, ovvero  $\rho_T \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$ .

Il risultato più profondo, che stabilisce una corrispondenza biunivoca tra le misure astratte sul reticolo e gli operatori di stato, è il celebre teorema di Gleason.

### Teorema (Teorema di Gleason)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert di dimensione finita  $\neq 2$ , oppure di dimensione infinita e separabile. L'insieme delle misure di probabilità quantistica  $\rho \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$  è in corrispondenza biunivoca con l'insieme degli operatori di stato quantistico  $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ . La biiezione è data dalla formula:

$$\text{tr}(TP) = \rho(P) \quad \text{per ogni } P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Inoltre, tale corrispondenza preserva la struttura convessa dei due insiemi.

### Osservazione (Confronto con la notazione fisica standard)

È utile notare una differenza di convenzione rispetto ai testi standard di Meccanica Quantistica.

- In questi appunti,  $T$  denota l'operatore di stato (o matrice densità), mentre  $\rho$  indica la misura di probabilità astratta.
- Nella letteratura fisica, è l'operatore stesso ad essere solitamente indicato con il simbolo  $\rho$  (o  $\hat{\rho}$ ).

Pertanto, l'uguaglianza  $\rho(P) = \text{tr}(TP)$  espressa nel Teorema di Gleason equivale alla formula standard per il calcolo del valore di aspettazione (o probabilità) di un proiettore  $P$  su uno stato misto  $\hat{\rho}$ :

$$\langle P \rangle_{\hat{\rho}} = \text{tr}(\hat{\rho}P).$$

Nel caso particolare in cui il sistema si trovi in uno stato puro descritto dal vettore unitario  $|\psi\rangle$ , l'operatore di stato diventa il proiettore  $T = |\psi\rangle\langle\psi|$  e la formula restituisce la celebre **regola di Born**:

$$\text{tr}(|\psi\rangle\langle\psi|P) = \langle\psi|P|\psi\rangle.$$

### Osservazione (Il caso $\dim \mathcal{H} = 2$ e altre note)

- (a) L'ipotesi  $\dim(\mathcal{H}) \neq 2$  nel Teorema di Gleason è fondamentale. Esiste infatti un noto controesempio per  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$ .

Identificando i proiettori unidimensionali  $P \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$  con i vettori unitari  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^t \in \mathbb{R}^3$  sulla sfera di Bloch, possiamo scrivere ogni proiettore come:

$$P_{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} \left( \mathbb{I} + \sum_{j=1}^3 n_j \sigma_j \right),$$

dove  $\sigma_j$  sono le matrici di Pauli standard. Si osserva che due proiettori sono ortogonali,  $P_{\mathbf{n}} \perp P_{\mathbf{n}'}$ , se e solo se i vettori corrispondenti sono antipodi, ovvero  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}'$ .

Fissiamo ora un vettore unitario  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$  e definiamo la mappa  $\rho : \mathcal{L}(\mathbb{C}^2) \rightarrow [0, 1]$  come segue:

$$\rho(P_{\mathbf{n}}) := \frac{1}{2} \left( 1 + \sum_{j=1}^3 (n_j m_j)^3 \right).$$

Questa mappa si estende univocamente a una misura di probabilità quantistica. Infatti, verifichiamo l'additività per proiettori ortogonali ( $\mathbf{n}$  e  $-\mathbf{n}$ ):

$$\rho(P_{\mathbf{n}}) + \rho(P_{-\mathbf{n}}) = \frac{1}{2}(1 + \Sigma) + \frac{1}{2}(1 - \Sigma) = 1,$$

dato che il termine cubico è dispari,  $(-n_j)^3 = -n_j^3$ .

Tuttavia, **non esiste alcun operatore**  $T$  (matrice densità) tale che  $\text{tr}(TP_{\mathbf{n}}) = \rho(P_{\mathbf{n}})$  per ogni  $\mathbf{n}$ . Se esistesse, imponendo l'uguaglianza avremmo:

$$\text{tr} \left[ T \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 n_j \text{tr}(T \sigma_j) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 (n_j m_j)^3.$$

Semplificando, si otterrebbe una relazione del tipo:

$$\sum_{j=1}^3 n_j T_j = \sum_{j=1}^3 n_j^3 m_j^3,$$

dove  $T_j = \text{tr}(T \sigma_j)$  sono costanti. Questo è impossibile da soddisfare per ogni  $\mathbf{n}$ , poiché il membro di sinistra dipende **linearmente** dalle componenti  $n_j$ , mentre il membro di destra dipende da esse in modo cubico.

- (b) Il teorema può essere esteso a spazi di Hilbert reali o quaternionici (in accordo con il teorema di Solèr), sebbene con complicazioni tecniche legate alla definizione di traccia.
- (c) Il teorema di Gleason ha conseguenze cruciali per l'interpretazione della Meccanica Quantistica, in particolare escludendo la possibilità di stati "sharp" (senza dispersione) per tutte le osservabili, anticipando concetti legati ai teoremi di no-go per variabili nascoste (Bell, Kochen-Specker).

## 2.8 Il Teorema di Gleason Generalizzato

Il celebre risultato di Gleason, che associa le misure di probabilità quantistica agli operatori di classe traccia (matrici densità), può essere esteso dal caso standard  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  al caso di una generica algebra di von Neumann  $\mathfrak{R}$ . Tuttavia, è necessario escludere casi patologici (il fattore  $I_2$ ) e considerare forme di additività più forti.

### Teorema (Gleason Generalizzato)

Sia  $\mathfrak{R}$  un'algebra di von Neumann su uno spazio di Hilbert complesso  $\mathcal{H} \neq \{0\}$ , la cui decomposizione in tipi non includa alcuna componente di Tipo  $I_2$ . Sia  $\mu : \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, +\infty]$  una misura sul reticolo dei proiettori tale che  $0 < \mu(\mathbb{I}) < +\infty$  e che sia  **$\sigma$ -additiva** (additiva su successioni numerabili di proiettori ortogonali).

Le seguenti tre condizioni sono equivalenti all'esistenza di un operatore positivo di classe traccia  $T \in \mathfrak{B}_1(\mathcal{H})$  tale che  $\mu(P) = \text{tr}(TP)$  per ogni  $P \in \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$ :

- (i)  $\mu$  è **completamente additiva**: Per ogni famiglia arbitraria (non necessariamente numerabile)  $\{P_j\}_{j \in J} \subset \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$  di elementi a due a due ortogonali:

$$\mu \left( \bigvee_{j \in J} P_j \right) = \sum_{j \in J} \mu(P_j). \quad (6)$$

- (ii)  $\mu$  ammette un **supporto**: Esiste un elemento  $P \in \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$  tale che  $\mu(Q) = 0$  se e solo se  $Q \perp P$  (per ogni  $Q \in \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$ ).

(iii)  $\mu$  è normale: La funzione normalizzata  $\frac{1}{\mu(\mathbb{I})}\mu$  è la restrizione al reticolo dei proiettori di uno stato algebrico normale sulla  $C^*$ -algebra  $\mathfrak{R}$ .

### Osservazione (Implicazioni Fisiche e Matematiche)

Analizziamo le conseguenze di questo teorema:

1. **Il caso Separabile:** Se lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  è **separabile**, ogni famiglia di proiettori a due a due ortogonali è al più numerabile. Di conseguenza, la  $\sigma$ -additività implica automaticamente la completa additività. Pertanto, in uno spazio separabile (e senza componenti  $I_2$ ), ogni misura  $\sigma$ -additiva è automaticamente generata da un operatore di classe traccia. **Attenzione:** A differenza del caso  $\mathfrak{R} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , se l'algebra è un sottoinsieme proprio, l'operatore  $T$  che rappresenta  $\mu$  non è in generale unico.
2. **Stati Normali:** Una misura di probabilità  $\mu_T$  su un'algebra di von Neumann  $\mathfrak{R}$  indotta da un operatore  $T$  di traccia unitaria ( $\text{tr}(T) = 1$ ) è chiamata **stato normale** di  $\mathfrak{R}$ . Tale misura è la restrizione al reticolo dei proiettori del funzionale lineare  $\omega_T : \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definito da:

$$\omega_T(A) := \text{tr}(TA).$$

Il concetto di stato normale (che corrisponde alla continuità nella topologia ultra-debole) è centrale nella trattazione algebrica della Meccanica Quantistica e sarà approfondito nel Capitolo 14.

## 2.9 Teorema di Bell debole

In Meccanica Classica esistono misure di probabilità che assegnano valore 1 a certe proprietà elementari e 0 alle rimanenti (stati deterministici). In Meccanica Quantistica, invece, la natura è intrinsecamente probabilistica: non esistono misure “sharp” (senza dispersione). Questo fatto è sancito matematicamente dal seguente teorema, spesso citato come versione matematica del Teorema di Bell (o legato al Teorema di Kochen-Specker).

### Teorema (Teorema di Bell debole)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert con  $\dim(\mathcal{H}) > 2$  (finito o infinito separabile). Non esiste alcuna misura di probabilità quantistica  $\rho : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow \{0, 1\}$  che assuma esclusivamente i valori 0 e 1.

*Dimostrazione.* (Sintesi) La dimostrazione sfrutta il Teorema di Gleason. Se tale misura esistesse, sarebbe rappresentata da un operatore  $T$ . La funzione  $f(\psi) = \langle \psi | T \psi \rangle$  mapperebbe la sfera unitaria (che è connessa) nell'insieme discreto  $\{0, 1\}$ . Per continuità, l'immagine dovrebbe essere connessa, quindi costante (tutta 0 o tutta 1). Ma questo contraddice il fatto che  $\text{tr}(T) = 1$ .  $\square$

### Osservazione

Questo risultato implica che non è possibile spiegare la MQ classica in termini di “variabili nascoste” non contestuali che assegnino valori definiti a tutte le osservabili simultaneamente. Alla luce delle precedenti discussioni, identificheremo d'ora in poi l'insieme delle misure fisicamente rilevanti con l'insieme convesso  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  degli operatori di stato (matrici densità), anche nel caso in cui  $\mathcal{H}$  non fosse separabile.

### 2.9.1 Stati Puri e Misti: Struttura convessa

Siamo ora in grado di analizzare la geometria dell'insieme degli stati  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ , introducendo la distinzione fondamentale per i fisici tra stati puri e misti. Ricordiamo che, dato un insieme convesso  $C$  in uno spazio vettoriale, un punto  $e \in C$  si dice **estremale** se non può essere scritto come combinazione convessa non banale di altri punti (cioè  $e = \lambda x + (1 - \lambda)y$  implica  $x = y = e$ ).

### Proposizione (Struttura di $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ )

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert.

- (a) **Stati Puri (Punti Estremali):** I punti estremali dell'insieme convesso  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  sono esattamente i proiettori di rango 1, ovvero gli operatori della forma:

$$P_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| \quad \text{con } \|\psi\| = 1.$$

Esiste quindi una biiezione tra i punti estremali e i raggi dello spazio proiettivo complesso  $\mathbb{P}\mathcal{H}$ . In fisica, questi corrispondono agli **stati puri**. Gli indicheremo con  $\mathcal{S}(\mathcal{H})_p$ .



(b) **Stati Misti (Decomposizione):** Ogni operatore di stato  $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  è una combinazione lineare convessa (eventualmente infinita) di stati puri. In particolare, esiste sempre una decomposizione spettrale:

$$T = \sum_{u \in M} p_u |u\rangle\langle u|,$$

dove  $M$  è una base hilbertiana di autovettori di  $T$ , i coefficienti  $p_u \in [0, 1]$  soddisfano  $\sum p_u = 1$ , e la serie converge nella norma della classe traccia  $\|\cdot\|_1$  (e quindi anche uniformemente). Tali stati non estremali sono detti **stati misti**.

#### Osservazione (Sulla dimostrazione)

La parte (b) è una conseguenza diretta del fatto che gli operatori di classe traccia sono compatti e autoaggiunti (essendo positivi), ammettendo quindi una base di autovettori. La condizione  $\text{tr}(T) = 1$  assicura che la somma degli autovalori sia unitaria, definendo una distribuzione di probabilità classica  $\{p_u\}$  sugli stati puri  $|u\rangle$ .

## 2.10 Tipologie di Sovrapposizione e Stati Misti

In questa sezione approfondiamo la natura degli stati non puri e le diverse modalità con cui gli stati quantistici possono combinarsi.

#### Definizione (Stati Misti e Matrici Densità)

Gli operatori di stato che non sono estremali (cioè non sono proiettori di rango 1 della forma  $|\psi\rangle\langle\psi|$ ) sono chiamati **operatori statistici** o **matrici densità**. In fisica, si dice che essi descrivono **stati misti**, miscele o stati non puri.

È fondamentale distinguere due modi in cui gli stati possono essere "sommati":

1. **Sovrapposizione Coerente (Somma vettoriale):** Dati dei vettori  $\phi_i \in \mathcal{H}$ , consideriamo il vettore somma:

$$\psi = \sum_{i \in I} a_i \phi_i$$

con la serie convergente nella topologia di  $\mathcal{H}$  se l'insieme  $I$  è infinito. Lo stato puro  $T_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|$  generato da questo vettore è detto **sovrapposizione coerente** degli stati puri associati ai  $\phi_i$ . Questo è il contenuto del **Principio di Sovrapposizione** degli stati puri.

2. **Sovrapposizione Incoerente (Somma convessa di operatori):** Se consideriamo una famiglia di operatori di stato  $\{T_i\}_{i \in I}$  e dei pesi  $p_i \in [0, 1]$  tali che  $\sum p_i = 1$ , definiamo:

$$T = \sum_{i \in I} p_i T_i.$$

In questo caso, l'operatore  $T$  descrive una **sovrapposizione incoerente** (o miscela statistica). Qui non si sommano le ampiezze di probabilità, ma le probabilità classiche di trovare il sistema in uno degli stati  $T_i$ .

#### Definizione (Ampiezza e Probabilità di Transizione)

Siano  $\psi, \phi \in \mathcal{H}$  vettori unitari.

- Il numero complesso  $\langle\psi|\phi\rangle$  è detto **ampiezza di transizione** (o ampiezza di probabilità).
- Il numero reale non negativo  $|\langle\psi|\phi\rangle|^2$  è la **probabilità di transizione** dello stato  $|\phi\rangle\langle\phi|$  sullo stato  $|\psi\rangle\langle\psi|$ .

Interpretiamo  $|\langle\psi|\phi\rangle|^2 = \text{tr}(T_\psi P_\phi)$  come la probabilità che il sistema, preparato nello stato  $\psi$ , venga trovato nello stato  $\phi$  a seguito di una misurazione (al tempo  $t$ ). Si noti la simmetria  $|\langle\psi|\phi\rangle|^2 = |\langle\phi|\psi\rangle|^2$ .

### 2.10.1 L'origine dell'Interferenza Quantistica

La differenza fisica tra sovrapposizione coerente e incoerente diventa evidente calcolando le probabilità dei risultati di una misura. Consideriamo due vettori unitari  $\psi, \phi \in \mathcal{H}$  e costruiamo due stati diversi basati su di essi.

#### Osservazione (Analisi comparata delle probabilità)

Siano  $a, b \in \mathbb{C}$  coefficienti tali che  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ .

1. **Caso Coerente (Stato Puro):** Definiamo il vettore  $\chi := a\psi + b\phi$ . Lo stato è  $T_\chi = |\chi\rangle\langle\chi|$ . La probabilità che una proposizione elementare  $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  sia vera in questo stato è data da:

$$\begin{aligned} \text{tr}(T_\chi Q) &= \langle\chi|Q|\chi\rangle = \langle a\psi + b\phi|Q|a\psi + b\phi\rangle \\ &= |a|^2 \langle\psi|Q|\psi\rangle + |b|^2 \langle\phi|Q|\phi\rangle + \underbrace{\bar{a}b \langle\psi|Q|\phi\rangle + \bar{b}a \langle\phi|Q|\psi\rangle}_{\text{Termini misti}}. \end{aligned}$$

2. **Caso Incoerente (Stato Misto):** Usiamo gli stessi pesi  $|a|^2$  e  $|b|^2$  per costruire una miscela statistica:

$$T := |a|^2 T_\psi + |b|^2 T_\phi = |a|^2 |\psi\rangle\langle\psi| + |b|^2 |\phi\rangle\langle\phi|.$$

La probabilità che  $Q$  sia vera in questo stato è semplicemente la media pesata delle probabilità:

$$\text{tr}(TQ) = |a|^2 \langle\psi|Q|\psi\rangle + |b|^2 \langle\phi|Q|\phi\rangle.$$

La differenza tra le due probabilità (4.23 e 4.24 nel testo) è esattamente il **Termine di Interferenza Quantistica**:

$$r(T_\chi Q) - \text{tr}(TQ) = \bar{a}b \langle\psi|Q|\phi\rangle + \bar{b}a \langle\phi|Q|\psi\rangle.$$

Questo termine (che può essere positivo o negativo) è assente nella miscela statistica classica. È proprio questo termine a spiegare fenomeni sperimentali come l'interferenza degli elettroni nell'esperimento della doppia fenditura: la sovrapposizione coerente permette alle "traiettorie" (o meglio, alle ampiezze) di interferire costruttivamente o distruttivamente, mentre la miscela incoerente somma semplicemente le intensità.

## 2.11 Stati post-misurazione: una critica al postulato del collasso

Dopo aver ridefinito lo stato in termini di operatori di classe traccia  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ , è necessario aggiornare l'assioma relativo al collasso della funzione d'onda. La formulazione standard (introdotta da von Neumann e generalizzata da Lüders) descrive cosa accade al sistema fisico, in uno stato  $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ , quando viene sottoposto alla misurazione di un'osservabile elementare  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  (assumendo che il risultato sia positivo,  $\text{tr}(TP) > 0$ ).

Ci riferiamo qui a *misurazioni non distruttive* (o di prima specie), dove il sistema esaminato (tipicamente una particella) non viene assorbito o annichilito dallo strumento.

#### Definizione (Postulato di proiezione generale)

Se un sistema quantistico si trova nello stato descritto dall'operatore statistico  $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  al tempo  $t_0$ , e la proposizione  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  risulta vera dopo una misurazione, lo stato del sistema immediatamente dopo la misura è descritto dall'operatore:

$$T_P := \frac{PTP}{\text{tr}(TP)}. \quad (7)$$

Il termine al denominatore è semplicemente la probabilità che l'evento  $P$  si verifichi nello stato  $T$ , necessaria per rinormalizzare la traccia a 1.

#### Osservazione (Caso dello stato puro)

Se lo stato iniziale è puro, ovvero  $T = |\psi\rangle\langle\psi|$  per un vettore unitario  $\psi$ , la formula generale si riduce alla nota proiezione del vettore di stato. Lo stato post-misura è ancora puro ed è determinato dal vettore:

$$\psi_P = \frac{P\psi}{\|P\psi\|}.$$

### Osservazione (Misurazione di Osservabili e Spettro)

Il postulato si applica concretamente alla misurazione di un'osservabile  $A$  con misura spettrale  $P^{(A)}$ . Negli esperimenti reali, si testa una famiglia di proposizioni elementari mutuamente esclusive  $\{P_{E_j}^{(A)}\}$ , costruite su una partizione dello spettro  $\sigma(A)$ . L'ampiezza di questa partizione corrisponde alla sensibilità (risoluzione) dello strumento di misura. Misurare l'osservabile equivale a testare simultaneamente quale di queste proposizioni è vera.

Il postulato di proiezione sopra enunciato non è arbitrario, ma possiede un'importante caratterizzazione legata al concetto di probabilità condizionata.

Supponiamo di misurare  $P$  (ottenendo successo) e di volerci chiedere, subito dopo, qual è la probabilità di misurare una proposizione  $Q$ . In generale, se  $P$  e  $Q$  non commutano, la logica quantistica rende il problema della probabilità condizionata molto complesso e diverso dal caso classico.

Tuttavia, se ci restringiamo al caso di proposizioni compatibili, in particolare quando  $Q \leq P$  (ovvero il sottospazio di  $Q$  è contenuto in quello di  $P$ , il che implica  $Q$  implica  $P$ ), ci aspettiamo che valgano le intuizioni classiche. In questo caso  $P \wedge Q = Q$ , quindi la regola classica di Bayes suggerisce:

$$\mathbb{P}_T(Q|P) = \frac{\mathbb{P}_T(Q \cap P)}{\mathbb{P}_T(P)} = \frac{\text{tr}(TQ)}{\text{tr}(TP)}.$$

Se imponiamo che questa relazione debba valere per lo stato post-misurazione  $T'$ , otteniamo una caratterizzazione univoca del postulato di collasso.

### Proposizione (Caratterizzazione di Lüders)

Sia  $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  uno stato quantistico e supponiamo che per  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  si abbia  $\text{tr}(TP) > 0$ . Esiste **esattamente un** altro operatore di stato  $T' \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  tale che:

$$\text{tr}(T'Q) = \frac{\text{tr}(TQ)}{\text{tr}(TP)} \quad \text{per ogni } Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \text{ con } Q \leq P. \quad (8)$$

Tale operatore è esattamente quello fornito dal postulato di Lüders-von Neumann:

$$T' = \frac{PTP}{\text{tr}(TP)}.$$

### Osservazione (Critica Fisica)

Contrariamente a quanto potrebbe sembrare, l'ipotesi che giustifica la proposizione precedente (ovvero la validità della formula classica per la probabilità condizionata quando  $Q \leq P$ ) non è fisicamente banale. Essa si basa sull'idea che una misurazione consecutiva di  $P$  e poi di  $Q$  sia equivalente a una singola misurazione simultanea. Questa assunzione idealizza il processo, trascurando il fatto che due misurazioni in sequenza potrebbero coinvolgere strumenti e azioni fisiche differenti rispetto a una misura congiunta.

#### 2.11.1 Confronto tra i postulati di von Neumann e Lüders

Sebbene il postulato di proiezione sembri univoco, storicamente esistono due formulazioni che differiscono nel modo di trattare gli autospazi degeneri (con dimensione  $> 1$ ).

### Osservazione (Differenza tra von Neumann e Lüders)

Consideriamo un'osservabile  $A$  con spettro discreto e decomposizione spettrale  $A = \sum_{\lambda} \lambda P^{(\lambda)}$ , dove  $P^{(\lambda)}$  è il proiettore sull'autospazio relativo all'autovalore  $\lambda$ , avente dimensione  $d_{\lambda}$ .

1. **Approccio di von Neumann:** L'idea originale prevedeva che la misura di  $A$  proiettasse lo stato sugli autovettori di una base fissata  $\{\psi_j^{(\lambda)}\}_{j=1}^{d_{\lambda}}$  dell'autospazio. Se il risultato è  $\lambda$ , lo stato post-misura diventa una miscela statistica (incoerente) delle proiezioni sugli assi della base:

$$T'_{vN} := \sum_{j=1}^{d_{\lambda}} P_j^{(\lambda)} T P_j^{(\lambda)}, \quad (9)$$

dove  $P_j^{(\lambda)} = |\psi_j^{(\lambda)}\rangle\langle\psi_j^{(\lambda)}|$ . Questo processo distrugge eventuali coerenze (sovrapposizioni) interne all'autospazio degeneri.

2. **Approccio di Lüders:** Il postulato moderno (che abbiamo adottato nella formula 4.25) prevede invece una proiezione sull'intero autospazio  $P^{(\lambda)}$ . Lo stato post-misura è:

$$T'_L := \frac{P^{(\lambda)} T P^{(\lambda)}}{\text{tr}(P^{(\lambda)} T P^{(\lambda)})}. \quad (10)$$

Questo approccio preserva la coerenza quantistica all'interno dell'autospazio degenere (principio di minima perturbazione).

Le due prescrizioni coincidono se e solo se lo spettro è non degenere ( $d_\lambda = 1$ ). Tuttavia, notiamo che le probabilità dei risultati calcolate con i due metodi sono identiche:  $\text{tr}(T'_{vN}) = \text{tr}(T'_L) = 1$ .

### 2.11.2 Dipendenza dello stato dalla procedura di misura

Un aspetto sottile ma fondamentale è che lo stato post-misura dipende strettamente da *cosa* è stato effettivamente misurato e da *come* l'informazione è stata raccolta. Non basta sapere "quale valore" ha assunto una grandezza, ma bisogna sapere se lo strumento era in grado di distinguere valori più fini.

#### Misura di funzioni di osservabili

Consideriamo un sistema preparato in uno stato  $\rho$  (usiamo  $\rho$  per brevità al posto di  $T$ ) e un'osservabile  $A$  con spettro puntuale  $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$ . Supponiamo che i proiettori spettrali  $P_i := P_{\lambda_i}$  siano unidimensionali.

Definiamo una funzione  $f(A)$  tale che:

$$f(\lambda_1) = f(\lambda_2) = 1 \quad e \quad f(\lambda_3) = f(\lambda_4) = -1.$$

Lo spettro dell'osservabile  $f(A)$  è quindi  $\sigma(f(A)) = \{1, -1\}$ .

Analizziamo due procedure diverse per ottenere il risultato "1":

1. **Misura diretta di  $f(A)$ :** Usiamo uno strumento che distingue solo tra il valore 1 e  $-1$ . Se otteniamo 1, secondo Lüders proiettiamo sul proiettore somma  $P_{1,2} = P_1 + P_2$ . Lo stato collassa in:

$$\rho' = \frac{(P_1 + P_2)\rho(P_1 + P_2)}{\text{tr}((P_1 + P_2)\rho)}.$$

In questo stato, la coerenza (i termini di interferenza) tra i sottospazi associati a  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  viene preservata. Se  $\rho$  era uno stato puro,  $\rho'$  rimane puro (ma confinato nel sottospazio 1,2).

2. **Misura di  $A$  con "dimenticanza":** Misuriamo l'osservabile  $A$  completa, distinguendo  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , ma successivamente raggruppiamo i dati (o ignoriamo la distinzione) dicendo solo "è uscito 1". Fisicamente, lo strumento ha interagito distinguendo i singoli autostati. Lo stato risultante è una miscela statistica dei risultati possibili pesati con le loro probabilità condizionate:

$$\rho'' = \frac{P_1 \rho P_1 + P_2 \rho P_2}{\text{tr}((P_1 + P_2)\rho)}.$$

Qui i termini incrociati (tipo  $P_1 \rho P_2$ ) sono spariti.  $\rho''$  è una miscela incoerente (stato misto), anche se  $\rho$  era puro. Questo è un caso di probabilità **epistemica** ossia derivante da un'ignoranza di informazioni sul sistema. L'osservatore che ignora la distinzione dei risultati ha un'informazione sullo stato del sistema che non è totale, anche se non può saperlo. Ciò non è sintomo di un'interpretazione soggettivistica della meccanica quantistica, quanto suggerisce che lo stato è "oggettivo" tra osservatori che hanno la stessa conoscenza sul sistema.

In conclusione,  $\rho' \neq \rho''$ . La probabilità di ottenere il risultato 1 è la stessa, ma lo stato fisico finale è diverso. Questo dimostra che misurare  $f(A)$  non è equivalente a misurare  $A$  e poi calcolare la funzione, se ci interessa lo stato successivo del sistema.

#### Esistono stati rappresentati da matrici densità che sono "intrinsecamente" probabilistiche?

Sì, si prenda una coppia entangled. Se ho accesso solo ad un sottosistema e non all'altro, lo stato di esso è rappresentato da una matrice densità intrinsecamente probabilistica.

### 2.11.3 Misurazioni Non Selettive (Ideali)

Il caso (2) dell'esempio precedente introduce il concetto di **misura non selettiva**. Una misura selettiva filtra il sistema in base al risultato (come nell'equazione 4.25). Una misura non selettiva avviene quando l'apparato interagisce con il sistema misurando un'osservabile  $A$ , ma l'osservatore non legge il risultato o raccoglie tutti i sistemi uscenti in un unico ensemble.

Se  $\sigma(A) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j$  è una decomposizione in insiemi disgiunti di risultati e misuriamo  $A$  senza selezionare l'uscita, lo stato finale  $T'$  è la sovrapposizione incoerente di tutti i possibili stati post-misura pesati con la loro probabilità.

#### Definizione (Misura Non Selettiva)

Dato uno stato iniziale  $T \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  e una misura spettrale  $\{P_{E_j}^{(A)}\}$ , lo stato dopo una misura non selettiva è:

$$T' = \sum_{j \in \mathbb{N}} P_{E_j}^{(A)} T P_{E_j}^{(A)}. \quad (11)$$

Ponendo  $p_j = \text{tr}(T P_{E_j}^{(A)})$  e definendo gli stati condizionati normalizzati  $T_j$ , possiamo scrivere:

$$T' = \sum_{j \in \mathbb{N}} p_j T_j.$$

#### Osservazione

È importante notare due aspetti:

- La mappa  $T \mapsto T'$  descritta dalla (11) è **lineare**. Al contrario, la mappa della misura selettiva (il collasso standard) non è lineare a causa del fattore di normalizzazione al denominatore che dipende da  $T$ .
- Questo formalismo giustifica la creazione di stati misti a partire da stati puri mediante l'interazione con un apparato di misura (decoerenza). Una volta creato uno stato misto in questo modo, la meccanica quantistica non offre alcun modo per distinguere tramite esperimenti diretti se tale miscela provenga da una misura non selettiva su un autovettore di  $A$  o da un'altra preparazione che ha generato la stessa matrice densità (ambiguità della decomposizione dell'ensemble).

### 2.11.4 Struttura dei proiettori in un'algebra di Von Neumann

Per concludere la disamina delle proprietà elementari, è fondamentale analizzare la struttura formata dai proiettori ortogonali appartenenti a un'algebra di von Neumann. In meccanica quantistica, questi proiettori corrispondono alle "proposizioni" (domande sì/no) sul sistema fisico.

Sia  $\mathfrak{R}$  un'algebra di von Neumann su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . L'intersezione tra l'algebra e l'insieme di tutti i proiettori ortogonali  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  eredita una struttura di reticolo:

$$\mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H}) := \mathfrak{R} \cap \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Questo insieme eredita le operazioni di *meet* ( $\wedge$ ) e *join* ( $\vee$ ) e l'ortocomplemento ( $\neg$ ) da  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , ma è necessario garantire che il risultato di queste operazioni rimanga dentro l'algebra  $\mathfrak{R}$ .

#### Proposizione (Operazioni nel Reticolo)

Siano  $P, Q \in \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$ . Poiché  $\mathfrak{R}$  è chiusa nella topologia forte e chiusa rispetto al prodotto, valgono le seguenti proprietà costruttive:

1. **Intersezione (Meet):** L'operatore  $P \wedge Q$  (proiezione sul sottospazio  $P\mathcal{H} \cap Q\mathcal{H}$ ) appartiene a  $\mathfrak{R}$  ed è dato dal limite forte:

$$P \wedge Q = \text{s-lim}_{n \rightarrow +\infty} (PQ)^n.$$

2. **Unione (Join):** L'operatore  $P \vee Q$  (proiezione sulla chiusura di  $P\mathcal{H} + Q\mathcal{H}$ ) appartiene a  $\mathfrak{R}$  e si ottiene tramite le leggi di De Morgan:

$$P \vee Q = \neg((\neg P) \wedge (\neg Q)) = I - (\text{s-lim}_{n \rightarrow +\infty} [(I - P)(I - Q)]^n).$$

3. **Struttura:** La tripla  $(\mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H}), \geq, 0, I, \neg)$  è un reticolo limitato, ortocomplementato e  $\sigma$ -completo (poiché la  $\sigma$ -completezza coinvolge solo la topologia forte e l'algebra è fortemente chiusa).

4. **Ortomodularità:** Il reticolo è ortomodulare, una proprietà cruciale per l'interpretazione fisica, sebbene proprietà più sottili come l'irriducibilità o l'atomicità non siano garantite a priori.

Una delle caratteristiche più sorprendenti delle algebre di von Neumann è che la struttura "statica" delle proposizioni (il reticolo) contiene tutta l'informazione dinamica dell'algebra.

**Proposizione (Generazione dell'Algebra, Prop 6.14)**

Sia  $\mathfrak{R}$  un'algebra di von Neumann. L'algebra generata dal suo reticolo dei proiettori coincide con l'algebra stessa:

$$(\mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H}))'' = \mathfrak{R}.$$

In altre parole, ogni operatore in  $\mathfrak{R}$  può essere ricostruito (tramite combinazioni lineari e limiti forti) dai suoi proiettori. Inoltre, il centro del reticolo genera il centro dell'algebra.

### 2.11.5 Fattori e Classificazione di Murray-von Neumann

La nozione di **Fattore** gioca un ruolo distinto nella teoria. Come introdotto nella Definizione 6.15, un fattore è un'algebra di von Neumann con centro banale ( $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}' = \mathbb{C}I$ ).

Esiste un legame diretto tra la banalità del centro e la struttura del reticolo delle proposizioni:

**Proposizione (Caratterizzazione dei Fattori, Prop 6.16)**

Un'algebra di von Neumann  $\mathfrak{R}$  è un fattore se e solo se il reticolo associato  $\mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$  è **irriducibile**.

Sugli spazi di Hilbert separabili, ogni algebra di von Neumann può essere decomposta in una somma diretta (o integrale diretto) di fattori. Pertanto, la classificazione delle algebre si riduce alla classificazione dei fattori. Murray e von Neumann hanno sviluppato una classificazione basata sul confronto delle "dimensioni" relative dei proiettori.

**Definizione (Equivalenza di Proiettori)**

Siano  $P, Q \in \mathfrak{R}$  due proiettori. Si dicono **equivalenti** ( $P \sim Q$ ) se esiste un'isometria parziale  $U \in \mathfrak{R}$  tale che:

$$U^*U = P \quad e \quad UU^* = Q.$$

Geometricamente, questo significa che i sottospazi corrispondenti sono isometrici tramite un'operazione interna all'algebra.

**Definizione (Finitezza)**

Un proiettore  $P \in \mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$  si dice **finito** se non è equivalente a nessun suo sottoproiettore proprio (ovvero, se  $Q \leq P$ ,  $Q \neq P$  implica  $P \not\sim Q$ ). L'algebra (o il fattore) si dice **finita** se l'operatore identità  $I$  è un proiettore finito; altrimenti si dice **infinita**.

Basandosi sulla presenza di proiettori minimali (atomi) e sulla proprietà di finitezza, i fattori si classificano in tre Tipi:

1. **Tipo I (Meccanica Quantistica Standard):** Il fattore contiene proiettori minimali (atomi).
  - Un fattore è di Tipo I se e solo se è isomorfo a  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$  per qualche spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_1$ .
  - Il reticolo è atomico e soddisfa la proprietà di ricoprimento.
2. **Tipo II (Geometria Continua):** Il fattore **non** contiene proiettori minimali (non ci sono atomi), ma esistono proiettori finiti non nulli.
  - **Tipo II<sub>1</sub>:** L'operatore identità  $I$  è finito. Questo definisce una "geometria continua" dove le dimensioni sono numeri reali nell'intervallo  $[0, 1]$ .
  - **Tipo II<sub>∞</sub>:** L'identità è infinita (simile al prodotto tensoriale di un Tipo II<sub>1</sub> con  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  infinito-dimensionale).
3. **Tipo III (Teoria Quantistica dei Campi):** Il fattore non contiene proiettori minimali e **non** contiene nessun proiettore finito non nullo (eccetto lo 0).
  - Tutti i proiettori non nulli sono infiniti.
  - Questa classe, inizialmente considerata patologica, è fondamentale nella descrizione di sistemi termodinamici estesi e nella **Teoria Quantistica dei Campi Algebrica (AQFT)**.

- Un risultato celebre stabilisce che, sotto ipotesi standard, l'algebra delle osservabili localizzate in una regione limitata dello spaziotempo di Minkowski è isomorfa all'unico *fattore iperfinito di Tipo III<sub>1</sub>*.

## 2.12 Irriducibilità e Lemma di Schur nelle Algebre di von Neumann

Un potente strumento tecnico, essenziale sia per la teoria matematica che per le applicazioni fisiche (come le regole di superselezione), riguarda il concetto di irriducibilità di un insieme di operatori.

### Definizione (Invarianza e Irriducibilità Topologica)

Sia  $\mathcal{H} \neq \{0\}$  uno spazio di Hilbert e  $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  una collezione di operatori.

- Un sottospazio chiuso  $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$  si dice **invariante** per  $\mathfrak{M}$  (o  $\mathfrak{M}$ -invariante) se  $A(\mathcal{H}_0) \subset \mathcal{H}_0$  per ogni  $A \in \mathfrak{M}$ .
- L'insieme  $\mathfrak{M}$  si dice **topologicamente irriducibile** (o semplicemente irriducibile) se gli unici sottospazi chiusi  $\mathfrak{M}$ -invarianti sono quelli banali:  $\{0\}$  e  $\mathcal{H}$ .

Il legame tra irriducibilità e la struttura del commutante è sancito dalla versione per spazi di Hilbert del celebre Lemma di Schur.

### Teorema (Lemma di Schur)

Sia  $\mathcal{H} \neq \{0\}$  uno spazio di Hilbert e  $\mathfrak{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$  un insieme  $*$ -chiuso. I seguenti fatti sono equivalenti:

- $\mathfrak{M}$  è irriducibile.
- Il commutante di  $\mathfrak{M}$  è banale (multipli dell'identità):  $\mathfrak{M}' = \mathbb{C}I$ .
- L'algebra di von Neumann generata coincide con l'intero insieme degli operatori limitati:  $\mathfrak{M}'' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .

Questo risultato ha un'applicazione immediata nella teoria delle rappresentazioni dei gruppi, fondamentale in fisica quantistica.

### Corollario (Rappresentazioni Unitarie)

Sia  $\pi : G \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  una rappresentazione unitaria di un gruppo  $G$  (oppure di una  $*$ -algebra  $\mathfrak{A}$ ) su  $\mathcal{H} \neq \{0\}$ . Se  $G$  (o  $\mathfrak{A}$ ) è abeliano, l'immagine della rappresentazione è irriducibile se e solo se  $\dim(\mathcal{H}) = 1$ .

#### 2.12.1 Sottospazi Riducenti per Operatori Illimitati

Quando si trattano osservabili fisiche non limitate, la nozione di invarianza va maneggiata con cura a causa dei domini. Si introduce quindi il concetto più forte di *riduzione*.

### Definizione (Sottospazio Riducente)

Sia  $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  un operatore (anche illimitato) e  $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$  un sottospazio chiuso. Siano  $P_0$  il proiettore ortogonale su  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_0^\perp$  il complemento ortogonale. Si dice che  $\mathcal{H}_0$  **riduce**  $T$  se valgono entrambe le condizioni:

- $T(D(T) \cap \mathcal{H}_0) \subset \mathcal{H}_0$  e  $T(D(T) \cap \mathcal{H}_0^\perp) \subset \mathcal{H}_0^\perp$ ;
- $P_0(D(T)) \subset D(T)$ .

In questo caso, l'operatore si decompone nella somma diretta delle sue parti su  $\mathcal{H}_0$  e  $\mathcal{H}_0^\perp$ .

### Proposizione (Caratterizzazione tramite Proiettori)

Un sottospazio chiuso  $\mathcal{H}_0$  riduce un operatore  $T$  se e solo se il relativo proiettore  $P_0$  commuta con  $T$  nel senso forte:  $P_0 T \subset T P_0$ . Inoltre,  $T$  è irriducibile se e solo se gli unici proiettori ortogonali che commutano con esso sono  $0$  e  $I$ .

Un risultato tecnico ma fondamentale lega le misure spettrali (PVM) alle algebre di von Neumann:

### Proposizione

Sia  $P$  una misura a valori di proiettore (PVM). L'algebra di von Neumann generata dall'immagine del PVM coincide con l'insieme degli operatori definiti da integrali di funzioni misurabili limitate rispetto a  $P$ :

$$\{P_E \mid E \in \Sigma(X)\}'' = \left\{ \int_X f dP \mid f \in \mathcal{M}_b(X) \right\}.$$

## 2.13 L'Algebra di von Neumann delle Osservabili

In fisica quantistica, si assume che le osservabili siano rappresentate dagli elementi autoaggiunti di un'algebra di von Neumann  $\mathfrak{R}$ . Questa costruzione è motivata dal fatto che  $\mathfrak{R}$  è l'insieme massimale di operatori costruibile a partire dal reticolo delle proposizioni elementari  $\mathcal{L}_{\mathfrak{R}}(\mathcal{H})$ .

### 2.13.1 Osservabili Illimitate e Struttura di Jordan

Sebbene un'algebra di von Neumann contenga per definizione solo operatori limitati, la fisica richiede l'uso di osservabili illimitate (come posizione e momento).

#### Osservazione (Gestione dell'illimitatezza)

*Limitarsi agli operatori limitati non è una restrizione fisica reale. Se  $A$  è un'osservabile illimitata autoaggiunta, essa è univocamente determinata dalla famiglia dei suoi troncamenti spettrali limitati  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , dove:*

$$A_n := \int_{[-n, n]} \lambda dP^{(A)}(\lambda).$$

*Ogni  $A_n$  appartiene all'algebra  $\mathfrak{R}$  (se  $A$  è affiliato ad essa) e  $A$  viene recuperato come limite forte di questa successione.*

Un aspetto delicato riguarda la struttura algebrica delle osservabili. Lo spazio vettoriale reale degli operatori autoaggiunti non è chiuso rispetto al prodotto di operatori (poiché  $AB$  non è necessariamente autoaggiunto se  $A$  e  $B$  non commutano). Si può dotare tale spazio di una struttura di **Algebra di Jordan** tramite il prodotto simmetrizzato:

$$A \circ B := \frac{1}{2}(AB + BA).$$

Sebbene fisicamente attraente, il prodotto di Jordan non è associativo, rendendo la teoria matematica complicata. Tuttavia, formule integrali complesse (come la 6.7) permettono di definire funzioni di combinazioni lineari  $aA + bB$  anche nel caso non commutativo, stabilendo un ponte tra la struttura lineare e quella spettrale.

## 2.14 Insiemi Completi di Osservabili Compatibili (CSCO)

Un concetto cardine per la definizione degli stati quantistici è quello di compatibilità e completezza delle misure.

#### Definizione (CSCO)

*Sia  $\mathfrak{R}$  un'algebra di von Neumann su  $\mathcal{H}$  e  $\mathfrak{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$  un insieme finito di osservabili (limitati o illimitati affiliati a  $\mathfrak{R}$ ) le cui misure spettrali commutano a due a due.  $\mathfrak{A}$  si dice un **Insieme Completo di Osservabili Compatibili (CSCO)** se ogni operatore autoaggiunto limitato  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  che commuta con tutti i PVM di  $\mathfrak{A}$  è una funzione di essi:*

$$B = f(A_1, \dots, A_n) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dP^{(\mathfrak{A})}$$

*per una qualche funzione misurabile  $f$ .*

#### Proposizione (Algebra Generata)

*Se  $\mathfrak{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$  è un insieme di operatori con misure spettrali commutanti, l'algebra di von Neumann generata da  $\mathfrak{A}$  coincide con l'insieme delle funzioni misurabili limitate degli operatori stessi:*

$$\mathfrak{A}'' = \{f(A_1, \dots, A_n) \mid f \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^n)\}.$$

### 2.14.1 Conseguenze Fisiche: Stati Puri e Commutante Abelian

La nozione di CSCO ha due implicazioni fisiche fondamentali.

**1. Preparazione degli Stati Puri:** Se gli osservabili  $A_1, \dots, A_n$  hanno spettro puramente puntuale, la misurazione simultanea di questi osservabili "prepara" il sistema in uno stato univocamente determinato. Se  $\mathcal{H}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}$  è l'autospazio comune associato agli autovalori misurati, la condizione di completezza implica che:

$$\dim(\mathcal{H}_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}) = 1.$$



Pertanto, dopo la misura, il sistema collassa su un unico vettore (a meno di fase), identificando uno stato puro senza ambiguità (degenerazione rimossa).

**2. Struttura del Commutante:** Esiste un legame profondo tra l'esistenza di un CSCO e la commutatività dell'algebra "duale".

### Proposizione

*Se un sistema fisico ammette un insieme completo di osservabili compatibili  $\mathfrak{A}$ , allora il commutante dell'algebra delle osservabili  $\mathfrak{R}'$  è **Abeliano**. In questo caso, il commutante coincide con il centro dell'algebra:  $\mathfrak{R}' = \mathfrak{Z}(\mathfrak{R})$ .*

### Osservazione (Implicazioni)

- Se  $\mathfrak{R}'$  è Abeliano, allora  $\mathfrak{R}' \subset \mathfrak{R}'' = \mathfrak{R}$ , confermando che  $\mathfrak{R}' = \mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}'$ .
- Se  $\mathfrak{R}'$  **non** è Abeliano (come accade in alcune teorie di gauge non abeliane), non possono esistere CSCO. In tali teorie, è impossibile preparare stati vettoriali puri misurando osservabili compatibili, poiché tali stati semplicemente non esistono.

### Esempi Fisici Notevoli

1. **Oscillatore Armonico:** In  $L^2(\mathbb{R})$ , l'operatore Hamiltoniano  $H$  da solo costituisce un CSCO, poiché il suo spettro è non degenere.
2. **Particella Libera:** In  $L^2(\mathbb{R}^3)$ , gli operatori di posizione  $\mathfrak{A}_1 = \{X_1, X_2, X_3\}$  formano un CSCO. Analogamente, gli operatori di momento  $\mathfrak{A}_2 = \{P_1, P_2, P_3\}$  formano un altro CSCO. L'algebra generata è massimale, ovvero  $\mathfrak{R} = \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}^3))$ .
3. **Elettrone con Spin:** Per una particella con spin  $1/2$ , lo spazio è  $L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2$ . Un CSCO è dato da  $\{X_1, X_2, X_3, S_z\}$  oppure da  $\{P_1, P_2, P_3, S_z\}$ . Anche in questo caso il commutante è banale e  $\mathfrak{R} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .
4. **Atomo di Idrogeno:** Un tipico CSCO con spettro puntuale è la quadrupla  $\{H, L^2, L_z, S_z\}$  (Energia, Momento angolare totale, Componente  $Z$ , Spin  $Z$ ), limitatamente al sottospazio delle energie negative (stati legati).

## 2.15 Caratterizzazione Algebrica degli Stati: Il Teorema di Riesz Non Commutativo

Questa sezione esplora una caratterizzazione puramente matematica dello spazio degli stati  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ , fondamentale per la formulazione algebrica delle teorie quantistiche (che vedremo in seguito). L'idea centrale è mostrare che la relazione tra stati e operatori è l'analogo "non commutativo" del celebre Teorema di Rappresentazione di Riesz per le misure classiche.

### 2.15.1 Stati come Funzionali Lineari

Ricordiamo che un operatore di classe traccia positivo  $T \in \mathfrak{B}_1(\mathcal{H})$  definisce un funzionale lineare sull'algebra degli operatori compatti  $\mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H})$  tramite la traccia:

$$\omega_T : \mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \omega_T(A) := \text{tr}(TA).$$

Questo funzionale è positivo ( $\omega_T(A^*A) \geq 0$ ) e la sua norma coincide con la traccia di  $T$ :  $\|\omega_T\| = \text{tr}(T)$ .

Possiamo quindi ribaltare la prospettiva e definire gli stati in modo astratto.

### Definizione (Stato Algebrico)

*Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert complesso. Chiamiamo **stato algebrico** sulla  $C^*$ -algebra  $\mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H})$  ogni funzionale lineare  $\omega : \mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$  che sia:*

1. **Positivo:**  $\omega(A^*A) \geq 0$  per ogni  $A \in \mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H})$ ;
2. **Normalizzato:**  $\|\omega\| = 1$ .

L'insieme di tali stati è denotato con  $\mathfrak{E}(\mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H}))$ .

Il seguente teorema stabilisce che questa definizione astratta cattura esattamente gli stati fisici (matrici densità) che conosciamo.

### Teorema (Caratterizzazione degli Stati)

La mappa  $T \mapsto \omega_T$  definita da  $\omega_T(A) = \text{tr}(TA)$  è una biiezione tra l'insieme degli operatori di stato  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  e l'insieme degli stati algebrici  $\mathfrak{E}(\mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H}))$ . In altre parole, ogni funzionale positivo e normalizzato sugli operatori compatti proviene da un unico operatore densità.

### 2.15.2 Analisi del Ragionamento: L'analogia con Riesz

Per comprendere appieno il significato "non commutativo" di questo risultato, è utile confrontarlo con il Teorema di Riesz classico per l'integrazione.

**Teorema di Riesz Classico (Analisi):** Consideriamo uno spazio di Hausdorff localmente compatto  $X$ . Il teorema afferma che ogni funzionale lineare positivo limitato  $\Lambda$  sullo spazio delle funzioni continue che svaniscono all'infinito,  $C_0(X)$ , è rappresentato da un'unica misura di Borel regolare  $\mu$ :

$$\Lambda(f) = \int_X f d\mu.$$

**Versione Quantistica (Non Commutativa):** In Meccanica Quantistica, lo spazio delle fasi viene sostituito dallo spazio di Hilbert e le funzioni commutano diventano operatori. Possiamo istituire il seguente parallelismo:

Caso Classico (Commutativo)	Caso Quantistico (Non Commutativo)
Spazio $X$ (localmente compatto)	Spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ ( $\dim \mathcal{H} = \infty$ )
Funzioni $C_0(X)$ (svaniscono all' $\infty$ )	Operatori Compatti $\mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H})$ (spettro tende a 0)
Funzionale Positivo $\Lambda$	Funzionale Positivo $\omega$
Misura di Probabilità $\mu$	Operatore di Stato $T$ (Matrice Densità)
Integrale $\Lambda(f) = \int f d\mu$	Traccia $\omega(A) = \text{tr}(TA)$

Tabella 1: Dizionario tra Teoria della Misura Classica e Meccanica Quantistica.

### Osservazione (Interpretazione Fisica)

La proposizione implica che possiamo pensare alla traccia  $\text{tr}(TA)$  come a un **integrale non commutativo** dell'osservabile  $A$  rispetto alla "misura" definita dallo stato  $T$ . Formalmente, se  $T_\rho$  è l'operatore associato a una misura di probabilità  $\rho$  sul reticolo  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  (grazie al teorema di Gleason), scriveremo simbolicamente:

$$\int_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} A d\rho := \text{tr}(T_\rho A). \quad (12)$$

Questa notazione unifica il concetto di valore di aspettazione quantistico con quello classico di media integrale.

Concludiamo con la formulazione formale del teorema di rappresentazione in questo contesto.

### Teorema (Teorema di Riesz Non Commutativo)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert complesso (separabile o di dimensione finita  $\neq 2$ ). Sia  $\omega : \mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$  un funzionale lineare positivo limitato con norma unitaria. Allora esiste un'unica misura di probabilità  $\rho_\omega : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \rightarrow [0, 1]$  (soddisfacente gli assiomi della misura quantistica) tale che:

$$\omega(A) = \int_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} A d\rho_\omega \quad \forall A \in \mathfrak{B}_\infty(\mathcal{H}). \quad (13)$$

In concreto, questo integrale è calcolato come  $\text{tr}(TA)$ , dove  $T$  è l'operatore di stato associato a  $\omega$ .

### 3 Teorie Bayesiane Generali (GBT)

In questa sezione presentiamo il framework delle Teorie Bayesiane Generali (General Bayesian Theories - GBT), un approccio ricostruttivo della teoria quantistica dal punto di vista di un agente che effettua scommesse sugli esiti di esperimenti possibili. Questo framework organizza le credenze dell'agente e le aggiorna quando diventano disponibili nuove informazioni, includendo come casi speciali la teoria della probabilità classica e quella quantistica.

#### 3.1 Credenze e Probabilità

Consideriamo un agente che scommette sugli esiti di esperimenti effettuati su un dato sistema fisico. Il punto di partenza è una classe basilare di esperimenti, denominati **esperimenti principali**.

##### Definizione (Esperimenti Principali)

*Gli esiti degli esperimenti principali formano un unico spazio campionario  $X$ , dotato di una  $\sigma$ -algebra di eventi  $\Sigma$ .  $\Sigma$  è una collezione di sottoinsiemi di  $X$  che soddisfa le seguenti proprietà:*

1.  $X \in \Sigma$ ;
2. Se  $E \in \Sigma$ , allora il complemento  $(X \setminus E) \in \Sigma$ ;
3. Se una collezione  $(E_i)_i \subset \Sigma$ , allora la loro unione  $\bigcup_i E_i \in \Sigma$ .

*Un esperimento principale corrisponde a una partizione  $\mathbb{E} = (E_i)_i$  dello spazio campionario  $X$  in eventi disgiunti. Per brevità, identifichiamo l'esperimento con la partizione corrispondente.*

L'agente si affida alle proprie credenze (beliefs) per effettuare scommesse. Queste possono includere convinzioni sulle leggi della fisica o sulla storia precedente del sistema.

##### Definizione (Belief)

*Denotiamo con  $B$  l'insieme di tutte le possibili credenze. Per una data Belief  $\beta \in B$ , l'agente assegna una distribuzione di probabilità  $p : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ , indicata come  $p(E|\beta)$ , che soddisfa le condizioni standard:*

1.  $p(E|\beta) \geq 0$  per tutti gli eventi  $E$ ;
2.  $p(\bigcup_i E_i|\beta) = \sum_i p(E_i|\beta)$  se gli eventi  $E_i$  sono mutuamente disgiunti;
3.  $p(X|\beta) = 1$ .

*Si assume che la probabilità di un evento  $E$  sia indipendente dallo specifico esperimento  $\mathbb{E}$  nel quale  $E$  si manifesta.*

È fondamentale notare che la Belief  $\beta$  determina l'assegnazione di probabilità  $p(E|\beta)$ , ma non viceversa: in generale, una Belief contiene più informazioni delle sole probabilità degli esiti degli esperimenti principali.

#### 3.2 Aggiornamenti Bayesiani e Assiomi di Coerenza

Quando l'agente riceve la garanzia che un evento  $E$  si è verificato, aggiorna la sua vecchia Belief  $\beta$  in una nuova Belief, denotata come  $\beta' = E\beta$ . L'obiettivo dell'aggiornamento è calcolare le probabilità condizionate. La mappa di aggiornamento  $\beta \mapsto E\beta$  non rappresenta un processo fisico sul sistema, ma un'operazione interna all'agente.

Il framework si fonda su tre assiomi di coerenza che vincolano il modo in cui l'agente aggiorna le proprie credenze.

##### Criterio (Assioma 1: Regola delle probabilità condizionate)

*Per ogni Belief iniziale  $\beta \in B$  e per ogni coppia di eventi  $E$  e  $F$  con  $p(E|\beta) \neq 0$ , la Belief aggiornata  $E\beta$  soddisfa:*

$$p(F|E\beta) = \frac{p(E \cap F|\beta)}{p(E|\beta)}. \quad (14)$$

*Questo implica che, una volta aggiornata la Belief basandosi su  $E$ , l'agente diventa certo dell'evento  $E$ , ovvero  $p(E|E\beta) = 1$ .*

Il secondo assioma riguarda la coerenza dell'agente rispetto a informazioni che già possiede.

### Criterio (Assioma 2: Coerenza in avanti - Forward Consistency)

Se l'agente è certo dell'evento  $E$ , allora la Belief dell'agente non cambia sotto l'aggiornamento per l'evento  $E$ . Matematicamente:

$$\forall \beta \in B, \forall E \in \Sigma, \quad p(E|\beta) = 1 \implies E\beta = \beta. \quad (15)$$

Una conseguenza immediata è che l'evento totale  $X$  non porta ad alcun aggiornamento:  $X\beta = \beta$ .

### 3.3 Azioni e Coerenza all'Indietro

Le condizioni di una scommessa possono essere alterate da un'azione. L'insieme delle azioni, denotato con  $\mathcal{A}$ , è assunto essere un monoide: le azioni possono essere composte (associatività) ed esiste un'azione identità  $\mathcal{I}$ . Quando viene eseguita un'azione  $\mathcal{A}$ , l'agente cambia la sua Belief in  $\beta' = \mathcal{A}\beta$ . Questo cambio soddisfa:

- $(\mathcal{A}\mathcal{B})\beta = \mathcal{A}(\mathcal{B}\beta)$ ;
- $\mathcal{I}\beta = \beta$ .

L'introduzione delle azioni permette di definire **esperimenti sequenziali**, costituiti da una sequenza di azioni intervallate da esperimenti principali (es.  $\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathcal{B}, \mathbb{F}$ ). La Belief fornisce una distribuzione di probabilità congiunta per la sequenza. Si dice che l'evento  $F$  implica l'evento  $E$  in un esperimento sequenziale se la probabilità condizionata di aver ottenuto  $E$  dato  $F$  è 1 ( $P(E|F) = 1$ ) e se  $F$  è "inalterato" dall'esperimento  $\mathbb{E}$  (la probabilità marginale di  $F$  è la stessa sia che  $\mathbb{E}$  venga eseguito o meno).

### Criterio (Assioma 3: Coerenza all'indietro - Backward Consistency)

Se l'evento  $F \in \mathbb{F}$  implica l'evento  $E \in \mathbb{E}$  in un esperimento sequenziale  $(\mathcal{A}, \mathbb{E}, \mathcal{B}, \mathbb{F})$ , allora l'aggiornamento per l'evento  $E$  può essere omissso nella Belief finale aggiornata per l'evento  $F$ . Matematicamente, se valgono le condizioni di implicazione e non-disturbo:

$$FBE\mathcal{A}\beta = FB\mathcal{A}\beta. \quad (16)$$

Le teorie che soddisfano gli Assiomi 1, 2 e 3 sono definite **Teorie Bayesiane Generali**.

### 3.4 Esperimenti Ideali ed Emergenza del Principio di Esclusività

Ogni GBT contiene una classe speciale di esperimenti, detti **esperimenti ideali**.

#### Definizione (Esperimento sequenzialmente raffinabile)

Un esperimento  $(\mathcal{A}, \mathbb{E})$  è detto **sequenzialmente raffinabile** se esiste un'azione  $\mathcal{A}'$  tale che, per ogni raffinamento  $(\mathcal{B}, \mathbb{F})$  (un esperimento più fine le cui probabilità marginali coincidono con quelle di  $\mathbb{E}$ ), l'esperimento grossolano non altera la distribuzione di probabilità dell'esperimento fine, a patto che l'agente esegua l'azione  $\mathcal{A}'$  tra i due.

#### Definizione (Esperimento Ideale)

Un esperimento  $(\mathcal{A}, \mathbb{E})$  è **ideale** se esiste un'azione  $\mathcal{A}'$  che garantisce la proprietà di non disturbo per tutti i possibili raffinamenti.

#### Teorema (Esistenza)

Gli esperimenti ideali esistono in ogni GBT. In particolare, ogni esperimento principale  $\mathbb{E}$  è un esperimento ideale.

Una conseguenza centrale del framework GBT è la derivazione del **Principio di Esclusività**. Consideriamo un insieme di esiti  $\mathcal{O}$  appartenenti a esperimenti (generalmente) diversi. Due esiti  $(\mathcal{A}, E)$  e  $(\mathcal{A}', E')$  sono detti *mutuamente esclusivi* se sono equivalenti a due esiti distinti di un singolo esperimento  $\mathcal{F}$ . Un insieme di esiti è *esclusivo a coppie* se ogni coppia nell'insieme è mutuamente esclusiva.

Il Principio di Esclusività afferma che per ogni insieme di esiti esclusivi a coppie  $\{(\mathcal{A}_n, E_n)\}$ , la somma delle loro probabilità non può superare 1:

$$\sum_n p(E_n|\mathcal{A}_n\beta) \leq 1, \quad \forall \beta \in B. \quad (17)$$

### Teorema (Validità del Principio di Esclusività)

*In ogni GBT, gli esiti degli esperimenti ideali soddisfano il principio di esclusività.*

Questo risultato implica che l'insieme delle correlazioni quantistiche per ogni scenario di contestualità di Bell o Kochen-Specker può essere caratterizzato completamente in termini di condizioni di coerenza bayesiana, assumendo che due esperimenti statisticamente indipendenti possano essere eseguiti in parallelo.

### 3.5 Esempio: La Teoria Quantistica come GBT

La teoria quantistica rientra nel framework GBT con le seguenti identificazioni:

- **Spazio Campionario:** Per uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^d$ ,  $X = \{1, \dots, d\}$ .
- **Esperimenti Principali:** Misure proiettive diagonali in una base ortonormale fissata  $\{|j\rangle\}$ . I proiettori sono  $P_{E_i} = \sum_{j \in E_i} |j\rangle\langle j|$ .
- **Credenze:** Operatori densità  $\rho \in L(\mathcal{H})$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $\text{tr}(\rho) = 1$ . La probabilità è data dalla regola di Born:  $p(E_i|\rho) = \text{tr}(P_{E_i}\rho)$ .
- **Aggiornamento:** Regola di Lüders.  $E_i\rho = \frac{P_{E_i}\rho P_{E_i}}{\text{tr}(P_{E_i}\rho)}$ .
- **Azioni:** Canali quantistici (mappe completamente positive che preservano la traccia).

In questo contesto, l'insieme degli esperimenti ideali coincide esattamente con l'insieme delle misure proiettive.

## 4 Esempi su operatori

### A cosa serve uno spazio normato e il prodotto scalare?

Prendo un SR e fisso una  $(O, e_1, e_2, \dots, e_n)$  a questo punto un vettore diventa

$$v = (x, y) = xe_1 + ye_2$$

con

$$x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad x(v) = x = (e_1, v)$$

$$y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad y(v) = y = (e_2, v)$$

$x$  e  $y$  dipendono quindi dalla base. La norma di un vettore invece non dipende dalla base. Il prodotto scalare invece mi serve per distinguere due vettori della stessa norma.

### Norma su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$

Si prenda  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  lo spazio delle funzioni reali  $C^\infty$  a supporto compatto. Posso definirci sopra la norma  $\|\cdot\|_p$  si può fare perchè è liscia e avendo supporto compatto è limitata.

## 4.1 Spazi di Hilbert

### Spazi non separabili

- **Oscilloscopio**

Vorrei ricostruire  $\psi(x) = \sum c_n e^{i\omega_n x}$ . Il problema però è che quando si vuole ricostruire un suono per esempio si fa uno spettro continuo in frequenze (oppure non sono dei seni multipli). Non ho infatti periodicità e quindi nessuna serie di Fourier.

- **Funzioni quasi-periodiche**

Prendiamo  $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$(f, g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} \int_{-R}^R dx \overline{g(x)} f(x)$$

questo permette di costruire uno spazio di Hilbert  $B_2(\mathbb{R})$  con la  $\|\cdot\|_2$ . Una base è  $\{e^{i\lambda x}\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ . Questo spazio di Hilbert non è separabile.

### Insiemi densi

E' possibile lavorare con un certo insieme di funzioni e ottenere risultati che valgono per tutte le altre? Questo ci porta al concetto di insieme denso.

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  sono densi in  $L^2(\mathbb{R})$ . Non ha senso lavorarci in dimensione finita.

### Perchè usiamo $L^2$

Perchè non vogliamo imporre limiti geometrici a priori sul modello.

## 4.2 Spazio di Successioni

- $l^p = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}, 1 \leq p < \infty$

- $l^\infty = \{(x_n) \subset \mathbb{K} \mid (x_n) \text{ è limitata}\}$   
 $(x_n) \in l^\infty \Leftrightarrow \exists C > 0 \text{ t.c. } \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \leq C < \infty$

- $c = \{(x_n) \subset \mathbb{K} \mid (x_n) \text{ ammette limite } < \infty\}$

- $c_0 = \{(x_n) \subset \mathbb{K} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$

- $c_{00} = \{(x_n) \subset \mathbb{K} \mid x_n \text{ definitivamente nulla}\}$

### Norme

- Su  $l^p$ :  $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$

- Su  $l^\infty, c, c_0, c_{00}$ :  $\|x\|_\infty := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$

## Inclusioni Naturali tra Spazi $l^p/c/c_0/c_{00}$

Per  $1 \leq p < r < \infty$ :

$$c_{00} \subset l^p \subset l^r \subset c_0 \subset c \subset l^\infty$$

$c_{00}$  è denso in  $l^p$  (per  $p < \infty$ ) e in  $c_0$ . Le inclusioni sono continue.

- $(l^p, \|\cdot\|_p)$  è Banach.
- $(l^2, \|\cdot\|_2)$  con  $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{x_n} y_n$  è Hilbert.
- $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$  e  $(c, \|\cdot\|_\infty)$  sono Banach (sono sottospazi chiusi di  $l^\infty$ ).
- $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$  NON è banach (perchè non è completo).

Controesempio: Si consideri la successione  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $c_{00}$  data da  $x_n^k = \begin{cases} 1/n & \text{se } 1 \leq n \leq k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ .

– È una successione di Cauchy in  $l^\infty$ : per  $l \geq 1$ ,

$$\|x^k - x^{k+l}\|_\infty = \sup_{n=k+1}^{k+l} \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

- Ma  $(x^k)$  converge in  $l^\infty$  alla successione  $x = (1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- $x \in c_0$  (perché  $1/n \rightarrow 0$ ), ma  $x \notin c_{00}$  (non è definitivamente nulla).
- Quindi  $c_{00}$  non è uno spazio chiuso in  $c_0$ , perciò non è completo.

## Disuguaglianza di Hölder

$\forall x \in l^p, \forall y \in l^q$  t.c.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

Se  $p = q = 2 \implies$  Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz.

## Separabilità di $l^p$

- $l^p$  è separabile per  $1 \leq p < \infty$ . ( $l^\infty$  non è separabile).
- Uno spazio è separabile  $\Leftrightarrow \exists$  un sottospazio denso numerabile.
- $c_{00}$  (in particolare l'insieme delle successioni a valori razionali) è denso in  $(l^p, \|\cdot\|_p)$  per  $1 \leq p < \infty$ .
- $\overline{c_{00}}^{\|\cdot\|_p} = l^p$ .
- $(\forall x \in l^p, \exists (x^k) \subset c_{00}$  t.c.  $\|x^k - x\|_p \rightarrow 0)$

## Riflessività

Def: Uno spazio normato  $(X, \|\cdot\|_X)$  è riflessivo se l'immersione canonica  $J : X \rightarrow X^{**}$  è suriettiva.

- $J : x \mapsto \delta_x$
- $\delta_x : X^* \rightarrow \mathbb{K}$  è un funzionale lineare e continuo (un elemento del bidual  $X^{**}$ ) definito da:

$$f \mapsto \delta_x(f) = f(x)$$

- $X^* = \{f : X \rightarrow \mathbb{K}, \text{lineare e continuo}\}$  (duale topologico)
- $X^{**} = (X^*)^*$  (bidual topologico)
- La riflessività vale per  $(l^p, \|\cdot\|_p)$  con  $1 < p < \infty$ .
- Tutti gli spazi di Hilbert sono riflessivi.

### 4.3 Spazi di Funzioni $L^p(\mathbb{R}^n)$ ( $p \in [1, +\infty]$ )

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto e  $\mu$  la misura di Lebesgue.

- $L^p(\Omega) = \{[f] : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \int_{\Omega} |f(x)|^p d^n x < \infty\}$ , per  $1 \leq p < \infty$ .
- $L^\infty(\Omega) = \{[f] : \Omega \rightarrow \mathbb{K} \mid \exists C > 0 \text{ t.c. } |f(x)| \leq C \text{ q.o. in } \Omega\}$
- La norma in  $L^\infty$  è  $\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C > 0 \mid |f(x)| \leq C \text{ q.o. in } \Omega\}$  (estremo superiore essenziale).

Si considerano classi di equivalenza  $[f]$  (funzioni uguali quasi ovunque) affinché  $\|f\|_{L^p} = 0 \Leftrightarrow f = 0$  q.o.

#### Disuguaglianza di Hölder per $L^p$

Siano  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^q(\Omega)$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Allora  $fg \in L^1(\Omega)$  e

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| d^n x \leq \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p d^n x \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} |g(x)|^q d^n x \right)^{1/q}$$

ovvero  $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$ .

#### Inclusioni Naturali

Se  $\text{mis}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 d^n x < \infty$  (misura finita) e  $1 \leq p < r \leq \infty$ :

$$L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

L'inclusione è continua.

#### Riflessività

- $L^p(\Omega)$  è riflessivo per  $1 < p < \infty$ .
- $L^1(\Omega)$  e  $L^\infty(\Omega)$  non sono riflessivi (in generale).

#### Separabilità

- $L^p(\Omega)$  è separabile per  $1 \leq p < \infty$ .
- $L^\infty(\Omega)$  non è separabile (in generale).
- $C_0^\infty(\Omega)$  (funzioni  $C^\infty$  a supporto compatto in  $\Omega$ ) è denso in  $L^p(\Omega)$  per  $p < \infty$ .
- $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^p}} = L^p(\Omega)$ .

#### Convergenza Debole e Forte in $X^*$

Sia  $(X, \|\cdot\|_X)$  uno spazio normato e  $\{f_n\} \subset X^*$ .

- **Convergenza Debole (puntuale):**  $f_n \rightharpoonup f$  se  $f_n(x) \rightarrow f(x) \forall x \in X$ .
- **Convergenza Forte (in norma):**  $f_n \rightarrow f$  se  $\|f_n - f\|_{X^*} \rightarrow 0$ .
- forte  $\implies$  debole.
- debole  $\implies$  forte se  $\dim X < \infty$ .



## 4.4 Spazi $L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Def:  $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$  (spazio delle funzioni localmente  $p$ -integrabili),  $1 \leq p \leq \infty$ , se:

$$\forall K \subset \mathbb{R}^n \text{ compatto, } f \in L^p(K)$$

(cioè  $\int_K |f(x)|^p dx < \infty$ ).

Esempi:

- $f(x) \equiv c \in \mathbb{R}$ . Se  $c \neq 0$ ,  $f \notin L^1(\mathbb{R})$  ma  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  (e  $L^p_{loc}$  per ogni  $p$ ).
- $f \in C^0(\mathbb{R}^n) \implies f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$  per ogni  $p$ , perché  $f$  è limitata sui compatti.
- $f(x) = 1/x$  (con  $f(0) = 0$ ) non è in  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Basta prendere un compatto  $K$  che contiene 0, ad esempio  $K = [-1, 1]$ , e si ha  $\int_{-1}^1 |1/x| dx = \infty$ .

Valgono le seguenti inclusioni:

$$L^p(\mathbb{R}^n), C^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

### Lemma (Fondamentale Calcolo Variazioni, caso 1D)

Sia  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $f \in L^1_{loc}((a, b))$ . Se vale:

$$\int_a^b f(x) \frac{d\varphi}{dx}(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty((a, b))$$

allora  $\exists c \in \mathbb{R}$  t.c.  $f(x) = c$  per q.o.  $x \in (a, b)$ .

## 4.5 Richiami di Complementi di Analisi III

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto.

### Teorema (Teorema di Beppo Levi (Convergenza Monotona))

Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$  una successione di funzioni tale che:

- $f_n \geq 0$  q.o.
- $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$  q.o.  $\forall n \in \mathbb{N}$  (monotona non decrescente).

Sia  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  q.o. (il limite esiste, eventualmente  $+\infty$ ). Allora:

$$\int_{\Omega} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx$$

### Teorema (Lemma di Fatou)

Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$  una successione di funzioni tale che  $f_n \geq 0$  q.o. Allora:

$$\int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx$$

### Teorema (Teorema di Lebesgue (Convergenza Dominata))

Sia  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$  una successione di funzioni tale che:

- $f_n(x) \rightarrow f(x)$  q.o. in  $\Omega$ .
- $\exists g \in L^1(\Omega)$  (una funzione dominante) t.c.  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  q.o.

Allora  $f \in L^1(\Omega)$  e  $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$  (cioè  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1$ ).

## 4.6 Spazi di Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$

Esempio (Equazione di Schrödinger per una particella libera):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t, \underline{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(t, \underline{x})$$

Si cerca  $\psi$  tale che  $\psi(t, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3)$  (funzione d'onda) per ogni  $t$ . L'equazione contiene  $\Delta \psi = \sum_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}$ . Per dare senso a questo operatore, non basta richiedere  $\psi \in C^2$ . La richiesta corretta (in termini energetici) è  $\psi(t, \cdot) \in H^2(\mathbb{R}^3)$ .

### Definizione $W^{1,p}$ (Derivata Debole)

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto,  $1 \leq p < \infty$ . Si dice che  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  se:

1.  $u \in L^p(\Omega)$
2.  $\exists f_1, \dots, f_n \in L^p(\Omega)$  tali che (integrando per parti):

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} f_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, n$$

Le funzioni  $f_i$  sono uniche (q.o.) e sono chiamate **derivate deboli** di  $u$ . Si pone  $f_i =: \frac{\partial u}{\partial x_i}$ .

- Se  $u \in C^1(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ , le derivate deboli coincidono con le derivate classiche.

**Norma  $W^{1,p}$**  La norma standard su  $W^{1,p}(\Omega)$  è:

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p)^{1/p} = \left( \int_{\Omega} |u|^p dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx \right)^{1/p}$$

(Per  $p = \infty$  si usa la somma delle norme  $L^\infty$ ).

**Proprietà**  $(W^{1,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}})$  è uno spazio di Banach.

- È separabile per  $1 \leq p < \infty$ .
- È riflessivo per  $1 < p < \infty$ .
- Per  $p = 2$ :  $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$  è uno spazio di Hilbert con prodotto scalare:

$$(u, v)_{H^1} := \int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) dx$$

### Definizione $W^{k,p}$

Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto. Per  $k \in \mathbb{N}$ :

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq k\}$$

dove  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$  è un multi-indice,  $|\alpha| = \sum \alpha_i$  è l'ordine della derivata, e  $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$  è la derivata debole.

- $W^{k,2}(\Omega) =: H^k(\Omega)$  (Spazi di Hilbert)
- $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ , quindi  $H^0 = L^2$ .
- Esempio Schrödinger:  $\psi(t, \cdot) \in H^2(\mathbb{R}^3) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \mid \partial_i \psi \in L^2, \partial_i \partial_j \psi \in L^2\}$ .

## Teoremi di Embedding di Sobolev

I teoremi di Sobolev (o immersioni) stabiliscono relazioni tra gli spazi  $W^{k,p}$  e gli spazi  $C^m$  (spazi di funzioni continue con  $m$  derivate continue).

Se  $k - n/p > m$  (dove  $m$  è un intero  $\geq 0$ ), allora  $W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \subset C^m(\mathbb{R}^n)$ .

Una formula sintetica è:  $u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \implies u \in C^m(\mathbb{R}^n)$  con  $m = \lfloor k - n/p \rfloor$ .

### Osservazione

- $u \in H^2(\mathbb{R}^3)$ . Qui  $k = 2, p = 2, n = 3$ .
- $m = \lfloor 2 - 3/2 \rfloor = \lfloor 0.5 \rfloor = 0$ .
- Quindi  $H^2(\mathbb{R}^3) \subset C^0(\mathbb{R}^3)$ .
- Questo significa che una funzione  $H^2$  (dopo eventuale modifica su un insieme di misura nulla) è continua e limitata.
- Questo è fondamentale per poter "valutare la funzione  $\psi$  in un punto  $x_0$ ",  $\psi(x_0)$ , operazione che non ha senso per una generica funzione  $L^2$ .

## 4.7 Operatori

### Operatore posizione

Prendiamo  $\mathcal{H} = L^2((0,1))$  e definiamo

$$\hat{X} : L^2((0,1)) \mapsto L^2((0,1)) \quad \hat{X}\psi = x\psi$$

possiamo calcolare la norma usando che

$$\int_0^1 dx |x\psi(x)|^2 \leq \int_0^1 dx |\psi(x)|^2 \Rightarrow \|\hat{X}\| \leq 1$$

Se però  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  allora posso prendere  $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{x} & x \geq 1 \end{cases}$$

ma  $\hat{X}\psi \notin L^2(\mathbb{R})$  quindi gli operatori non limitati hanno bisogno di una teoria più estesa.

Vogliamo costruire l'aggiunto di  $\hat{X}$ , supponiamo di saperne l'esistenza. Possiamo usare

$$(\phi, \hat{X}\psi) = \int_0^1 dx \overline{\phi(x)} x \psi(x) = \int_0^1 dx x \overline{\phi(x)} \psi(x) = (\hat{X}\phi, \psi)$$

quindi è autoaggiunto.

Prendiamo  $\mathcal{H} = L^2((0,1))$ , proviamo a trovarne gli autovalori

$$\hat{X}\psi = \lambda\psi$$

anche se mi aspetto a priori che  $\lambda = x \ \forall \psi \in [0,1] \ \exists \psi \neq 0 \in W_\lambda$  quindi deve esistere un sottospazio ortogonale a  $W_\lambda$  quindi ho trovato una decomposizione con cardinalità di  $[0,1]$ , ma questo è assurdo perchè  $L^2$  è separabile. Abbiamo postulato che  $\hat{X}$  sia l'operatore giusto per la posizione magari ha autovalori diversi da quelli che ci aspettiamo però  $\forall x$  troviamo il  $\lambda$  tale che

$$x\psi(x) = \lambda\psi(x) \iff \psi(x) = 0$$

quindi non ho autovalori. Proviamo ad estendere la definizione di autovalore. Con le matrici quadrate 1

$$Tv = \lambda v \iff (T - v\mathbb{1}) = 0 \Rightarrow \#(T - v\mathbb{1})^{-1}$$

quindi se esiste l'inversa allora non  $\lambda$  non è un autovalore. In dimensione finita non ho fatto niente. Vediamo il caso di  $\hat{X}$

$$\exists (\hat{X} - \lambda\mathbb{1})^{-1} \text{ t.c. } ((\hat{X} - \lambda\mathbb{1})^{-1}\psi)(x) = \frac{1}{x - \lambda}\psi(x) \Rightarrow (\hat{X} - \lambda\mathbb{1})^{-1} := \frac{1}{x - \lambda}$$

Se  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \setminus [0, 1]$

$$\int_0^1 dx \left| \frac{\psi}{x - \lambda} \right|^2 < \infty$$

quindi ho l'inverso ben definito. Dato che l'unico intervallo in cui quell'integrale non è definito sono  $[0, 1]$  non ho l'inversa quindi sono autovalori. Quindi possiamo introdurre questa nuova definizione pagando il prezzo di non avere più autofunzioni in  $L^2$ , useremo le distribuzioni.

Questo operatore ha un ottimo comportamento nei limitati. Cambiando gli autovalori a seconda dello spazio in cui ci troviamo.

### Operatore parità

Prendiamo  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$  e definiamo

$$\hat{P} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}) \quad \hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$$

possiamo calcolare la norma

$$||\hat{P}|| = 1$$

esso è anche unitario, cioè non cambia le norme.

Troviamo gli autovalori di  $P$

$$P\psi = \lambda\psi \rightarrow \psi(-x) = \lambda\psi(+x)$$

usando  $P^2$  possiamo trovare che  $\lambda^2 = 1$ . Definiamo  $\psi_{\pm} = \frac{\psi(x) \pm \psi(-x)}{2}$  si mostra che sono autovalori di  $P$ . Quindi ogni funzione di  $L^2$  può essere decomposta in due funzioni, la parte pari e la parte dispari.

Prendiamo una carica  $q$  a destra di un semispazio infinito conduttore, prendiamo  $\vec{E}_q = k \frac{q}{r^2} \hat{r}$  come se non ci fosse la parete e inoltre voglio che  $\vec{E}_q(x=0) = 0$  prendo quindi la parte dispari e rimane una soluzione delle Maxwell. Se invece avessi  $\partial_x \vec{E}_q(x=0) = 0$  prendo la parte pari.

Si può dimostrare che l'operatore che prende la parte pari (dispari) sia un proiettore.

### Operatori finito dimensionali

Un operatore su  $\mathbb{C}^n$  è sempre rappresentabile tramite una matrice ed è sempre limitato. I seguenti sono indipendenti dalla base scelta

- Determinante (dipende dal prodotto degli autovalori)
- Traccia (dipende dalla somma degli autovalori)
- Autovalori

dato che voglio estrarre informazioni da un sistema fisico che è indipendente dalla base, queste devono essere contenute negli autovalori. Da ciò deriva il postulato della misura. Ci interessiamo però di misure reali quindi vorremmo che i nostri autovalori fossero numeri reali. Data una  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  e una b.o.c  $\{e_i\}$  allora  $A_{ij} = (e_i, Ae_j)$  se  $A$  è diagonalizzabile allora esiste una  $U$  tale che

$$UAU^{-1} = \sum \lambda_i P_i \quad \tilde{P}_i := U^{-1} P_i U \Rightarrow A = \sum \lambda_i \tilde{P}_i$$

tramite il teorema spettrale si dimostra che  $A = \bar{A}^\dagger = A^*$

### Operatore impulso

Prendiamo una  $\psi \in L^2$

$$\psi(x) = \begin{cases} x^{-1/4} & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

applicando  $\frac{d}{dx}$  usciamo da  $L^2$ . Ora provo a calcolare l'aggiunto

$$\left( \phi, -i \frac{d\psi}{dx} \right) = -i \int_0^1 dx \overline{\phi(x)} \frac{d\psi}{dx}(x) = -i \overline{\phi} \psi|_0^1 + \int_0^1 dx \overline{\left( -i \frac{d\phi}{dx} \right)} \psi$$

questo termine di bordo va rimosso.

Questo operatore ha un ottimo comportamento negli illimitati, sistema il comportamento degli stati all'infinito e peggiora le singolarità in zero. Cambiando gli autovalori a seconda dello spazio in cui ci troviamo. Se lo spazio è limitato  $P$  e  $T$  NON sono più autoaggiunti.

Prendiamo quindi  $\mathcal{H} = L^2(0, \infty)$ , che è assimilabile al caso di una particella contro una parete e supponiamo inizialmente di prendere

$$\hat{P} = -i \frac{d}{dx} \quad D(\hat{P}) = C_0^\infty(0, \infty)$$

stando attenti a prendere l'intervallo aperto e non chiuso se no si ammettono funzioni che non si annullano in 0. Quindi si trova che

$$\left( \phi, -i \frac{d\psi}{dx} \right) = -i \int_0^1 dx \overline{\phi(x)} \frac{d\psi}{dx}(x) = -i \overline{\phi} \psi|_0^1 + \int_0^1 dx \overline{\left( -i \frac{d\phi}{dx} \right)} \psi = \left( \hat{P}^* \phi, \psi \right)$$

dove l'ultima uguaglianza ha senso se e solo se

1. il dominio di  $\hat{P}$  permette l'annullamento del termine di bordo
2.  $\psi \in L^2$  e  $\phi' \in L^2 \Rightarrow \psi \phi' \in L^1$

quindi troviamo che  $D(\hat{P}^*)$  è massimale, cioè tutte le funzioni tali che la loro derivata è in  $L^2$ . A questo punto usiamo la teoria degli indici di difetto di Von Neumann, trovando il  $\ker(P^* \pm i\mathbb{I})$ , risolvendo le due equazioni differenziali si arriva a scartare la soluzione esponenziale crescente perchè non è in  $L^2(0, \infty)$  ma a tenere l'altra. Questo fa sì che le dimensioni degli spazi siano diverse e quindi  $P$  non è autoaggiunto e quindi neanche un'osservabile fisica di quel sistema. Capiamo cosa significa, mettiamo caso di avere l'hamiltoniana di particella libera

$$\hat{H} = \hat{T} \quad \hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$$

(da notare che non ho fatto comparire  $P$ ), che applicata alla soluzione esponenziale negativa mi restituisce un'autovalore negativo. Questo autovalore non è rimuovibile come in fisica classica aggiungendo una costante in quanto in MQ questo non è più valido.  $P$  non può più essere autoaggiunto, in quanto se questo fosse vero, avrei che

$$\hat{P} = \sqrt{(2m\hat{H})}$$

e quindi avrebbe un autovalore complesso, il che non lo renderebbe autoaggiunto (fisico). A livello sperimentale quello che si fa è misurare sempre l'energia e mai l'impulso. Misurando vicino alla parete ci si accorge di questa soluzione e di questo autovalore, mentre mettendoci molto lontano dalle pareti questo effetto non viene distinto dal detector e si può lavorare con l'ipotesi di  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ .

Nel caso  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$  si trova che  $d_+ = d_- = 1$  e quindi  $P$  risulta essere un buon osservabile. Quindi ho una mappa  $U : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tra i due sottospazi  $\mathcal{N}_\pm$  che manda  $z \mapsto e^{i\alpha} z$  rappresentando un'isometria tra i due spazi. Costruendo tramite essa le estensioni autoaggiunte, si può notare che la scelta di  $\alpha$  rappresenta la scelta della condizione al contorno del problema.

## Operatori compatti

Possiamo immaginarceli come matrici infinite. Vorrei fare il conto di  $\langle A \rangle$  con un certo  $\psi = (\alpha, \beta)$  senza utilizzare una base. Non è che forse  $\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A)$  dove

$$\rho = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \bar{\alpha}\beta \\ \bar{\beta}\alpha & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

facendo il conto si trova che è vero. In MQ si può generalizzare uno stato con queste matrici di densità. In spazi infinito-dimensionali abbiamo bisogno di oggetti del genere con traccia finita, quali sono? Operatori classe traccia che sono compatti.

Gli operatori compatti garantiscono che:

1. Gli autovalori ordinati tendono a 0
2. Ogni autovalore ha molteplicità finita

quindi abbiamo speranza che la traccia converga.

## Operatori non limitati

Un esempio generale di operatore non limitato è (con  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ )

$$T = \sum_{k=0}^N c_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$$

se ho  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$   $T\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  e sono tutti stati.

## Operatori densi

Definiamo

$$\hat{T} = -i \frac{d}{dx} \quad \hat{K} = -\frac{d^2}{dx^2}$$

il dominio massimale è quello per cui ha senso applicarci l'impulso.

$$D_{\text{massimale}}(\hat{T}) = H^1(\mathbb{R}) \quad D_{\text{massimale}}(\hat{K}) = H^2(\mathbb{R})$$

dobbiamo anche assicurarci che (la corrente conservata)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{\psi} \frac{d\psi}{dx} = 0$$

questa va a 0 solo in una dimensione su  $H^1$  ma non in  $\mathbb{R}^3$ , questa va a 0 ma per tanti altri matti motivi. Un caso sensato in cui possiamo fare i conti senza soffrire è  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = D_0(\hat{T})$  che è denso in tanti spazi e va tutto bene. Proviamo a trovare l'aggiunto

$$(\phi, T\psi) = -i \int_{\mathbb{R}} \bar{\phi}(x) \frac{d\psi}{dx} = -i \bar{\phi}\psi \Big|_{-\infty}^{+\infty} + i \int_{\mathbb{R}} \frac{d\bar{\phi}(x)}{dx} \psi(x)$$

dove il termine di bordo muore senza problemi, se avessi usato  $H^1$  andava bene in una dimensione ma in tre assolutamente no. Continua però a non essere definito bene il secondo integrale, potrebbe essere comunque un integrale divergente. Se ho però la derivata di  $\phi \in L^2(\mathbb{R})$  allora va bene perchè il prodotto di due  $L^2$  mi dà una  $L^1$  e quell'integrale si fa. Allora a quel punto posso dire che quel conto fa ( $\hat{T}^*\phi, \psi$ ) ottengo quindi che

$$D(\hat{T}) = \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad D(\hat{T}^*) = H^1(\mathbb{R})$$

però

$$T^*\psi = -i \frac{d\psi}{dx} \Rightarrow T \subset T^*$$

La domanda che mi faccio è, esiste un  $S$  tale che

$$T \subset S \subset T^* \quad \text{t.c.} \quad S = S^*$$

La risposta può essere, non si può fare (operatore  $P$  su una semiretta), si può fare ed è unico (operatore  $P$  su  $\mathbb{R}$ ), ci sono infiniti modi di farlo.

## 4.8 Varie su operatori

### Aggiunto di A

Scelgo  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  e suppongo che  $A\psi = \lambda_1\psi$  quindi il sistema non cambia e io posso confrontarlo con uno stato di controllo  $(\psi, \lambda_1\psi) = (\psi, A\psi) = \lambda_1$  (dato che  $\|\psi\| = 1$ ). In generale posso farlo con un qualunque vettore di controllo o un array di essi. Posso ricavare la stessa informazione agendo sullo stato di controllo invece che sul sistema fisico? In altre parole, esiste un certo  $B$  tale che  $(\phi, A\psi) = (B\phi, \psi)$ ? La risposta ci porta all'aggiunto di  $A$ . Se questo operatore è lo stesso  $A$  si dice che è autoaggiunto e ha autovalori reali.

### Modulo di un operatore

Prendiamo un  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$  diagonalizzabile e prendiamo una funzione  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$A = \sum \lambda_i P_{\lambda_i} \Rightarrow f(A) := \sum f(\lambda_i) P_{\lambda_i}$$

il modulo serve perchè vorrei decomporre una matrice come decompongo un numero complesso in fase e modulo. A questo punto  $f$  la scelgo come la funzione radice.

### Traccia di un operatore

Prendiamo per semplicità una matrice, la traccia di  $A$  posso definirla anche nel caso infinito dimensionale, ma converge? Ipotizziamo che la traccia sia la somma infinita dei suoi autovalori

$$\text{Tr} A = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j$$

Per il teorema di Riemann-Dini, dato un numero reale e una serie semplicemente convergente ma non assolutamente convergente (come  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ ), esiste una permutazione di termini di tale successione che ha convergenza a quel numero. Questo è un problema in MQ perchè potrei avere stati normalizzati a seconda della permutazione della serie. Quindi va richiesta la convergenza assoluta. Facciamo un esempio in cui le cose vanno male.

Prendiamo un operatore  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  e un vettore che scomponiamo sulla base standard  $e_n$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n \quad \Rightarrow \quad T\psi := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} c_n e_n$$

$T$  si può mostrare che è limitato quindi  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  e che  $\|T\| \leq 1$ . Però

$$\text{Tr}T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

Ora se cambio base, e quindi scelgo i vettori della nuova base prendendone due dispari e uno pari... cioè  $v_1 = e_1$   $v_2 = e_3$   $v_3 = e_2$   $v_4 = e_5$ ... ottengo che

$$\text{Tr}T = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k} \right] = \frac{3}{2} \ln 2$$

infatti non è classe traccia e non può essere uno stato quantistico.

### Chiusura di un operatore

Negli spazi finito dimensionali è come la continuità però non vediamo così.

Un operatore non chiuso è uno nel dominio non ci sono alcuni punti, come una retta che non ha il punto in zero. Uno che è chiudibile è uno che posso dire il suo valore dove non è definito.

### Teorema (Completezza degli operatori limitati)

Siano  $X$  uno spazio normato e  $Y$  uno spazio di Banach. Allora lo spazio degli operatori lineari limitati  $\mathcal{B}(X, Y)$  è uno spazio di Banach (cioè completo rispetto alla norma operatoriale).

$$\|T\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

In questo caso specifico,  $X = Y = \mathcal{H}$  è Hilbert  $\Rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  è Banach.

### Teorema (Norma operatoriale e Spazi di Banach)

Se  $X, Y$  sono spazi normati,  $\mathcal{B}(X, Y)$  è normato con norma  $\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ . Se  $Y$  è Banach, allora  $\mathcal{B}(X, Y)$  è Banach. Dimostrazione (cenni): Se  $(T_n)_n$  è Cauchy in  $\mathcal{B}(X, Y)$ , allora per ogni  $x$ ,  $(T_n x)_n$  è Cauchy in  $Y$ . Poiché  $Y$  è completo,  $T_n x \rightarrow y$ . Si definisce  $Tx := y$ . Si dimostra poi che  $T$  è limitato e  $T_n \rightarrow T$  in norma.

### Equivalenza Unitaria

Siano  $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  e  $T' : D(T') \rightarrow \mathcal{H}'$  con  $D(T') = UD(T)$  e  $T' = UTU^{-1}$ , dove  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$  è unitario. Provare le seguenti proprietà:

- (1)  **$T$  chiudibile  $\Rightarrow T'$  chiudibile.** Definiamo  $\overline{T'} = U\overline{T}U^{-1}$ . Poiché  $\overline{T}$  è chiuso, si verifica che questa è la chiusura di  $T'$ .

$$\overline{T'}|_{D(T')} = U\overline{T}|_{D(T)}U^{-1} = UTU^{-1} = T'$$

- (2)  **$T$  chiuso  $\iff T'$  chiuso.** Ricordiamo che  $T$  è chiuso se il grafico  $\Gamma(T)$  è chiuso. Sia  $\xi_n = Ux_n \in D(T')$ . Se  $\xi_n \rightarrow \xi$  e  $T'\xi_n \rightarrow \eta$ , dobbiamo mostrare che  $\xi \in D(T')$  e  $T'\xi = \eta$ . Dato che  $U$  è unitario (quindi isometrico e invertibile), la convergenza di  $\xi_n$  implica la convergenza di  $x_n$ . Essendo  $T$  chiuso, le relazioni si trasportano tramite  $U$ .

$$T'\xi_n = UTU^{-1}(Ux_n) = UTx_n \rightarrow UTx = T'\xi$$

- (3)  **$T$  hermitiano  $\Rightarrow T'$  hermitiano.**  $T$  hermitiano:  $\langle y, Tx \rangle = \langle Ty, x \rangle$ . Siano  $x', y' \in D(T')$ . Esistono  $x, y \in D(T)$  tali che  $x' = Ux, y' = Uy$ .

$$\begin{aligned} \langle y', T'x' \rangle_{\mathcal{H}'} &= \langle Uy, UTU^{-1}Ux \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle Uy, UTx \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle y, Tx \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle Ty, x \rangle_{\mathcal{H}} = \langle UTy, Ux \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle T'y', x' \rangle_{\mathcal{H}'} \end{aligned}$$

(4)  **$T$  simmetrico  $\implies T'$  simmetrico.** Simmetrico significa Hermitiano +  $D(T)$  denso. Abbiamo già provato l'hermiticità. La densità di  $D(T')$  segue dalla densità di  $D(T)$  e dalla suriettività/continuità di  $U$ . Se  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{H}$ , allora  $U\varphi_n \rightarrow U\varphi$  in  $\mathcal{H}'$ .

(5)  **$T$  normale  $\iff T'$  normale.** Normale significa  $TT^* = T^*T$ . Calcoliamo l'aggiunto:  $(T')^* = (UTU^{-1})^* = (U^{-1})^*T^*U^* = UT^*U^{-1}$ .

$$T'(T')^* = (UTU^{-1})(UT^*U^{-1}) = UTT^*U^{-1}$$

Se  $T$  è normale,  $UTT^*U^{-1} = UT^*TU^{-1} = (T')^*T'$ .

## 4.9 Osservazioni sulla MQ

### Misure in MQ

In MQ ho una corrispondenza biunivoca tra osservabili e operatori su  $L^2(\mathbb{R})$

$$A : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

voglio che il processo di misura restituisca sempre qualcosa nello stesso spazio e voglio che non sia troppo diverso dallo stato iniziale (che non cambino le proprietà topologiche degli insiemi input) i.e. voglio continuità degli operatori. Per esempio prendiamo  $U_a$  operatore che agisce su  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  come

$$(U_a f)(x) = f(x - a)$$

questa cosa funziona perchè l'integrale di Lebesgue è invariante per traslazioni.

Prendo uno stato  $\psi \in \mathcal{H}$  ci faccio agire  $A$  (operatore su questo spazio) e ottengo un nuovo stato. Siamo interessati quale sia la "differenza" tra questo nuovo stato e quello iniziale. Quindi viene introdotta la norma di un operatore.

### Successione di misure

Vorrei inoltre poter fare una successione di misure sul mio sistema che generano una successione di stati che non so neanche se converge. Vorrei che a partire dai dati sperimentali riuscissi a concludere che la successione converge a qualcosa che posso approssimare a meno di un  $\epsilon$ . Devo avere quindi uno spazio in cui Cauchy  $\iff$  Convergente. I limiti sono SEMPRE in norma.

### Perchè la MQ è basata su $L^2(\mathbb{R})$

Si consideri

$$\varepsilon(E, B) = \int_{\mathbb{R}} dx (|E|^2 + |B|^2)$$

quest'integrale ovviamente deve convergere, ma esistono soluzioni delle Maxwell che lo fanno divergere  $e^{x-t}$ . Quindi si richiede che  $E, B \in L^2(\mathbb{R})$ . Gli spazi di Hilbert separabili vogliono mantenere la finitezza di queste grandezze fisiche.

### Statistica di Bose-Einstein e oscillatore armonico quantistico

Si prenda l'oscillatore armonico quantistico

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{Q}^2$$

esso presenta uno spettro discreto  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ , da dove salta fuori l'ipotesi di Planck?

Dato  $\beta = (k_B T)^{-1} > 0$  si può prendere  $e^{-\beta\hat{H}}$  e calcolarne la traccia con una boc di autovettori di  $\hat{H}$

$$\text{Tr}(e^{-\beta\hat{H}}) = \sum (\psi_n, e^{-\beta\hat{H}}\psi_n) = \sum (\psi_n, \sum \frac{1}{n!}(-\beta\hat{H})^n\psi_n) = \sum e^{-\beta E_n} = e^{-\beta\hbar\omega/2} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

dove nell'ultimo passaggio è stata calcolata la serie geometrica. Si mostra facilmente che  $|\hat{H}| = \hat{H}$  (è positivo e autoaggiunto). L'informazione sulla statistica è contenuta nella traccia dell'Hamiltoniano.

Ci potremmo anche chiedere se  $H$  sia autoaggiunto, la risposta è negli indici di difetto e nelle equazioni differenziali ad esse associate. Quello che si trova è che la soluzione esiste per Picard-Lindelhof (polinomi di Hermite) ma non sono in  $L^2$ .



### 4.9.1 Il caso dell'Idrogeno

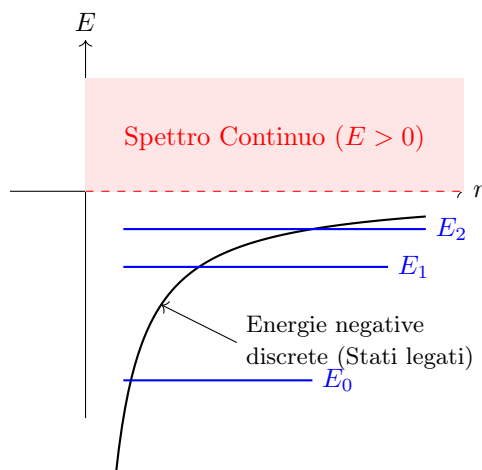
Consideriamo l'evoluzione temporale di uno stato quantistico. Se all'istante iniziale abbiamo:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\psi(0)\rangle$$

L'evoluzione temporale è data da:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} |n\rangle$$

**Attenzione:** Questa formula è valida *solo se* l'Hamiltoniana  $H$  ha uno spettro **puramente discreto**. Nel caso dell'atomo di Idrogeno, l'Hamiltoniana  $H$  possiede sia uno spettro continuo che uno spettro discreto.



Non sappiamo a priori se  $|\psi(t)\rangle$  sia uno stato legato o di scattering (o una sovrapposizione). Dobbiamo prendere una base dello spazio  $L^2$ . Se dobbiamo trovare le autofunzioni di  $H$ :

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e}{4\pi r} \right] \psi = E\psi$$

Poiché  $H$  ha spettro continuo, le soluzioni  $\psi$  appartengono allo spazio delle distribuzioni  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , non necessariamente a  $L^2$  (non sono normalizzabili nel senso classico). È un'equazione differenziale su  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .

## 4.10 Indici di difetto e Criteri

### Definizione (Indici di Difetto)

Dato un operatore simmetrico  $T$ , si definiscono indici di difetto le dimensioni dei sottospazi di difetto (nuclei dell'aggiunto shiftato):

$$d_{\pm}(T) := \dim[\ker(T^* \mp i\mathbb{I})]$$

### Teorema (Estensioni Autoaggiunte e Indici di Difetto)

Se  $d_+(T) = d_-(T) = k$ , allora esistono infinite estensioni autoaggiunte di  $T$ . Tale famiglia di estensioni è parametrizzata da un gruppo a un parametro  $U(\alpha)$  di trasformazioni unitarie (o più in generale da una matrice unitaria  $U(k)$ ). Se  $d_+(T) \neq d_-(T)$ , l'operatore non ammette estensioni autoaggiunte. Se  $d_+(T) = d_-(T) = 0$ , l'operatore è essenzialmente autoaggiunto.

### Teorema (Formula di von Neumann per il Dominio)

Nel caso  $d_+(T) = d_-(T) = 1$ , siano  $\varphi_+ \in \ker(T^* - i\mathbb{I})$  e  $\varphi_- \in \ker(T^* + i\mathbb{I})$  vettori normalizzati. Le estensioni autoaggiunte  $T_{\alpha}$  sono in corrispondenza biunivoca con le isometrie suriettive tra i sottospazi di difetto (in questo caso fasi  $e^{i\alpha}$ ). Il dominio dell'estensione  $T_{\alpha}$  è dato da:

$$D(T_{\alpha}) = \{\psi + z\varphi_+ + ze^{i\alpha}\varphi_- \mid \psi \in D(T), z \in \mathbb{C}\}$$

### Criterio (Autoaggiunzione essenziale tramite base ortonormale)

Se un operatore simmetrico  $T$  possiede una base ortonormale di autostati  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con autovalori reali, allora  $T$  è essenzialmente autoaggiunto, cioè  $d_+(T) = d_-(T) = 0$ .

### Criterio (Coniugazione di von Neumann)

Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e  $T : D(T) \rightarrow \mathcal{H}$  un operatore simmetrico. Sia  $C : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operatore antilineare (coniugazione) tale che:

1.  $C^2 = \mathbb{I}$ ;
2.  $\langle C\psi, C\varphi \rangle = \overline{\langle \psi, \varphi \rangle}$  per ogni  $\psi, \varphi \in \mathcal{H}$ ;
3.  $C(D(T)) \subseteq D(T)$  e  $[C, T] = 0$  sul dominio di  $T$  (ossia  $CT\psi = TC\psi$ ).

Allora gli indici di difetto sono uguali:  $d_+(T) = d_-(T)$ . Di conseguenza, l'operatore ammette estensioni autoaggiunte.

### Osservazione (Dipendenza dal Dominio Spaziale)

La natura degli indici di difetto e la possibilità di estensioni autoaggiunte dipendono non solo dall'espressione formale dell'operatore differenziale, ma dalla topologia dell'intervallo su cui è definito. Ad esempio, per l'operatore  $T = xp + px$ :

- Su  $\mathbb{R}$ : Essenzialmente autoaggiunto ( $d_{\pm} = 0$ ).
- Su un intervallo limitato  $(a, b)$  (es.  $(1, 2)$ ): Ammette infinite estensioni ( $d_{\pm} = 1$ ).
- Su un intervallo semi-limitato o singolare (es.  $(0, 1)$  dove  $1/x$  non è integrabile): Può accadere che  $d_+ \neq d_-$ , rendendo impossibile l'estensione autoaggiunta.

### Hamiltoniano dell'Oscillatore Armonico e Autoaggiunzione Essenziale

Si consideri l'operatore  $H := -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$  definito su  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Per determinare se è essenzialmente autoaggiunto (senza calcolare esplicitamente gli indici di difetto  $d_{\pm}(H) = 0$ ), utilizziamo il Criterio di Nelson.

### Teorema (Criterio di Nelson)

Sia  $A$  un operatore simmetrico su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Se il dominio di  $A$ ,  $D(A)$ , contiene un insieme di vettori analitici per  $A$  il cui span è denso in  $\mathcal{H}$ , allora  $A$  è essenzialmente autoaggiunto.

### Definizione (Vettore Analitico)

Un vettore  $f \in \mathcal{H}$  è detto analitico per  $A$  se esiste  $s > 0$  tale che:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A^n f\| s^n}{n!} < \infty$$

In particolare, gli autovettori propri di  $A$  sono vettori analitici (la serie diventa una serie esponenziale convergente). Per applicare il criterio, è sufficiente provare che gli autostati dell'oscillatore armonico  $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  formano un sistema ortonormale completo (s.o.n.c.) per  $L^2(\mathbb{R})$ . Ricordiamo la forma esplicita:

$$\psi_n(x) := \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{1}{\pi} \right)^{1/4} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

dove  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$  sono i polinomi di Hermite.

### Dimostrazione: 1. Ortogonalità

Per  $m \neq n$  (assumiamo  $n > m$ ), dobbiamo mostrare  $(\psi_n, \psi_m)_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ . Questo equivale a mostrare l'ortogonalità dei polinomi di Hermite rispetto al peso  $e^{-x^2}$ :

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{\mathbb{R}} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx$$

Integrando per parti  $n$  volte (i termini di bordo si annullano per la rapida decrescenza della gaussiana):

$$= (-1)^{2n} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (H_m(x)) dx = 0$$

L'ultima uguaglianza vale perché  $H_m(x)$  è un polinomio di grado  $m < n$ , quindi la sua derivata  $n$ -esima è nulla.

### Dimostrazione: 2. Normalizzazione

Verifichiamo  $\|\psi_n\|^2 = 1$ . Ponendo  $m = n$  nella formula precedente:

$$\|\psi_n\|^2 \propto \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n}{dx^n} (H_n(x)) e^{-x^2} dx$$

Poiché  $H_n(x)$  è di grado  $n$ , la derivata  $n$ -esima è una costante ( $2^n n!$ ). Portandola fuori dall'integrale rimane l'integrale gaussiano  $\int e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ . Combinando i fattori di normalizzazione:

$$\|\psi_n\|^2 = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} (2^n n!) \sqrt{\pi} = 1$$

### Dimostrazione: 3. Completezza

Dobbiamo mostrare che se  $f \in L^2(\mathbb{R})$  è ortogonale a tutti i  $\psi_n$ , allora  $f = 0$ . Lo span dei polinomi di Hermite coincide con lo span di tutti i polinomi. Dobbiamo verificare che  $S := \text{span}\{e^{-x^2/2} p(x) \mid p(x) \text{ polinomio}\}^\perp = \{0\}$ . Sia  $f \in S$ . Allora  $\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2} x^n dx = 0$  per ogni  $n$ . Definiamo  $g(x) := f(x) e^{-x^2/2}$ . Calcoliamo la trasformata di Fourier di  $g$ :

$$G(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2} e^{i\xi x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2} x^n dx = 0$$

Poiché  $G(\xi) = 0$ , per il teorema di Plancherel  $\|g\|_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \|G\|_{L^2} = 0$ , quindi  $g(x) = 0 \implies f(x) = 0$ . Concludiamo che  $H$  è essenzialmente autoaggiunto.

### Interpretazione Fisica: Operatore Cinetico su Semiretta

Abbiamo visto che  $T = -\frac{d^2}{dx^2}$  su  $L^2(0, \infty)$  ammette estensioni autoaggiunte  $T_\alpha$  definite da condizioni al contorno di Robin:

$$f'(0) + \beta f(0) = 0, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \tan \frac{\alpha}{2}\right)$$

Possiamo riscrivere la condizione usando un parametro  $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$  tale che  $\beta = \tan \gamma$ :

$$\cos \gamma f'(0) + \sin \gamma f(0) = 0$$

- $\gamma = 0 \implies f'(0) = 0$  (Neumann).
- $\gamma = \pm \pi/2 \implies f(0) = 0$  (Dirichlet).

### Osservazione (Condizioni di Robin e "Skin Effect" (Stati di Bordo))

Una conseguenza fisica rilevante delle condizioni al contorno di Robin ( $f'(0) + \beta f(0) = 0$ ) nell'estensione autoaggiunta dell'operatore cinetico è la possibilità di supportare stati localizzati al bordo. Come visto precedentemente, per  $\beta > 0$  (corrispondente a  $\theta \in (0, \pi/2)$  con  $\beta = \cot \theta$ ), l'equazione agli autovalori ammette la soluzione:

$$f(x) = C e^{-\beta x}$$

Questa funzione presenta caratteristiche peculiari:

- **Localizzazione Esponenziale:** La densità di probabilità  $|\psi(x)|^2 \sim e^{-2\beta x}$  è massima al bordo ( $x = 0$ ) e decade esponenzialmente verso l'interno del dominio ("bulk"). Questo comportamento è analogo a uno "Skin Effect" quantistico, dove la particella è confinata sulla superficie del materiale.
- **Energia Negativa:** Tale stato corrisponde a un autovalore di energia negativo  $E = -\beta^2$ . Questo indica uno stato legato creato puramente dalla condizione al contorno, che agisce come una buca di potenziale attrattiva (una "trappola" delta di Dirac al bordo).
- **Dipendenza dal Parametro:** Maggiore è  $\beta$ , più rapido è il decadimento (minore lunghezza di penetrazione  $\lambda \sim 1/\beta$ ) e più forte è il confinamento al bordo. Se  $\beta \rightarrow 0$  (condizione di Neumann), lo stato legato scompare e ci si riconduce allo spettro continuo puro.

In sintesi, le condizioni di Robin permettono di modellizzare interazioni superficiali che possono "catturare" la particella, generando stati che non esistono per le condizioni "pure" di Dirichlet o Neumann.

#### Osservazione (Stati Legati e Problema della Radice Quadrata)

Consideriamo la funzione  $f_\theta(x) = e^{-\cot \theta x}$  con  $\theta \in (0, \pi/2)$  (quindi  $\cot \theta > 0$ ). Questa funzione è in  $L^2(0, \infty)$  e soddisfa la condizione al contorno per  $\beta = \cot \theta$ .

$$T_\alpha f_\theta = -\frac{d^2}{dx^2}(e^{-\cot \theta x}) = -(\cot^2 \theta) f_\theta$$

$f_\theta$  è un'autofunzione con autovalore negativo  $(-\cot^2 \theta)$ . Questi sono detti **stati legati**. Ciò implica che l'estensione  $T_\alpha$  non preserva la positività dell'operatore originale  $T$ . **Conseguenza fisica:** Se interpretiamo  $T$  come l'energia cinetica  $P^2$ , non possiamo definire univocamente l'operatore impulso  $P = \sqrt{T_\alpha}$  perché lo spettro contiene valori negativi (la radice sarebbe immaginaria). Questo riflette il fatto che l'operatore impulso  $P = -i \frac{d}{dx}$  su  $(0, \infty)$  ha indici di difetto diversi ( $d_+ = 0, d_- = 1$ ) e non ammette estensioni autoaggiunte.

#### Operatore Cinetico su Intervallo Limitato

Per  $T = -\frac{d^2}{dx^2}$  su un intervallo limitato  $(a, b)$ , gli indici di difetto sono  $d_\pm(T) = 2$ . Le estensioni autoaggiunte sono parametrizzate da una matrice unitaria  $U \in U(2)$  (dimensione 4). La parametrizzazione può essere scritta come:

$$U = e^{i\theta} M, \quad \text{con } M \in SU(2), \theta \in [0, \pi]$$

$$M = m_0 \mathbb{I} - i \vec{m} \cdot \vec{\sigma}$$

dove  $\vec{\sigma}$  sono le matrici di Pauli e  $m_0^2 + |\vec{m}|^2 = 1$ . Anche in questo caso, le estensioni non garantiscono necessariamente la positività.

### 4.11 Prodotto tensore

Voglio descrivere contemporaneamente due sistemi isolati con due spazi di Hilbert,  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ . Prendiamo due operatori  $\hat{A}$  su  $\mathcal{H}_1$  e  $\hat{B}$  su  $\mathcal{H}_2$ . Dato che  $\psi \in \mathcal{H}_1$  e  $\phi \in \mathcal{H}_2$ , l'intuizione iniziale potrebbe suggerire che lo spazio totale sia la somma diretta:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$

Quindi considero le coppie  $(\psi, \phi) \in \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ . La somma diretta è molto naturale (analogamente a  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} + \mathbb{R}$ ). Come si sommano questi vettori? Componente per componente:  $(x + x', y + y')$ . Questa è la **somma diretta** tra due elementi di  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

Voglio costruire un osservabile che misuri sia  $\hat{A}$  che  $\hat{B}$ . Definiamo:

$$\hat{A} \oplus \hat{B} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$$

Agisce come:

$$(\psi, \phi) \longmapsto (\hat{A}\psi, \hat{B}\phi)$$

Questa mappa è lineare? Sì, lo si vede velocemente.

#### Osservazione (Il problema dell'interazione)

Ho fatto l'assunzione che i due sistemi siano **isolati** (cioè non si "parlano"). Stai anche assumendo che dati  $S_1$  e  $S_2$ , esista un sistema più grande  $S$  che li contiene. Consideriamo sistemi con interazione, per esempio **spin-orbita**. L'operatore è  $\hat{L} \cdot \hat{S}$ , dove  $\hat{L}$  è la parte spaziale e  $\hat{S}$  è la parte di spin.

$$\hat{L} \cdot \hat{S} : L^2(\mathbb{R}^3) \oplus \mathbb{C}^{2s+1} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3) \oplus \mathbb{C}^{2s+1} \quad (\text{Ipotesi})$$

$\hat{L}$  e  $\hat{S}$  sono buone osservabili, ma il loro prodotto deve agire congiuntamente. Se usassimo la somma diretta, sorgerebbe un problema di linearità nel combinare gli stati.

#### Controesempio sulla linearità

Prendiamo lo spazio di Hilbert  $\mathbb{R}$ . Definiamo una mappa  $k : \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$  come:

$$(a, b) \longmapsto (ab, 0)$$

Questa mappa è lineare? **NO**. Verifichiamo la linearità sulla somma:

$$k((a, b) + (c, d)) = k(a + c, b + d) = ((a + c)(b + d), 0)$$

Mentre la somma delle immagini sarebbe:

$$k(a, b) + k(c, d) = (ab, 0) + (cd, 0) = (ab + cd, 0)$$

Chiaramente:

$$(a + c)(b + d) = ab + ad + cb + cd \neq ab + cd$$

Quindi la mappa è multilineare ma **non è lineare**.

Però  $k$  è lineare nei due sottosistemi! Cioè è **bilineare**:

$$k(v_1 + v_2, w) = ((v_1 + v_2)w, 0) = (v_1w + v_2w, 0) = k(v_1, w) + k(v_2, w)$$

Questo è un grande problema! Io voglio un operatore **lineare**. Qui entra in gioco il prodotto tensore.

Vogliamo linearizzare le mappe multilineari.

### Teorema (Proprietà Universale del Prodotto Tensore)

Esiste ed è unico (a meno di isomorfismi) uno spazio  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  e una mappa bilineare  $\otimes : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  tale che per ogni spazio  $W$  e per ogni mappa multilineare  $F : \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 \rightarrow W$ , esiste un'unica mappa lineare  $f : \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \rightarrow W$  che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 & \xrightarrow{\otimes} & \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \\ \downarrow F \text{ (multilin.)} & \swarrow \exists! f \text{ (lineare)} & \\ W & & \end{array}$$

La relazione è data da:

$$F(\psi, \phi) = f(\psi \otimes \phi)$$

Quindi, se  $f$  è lineare  $\implies$  è una buona osservabile. Il postulato della Meccanica Quantistica (MQ) suggerisce che vogliamo trattare anche le interazioni  $F$  come osservabili. Grazie al teorema di universalità, questo ci porta necessariamente ad usare  $\otimes$ .

#### 4.11.1 Prodotto Tensore di Distribuzioni

Siano  $\phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $\psi(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ . Siano  $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Cos'è  $u \otimes v$ ?

Definiamo il prodotto tensore di funzioni test:

$$(\phi \otimes \psi)(x, y) = \phi(x)\psi(y) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$$

Se consideriamo le distribuzioni associate  $V_{\phi\psi} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+m})$ , definite come:

$$V_{\phi\psi}(f) = \int_{\mathbb{R}^{n+m}} dx dy \phi(x)\psi(y)f(x, y) \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+m})$$

Possiamo vedere che agisce come il prodotto delle distribuzioni singole. Se  $f(x, y) = h(x)g(y)$ , allora:

$$V_{\phi\psi}(h \otimes g) = \int dx dy \phi(x)\psi(y)h(x)g(y) = U_\phi(h)Z_\psi(g)$$

dove  $U_\phi$  e  $Z_\psi$  sono le distribuzioni associate rispettivamente a  $\phi$  e  $\psi$ .

### 4.12 Convoluzione

In Meccanica Quantistica, per una particella a spin 1/2, la funzione d'onda appartiene a  $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^{2s+1}$ . Possiamo mostrare che:

$$L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^{2s+1} \simeq L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^{2s+1})$$

Questo ci dice fisicamente che possiamo associare ad ogni punto dello spazio i gradi di libertà interni del sistema (spin). Ho un **campo**.

### Definizione (Convoluzione tra funzioni)

Date  $\phi, \psi$  funzioni (purché l'integrale sia ben definito):

$$(\phi * \psi)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} dy \phi(y) \psi(x - y)$$

### Esempio: Ricostruzione di immagini

Vogliamo generare un'immagine su uno schermo (griglia di pixel). L'interpolazione lineare tra punti discreti crea contorni frastagliati. La convoluzione è lo strumento che ci dice come passare da una funzione "a tratti" (continua ma non liscia, o discreta) a una funzione liscia ( $C^\infty$ ) con un errore controllato.

### Convoluzione di Distribuzioni

Poniamoci nel caso in cui  $\phi * \psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Per ogni  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  (funzione test):

$$U_{\phi * \psi}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} dx \left( \int_{\mathbb{R}^n} dy \phi(y) \psi(x - y) \right) f(x)$$

Ponendo  $z = x - y \implies x = y + z$ :

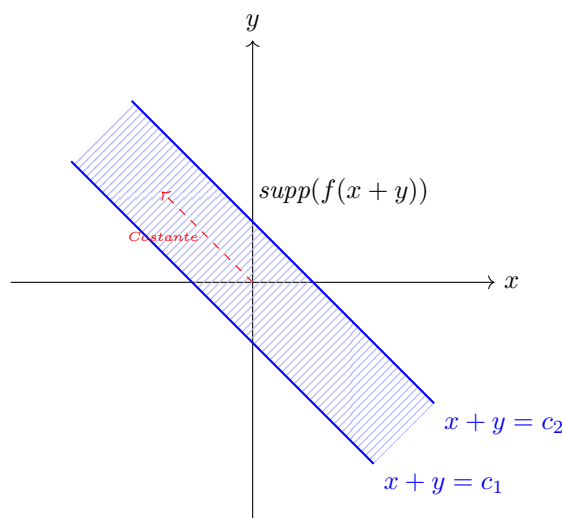
$$= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} dz dy \phi(y) \psi(z) f(y + z) = \langle \phi \otimes \psi, f(y + z) \rangle$$

Vorremmo estendere questa definizione a  $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

$$\langle u * v, f \rangle := \langle u \otimes v, f(x + y) \rangle \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

### Osservazione (Il problema del Supporto)

C'è un problema: se  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  ha supporto compatto, la funzione  $F(x, y) = f(x + y)$  definita su  $\mathbb{R}^{2n}$  **non ha supporto compatto!**



Se  $f$  ha supporto in  $[-1, 1]$ , allora  $f(x+y)$  è non nulla nella striscia infinita definita da  $-1 \leq x+y \leq 1$ . In un sistema di riferimento ruotato  $(x+y, x-y)$ , la funzione è a supporto compatto in una variabile ma costante (e quindi illimitata) nell'altra. Poiché  $u \otimes v$  è definita su funzioni test a supporto compatto in  $\mathbb{R}^{2n}$ , la definizione sopra richiede cautela (una delle due distribuzioni deve essere a supporto compatto,  $u \in \mathcal{E}'$ ).

### Regolarizzazione

Possiamo usare la convoluzione per regolarizzare una distribuzione  $u$ . Sia  $\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tale che  $\int \rho = 1$  (mollificatore). Costruiamo una successione  $\rho_j(x) = j^n \rho(jx)$  che tende alla  $\delta$  di Dirac.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} u * \rho_j = u * \delta = u$$

Ad ogni step,  $u * \rho_j$  è una **funzione liscia** ( $C^\infty$ ). Abbiamo libertà nella scelta di  $\rho$  in base a quale informazione fisica vogliamo preservare o "perdere" (recuperandola solo al limite).

### 4.13 L'operatore derivazione nel problema "Particle in a box"

Si consideri l'operatore differenziale del primo ordine (associato all'operatore momento quantistico  $P = -i\frac{d}{dx}$ ) su un intervallo limitato  $I = [0, 1]$ :

$$A = i\frac{d}{dx}.$$

Vogliamo analizzare le sue proprietà di autoaggiunzione nello spazio di Hilbert  $\mathcal{H} = L^2([0, 1])$ . È noto che l'operatore definito sul dominio minimale (funzioni lisce a supporto compatto, o che si annullano con le derivate ai bordi) è simmetrico ma non autoaggiunto. La questione centrale che affrontiamo è: **perché non esiste un'estensione autoaggiunta il cui dominio sia esattamente quello delle funzioni che si annullano agli estremi (condizione di Dirichlet)?**

Ovvero, perché non possiamo scegliere come dominio:

$$D_{Dirichlet} = \{\psi \in AC([0, 1]) \mid \psi' \in L^2, \psi(0) = 0, \psi(1) = 0\}?$$

#### Analisi tramite la Teoria di Von Neumann

Per rispondere, utilizziamo la teoria delle estensioni di Von Neumann. Gli indici di difetto dell'operatore  $A$  su  $[0, 1]$  sono  $(1, 1)$ . Ciò significa che esiste una famiglia a un parametro di estensioni autoaggiunte, parametrizzata da  $\alpha \in [0, 2\pi)$ . Le autofunzioni dei sottospazi di difetto  $\mathcal{K}_+ = \ker(A^* - i\mathbb{I})$  e  $\mathcal{K}_- = \ker(A^* + i\mathbb{I})$  sono le soluzioni delle equazioni differenziali:

$$i\psi' = \pm i\psi \implies \psi' = \pm \psi.$$

Normalizzando opportunamente (come da riferimento standard), le funzioni generatrici sono:

$$\begin{aligned}\varphi_+(x) &= c_1 e^x \\ \varphi_-(x) &= c_2 e^{-x}\end{aligned}$$

dove  $c_1, c_2$  sono costanti di normalizzazione non nulle. Si osservi un fatto cruciale: **queste funzioni esponenziali non si annullano mai nell'intervallo  $[0, 1]$** . In particolare:

$$\varphi_{\pm}(0) \neq 0, \quad \varphi_{\pm}(1) \neq 0.$$

#### Struttura del Dominio Autoaggiunto $D_\alpha$

Secondo il Teorema di Von Neumann, il dominio di una generica estensione autoaggiunta  $A_\alpha$  è dato dalla somma diretta del dominio minimale e di un sottospazio generato da una specifica combinazione lineare delle funzioni di difetto. Esplicitamente:

$$D_\alpha = \{\psi(x) = f(x) + z(\varphi_+(x) + e^{i\alpha}\varphi_-(x)) \mid f \in D(A_{min}), z \in \mathbb{C}\}.$$

Qui:

- $f(x)$  appartiene alla chiusura del dominio minimale. Per definizione,  $f$  soddisfa le condizioni nulle ai bordi:  $f(0) = f(1) = 0$ .
- $z$  è un coefficiente complesso arbitrario che controlla la "quantità" di funzione di difetto aggiunta.
- $\alpha \in [0, 2\pi)$  è il parametro che distingue le diverse estensioni autoaggiunte.

#### Dimostrazione dell'Impossibilità di Dirichlet

Supponiamo per assurdo di voler imporre le condizioni di Dirichlet ( $\psi(0) = 0$  e  $\psi(1) = 0$ ) su tutto il dominio  $D_\alpha$ . Questo significherebbe trovare un valore fisso di  $\alpha$  tale che, per ogni  $z \in \mathbb{C}$ , la funzione  $\psi \in D_\alpha$  si annulli ai bordi.

Valutiamo la generica funzione  $\psi \in D_\alpha$  agli estremi  $x = 0$  e  $x = 1$ . Ricordando che  $f(0) = f(1) = 0$ , otteniamo:

$$\psi(x) = z(\varphi_+(x) + e^{i\alpha}\varphi_-(x)).$$

Affinché  $\psi$  appartenga al dominio di Dirichlet per  $z \neq 0$  (cioè per non ricadere nel dominio minimale non autoaggiunto), dobbiamo avere:

$$\begin{cases} \varphi_+(0) + e^{i\alpha}\varphi_-(0) = 0 \\ \varphi_+(1) + e^{i\alpha}\varphi_-(1) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

Sostituendo le espressioni degli esponenziali (assorbendo le costanti di normalizzazione per chiarezza, tanto non sono nulle):

1. In  $x = 0$ :  $c_1 e^0 + e^{i\alpha} c_2 e^0 = 0 \implies c_1 + c_2 e^{i\alpha} = 0$ .
2. In  $x = 1$ :  $c_1 e^1 + e^{i\alpha} c_2 e^{-1} = 0 \implies c_1 e + c_2 e^{-1} e^{i\alpha} = 0$ .

Dalla prima equazione ricaviamo il vincolo su  $\alpha$ :

$$e^{i\alpha} = -\frac{c_1}{c_2}.$$

Sostituendo questo nella seconda equazione:

$$c_1 e + c_2 e^{-1} \left( -\frac{c_1}{c_2} \right) = 0 \implies c_1 e - c_1 e^{-1} = 0.$$

Dividendo per  $c_1$  (che è diverso da zero):

$$e - \frac{1}{e} = 0 \implies e^2 = 1.$$

Questa uguaglianza è palesemente **falsa** in  $\mathbb{R}$ . Abbiamo ottenuto una contraddizione.

#### Osservazione (Significato della Contraddizione)

Il sistema (18) è sovradeterminato. Abbiamo una sola “manopola” ( $\alpha$ ) per cercare di azzerare la funzione in due punti distinti (0 e 1).

- Possiamo scegliere  $\alpha$  per azzerare la funzione in  $x = 0$ .
- Oppure possiamo scegliere  $\alpha$  per azzerare la funzione in  $x = 1$ .
- **Non possiamo fare entrambe le cose contemporaneamente.**

L'unica soluzione matematica al sistema è  $z = 0$ . Ma se  $z = 0$ , il dominio collassa a  $D(A_{\min})$ , che è un operatore simmetrico ma **non autoaggiunto**.

Il motivo profondo per cui non possiamo prendere il dominio “piccolo” di Dirichlet è legato alla definizione di operatore aggiunto. Ricordiamo che  $D(A^*)$  è l'insieme delle  $\phi$  tali che il termine di bordo nell'integrazione per parti svanisce contro ogni  $\psi \in D(A)$ .

$$\langle \phi, A\psi \rangle - \langle A\phi, \psi \rangle = i [\bar{\phi}(1)\psi(1) - \bar{\phi}(0)\psi(0)].$$

1. Se scegliamo  $D(A) = D_{\text{Dirichlet}}$  (cioè  $\psi(0) = \psi(1) = 0$ ), il termine di bordo a destra è identicamente nullo per **qualsiasi** valore di  $\phi(0)$  e  $\phi(1)$ .
2. Di conseguenza, il dominio dell'aggiunto  $D(A^*)$  diventa massimale: non ha alcuna restrizione ai bordi.
3. Pertanto  $D(A) \subsetneq D(A^*)$ , rompendo l'autoaggiunzione.

Le estensioni autoaggiunte (date dai vari  $\alpha$ ) sono dei compromessi: allargano  $D(A)$  imponendo condizioni del tipo  $\psi(1) = e^{i\theta}\psi(0)$  (condizioni quasi-periodiche). In questo modo, si impone un vincolo anche su  $\phi$  nell'aggiunto, tale da rendere  $D(A) = D(A^*)$ .

In sintesi, per l'operatore momento (indici 1,1) **non ci sono abbastanza gradi di libertà** per forzare la funzione a zero su entrambi i bordi mantenendo la struttura unitaria. Questo è possibile solo per operatori del secondo ordine (come  $P^2$ , indici 2,2), dove i parametri liberi sono quattro.



#### 4.14 Particella libera sulla semiretta

*Problema* Sia  $T : C_0^\infty(0, \infty) \rightarrow L^2(0, \infty)$  tale che

$$T(f) := -\frac{d^2 f}{dx^2}$$

Si calcolino i suoi indici di difetto  $d_\pm(T) := \dim[\ker(T^* \pm i\mathbb{I})]$ .

#### Soluzione

Il dominio  $D(T) = C_0^\infty(0, \infty)$  è denso in  $L^2(0, \infty)$ . Un'altra scelta ammissibile per il dominio denso sarebbe  $\{\psi \in H^1(0, \infty) \mid \psi(0) = 0\}$ .

##### 1. Verifica della Simmetria

Verifichiamo che  $T$  sia simmetrico su un dominio denso, cioè che  $\forall \psi \in C_0^\infty(0, \infty), \varphi \in D(T^*)$ , valga  $(\varphi, T\psi) = (T^*\varphi, \psi)$ . Consideriamo il prodotto scalare:

$$(\varphi, T\psi) = \int_0^\infty dx \bar{\varphi}(x) \left( -\frac{d^2 \psi}{dx^2} \right)$$

Integrando per parti una prima volta:

$$= \left[ -\bar{\varphi}(x) \frac{d\psi}{dx} \right]_0^\infty + \int_0^\infty dx \frac{d\bar{\varphi}}{dx} \frac{d\psi}{dx}$$

Il termine di bordo è nullo poiché  $\psi \in C_0^\infty(0, \infty)$ . Integrando nuovamente per parti:

$$= \left[ \frac{d\bar{\varphi}}{dx} \psi(x) \right]_0^\infty - \int_0^\infty dx \frac{d^2 \bar{\varphi}}{dx^2} \psi(x) := (T^*\varphi, \psi)$$

Anche il secondo termine di bordo è nullo per le proprietà di  $\psi$ . Affinché questi passaggi abbiano senso e definiscano  $D(T^*)$ , devono valere le seguenti condizioni:

- $(\varphi, T\psi)$  deve essere ben definito, quindi  $\varphi \in L^2(0, \infty)$ .
- Per dare senso alla prima integrazione,  $\frac{d\varphi}{dx} \in L^2(0, \infty)$ .
- Per dare senso al pairing finale in  $L^2$ ,  $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \in L^2(0, \infty)$ .

Quindi il dominio dell'aggiunto è lo spazio di Sobolev  $H^2(0, \infty)$ :

$$D(T^*) = \left\{ \varphi \in L^2(0, \infty) \mid \frac{d\varphi}{dx} \in L^2, \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \in L^2 \right\} \equiv W^{2,2}(0, \infty)$$

##### 2. Calcolo degli indici di difetto

Dobbiamo calcolare  $\dim[\ker(T^* \pm i\mathbb{I})]$ . Sia  $f \in \ker(T^* \pm i\mathbb{I})$ . Allora:

$$T^* f = \mp i f \implies \frac{d^2 f}{dx^2} = \pm i f$$

**Caso A:**  $d_+(T)$ . Risolviamo  $\frac{d^2 f}{dx^2} = i f$ . Le radici caratteristiche sono  $\omega^2 = i$ , quindi  $\omega = \pm e^{i\pi/4}$ .

$$\omega_+ = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_- = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

La soluzione generale è  $f(x) = Ae^{\omega_- x} + Be^{\omega_+ x}$ . Poiché  $\text{Re}(\omega_+) > 0$ , il termine  $e^{\omega_+ x}$  diverge all'infinito e non appartiene a  $L^2$ . Dobbiamo porre  $B = 0$ . Il termine  $e^{\omega_- x}$  decade esponenzialmente, quindi appartiene a  $L^2$ .

$$\implies d_+(T) = 1$$

**Caso B:**  $d_-(T)$ . Risolviamo  $\frac{d^2 f}{dx^2} = -if$ . Le radici caratteristiche sono  $\omega^2 = -i$ , quindi  $\omega = \pm e^{i3\pi/4}$ .

$$\omega_+ = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \omega_- = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

La soluzione generale è  $f(x) = Ae^{\omega_+ x} + Be^{\omega_- x}$ . Osservando le parti reali,  $\text{Re}(\omega_-) > 0$ , quindi il termine  $B$  diverge. Il termine  $A$  è accettabile in  $L^2$ .

$$\implies d_-(T) = 1$$

Concludiamo che  $d_+(T) = d_-(T) = 1$ . Esistono infinite estensioni autoaggiunte parametrizzate da un gruppo a un parametro  $U(\alpha)$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

### 3. Costruzione delle Estensioni Autoaggiunte

Poiché gli indici sono  $(1, 1)$ , introduciamo i generatori normalizzati dei sottospazi di difetto:

- $\varphi_+ \in \ker(T^* - i\mathbb{I})$ :  $\varphi_+(x) := \sqrt[4]{2}e^{-\frac{1+i}{\sqrt{2}}x}$  (a meno di normalizzazione).
- $\varphi_- \in \ker(T^* + i\mathbb{I})$ :  $\varphi_-(x) := \sqrt[4]{2}e^{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}x}$ .

Le isometrie suriettive ammissibili  $U(\alpha) : \ker(T^* - i) \rightarrow \ker(T^* + i)$  sono rotazioni sulla sfera unitaria complessa, cioè fasi pure:

$$U(\alpha)\varphi_+ = e^{i\alpha}\varphi_-, \quad \alpha \in [0, 2\pi)$$

Il dominio dell'estensione autoaggiunta  $T_\alpha$  è dato dalla formula di Von Neumann:

$$D(T_\alpha) = \{f = \psi + z\varphi_+ + ze^{i\alpha}\varphi_- \mid \psi \in D(T), z \in \mathbb{C}\}$$

**Condizioni al contorno:** Possiamo esprimere  $D(T_\alpha)$  in termini di condizioni al bordo. Valutiamo  $f(0)$  e  $f'(0)$  ricordando che  $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ :

$$f(0) = z\varphi_+(0) + ze^{i\alpha}\varphi_-(0) = z\varphi(0)(1 + e^{i\alpha})$$

$$f'(0) = z\varphi'_+(0) + ze^{i\alpha}\varphi'_-(0) = z\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\varphi(0) + ze^{i\alpha}\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\varphi(0)$$

Esiste  $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  tale che  $\beta f(0) = -f'(0)$ ? Svolgendo i calcoli:

$$\beta = -\frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(1+i) - e^{i\alpha}(-1+i)}{1 + e^{i\alpha}}$$

Utilizzando le identità trigonometriche per  $e^{i\alpha/2}$ :

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \in i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

(Nota: Il testo originale indica  $\beta \in i\mathbb{R}$ , ma per un operatore autoaggiunto su  $L^2$ , la condizione standard reale è spesso parametrizzata diversamente. Qui seguiamo il testo che deriva un  $\beta$  immaginario puro o infinito).

Viceversa, fissato  $\beta$ , si ha la relazione inversa  $\alpha = 2\text{arccotan}(\sqrt{2}\beta - 1)$ . Nota: L'estensione con  $\beta = \infty$  corrisponde a  $\alpha = \pi$  (condizione di Dirichlet  $f(0) = 0$ ).

### Corollario: Interpretazione fisica e relazione con l'operatore Impulso

L'analisi delle estensioni autoaggiunte dell'operatore cinetico  $T$  sulla semiretta positiva offre spunti fisici rilevanti, in particolare riguardo la positività dell'energia e la relazione con l'operatore impulso  $P$ .

## Stati legati e perdita della positività

Sebbene l'operatore  $T = -\frac{d^2}{dx^2}$  definito sul dominio  $C_0^\infty(0, \infty)$  sia positivo (ovvero  $(\varphi, T\varphi) \geq 0$ ), le sue estensioni autoaggiunte  $T_\alpha$  non preservano necessariamente tale proprietà. Ricordiamo che il dominio dell'estensione  $T_\alpha$  è caratterizzato dalle condizioni al contorno di Robin:

$$D(T_\alpha) = \{f \in L^2(0, \infty) \mid f'(0) + \beta f(0) = 0\}$$

dove il parametro  $\beta$  è legato all'indice dell'estensione  $\alpha$  dalla relazione  $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \tan \frac{\alpha}{2})$ .

Consideriamo la funzione dipendente da un parametro  $\theta \in (0, \pi/2)$ :

$$f_\theta(x) := e^{-\cot(\theta)x}$$

Tale funzione appartiene a  $L^2(0, \infty)$  (poiché  $\cot(\theta) > 0$ ) e soddisfa la condizione al contorno se fissiamo  $\beta = \cot(\theta)$ . L'azione dell'operatore su tale stato è:

$$T_\alpha f_\theta = -\frac{d^2}{dx^2} e^{-\beta x} = -\beta^2 e^{-\beta x} = -\cot^2(\theta) f_\theta$$

Ciò dimostra che  $f_\theta$  è un'autofunzione di  $T_\alpha$  con autovalore negativo  $\lambda = -\cot^2(\theta)$ . Questi stati appartengono allo spettro discreto e sono fisicamente interpretati come **\*\*stati legati\*\*** o modi quasi normali. Di conseguenza, l'operatore  $T_\alpha$ , pur essendo estensione di un operatore positivo, possiede spettro negativo per certi valori del parametro di estensione.

## Relazione con l'operatore Impulso $P$

Questa analisi ha conseguenze dirette sulla definizione dell'operatore impulso sulla semiretta. Se consideriamo  $T$  come l'Hamiltoniana libera (proporzionale a  $P^2$ ), sorge il problema della definizione di  $P$ . Sulla semiretta  $(0, \infty)$ , l'operatore impulso  $P = -i\frac{d}{dx}$  ha indici di difetto diversi (nello specifico  $d_+(P) \neq d_-(P)$ ), e pertanto **non ammette estensioni autoaggiunte**.

Questo implica che non è possibile definire univocamente la radice quadrata delle estensioni  $T_\alpha$ . Fisicamente, ciò è confermato dall'esistenza degli stati legati con energia negativa  $E < 0$ : l'impulso corrispondente sarebbe  $p = \sqrt{E} \in i\mathbb{R}$ , un valore immaginario privo di senso per un'osservabile fisica. Non è quindi possibile ricostruire lo spettro di  $P$  partendo dalla decomposizione spettrale di  $T_\alpha$  sulla semiretta.

## Estensioni sull'intervallo limitato $(a, b)$

La situazione cambia radicalmente se consideriamo l'operatore cinetico su un intervallo limitato  $I = (a, b)$ . In questo caso, gli indici di difetto sono  $d_\pm(T) = 2$ . Le estensioni autoaggiunte  $T_U$  sono quindi parametrizzate da una matrice unitaria  $U \in U(2)$ , che richiede 4 parametri reali (spesso parametrizzati tramite  $U = e^{i\theta} M$  con  $M \in SU(2)$ ).

A differenza della semiretta, sull'intervallo limitato anche l'operatore impulso  $P$  possiede indici di difetto  $(1, 1)$  e ammette quindi estensioni autoaggiunte, che indichiamo con  $P_\gamma$ . Tuttavia, la relazione  $T = P^2$  non è banale nemmeno in questo contesto. Se consideriamo le estensioni autoaggiunte generate dal quadrato delle estensioni dell'impulso (ad esempio operatori della forma  $P_\gamma^2$  o composizioni  $P_\alpha P_\beta$ ), queste costituiscono solo un sottoinsieme delle possibili estensioni autoaggiunte di  $T$ . La famiglia a 4 parametri di  $T_U$  è molto più vasta di quella generabile dai soli operatori impulso autoaggiunti.

## 4.15 Oscillatore Armonico

*Problema* Si dimostri che  $T = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$  definito su  $D(T) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$  (spazio di Schwartz) è simmetrico. È anche essenzialmente autoaggiunto?

## Soluzione

### 1. Simmetria

Verifichiamo  $(\varphi, T\psi) = (T\varphi, \psi)$  per  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

$$(\varphi, T\psi) = \int_{\mathbb{R}} dx \bar{\varphi}(x) \left( -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right) \psi(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} dx \bar{\varphi}(x) \left( -\frac{d^2\psi}{dx^2} \right) + \int_{\mathbb{R}} dx \bar{\varphi}(x) x^2 \psi(x)$$

Integrando per parti il termine cinetico due volte:

$$\int_{\mathbb{R}} \bar{\varphi}(-\psi'') dx = [-\bar{\varphi}\psi']_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} \bar{\varphi}'\psi' dx = [-\bar{\varphi}\psi' + \bar{\varphi}'\psi]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} (-\bar{\varphi}'')\psi dx$$

Poiché  $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , esse e le loro derivate decrescono più rapidamente di ogni potenza all'infinito, quindi i termini di bordo si annullano.

$$= \int_{\mathbb{R}} dx \left( -\frac{d^2\bar{\varphi}}{dx^2} + x^2\bar{\varphi} \right) \psi = (T\varphi, \psi)$$

$T$  è simmetrico. Il dominio dell'aggiunto è:

$$D(T^*) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \varphi', \varphi'', x^2\varphi \in L^2(\mathbb{R})\}$$

## 2. Essenziale Autoaggiuntezza

Per verificare se è essenzialmente autoaggiunto, dovremmo calcolare  $d_{\pm}(T)$ . L'equazione di difetto  $-\frac{d^2f}{dx^2} + x^2f = \pm if$  è complessa da risolvere direttamente.

**Metodo Alternativo (Base di Autostati):** Se riusciamo a esibire una base ortonormale di autostati di  $T$  con autovalori reali, allora  $T$  è essenzialmente autoaggiunto. Sappiamo dalla meccanica quantistica che gli autostati dell'oscillatore armonico sono:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{1}{\pi} \right)^{1/4} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

dove  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$  sono i polinomi di Hermite.

**Verifiche:**

1. **Appartenenza al dominio:** La gaussiana  $e^{-x^2/2}$  è a decrescenza rapida.  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  è stabile per derivazione e moltiplicazione per polinomi, quindi  $\psi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) = D(T)$ .
2. **Ortogonalità:** Per  $n \neq m$ , assumiamo  $n > m$ .

$$\int_{\mathbb{R}} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} H_m(x) (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx$$

Integrando per parti  $n$  volte, le derivate si scaricano su  $H_m(x)$ . Poiché  $H_m$  è un polinomio di grado  $m < n$ , la derivata  $n$ -esima è nulla. L'integrale è 0.

3. **Normalizzazione:** Calcolando l'integrale per  $n = m$  (usando lo stesso metodo di parti), si ottiene il fattore di normalizzazione corretto affinché  $\|\psi_n\| = 1$ .
4. **Completezza:** Dobbiamo mostrare che lo span di  $\{\psi_n\}$  è denso in  $L^2(\mathbb{R})$ . Poiché i polinomi di Hermite generano lo spazio di tutti i polinomi, è sufficiente mostrare che se  $f \in L^2$  è ortogonale a  $\{e^{-x^2/2} p(x)\}$  per ogni polinomio  $p(x)$ , allora  $f \equiv 0$ . Sia  $\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2} x^n dx = 0$  per ogni  $n$ . Consideriamo la trasformata di Fourier di  $g(x) = f(x) e^{-x^2/2}$ :

$$F(\xi) = \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{i\xi x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2} x^n dx = 0$$

Poiché  $F(\xi) \equiv 0$ , per il teorema di Plancherel (l'unitarietà della trasformata di Fourier),  $g(x) \equiv 0 \implies f(x) \equiv 0$ .

5. **Autovalori:** Si verifica che  $T\psi_n = (2n+1)\psi_n$ . Gli autovalori sono reali.

**Conclusione:** Poiché esiste una base ortonormale completa di autovettori,  $d_+(T) = d_-(T) = 0$ .  $T$  è essenzialmente autoaggiunto.

## Osservazione

Un altro criterio (Teorema di Nelson o criterio della coniugazione) afferma che se un operatore simmetrico  $T$  commuta con una coniugazione  $C$  (operatore antilineare tale che  $C^2 = \mathbb{I}$  e  $(C\psi, C\phi) = \overline{(\psi, \phi)}$ ), allora gli indici di difetto sono uguali. Qui  $T$  è reale, quindi commuta con la coniugazione complessa, implicando  $d_+ = d_-$ .

## 4.16 Operatore $xp + px$

*Problema* Sia  $T = xp + px$ . Analizzare se  $T$  è hermitiano e se ammette estensioni autoaggiunte su:

- (a)  $L^2(\mathbb{R})$
- (b)  $L^2(1, 2)$
- (c)  $L^2(0, 1)$

### Soluzione

Ricordiamo che  $p = -i \frac{d}{dx}$ . L'operatore agisce come:

$$T\psi = -i \left( x \frac{d\psi}{dx} + \frac{d}{dx}(x\psi) \right) = -i (x\psi' + \psi + x\psi') = -i(2x\psi' + \psi)$$

### Analisi Preliminare (Simmetria)

Consideriamo  $D(T) = C_0^\infty(I)$  dove  $I$  è l'intervallo considerato.

$$\begin{aligned} (\varphi, T\psi) &= \int_I dx \bar{\varphi} \left[ -i \left( x \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} x \right) \psi \right] \\ &= -i \int \bar{\varphi} x \psi' - i \int \bar{\varphi}' (x\psi) \end{aligned}$$

Integrando per parti (i termini di bordo si annullano per il supporto compatto):

$$= i \int (x\bar{\varphi})' \psi + i \int \bar{\varphi}' x \psi = \int \overline{\left( -i \frac{d}{dx}(x\varphi) - ix\varphi' \right)} \psi = (T\varphi, \psi)$$

L'operatore è simmetrico. Il dominio dell'aggiunto è  $D(T^*) = \{\varphi \in L^2 \mid T^*\varphi \in L^2\}$ .

### Calcolo degli indici di difetto

Risolviamo  $T^*\psi = \pm i\psi$ :

$$-i(2x\psi' + \psi) = \pm i\psi \implies 2x\psi' + \psi = \mp \psi$$

**Caso 1:**  $2x\psi' + \psi = \psi$  (segno  $+$  nell'equazione differenziale, corrisponde a autovalore  $-i$ )

$$2x\psi' = 0 \implies \psi(x) = C_1 \text{ (costante)}$$

**Caso 2:**  $2x\psi' + \psi = -\psi$  (segno  $-$  nell'equazione differenziale, corrisponde a autovalore  $+i$ )

$$2x\psi' = -2\psi \implies \frac{\psi'}{\psi} = -\frac{1}{x} \implies \ln \psi = -\ln x + c \implies \psi(x) = \frac{C_2}{x}$$

Ora analizziamo l'appartenenza a  $L^2$  per i vari intervalli.

#### (a) Intervallo $\mathbb{R}$

- Soluzione costante  $\psi = C_1$ : Non è in  $L^2(\mathbb{R})$ .
- Soluzione  $\psi = C_2/x$ : Non è in  $L^2(\mathbb{R})$  (divergenza in 0 e comportamento all'infinito).

Quindi  $\ker(T^* \mp i\mathbb{I}) = \{0\}$ .

$$d_+(T) = d_-(T) = 0$$

$T$  è essenzialmente autoaggiunto su  $\mathbb{R}$  (ammette un'unica estensione autoaggiunta, la chiusura).

(b) **Intervallo**  $(1, 2)$

- Soluzione costante  $\psi = C_1$ : È in  $L^2(1, 2)$  (intervallo limitato).
- Soluzione  $\psi = C_2/x$ : È in  $L^2(1, 2)$  (nessuna singolarità nell'intervallo).

Quindi entrambe le soluzioni sono accettabili.

$$d_+(T) = d_-(T) = 1$$

Esistono infinite estensioni autoaggiunte.

(c) **Intervallo**  $(0, 1)$

- Soluzione costante  $\psi = C_1$ : È in  $L^2(0, 1)$ .
- Soluzione  $\psi = C_2/x$ : **Non** è in  $L^2(0, 1)$  a causa della singolarità in  $x = 0$  ( $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  diverge).

Abbiamo un indice uguale a 1 e l'altro uguale a 0.

$$d_+(T) \neq d_-(T)$$

L'operatore non ammette estensioni autoaggiunte su  $L^2(0, 1)$ .

## 5 Esempi sulle distribuzioni

### 5.1 Varie su distribuzioni

#### Distribuzioni tramite funzioni $L^1_{\text{Loc}}$

Sia  $\psi \in L^1(\mathbb{R})$  allora il funzionale  $u_\psi : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \in \mathbb{C}$  tale che

$$f \mapsto u_\psi(f) := \int_{\mathbb{R}} dx f(x) \psi(x)$$

(che esiste sicuramente) è una distribuzione? Cioè è continuo?  
Si verifica facilmente che è sequenzialmente continua.

$$\left| \int_{\mathbb{R}} dx f_j(x) \psi(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}} dx |f_j(x)| |\psi| \leq M \int_{\mathbb{R}} dx |\psi| = M'$$

dove l'ultima disuguaglianza è data perchè è a supporto compatto con  $M$  massimo. Per convergenza dominata posso passare il limite sotto al segno d'integrale e ottengo che tutto tende a 0. Quindi è sequenzialmente continua quindi possiamo scrivere impropriamente che

$$L^1_{\text{Loc}} \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

che sono le funzioni integrabili su tutti i compatti di  $\mathbb{R}$ . Inoltre si ha che

$$L^p(\mathbb{R}) \subset L^1_{\text{Loc}} \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

quindi la MQ sta dentro  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  se consideriamo  $p = 2$ .

#### Derivata di funzioni non derivabili

La theta di Heaviside è  $L^1_{\text{Loc}}(\mathbb{R})$  ed è il prototipo di situazioni fisiche nelle quali ho un campo tangente a una superficie che dentro di essa deve essere nullo (conduttore, lago, tubo...). La componente tangente salta da un certo numero a 0. Come deriviamo una funzione del genere?

$$\frac{\Theta(x)}{dx}(f) = -\Theta\left(\frac{df}{dx}\right) = -\int_{\mathbb{R}} dx \Theta(x) \frac{df}{dx} = -\int_0^\infty dx \frac{df}{dx} = -f(x)|_0^\infty = f(0) = \delta(f)$$

Ora posso derivare qualunque cosa. Per esempio  $f(x) = |x|$ , derivata otteniamo

$$\text{sign}(x) = \Theta(x) - \Theta(-x)$$

e quindi

$$\frac{d}{dx} \text{sign}(x) = \frac{d}{dx} \Theta(x) - \frac{d}{dx} \Theta(-x) = 2\delta$$

Fondamentalmente quando derivo qualcosa non derivabile (con derivabilità di salto), in ogni punto di salto ottengo una delta.

**Posso integrare su  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ?**

Se voglio mantenere la linearità (e quindi l'invarianza per traslazioni) no. Se no si fa e si chiama path integral.

**Serie di Taylor**

Prendiamo la serie di Taylor centrata in 0 di una  $f$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} x^n = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \delta^{(n)} \right] (f)$$

si nota che

$$x\delta^{(1)}(f) = \delta^{(1)}(xf) = -\delta(f + xf') = -\delta(f) - 0\delta(f') = -\delta(f)$$

**Supporto di  $\delta$**

Consideriamo la delta di Dirac  $\delta$ . Se prendiamo una funzione test  $\varphi$  supportata su  $(x-a, x+b)$  tale che  $0 \notin (x-a, x+b)$ , allora:

$$\delta(\varphi) = 0$$

Quindi su tutti questi insiemi che non contengono l'origine, la  $\delta$  è nulla.

Tuttavia, per ogni  $\varepsilon > 0$ , definendo un intorno  $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$ , per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  con  $\text{supp}(\varphi) \subset I_\varepsilon$ , abbiamo:

$$\delta(\varphi) = \varphi(0)$$

che può essere diverso da zero. Quindi il supporto è topologicamente l'insieme  $\{0\}$ . Per la funzione gradino di Heaviside  $\Theta(x)$  (indicata come  $\mathbb{H}$  o  $\Theta$  negli appunti), si può dimostrare che:

$$\text{supp}(\Theta) = [0, \infty)$$

## 5.2 Esempi di equazioni distribuzionali

Analizziamo la risoluzione di equazioni lineari nel contesto delle distribuzioni  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , cercando soluzioni generalizzate che potrebbero non apparire se ci limitassimo agli spazi funzionali standard o alle sole distribuzioni temperate  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Sebbene l'uso della trasformata di Fourier sia spesso efficace, esso limita a priori la ricerca alle distribuzioni temperate; l'approccio diretto qui presentato permette di esplorare l'intero spazio  $\mathcal{D}'$ .

### 5.3 Equazione $xu = 0$

Consideriamo l'equazione omogenea:

$$xu = 0, \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

La soluzione banale in senso funzionale è  $u(x) = 0$ . Cerchiamo soluzioni distribuzionali non banali. L'equazione in senso debole è definita da:

$$\langle xu, f \rangle = \langle u, xf \rangle = 0, \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Si noti che l'operazione è ben definita poiché  $x \in C^\infty(\mathbb{R})$ , quindi  $xf$  rimane una funzione test a supporto compatto.

#### 5.3.1 Analisi del supporto

Se una funzione test  $f$  ha supporto che non contiene l'origine ( $0 \notin \text{supp}(f)$ ), possiamo scrivere  $xf = h$  con  $\text{supp}(h) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . In tal caso l'equazione implica  $\langle u, h \rangle = 0$ . Dalla definizione di supporto di una distribuzione, ciò implica che il supporto di  $u$  deve essere disgiunto da  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , ovvero:

$$\text{supp}(u) \subseteq \{0\}$$

Per il teorema di struttura delle distribuzioni a supporto puntiforme,  $u$  deve essere una combinazione lineare della delta di Dirac e delle sue derivate:

$$u = \sum_{k=0}^N c_k \delta^{(k)}$$

### 5.3.2 Determinazione dell'ordine

Sostituendo l'espressione generale nell'equazione:

- Per  $N = 0$  ( $u = c_0 \delta$ ):

$$\langle u, xf \rangle = c_0 \langle \delta, xf \rangle = c_0 (xf(x))|_{x=0} = 0$$

Questa è una soluzione valida per ogni  $c_0$ .

- Per  $N = 1$  ( $u = c_0 \delta + c_1 \delta'$ ):

$$\langle u, xf \rangle = 0 + c_1 \langle \delta', xf \rangle = -c_1 \langle \delta, (xf)' \rangle = -c_1 \langle \delta, f + xf' \rangle = -c_1 f(0)$$

Affinché sia nullo per ogni  $f$ , deve essere  $c_1 = 0$ .

Concludiamo che l'unica soluzione non banale è di ordine 0:

$$u = c_0 \delta_0, \quad c_0 \in \mathbb{C}$$

#### Equazione $xu' = 0$

Consideriamo l'equazione differenziale distribuzionale:

$$xu' = 0$$

In senso debole:

$$\langle xu', f \rangle = \langle u', xf \rangle = 0, \quad \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Questo implica che la distribuzione  $u'$  ha supporto concentrato nell'origine.

$$u' = \sum_{k=0}^N c_k \delta^{(k)}$$

Analogamente al caso precedente, testando l'equazione  $x(\sum c_k \delta^{(k)}) = 0$ , si trova che l'unica soluzione ammissibile per  $u'$  è quella di ordine 0 (poiché termini di ordine superiore genererebbero contributi non nulli come  $f(0)$ ):

$$u' = c_0 \delta_0$$

Per trovare  $u$ , dobbiamo integrare questa relazione. La primitiva distribuzionale della  $\delta_0$  è la funzione a gradino di Heaviside  $\Theta(x)$ , più una costante arbitraria (che è la primitiva di 0):

$$u(x) = c_0 \Theta(x) + d, \quad c_0, d \in \mathbb{C}$$

Verifica della derivata di Heaviside:

$$\langle \Theta', f \rangle = -\langle \Theta, f' \rangle = -\int_0^\infty f'(x) dx = -[f(\infty) - f(0)] = f(0) = \langle \delta, f \rangle$$

#### Equazione con sorgente $xu = \delta_0$

Risolviamo l'equazione non omogenea:

$$xu = \delta_0$$

La soluzione generale è somma della soluzione particolare  $u_p$  e della soluzione dell'omogenea  $u_0$ :

$$u = u_0 + u_p$$

Sappiamo già che  $u_0 = c_0 \delta_0$ .

Per la soluzione particolare, proviamo con una derivata della delta. Tentativo con  $u_p = -\delta'$ :

$$\langle x(-\delta'), f \rangle = \langle -\delta', xf \rangle = \langle \delta, (xf)' \rangle = \langle \delta, f + xf' \rangle = f(0) + 0 = \langle \delta, f \rangle$$



Il tentativo ha successo. La soluzione generale è:

$$u = c_0 \delta_0 - \delta'_0$$

**Generalizzazione:**  $x^n u = \delta^{(k)}$

Analizzando l'equazione più generale  $x^n u = 0$  o con sorgenti derivate, si osserva che: Se  $u = \sum c_j \delta^{(j)}$ , il termine  $x^n \delta^{(j)}$  è non nullo solo se l'ordine di derivazione  $j$  è sufficientemente alto da "consumare" lo zero di ordine  $n$  di  $x^n$  e lasciare ancora termini valutati in 0. Nello specifico, l'equazione omogenea  $x^n u = 0$  ammette come soluzione:

$$u = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \delta^{(k)}$$

Infatti, per  $k < n$ , l'azione su una funzione test comporta derivate di  $(x^n f)$  valutate in 0. La derivata  $k$ -esima di  $x^n f$  in 0 è nulla per  $k < n$ , rendendo l'espressione identicamente zero.

**Equazione**  $(x - a_1)(x - a_2)u = 0$

Siano  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$  distinti. Poniamo  $v = (x - a_2)u$ . L'equazione diventa:

$$(x - a_1)v = 0$$

Questa è analoga a  $yv = 0$  con traslazione  $y = x - a_1$ . La soluzione ha supporto in  $a_1$ :

$$v = c_0 \delta(x - a_1)$$

Tornando alla variabile  $u$ , dobbiamo risolvere:

$$(x - a_2)u = c_0 \delta(x - a_1)$$

Questa è un'equazione non omogenea per il fattore  $(x - a_2)$ . Tuttavia, poiché il supporto della sorgente ( $\{a_1\}$ ) è disgiunto dallo zero del moltiplicatore ( $\{a_2\}$ ), possiamo dividere per  $(x - a_2)$  in senso distribuzionale usando l'identità:

$$\delta(x - a_1) = \frac{1}{a_1 - a_2} (x - a_2) \delta(x - a_1)$$

Verifica:

$$\left\langle \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} \delta(x - a_1), f \right\rangle = \frac{1}{a_1 - a_2} (a_1 - a_2) f(a_1) = f(a_1)$$

Sostituendo nell'equazione:

$$(x - a_2)u = c_0 \frac{x - a_2}{a_1 - a_2} \delta(x - a_1)$$

Portando tutto a sinistra:

$$(x - a_2) \left[ u - \frac{c_0}{a_1 - a_2} \delta(x - a_1) \right] = 0$$

Il termine in parentesi quadra deve essere soluzione dell'omogenea  $(x - a_2)w = 0$ , che è  $c_1 \delta(x - a_2)$ . Dunque la soluzione generale è:

$$u = \frac{c_0}{a_1 - a_2} \delta(x - a_1) + c_1 \delta(x - a_2)$$

Ridefinendo le costanti, otteniamo una combinazione lineare di delta centrate negli zeri del polinomio moltiplicativo:

$$u = c'_0 \delta(x - a_1) + c_1 \delta(x - a_2)$$

**Nota fisica: Propagatori**

Un'applicazione rilevante di questo risultato è l'equazione per il propagatore scalare in spazio dei momenti (massa  $a$ ):

$$(p^2 - a^2)f(p) = 0 \implies (p - a)(p + a)f(p) = 0$$

La soluzione è la sovrapposizione di delta sulla shell di massa:

$$f(p) = c\delta(p - a) + d\delta(p + a)$$

## Pettine di Dirac

Risolvere  $\sin(x) \cdot u = 0$  con  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R})$ . La soluzione è il cosiddetto **Pettine di Dirac**:

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_{x_k} \quad \text{con } x_k = k\pi$$

## Cristallo unidimensionale

Consideriamo un modello di cristallo descritto dall'Hamiltoniana:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda \delta_k$$

Qui vediamo ogni atomo come una delta di Dirac. **Nota:** Questo operatore  $H$  non può agire rigorosamente su  $L^2(\mathbb{R})$  perché la  $\delta$  non è definita su funzioni di  $L^2$  (necessita continuità, mentre funzioni  $L^2$  sono classi di equivalenza).

## 5.4 La distribuzione $\frac{1}{x}$

Vogliamo risolvere l'equazione distribuzionale:

$$xu = 1 \quad \text{con } u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R})$$

Questa è un'equazione non omogenea. La soluzione generale è data dalla somma di una soluzione particolare  $u_p$  e della soluzione dell'omogenea  $u_0$ :

$$u = u_p + u_0$$

### 5.4.1 Soluzione Omogenea

L'equazione omogenea è  $xu_0 = 0$ . Analizzando il supporto, se  $xu_0 = 0$ , il supporto di  $u_0$  deve essere contenuto in  $\{0\}$ . Per il teorema di struttura delle distribuzioni puntiformi,  $u_0$  deve essere una combinazione lineare della delta di Dirac e delle sue derivate. Verificando gli ordini:

- Se  $u = c_0 \delta_0$ , allora  $(u, xf) = c_0 \delta_0(xf) = c_0 [xf(x)]_{x=0} = 0$ . Funziona.
- Se  $u = c_1 \delta'_0$ , allora  $(u, xf) = -c_1 \delta_0((xf)') = -c_1 [f(x) + xf'(x)]_{x=0} = -c_1 f(0) \neq 0$ . Non funziona.

Dunque la soluzione omogenea è proporzionale alla sola delta di Dirac:

$$u_0 = c\delta$$

### 5.4.2 Soluzione Particolare: Approccio logaritmico

Intuitivamente verrebbe da dire  $u_p = \frac{1}{x}$ . Tuttavia, la funzione  $1/x$  classica non appartiene a  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R})$  perché non è localmente integrabile nell'intorno dello zero (la singolarità è troppo forte).

$$\frac{1}{x} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \implies \text{necessitiamo una regolarizzazione.}$$

Un primo metodo consiste nell'usare la derivata del logaritmo:

$$\text{P.V.} \left( \frac{1}{x} \right) := \frac{d}{dx} \ln |x| \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R})$$

Sappiamo che  $\ln |x| \in L^1_{\text{loc}}$ , quindi è integrabile e definisce una distribuzione regolare.

**Verifica Formale:** Per ogni funzione test  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ :

$$\left\langle \frac{d \ln |x|}{dx}, f \right\rangle = - \left\langle \ln |x|, \frac{df}{dx} \right\rangle = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \ln |x| \frac{df}{dx}$$

Calcoliamo questo integrale separando la singolarità con un limite  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ :

$$W(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} dx \frac{f(x)}{x} + \int_{\varepsilon}^{+\infty} dx \frac{f(x)}{x} \right]$$

Analizziamo il termine con il logaritmo (usando l'integrazione per parti sul termine distribuzionale):

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( [\ln |x| f(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} + [\ln |x| f(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{|x| > \varepsilon} dx \ln |x| \frac{df}{dx} \right)$$

Espandendo  $f$  in serie di Taylor attorno a 0 ( $f(\pm\varepsilon) = f(0) \pm f'(0)\varepsilon + O(\varepsilon^2)$ ), i termini divergenti si cancellano grazie alla simmetria del Valor Principale:

$$\ln \varepsilon [f(-\varepsilon) - f(\varepsilon)] \approx \ln \varepsilon [-2\varepsilon f'(0)] \rightarrow 0 \quad \text{per } \varepsilon \rightarrow 0$$

Si conferma quindi che:

$$\left\langle \frac{d \ln |x|}{dx}, f \right\rangle = \text{P.V.} \left\langle \frac{1}{x}, f \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx$$

Inoltre, distribuzionalmente vale che  $x \cdot \text{P.V.} \left( \frac{1}{x} \right) = 1$ , dato che  $\langle x \text{P.V.}(1/x), f \rangle = \langle \text{P.V.}(1/x), xf \rangle = \int \frac{xf(x)}{x} dx = \int f(x) dx = \langle 1, f \rangle$ .

### 5.4.3 Soluzione Particolare: Approccio tramite limite complesso

Un metodo alternativo, molto comune in fisica per definire integrali singolari, consiste nello spostare la singolarità fuori dall'asse reale. Consideriamo la successione di funzioni in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ :

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{x - i\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0$$

Vogliamo dimostrare che il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  è una soluzione distribuzionale dell'equazione  $xu = 1$ . Verifichiamo il prodotto  $x \cdot u_\varepsilon$  nel limite debole:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\langle x \frac{1}{x - i\varepsilon}, f \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x - i\varepsilon} f(x) dx$$

Manipoliamo l'integranda:

$$\frac{x}{x - i\varepsilon} = \frac{x(x + i\varepsilon)}{x^2 + \varepsilon^2} = \frac{x^2}{x^2 + \varepsilon^2} + i \frac{x\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{x^2 + \varepsilon^2} + i \frac{x\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

Inserendo nell'integrale:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon^2}{x^2 + \varepsilon^2} f(x) dx + i \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} f(x) dx$$

Per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , il primo termine è  $(1, f)$ . Gli altri termini tendono a zero (si può dimostrare rigorosamente usando la convergenza dominata di Lebesgue separando l'integrale in  $|x| > \delta$  e  $|x| \leq \delta$ ). Pertanto abbiamo dimostrato che, in senso distribuzionale:

$$x \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - i\varepsilon} = 1$$

### 5.4.4 Relazione tra le soluzioni e formule di Plemelj-Sokhotski

Poiché sia  $\text{P.V.} \left( \frac{1}{x} \right)$  sia  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - i\varepsilon}$  sono soluzioni particolari dell'equazione  $xu = 1$ , la loro differenza deve essere soluzione dell'omogenea, ovvero proporzionale alla  $\delta(x)$ :

$$\frac{1}{x - i0^+} = \text{P.V.} \left( \frac{1}{x} \right) + c\delta(x)$$

Per determinare la costante  $c$ , utilizziamo argomenti di parità.

1.  $\text{P.V.}(1/x)$  è una distribuzione **dispari** (l'integrale a valor principale di una funzione pari è nullo).
2.  $\delta(x)$  è una distribuzione **pari**.

3. Dall'equazione sopra, cambiando  $x \rightarrow -x$ , otteniamo:

$$\frac{1}{-x - i0^+} = -\text{P.V.} \left( \frac{1}{x} \right) + c\delta(x)$$

Sommando le due espressioni per eliminare il Valor Principale:

$$\frac{1}{x - i0^+} + \frac{1}{-x - i0^+} = 2c\delta(x)$$

Analizziamo il membro di sinistra come limite di somma di funzioni:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x - i\varepsilon} - \frac{1}{x + i\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{x + i\varepsilon - (x - i\varepsilon)}{x^2 + \varepsilon^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{2i\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$$

Riconosciamo nel termine  $\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}$  una successione che approssima la delta (Lorentziana). Dal teorema di regolarizzazione della  $\delta$ :

$$\frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \pi\delta(x)$$

(Il fattore  $\pi$  deriva dal calcolo dell'integrale  $\int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx = [\arctan(x/\varepsilon)]_{-\infty}^{+\infty} = \pi$ ). Dunque:

$$2i(\pi\delta(x)) = 2c\delta(x) \implies c = i\pi$$

Abbiamo così ottenuto la celebre formula di Plemelj-Sokhotski:

$$\frac{1}{x \mp i0^+} = \text{P.V.} \frac{1}{x} \pm i\pi\delta(x)$$

#### 5.4.5 Giustificazione rigorosa del limite

Nel calcolo del limite  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - i\varepsilon}$ , non possiamo applicare semplicemente l'analisi complessa su  $f(x)$  perché una generica funzione test  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  non è necessariamente analitica. È necessario procedere in campo reale. Si definisce la distribuzione  $u$  come:

$$(u, f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x - i\varepsilon} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{xf(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx + i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon f(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx$$

Per il primo integrale (parte reale), si fissa un  $\delta > 0$  e si spezza il dominio in  $|x| > \delta$  e  $|x| \leq \delta$ .

- Su  $|x| > \delta$ , il denominatore non si annulla e per convergenza dominata tende a  $\int_{|x| > \delta} \frac{f(x)}{x} dx$ .
- Su  $|x| \leq \delta$ , si espande  $f(x) = f(0) + xg(x)$ . Il termine con  $f(0)$  è dispari su dominio simmetrico e si annulla. Il termine  $xg(x)$  rende l'integranda regolare, permettendo il limite.

Questo rigorizza il passaggio al Valor Principale. Il secondo integrale (parte immaginaria) si concentra tutto nell'origine, fornendo il termine  $i\pi f(0)$ .

#### 5.4.6 Soluzione Generale

La soluzione generale dell'equazione  $xu = 1$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})(\mathbb{R})$  è quindi:

$$u = \text{P.V.} \left( \frac{1}{x} \right) + k\delta(x), \quad k \in \mathbb{C}$$

oppure, equivalentemente:

$$u = \frac{1}{x - i0^+} + k'\delta(x)$$

A seconda della fisica del problema (condizioni al contorno, causalità, propagatori ritardati o avanzati), si sceglierà la costante appropriata.

#### Controesempio finale

La funzione  $e^{1/x}$  **non** è interpretabile come distribuzione. La singolarità essenziale in  $x = 0$  è troppo forte per essere regolarizzata nello spazio delle distribuzioni standard.

## 5.5 Definizione e Costruzione delle Funzioni di Green

Sia  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Consideriamo l'equazione:

$$Pu = J$$

dove  $P$  è un operatore differenziale lineare della forma  $P = \sum_{|\alpha| \leq N} C_\alpha(x) \partial^\alpha$ , con  $C_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Esempi notevoli di operatori  $P$ :

- $P = (-)\Delta = -\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  (Laplaciano)
- $P = \square = \partial_t^2 - \sum_i \partial_i^2$  (D'Alembertiano)
- $P = (i)\partial_t - \sum_i \partial_i^2$  (Operatore di Schrödinger / Equazione del calore)

### Osservazione

Le soluzioni di  $\square$  o dell'equazione di Schrödinger non si trovano "bene" in  $L^2(\mathbb{R}^3)$  o  $L^2(\mathbb{R}^4)$ . Tuttavia, in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ , tutte queste equazioni assumono un senso particolare.

Il metodo costruttivo per trovare le soluzioni è il **Metodo delle Funzioni di Green**. Essendo equazioni a coefficienti costanti, vi è invarianza per traslazione spaziale e/o temporale. Scegliamo  $J \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$  (distribuzioni a supporto compatto). *Nota fisica:* Ha senso in condizioni stazionarie, ma non nel tempo (es. una distribuzione di massa/carica deve scomparire se il supporto è compatto nel tempo).

La soluzione generale si scrive come:

$$u = u_p + u_0 \quad \text{con} \quad Pu_0 = 0$$

### Definizione (Soluzione Fondamentale)

Si dice *soluzione fondamentale* una distribuzione  $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  tale che:

$$PG = \delta$$

Se  $G$  è nota, la soluzione particolare  $u_p$  è data dalla convoluzione  $u_p = G * J$ . Se  $J$  non è a supporto compatto, la si divide "a pezzi" tramite cut-off.

### Costruzione di $G$ in dimensione 1

#### Operatore del primo ordine in 1D

Sia  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Consideriamo l'equazione:

$$A(x) \frac{du}{dx} + B(x)u = \delta(x)$$

Siano  $A, B \in C^\infty(\mathbb{R})$  con  $A(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , e  $\frac{B}{A}(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ .

Cerchiamo  $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  nella forma  $G = \Theta(x)F(x)$  con  $F \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Applicando la derivata nel senso delle distribuzioni:

$$A(F'\Theta + F\delta) + B\Theta F = \delta$$

Ricordando che  $F(x)\delta(x) = F(0)\delta(x)$ , raccogliamo i termini:

$$\underbrace{(AF' + BF)}_{=0} \Theta + \underbrace{A(0)F(0)}_{=1} \delta = \delta$$

Il sistema risultante porta alla **Formula di Abel** per  $F(x)$ :

$$F(x) = \frac{1}{A(0)} \exp \left\{ - \int_0^x dy \frac{B(y)}{A(y)} \right\}$$

Quindi la funzione di Green è:

$$G(x) = \frac{\Theta(x)}{A(0)} \exp \left\{ - \int_0^x dy \frac{B(y)}{A(y)} \right\}$$

La soluzione particolare risulta:

$$u_p = G * J = \int_0^\infty dy \frac{1}{A(0)} J(x+y) \exp \left\{ - \int_0^y ds \frac{B}{A} \right\}$$

Questo metodo è valido per una qualsiasi equazione differenziale lineare del primo ordine.

## 5.6 Applicazione all'Equazione di Schrödinger

In meccanica razionale l'Hamiltoniana è utile perché riduce il problema a equazioni del primo ordine nel tempo. Consideriamo l'equazione di Schrödinger libera:

$$\begin{cases} i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Delta\psi \\ \psi = \psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^3) \end{cases} \iff \begin{cases} i\partial_t\psi - \Delta\psi = \psi_0\delta(t) \\ \psi|_{t<0} = 0 \end{cases}$$

(Dove il dato iniziale è interpretato come sorgente impulsiva  $J = \psi_0\delta(t)$ ). Vale la conservazione della probabilità:  $|\psi(x, t)|^2 = |\psi_0|^2$ .

Cerchiamo  $G \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^4)$  tale che:

$$i\frac{\partial G}{\partial t} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 G}{\partial x_i^2} = \delta(t)\delta(x)$$

### Teorema (Hörmander)

*L'operatore ammette sempre soluzione fondamentale temperata in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ .*

Eseguiamo la trasformata di Fourier  $\mathcal{F}$  solo sulle coordinate spaziali ( $x \rightarrow k$ ), ottenendo  $\hat{G}(k, t)$ . L'equazione diventa un'ODE nel tempo:

$$i\frac{d\hat{G}}{dt} - \sum_{i=1}^3 k_i^2 \hat{G} = \delta(t) \implies i\frac{d\hat{G}}{dt} + |k|^2 \hat{G} = \delta(t)$$

Usando il risultato dell'esempio 1D precedente (con  $A = i, B = -|k|^2$ ):

$$\hat{G}(k, t) = \frac{\Theta(t)}{i} \exp \left\{ +i \int_0^t |k|^2 ds \right\} = -i\Theta(t) \exp \{ -i|k|^2 t \}$$

La soluzione è  $\psi = G * (\psi_0\delta(t))$ . È ben definita? Sì, vedendola come:

$$\psi(x, t) = \mathcal{F}^{-1} \left[ -i\Theta(t)e^{-i|k|^2 t} \hat{\psi}_0(k) \right]$$

Per  $t > 0$ , calcolando l'antitrasformata (integrale gaussiano), otteniamo il propagatore libero:

$$G(t, x) = \Theta(t) \frac{e^{i\frac{|x|^2}{4t}}}{(2\pi it)^{n/2}}$$

## 5.7 Applicazione all'Equazione delle Onde

Consideriamo:

$$\square u = J \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^4) \quad \text{con} \quad \square = -\partial_t^2 + \sum_i \partial_i^2 \quad (c = 1)$$

La soluzione generale è  $u = u_0 + u_p$  con  $\square u_0 = 0$ .

### Soluzione Omogenea e Interpretazione

Passando in trasformata di Fourier per  $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ :

$$(\omega^2 - |k|^2)\hat{u}_0 = 0$$

Le soluzioni sono gli zeri del polinomio caratteristico:

$$\hat{u}_0 = C(|k|)\delta(\omega - |k|) + D(|k|)\delta(\omega + |k|)$$

Il primo termine rappresenta l'energia positiva, il secondo l'energia negativa.

### Osservazione

*I due pacchetti sono indipendenti, corrispondendo fisicamente a **particelle** e **anti-particelle**. L'indipendenza si perde se si aggiungono condizioni. Ad esempio, per un campo scalare reale, vale  $C(|k|) = \overline{D(|k|)}$ , e quindi non c'è distinzione tra particella e antiparticella.*

## Soluzione Particolare (Propagatore)

La funzione di Green causale per l'equazione delle onde è:

$$G(t, x) = \frac{\Theta(t)}{2\pi} \delta(t^2 - |x|^2)$$

Il supporto è limitato esclusivamente al **cono luce**.

### Principio di Huygens:

- In dimensione  $n = 3$  (spazio dispari  $\geq 3$ ): Il supporto è sul bordo del cono ( $\delta$ ). La luce viaggia esattamente a velocità  $c$ .
- In dimensione  $n = 2$  ( $\mathbb{R}^2$ , piano): La delta diventa una Theta:

$$\delta \mapsto \Theta(t^2 - x^2)$$

Il segnale "riempie" il cono (fenomeno della scia).

## 5.8 Calcolo della Trasformata di Fourier per Distribuzioni Temperate

Come si procede per calcolare  $\mathcal{F}u = \hat{u}$ , con  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ? Ricordiamo che la definizione è data da  $(\hat{u}, \varphi) = (u, \hat{\varphi})$ .

L'algoritmo generale è il seguente:

1. **Verifica** che  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  (o spazi funzionali tipo  $L^1, L^2, \mathcal{S}$ ). Ricordiamo che  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  è un funzionale lineare continuo  $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ . La continuità implica:

$$\exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N}_0 \text{ t.c. } |(u, \varphi)| \leq C \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi| \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

(dove la somma è sulle seminorme  $\|\varphi\|_{\alpha, \beta}$  di  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ). Oppure si verifica la sequenziale continuità.

2. **Riscrivere** il prodotto duale  $(\hat{u}, \varphi) = (u, \hat{\varphi})$  cercando di manipolare l'espressione per portarla nella forma  $(v, \varphi)$ .
3. **Concludere** che  $\hat{u} = v$  in senso distribuzionale.

### Osservazione

Se  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , allora anche  $x^k u$  e  $u^{(k)}$  appartengono a  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Inoltre valgono le proprietà:

- $\widehat{x^k u} = i^k \hat{u}^{(k)}$
- $\widehat{u^{(k)}} = (i\xi)^k \hat{u}$

Con la convenzione:

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\xi x} \varphi(x), \quad \check{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{2\pi} e^{i\xi x} \varphi(\xi)$$

### Esercizio 1: Delta di Dirac traslata

Calcolare  $\hat{\delta}_a$  e  $\widehat{\delta_a^{(1)}}$  con  $a \in \mathbb{R}$ .

1.  $\delta_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ? Sì.

- $\delta_a \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .
- Usando la definizione:  $|(\delta_a, \varphi)| = |\varphi(a)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$ . Scegliendo  $C = 1, N = 0$ , la stima è verificata.

2. Calcoliamo la trasformata:

$$(\hat{\delta}_a, \varphi) = (\delta_a, \hat{\varphi}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$$(\delta_a, \hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(a) = \int_{\mathbb{R}} dx e^{-iax} \varphi(x) = (e^{-iax}, \varphi)_{L^1_{loc}(\mathbb{R})}$$

Da cui segue che:

$$\hat{\delta}_a = e^{-iax} \quad \text{in senso distribuzionale.}$$

**Osservazione**

$$\text{Se } a = 0 \implies \hat{\delta} = 1.$$

**Antitrasformata:**

$$(\check{\delta}_a, \varphi) = (\delta_a, \check{\varphi}) = \check{\varphi}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} d\xi \varphi(\xi) e^{ia\xi} \implies \check{\delta}_a = \frac{1}{2\pi} e^{ia\xi}$$

3. Calcolo della derivata:

$$(\widehat{\delta_a^{(1)}}, \varphi) = (\delta_a^{(1)}, \hat{\varphi})$$

Sfruttando le proprietà delle trasformate:

$$\widehat{\delta_a^{(1)}} = (i\xi)\hat{\delta}_a = i\xi e^{-iax}$$

**Esercizio 2: Polinomi**

Calcolare  $\hat{1}, \hat{x}, \widehat{x^n}$ .

- Sia  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

$$(\hat{1}, \varphi) = (1, \hat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}} d\xi \hat{\varphi}(\xi) e^{i\xi 0} = 2\pi(\delta_0, \varphi) \implies \hat{1} = 2\pi\delta_0$$

- Per la proprietà della derivata rispetto alla frequenza:

$$\hat{x} = \widehat{x \cdot 1} = i \frac{d}{d\xi} \hat{1} = 2\pi i \delta_0^{(1)}$$

- Iterando per  $n$ :

$$\widehat{x^n \cdot 1} = i^n \frac{d^n}{d\xi^n} \hat{1} = 2\pi i^n \delta_0^{(n)}$$

## 5.9 La Funzione di Heaviside

**Esercizio 3: Calcolare  $\hat{\Theta}$**

Sia  $\Theta(x)$  la funzione di Heaviside (o gradino).

1.  $\Theta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Usiamo la sequenziale continuità: sia  $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  tale che  $\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j = 0$  (in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ).

$$|(\Theta, \varphi_j)| = \left| \int_{\mathbb{R}} dx \Theta(x) \varphi_j(x) \right| = \left| \int_0^\infty dx \varphi_j(x) \right| \leq \int_0^\infty dx |\varphi_j(x)| \leq \|\varphi_j\|_{L^1(\mathbb{R})}$$

Per il teorema di immersione  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R})$ , dato che  $\varphi_j \rightarrow 0$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \implies \|\varphi_j\|_1 \rightarrow 0$ . Quindi  $\Theta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

2. Calcoliamo  $(\hat{\Theta}, \varphi) = (\Theta, \hat{\varphi})$  per ogni  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

$$(\Theta, \hat{\varphi}) = \int_{\mathbb{R}} d\xi \Theta(\xi) \hat{\varphi}(\xi) = \int_0^\infty d\xi \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\xi x} \varphi(x)$$

**Teorema di Fubini-Tonelli:** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ,  $f = f(x, y)$ .

- $f_x(\cdot) = f(x, \cdot)$  a  $x$  fissato t.c.  $f_x \in L^1(\mathbb{R})$  per q.o.  $x \in \mathbb{R}$ .
- $f_y(\cdot) = f(\cdot, y)$  a  $y$  fissato t.c.  $f_y \in L^1(\mathbb{R})$  per q.o.  $y \in \mathbb{R}$ .

$$\implies \int_{\mathbb{R}^2} dx dy f(x, y) = \int_{\mathbb{R}} dx \left( \int_{\mathbb{R}} dy f_x(y) \right) = \int_{\mathbb{R}} dy \left( \int_{\mathbb{R}} dx f_y(x) \right)$$

Ora, vorremmo scambiare gli integrali, MA consideriamo  $g(x, \xi) = e^{-i\xi x} \varphi(x)$ :

- $e^{-i\xi x} \varphi(x) \in L^1(\mathbb{R})$  in  $x$  per la presenza della test function.
- $e^{-i\xi x} \notin L^1(0, \infty)$  in  $\xi$ .



Quindi non sono verificate le ipotesi di Fubini-Tonelli.

Per risolvere il problema, introduciamo il fattore di convergenza  $e^{-\xi\varepsilon}$  con  $\varepsilon > 0$ :

$$\int_0^\infty \hat{\varphi}(\xi) d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty d\xi \hat{\varphi}(\xi) e^{-\xi\varepsilon}$$

Si può portare il limite dentro per Lebesgue, infatti  $\forall \varepsilon > 0$  e per q.o.  $\xi \in (0, \infty)$ :

- $e^{-\xi\varepsilon} \hat{\varphi}(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$
- $|\hat{\varphi}(\xi) e^{-\xi\varepsilon}| \leq |\hat{\varphi}(\xi)|$  (dominante integrabile indipendente da  $\varepsilon$ ).

$$\implies (\Theta, \hat{\varphi}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\infty d\xi \int_{\mathbb{R}} dx \varphi(x) e^{-i\xi x} e^{-\xi\varepsilon}$$

Ora siamo in  $L^1(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ , quindi OK Fubini:

$$\begin{aligned} \rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} dx \varphi(x) \int_0^\infty d\xi e^{-\xi(\varepsilon+ix)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} dx \varphi(x) \left[ -\frac{1}{\varepsilon+ix} e^{-\xi(\varepsilon+ix)} \right]_0^\infty \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} dx \left( \frac{1}{\varepsilon+ix} \right) \varphi(x) = -i \left( \mathcal{S}' - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-i\varepsilon}, \varphi \right) \end{aligned}$$

In virtù di questa scrittura:

$$\implies \hat{\Theta} = -i \left( \mathcal{S}' - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-i\varepsilon} \right) = -i \frac{1}{x-i0^+} \quad \text{in senso debole.}$$

### Osservazione (Relazioni di Sokhotsky-Plemelj)

Poiché  $\hat{\Theta} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , sappiamo che:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}' - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-i\varepsilon} &= P.V. \left( \frac{1}{x} \right) + i\pi\delta_0 \\ \implies P.V. \left( \frac{1}{x} \right) &\in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Questa cosa si può vedere anche così: Osserviamo che  $\mathcal{S}' - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-i\varepsilon} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  poiché:

$$\frac{d}{dx} \log(x-i\varepsilon) = \frac{1}{x-i\varepsilon}$$

Il logaritmo è in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  (crescita polinomiale) e  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  è chiuso rispetto alla derivazione.  $\log(x-i\varepsilon)$  è polinomialmente limitata e quindi per integrazione genera una distribuzione in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

## 5.10 Funzione Caratteristica e Sinc

### Esercizio 4

Calcolare  $\hat{\chi}_a$ , cioè la trasformata di Fourier della distribuzione generata da  $\chi_a$ .

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-a, a] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

1. Poiché  $\text{supp}(\chi_a) = [-a, a]$  è compatto in  $\mathbb{R}$ , si intende la distribuzione generata da  $\chi_a$ .  $\implies \chi_a \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}) \implies \chi_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

2. La  $\hat{\chi}_a$  coincide con  $\hat{\chi}_a$  calcolata classicamente (questo è vero sempre quando si calcola la trasformata di una distribuzione generata per integrazione).

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_a(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} dx \chi_a(x) e^{-i\xi x} = \int_{-a}^a dx e^{-i\xi x} = \left[ -\frac{1}{i\xi} e^{-i\xi x} \right]_{-a}^a = \frac{e^{i\xi a} - e^{-i\xi a}}{i\xi} = \frac{2 \sin(\xi a)}{\xi} \\ \hat{\chi}_a(\xi) &= \frac{2 \sin(\xi a)}{\xi} \end{aligned}$$

Chiamando  $\rho_a = \frac{\sin(ax)}{\pi x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , notiamo che  $\rho_a$  è continua e limitata.

$$\implies \hat{\chi}_a = 2\pi\rho_a$$

### Osservazione

La trasformata di Fourier non preserva il supporto compatto. La famiglia  $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  generata da  $\rho_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\pi x}$  è un'approssimazione dell'identità (regolarizzazione della  $\delta$ ).

$$\implies \rho_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R})$$

Dimostrazione:

$$\hat{\chi}_n = 2\pi\rho_n \iff \check{\rho}_n = \frac{1}{2\pi}\chi_n$$

Inoltre si può verificare che  $\chi_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad (\chi_n, \varphi) = \int_{-n}^n dx \varphi(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} dx \varphi(x) = (1, \varphi)$$

Segue che:

$$\rho_n = \frac{\hat{\chi}_n}{2\pi} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} \frac{1}{2\pi} \hat{1} = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\delta = \delta$$

## 5.11 La Gaussiana

### Esercizio 5

Calcolare la trasformata di:

$$g_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad \sigma > 0$$

$g_{a,\sigma^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , per integrazione genera  $g_{a,\sigma^2} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

Consideriamo la Gaussiana standard:  $X \mapsto x' = \frac{x-a}{\sigma}$ ,  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ .

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} dx g(x) e^{-i\xi x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-x^2/2} e^{-i\xi x}$$

### Metodo 1: Completamento del quadrato

$$\begin{aligned} x^2 + 2i\xi x + \xi^2 - \xi^2 &= (x + i\xi)^2 + \xi^2 \\ \implies \hat{g}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-\frac{\xi^2}{2}} e^{-\frac{1}{2}(x+i\xi)^2} = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx' e^{-x'^2/2}}_{=1} = e^{-\xi^2/2} \end{aligned}$$

(dove si è traslata la variabile complessa  $x' = x + i\xi$ , l'integrale non cambia per il teorema di Cauchy).

### Metodo 2: Equazione Differenziale

$$\hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\xi x} e^{-x^2/2}$$

Poiché l'integrando è pari in  $x$  (solo la parte coseno sopravvive, il seno è dispari):

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx \cos(\xi x) e^{-x^2/2}$$

Calcoliamo la derivata:

$$\frac{d}{d\xi} \hat{g}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx \left( \frac{d}{d\xi} e^{-i\xi x} \right) e^{-x^2/2} = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx x e^{-i\xi x} e^{-x^2/2}$$

Usiamo l'integrazione per parti notando che  $x e^{-x^2/2} = -\frac{d}{dx} e^{-x^2/2}$ :

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\xi x} \left( \frac{d}{dx} e^{-x^2/2} \right)$$

(i termini di bordo sono zero perché  $g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ).

$$\begin{aligned} &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx \left( \frac{d}{dx} e^{-i\xi x} \right) e^{-x^2/2} = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx (-i\xi) e^{-i\xi x} e^{-x^2/2} \\ &= -\xi \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\xi x} e^{-x^2/2} \right) = -\xi \hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

Otteniamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} \hat{g}(\xi) = -\xi \hat{g}(\xi) \\ \hat{g}(0) = 1 \quad (\text{normalizzazione}) \end{cases}$$

La soluzione è  $\hat{g}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$ , che è ancora una gaussiana.

**Caso generico  $g_{a,\sigma^2}$ :** Come ci si riconduce al caso generico?

$$\hat{g}_{a,\sigma^2}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\xi x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Usiamo il cambio di variabile  $g_{a,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$ .

$$= \frac{1}{\sigma} \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\xi x} g\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

Ponendo  $z = \frac{x-a}{\sigma} \implies x = \sigma z + a, dx = \sigma dz$ :

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} dz e^{-i\xi(\sigma z + a)} g(z) = e^{-i\xi a} \int_{\mathbb{R}} dz e^{-i(\xi\sigma)z} g(z) \\ &= e^{-i\xi a} \hat{g}(\sigma\xi) = e^{-i\xi a} e^{-\frac{\sigma^2 \xi^2}{2}} \end{aligned}$$

## 5.12 Esercizio Riepilogativo

### Esercizio 6

Calcolare la trasformata di Fourier di  $f(x) = \operatorname{sgn}(x)e^{-|x|}$ .

- $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Infatti  $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-2|x|} = 1$ .
- Calcolo diretto:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} dx e^{-i\xi x} \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|} = \int_0^\infty dx e^{-i\xi x} e^{-x} + \int_{-\infty}^0 dx e^{-i\xi x} (-e^x) \\ &= \int_0^\infty dx e^{-x(1+i\xi)} - \int_{-\infty}^0 dx e^{x(1-i\xi)} \\ &= \left[ \frac{-1}{1+i\xi} e^{-x(1+i\xi)} \right]_0^\infty - \left[ \frac{1}{1-i\xi} e^{x(1-i\xi)} \right]_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{1+i\xi} - \frac{1}{1-i\xi} = \frac{(1-i\xi) - (1+i\xi)}{1+\xi^2} = \frac{-2i\xi}{1+\xi^2} \\ \hat{f}(\xi) &= -\frac{2i\xi}{1+\xi^2} \in L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

### 5.13 Distribuzioni a Supporto su una Ipersuperficie (Teorema di Divisione)

Consideriamo il caso generale in  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto e sia  $g \in C^\infty(\Omega)$  una funzione a valori reali. Definiamo l'insieme degli zeri  $M = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}$  e supponiamo che  $\nabla g(x) \neq 0$  per ogni  $x \in M$ . In tal caso,  $M$  è una ipersuperficie liscia (una varietà di dimensione  $n - 1$ ).

Il seguente teorema descrive la struttura delle distribuzioni annullate dalla moltiplicazione per  $g(x)$ .

**Teorema (Struttura delle soluzioni di  $g \cdot u = 0$ )**

Sia  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ . Se vale l'equazione:

$$g(x)u(x) = 0$$

allora  $u$  è una distribuzione con supporto contenuto in  $M$  della forma:

$$u = v \delta(g)$$

dove  $v \in \mathcal{D}'(M)$  è una distribuzione definita sulla varietà  $M$ . Esplicitamente, l'azione di  $u$  su una funzione test  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  è data da:

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle v, \varphi|_M \rangle$$

**Osservazione**

L'espressione  $v \delta(g)$  evidenzia che "davanti alla delta" c'è un oggetto  $v$  che dipende dalle variabili dello spazio (più precisamente, dalle coordinate sulla varietà  $M$ ). Non è una semplice costante come nel caso 1D puntuale, ma una funzione o distribuzione "viva" sulla superficie.

**Corollario (Ordine superiore)**

Più in generale, se  $u$  soddisfa:

$$(g(x))^k u(x) = 0 \quad \text{con } k \in \mathbb{N}$$

allora  $u$  è una combinazione lineare di delta e derivate trasversali della delta, con coefficienti distribuzionali su  $M$ :

$$u(x) = \sum_{j=0}^{k-1} v_j(x) \delta^{(j)}(g(x))$$

dove  $v_j \in \mathcal{D}'(M)$  per ogni  $j$ .

Nello spazio  $\mathbb{R}^n$  con coordinate  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , se scegliamo  $g(x) = x_1$ , la varietà  $M$  è il piano  $x_1 = 0$ . L'equazione  $x_1 u = 0$  implica:

$$u(x) = v(x_2, \dots, x_n) \otimes \delta(x_1)$$

Qui  $v$  è chiaramente una funzione (distribuzione) delle restanti  $n - 1$  variabili.

### 5.14 Soluzione Fondamentale dell'Operatore di Cauchy-Riemann

Analizziamo ora l'operatore di Cauchy-Riemann in  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ . Definiamo le coordinate complesse  $z = x + iy$  e  $\bar{z} = x - iy$ . L'operatore derivata rispetto a  $\bar{z}$  è definito come:

$$\partial_{\bar{z}} := \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

Il problema consiste nel trovare la soluzione fondamentale  $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  tale che:

$$\partial_{\bar{z}} E = \delta$$

In altre parole, cerchiamo l'inverso distribuzionale dell'operatore  $\partial_{\bar{z}}$ .

**Teorema**

La soluzione fondamentale dell'operatore di Cauchy-Riemann è:

$$E(z) = \frac{1}{\pi z}$$

Ovvero, vale l'identità distribuzionale:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \frac{1}{\pi z} \right) = \delta(z)$$

*Dimostrazione.* Procediamo con rigore analitico usando il metodo di esclusione della singolarità. Innanzitutto, la funzione  $f(z) = \frac{1}{z}$  è localmente integrabile in  $\mathbb{R}^2$  ( $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ ). Infatti, in coordinate polari vicino all'origine, la singolarità è del tipo  $1/r$ , e l'elemento di volume è  $rdrd\theta$ , che cancella la singolarità rendendo l'integrale finito. Dunque  $\frac{1}{z}$  definisce una distribuzione regolare.

Calcoliamo la derivata distribuzionale. Per ogni  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ :

$$\left\langle \partial_{\bar{z}} \frac{1}{\pi z}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \frac{1}{\pi z}, \partial_{\bar{z}} \varphi \right\rangle = - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{z} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} dx dy$$

Poiché la funzione  $\frac{1}{z}$  ha una singolarità in 0, consideriamo il dominio  $\Omega_\epsilon = \mathbb{R}^2 \setminus B_\epsilon(0)$ , dove  $B_\epsilon(0)$  è il disco di raggio  $\epsilon$ .

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{z} \partial_{\bar{z}} \varphi dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega_\epsilon} \frac{1}{z} \partial_{\bar{z}} \varphi dx dy$$

In  $\Omega_\epsilon$ , la funzione  $\frac{1}{z}$  è olomorfa, perciò  $\partial_{\bar{z}}(1/z) = 0$  in senso classico. Possiamo usare la regola di Leibniz:

$$\frac{1}{z} \partial_{\bar{z}} \varphi = \partial_{\bar{z}} \left( \frac{\varphi}{z} \right) - \underbrace{\varphi \partial_{\bar{z}} \left( \frac{1}{z} \right)}_{=0} = \partial_{\bar{z}} \left( \frac{\varphi}{z} \right)$$

L'integrale diventa:

$$I_\epsilon = \int_{\Omega_\epsilon} \partial_{\bar{z}} \left( \frac{\varphi}{z} \right) dx dy$$

Utilizziamo una variante del Teorema di Stokes nel piano complesso (Formula di Cauchy-Pompeiu generale):

$$\int_{\Omega_\epsilon} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}} dx dy = \frac{1}{2i} \oint_{\partial \Omega_\epsilon} F(z) dz$$

Il bordo di  $\Omega_\epsilon$  è  $-\partial B_\epsilon(0)$  (il cerchio percorso in senso orario). Quindi:

$$\int_{\Omega_\epsilon} \partial_{\bar{z}} \left( \frac{\varphi}{z} \right) dx dy = - \frac{1}{2i} \oint_{|z|=\epsilon} \frac{\varphi(z)}{z} dz$$

Parametrizziamo il bordo  $|z| = \epsilon$ :

$$z = \epsilon e^{i\theta}, \quad dz = i\epsilon e^{i\theta} d\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

Sostituendo nell'integrale di bordo:

$$\oint_{|z|=\epsilon} \frac{\varphi(z)}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\epsilon e^{i\theta})}{\epsilon e^{i\theta}} (i\epsilon e^{i\theta}) d\theta = i \int_0^{2\pi} \varphi(\epsilon e^{i\theta}) d\theta$$

Tornando all'espressione della distribuzione:

$$\begin{aligned} \left\langle \partial_{\bar{z}} \frac{1}{\pi z}, \varphi \right\rangle &= - \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left( - \frac{1}{2i} \cdot i \int_0^{2\pi} \varphi(\epsilon e^{i\theta}) d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{2\pi} \varphi(\epsilon e^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

Per la continuità della funzione test  $\varphi$ , il limite puntuale  $\varphi(\epsilon e^{i\theta}) \rightarrow \varphi(0)$ .

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(0) d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \varphi(0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

Q.E.D. □