Esercizi Operatori

Tommaso Pedroni

Traccia dell'Esercizio 1-F

Dati due spazi di Hilbert $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ e denotando con $\mathbb{I}$ e $\mathbb{I}'$ i rispettivi operatori identità, si mostri che $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H}')$ è unitario se e solo se è limitato e $T^*T = \mathbb{I}$ mentre $TT^* = \mathbb{I}'$.

Soluzione. Ricordiamo preliminariarmente la definizione di operatore unitario. Un operatore $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ si dice *unitario* se è un isomorfismo isometrico suriettivo tra i due spazi di Hilbert. Ovvero, se conserva il prodotto scalare (e quindi è un'isometria) ed è suriettivo.

Implicazione diretta ($\Rightarrow$): Sia T unitario.

- **Limitatezza:** Poiché T è unitario, preserva la norma: $\|T\psi\|_{\mathcal{H}'} = \|\psi\|_{\mathcal{H}}$ per ogni $\psi \in \mathcal{H}$. Di conseguenza, la norma operatoriale è $\|T\| = \sup_{\|\psi\|=1} \|T\psi\| = 1 < \infty$. Dunque T è limitato.
- **Relazioni con l'aggiunto:** Poiché T conserva il prodotto scalare, per ogni $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ vale:

$$\langle T\phi, T\psi \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle \phi, \psi \rangle_{\mathcal{H}} .$$

Usando la definizione di operatore aggiunto T^*, il membro di sinistra diventa $\langle \phi, T^*T\psi \rangle_{\mathcal{H}}$. Dunque:

$$\langle \phi, T^*T\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \phi, \mathbb{I}\psi \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H} \implies T^*T = \mathbb{I}.$$

Essendo T un'isometria suriettiva, esso è invertibile. Poiché $T^*T = \mathbb{I}$, ne segue che T^* è l'inverso sinistro di T. In uno spazio di Hilbert (e più in generale per operatori invertibili), l'inverso sinistro coincide con l'inverso destro e con l'inverso T^{-1}. Pertanto $T^* = T^{-1}$, da cui segue immediatamente che:

$$TT^* = TT^{-1} = \mathbb{I}'.$$

Implicazione inversa ($\Leftarrow$): Sia $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H}')$ limitato tale che $T^*T = \mathbb{I}$ e $TT^* = \mathbb{I}'$.

- **Isometria:** Dalla condizione $T^*T = \mathbb{I}$, per ogni $\psi \in \mathcal{H}$ abbiamo:

$$\|T\psi\|^2_{\mathcal{H}'} = \langle T\psi, T\psi \rangle_{\mathcal{H}'} = \langle \psi, T^*T\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \psi, \mathbb{I}\psi \rangle_{\mathcal{H}} = \|\psi\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Quindi T è un'isometria.

- **Suriettività:** Dobbiamo mostrare che $\mathrm{Ran}(T) = \mathcal{H}'$. Sia $\eta \in \mathcal{H}'$ un vettore arbitrario. Consideriamo il vettore $\xi = T^*\eta \in \mathcal{H}$. Applicando T otteniamo:

$$T\xi = T(T^*\eta) = (TT^*)\eta = \mathbb{I}'\eta = \eta.$$

Dunque, per ogni $\eta \in \mathcal{H}'$ esiste una controimmagine $\xi \in \mathcal{H}$, il che prova che T è suriettivo.

Essendo T un'isometria suriettiva limitata, T è unitario.

Traccia dell'Esercizio 2-F

Sia dato uno spazio di Hilbert infinito dimensionale, mostrare che l'operatore identità non può mai essere compatto.

Soluzione. Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile con $\dim(\mathcal{H}) = \infty$ e sia $\mathbb{I} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ l'operatore identità.

Un operatore K si dice *compatto* se mappa insiemi limitati in insiemi relativamente compatti. Equivalentemente, K è compatto se, per ogni successione limitata $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$, la successione trasformata $\{Kx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente in $\mathcal{H}$.

Poiché $\mathcal{H}$ è infinito dimensionale, esiste in esso un sistema ortonormale infinito $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ (si pensi al risultato della procedura di Gram-Schmidt applicata a un insieme numerabile linearmente indipendente).

Consideriamo la successione $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Essa è limitata poiché $\|e_n\| = 1$ per ogni n. Valutiamo l'azione dell'identità su tale successione: $\mathbb{I}e_n = e_n$.

Affinché $\mathbb{I}$ sia compatto, dalla successione $\{e_n\}$ si dovrebbe poter estrarre una sottosuccessione convergente (e quindi di Cauchy). Tuttavia, per ogni $n \neq m$, calcoliamo la distanza tra due elementi della base ortonormale:

$$\|e_n - e_m\|^2 = \langle e_n - e_m, e_n - e_m\rangle = \|e_n\|^2 + \|e_m\|^2 - 2\mathrm{Re}\,\langle e_n, e_m\rangle = 1 + 1 - 0 = 2.$$

Dunque $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ per ogni $n \neq m$.

Questo implica che non è possibile estrarre alcuna sottosuccessione di Cauchy da $\{e_n\}$, poiché gli elementi mantengono una distanza costante e non nulla l'uno dall'altro. Di conseguenza, la successione $\{\mathbb{I}e_n\}$ non ammette sottosuccessioni convergenti.

Concludiamo che l'operatore identità in uno spazio di Hilbert infinito dimensionale non è compatto.

Traccia dell'Esercizio 3-F

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e siano T e T' due operatori densamente definiti. Si mostri che:

(a) Se $T \subset T'$, allora $(T')^* \subset T^*$.

(b) $(T')^*T^* \subseteq (TT')^*$ e l'uguaglianza vale se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Soluzione. **Punto (a)**

L'ipotesi $T \subset T'$ significa che:

$$\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T') \quad \text{e} \quad Tx = T'x \quad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

Sia $\phi \in \mathcal{D}(T')^*$. Per definizione di operatore aggiunto, ciò significa che esiste un vettore $\eta \in \mathcal{H}$ (denotato con $(T')^*\phi$) tale che:

$$\langle \phi, T'x\rangle = \langle \eta, x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(T').$$

Poiché $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(T')$, la relazione sopra vale in particolare per ogni $x \in \mathcal{D}(T)$. Inoltre, per tali x, abbiamo $T'x = Tx$. Possiamo quindi scrivere:

$$\langle \phi, Tx\rangle = \langle \eta, x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(T).$$

Questa è esattamente la definizione che assicura che $\phi \in \mathcal{D}(T^*)$ e che $T^*\phi = \eta$.

Abbiamo mostrato che $\phi \in \mathcal{D}((T')^*) \implies \phi \in \mathcal{D}(T^*)$ e che l'azione degli operatori coincide. Pertanto:

$$(T')^* \subset T^*.$$

Punto (b)

Inclusione $(T')^*T^* \subseteq (TT')^*$. Sia $\phi \in \mathcal{D}(T'^*T^*)$. Per definizione di dominio del prodotto di operatori, questo implica che:

$$\phi \in \mathcal{D}(T^*) \quad \text{e} \quad T^*\phi \in \mathcal{D}(T'^*).$$

Vogliamo mostrare che $\phi \in \mathcal{D}((TT')^*)$. Consideriamo un generico $x \in \mathcal{D}(TT')$. Ricordiamo che $x \in \mathcal{D}(TT') \iff x \in \mathcal{D}(T') \wedge T'x \in \mathcal{D}(T)$.

Valutiamo il prodotto scalare $\langle \phi, TT'x\rangle$:

1. Poiché $T'x \in \mathcal{D}(T)$ e $\phi \in \mathcal{D}(T^*)$, possiamo scaricare T:

$$\langle \phi, T(T'x) \rangle = \langle T^*\phi, T'x \rangle \, .$$

2. Ora, poniamo $\psi \coloneqq T^*\phi$. Sappiamo per ipotesi che $\psi \in \mathcal{D}((T')^*)$. Inoltre $x \in \mathcal{D}(T')$. Possiamo scaricare T':

$$\langle \psi, T'x \rangle = \langle (T')^*\psi, x \rangle = \langle (T')^* T^*\phi, x \rangle \, .$$

Mettendo insieme i passaggi, abbiamo trovato che per ogni $x \in \mathcal{D}(TT')$:

$$\langle \phi, TT'x \rangle = \langle (T')^* T^*\phi, x \rangle \, .$$

Questo prova che $\phi \in \mathcal{D}((TT')^*)$ e che $(TT')^*\phi = (T')^*T^*\phi$.

Uguaglianza nel caso limitato. Sia ora $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Questo implica che T è limitato e definito su tutto lo spazio, ovvero $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$ e $\mathcal{D}(T^*) = \mathcal{H}$. Dobbiamo mostrare l'inclusione inversa: $(TT')^* \subseteq (T')^*T^*$.

Osserviamo preliminarmente che, essendo $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$, il dominio del prodotto TT' si semplifica:

$$\mathcal{D}(TT') = \{x \in \mathcal{D}(T') : T'x \in \mathcal{D}(T)\} = \{x \in \mathcal{D}(T') : T'x \in \mathcal{H}\} = \mathcal{D}(T').$$

Sia ora $\phi \in \mathcal{D}((TT')^*)$. Questo significa che esiste un η tale che:

$$\langle \phi, TT'x \rangle = \langle \eta, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(TT') = \mathcal{D}(T').$$

Essendo T limitato e definito ovunque, il suo aggiunto T^* è anch'esso definito ovunque ($T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$). Possiamo usare la proprietà dell'aggiunto per operatori limitati $\langle \phi, Ty \rangle = \langle T^*\phi, y \rangle$ per qualsiasi $y \in \mathcal{H}$. Ponendo $y = T'x$ (che è un vettore lecito in $\mathcal{H}$), otteniamo:

$$\langle \phi, T(T'x) \rangle = \langle T^*\phi, (T'x) \rangle \, .$$

Confrontando le due espressioni, abbiamo:

$$\langle T^*\phi, T'x \rangle = \langle \eta, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{D}(T').$$

Questa uguaglianza ci dice esattamente che il funzionale lineare $x \mapsto \langle T^*\phi, T'x \rangle$ è limitato (rappresentabile da η). Per definizione di aggiunto di T', ciò implica che il vettore $T^*\phi$ appartiene al dominio di $(T')^*$, ovvero:

$$T^*\phi \in \mathcal{D}((T')^*).$$

Poiché $\phi \in \mathcal{H} = \mathcal{D}(T^*)$ è sempre vero, la condizione $T^*\phi \in \mathcal{D}((T')^*)$ è sufficiente per affermare che:

$$\phi \in \mathcal{D}((T')^*T^*).$$

Ciò conclude la dimostrazione dell'uguaglianza.

Traccia dell'Esercizio 4-F

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e sia dato $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Si mostri che T è essenzialmente autoaggiunto se e solo se T è denso e chiudibile in $\mathcal{H}$ e $T^* = \overline{T}$.

Soluzione. Implicazione diretta ($\Rightarrow$): Sia T essenzialmente autoaggiunto. Per la **Definizione 84**, questo implica tre fatti:

1. $\mathcal{D}(T)$ è denso in $\mathcal{H}$
2. $\mathcal{D}(T^*)$ è denso in $\mathcal{H}$
3. $T^* = (T^*)^*$

Poiché $\mathcal{D}(T^*)$ è denso, per il **Teorema 82 (punto 2)**, possiamo affermare che T è chiudibile e che vale l'identità fondamentale:

$$\overline{T} = (T^*)^*.$$

Sostituendo questa identità nella condizione 3 (essenziale autoaggiunzione), otteniamo:

$$T^* = \overline{T}.$$

Abbiamo quindi mostrato che T è denso (cond. 1), chiudibile (dal Teorema 82) e che $T^* = \overline{T}$.
Implicazione inversa ($\Leftarrow$): Supponiamo che:

H1. $\mathcal{D}(T)$ sia denso.

H2. T sia chiudibile.

H3. $T^* = \overline{T}$.

Dobbiamo verificare che T soddisfi la **Definizione 84**. La prima condizione della definizione ($\mathcal{D}(T)$ denso) è garantita da H1.

Poiché T è chiudibile (H2), il **Teorema 82 (punto 2)** assicura che $\mathcal{D}(T^*)$ è denso (soddisfacendo così la seconda condizione della Def. 84) e che vale:

$$(T^*)^* = \overline{T}.$$

Utilizzando l'ipotesi H3 ($T^* = \overline{T}$), possiamo sostituire $\overline{T}$ nell'equazione precedente:

$$(T^*)^* = T^*.$$

Questo soddisfa la terza condizione della **Definizione 84**. Dunque T è essenzialmente autoaggiunto.

Traccia dell'Esercizio 5-F

Dati due spazi di Hilbert $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ e un operatore unitario $U : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$, si mostri che se $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è essenzialmente autoaggiunto, allora lo è anche l'operatore $T' \doteq U^{-1}TU$ definito su $\mathcal{D}(T') = U^{-1}\mathcal{D}(T)$.

Soluzione. Sia T essenzialmente autoaggiunto. Per la **Definizione 84**, valgono:

- $\mathcal{D}(T)$ e $\mathcal{D}(T^*)$ sono densi in $\mathcal{H}$.
- $T^* = (T^*)^*$.

Dobbiamo verificare le stesse condizioni per T'.

1. Densità dei domini. L'operatore U è unitario, dunque è un isomorfismo isometrico suriettivo. Un tale operatore mappa insiemi densi in insiemi densi.

- Poiché $\mathcal{D}(T)$ è denso in $\mathcal{H}$, allora $\mathcal{D}(T') = U^{-1}\mathcal{D}(T)$ è denso in $\mathcal{K}$.
- Calcoliamo l'aggiunto $(T')^*$. Essendo U limitato con inverso limitato ($U^* = U^{-1}$), vale la regola dell'aggiunto del prodotto:

  $$(T')^* = (U^{-1}TU)^* = U^*T^*(U^{-1})^* = U^{-1}T^*U.$$

  Il dominio di $(T')^*$ è $\mathcal{D}((T')^*) = U^{-1}\mathcal{D}(T^*)$. Poiché $\mathcal{D}(T^*)$ è denso per ipotesi, anche $\mathcal{D}((T')^*)$ è denso in $\mathcal{K}$.

2. Condizione autoaggiuntezza dell'aggiunto. Dobbiamo verificare che $(T')^* = ((T')^*)^*$. Calcoliamo l'aggiunto dell'aggiunto di T':

$$((T')^*)^* = \left(U^{-1}T^*U\right)^* = U^*(T^*)^*(U^{-1})^* = U^{-1}(T^*)^*U.$$

Poiché T è essenzialmente autoaggiunto, per definizione sappiamo che $T^* = (T^*)^*$. Sostituendo questa uguaglianza nell'equazione sopra:

$$((T')^*)^* = U^{-1}T^*U.$$

Osserviamo che il membro di destra è esattamente l'espressione di $(T')^*$ trovata in precedenza. Dunque:

$$((T')^*)^* = (T')^*.$$

Tutte le condizioni della **Definizione 84** sono soddisfatte per T', che è quindi essenzialmente autoaggiunto.

Traccia dell'Esercizio 1

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e sia $T = T^* \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ un operatore compatto autoaggiunto. Dato $\psi_0 \in \mathcal{H}$, si considerino le equazioni:

1. $T\psi = \psi$
2. $T\psi = \psi + \psi_0$

Si mostri che:

(a) Se l'unica soluzione di (1) è $\psi = 0$, allora l'equazione (2) ammette un'unica soluzione.

(b) Se l'equazione (1) ammette soluzioni $\psi \neq 0$, allora l'equazione (2) è risolubile se e solo se ψ_0 è ortogonale ad ogni soluzione di (1).

Soluzione. Definiamo l'operatore $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ come:

$$S := T - I.$$

Poiché T è limitato (in quanto compatto) e I è limitato, S è un operatore limitato. Inoltre, poiché T è autoaggiunto ($T = T^*$) e l'identità è autoaggiunta, S è autoaggiunto:

$$S^* = (T - I)^* = T^* - I^* = T - I = S.$$

Le equazioni date possono essere riscritte come:

1. $S\psi = 0$ (Equazione omogenea)
2. $S\psi = \psi_0$ (Equazione non omogenea, a meno di un segno ininfluente su ψ_0)

Parte (a)

Ipotesi: L'unica soluzione della (1) è $\psi = 0$. Questo implica che $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$.

1. Analisi del Nucleo $\mathrm{Ker}(S)$

Dobbiamo formalizzare che $\mathrm{Ker}(S)$ è un sottospazio vettoriale (banale ma necessario per rigore). Il nucleo è definito come $\mathrm{Ker}(S) = \{\psi \in \mathcal{H} \mid (T - I)\psi = 0\}$.

- **Contiene lo zero:** $S(0) = T(0) - 0 = 0$, quindi $0 \in \mathrm{Ker}(S)$.
- **Chiusura rispetto alle operazioni lineari:** Siano $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Ker}(S)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$S(\alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \alpha S(\phi_1) + \beta S(\phi_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0.$$

  Pertanto $\alpha\phi_1 + \beta\phi_2 \in \mathrm{Ker}(S)$.

Dunque $\mathrm{Ker}(S)$ è un sottospazio lineare. Per l'ipotesi di questa sezione, $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$, il che implica che l'operatore S è **iniettivo**. L'unicità della soluzione, qualora esista, è garantita. Resta da dimostrare l'esistenza (suriettività).

2. Dimostrazione della Chiusura del Rango e Suriettività

Per dimostrare che l'equazione $S\psi = \psi_0$ ammette soluzione per ogni ψ_0, dobbiamo mostrare che $\mathrm{Ran}(S) = \mathcal{H}$. Essendo S autoaggiunto, vale la decomposizione ortogonale:

$$\mathcal{H} = \overline{\mathrm{Ran}(S)} \oplus \mathrm{Ker}(S).$$

Dato che $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$, segue che $\overline{\mathrm{Ran}(S)} = \mathcal{H}$. Ovvero, l'immagine è densa. Per concludere che $\mathrm{Ran}(S) = \mathcal{H}$, è necessario e sufficiente dimostrare che $\mathrm{Ran}(S)$ è un insieme **chiuso**.

Dimostrazione della chiusura di $\mathrm{Ran}(S)$**.** Sia $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Ran}(S)$ una successione convergente ad un elemento $y \in \mathcal{H}$, cioè $\lim_{n\to\infty} \|y_n - y\| = 0$. Dobbiamo dimostrare che esiste un $x \in \mathcal{H}$ tale che $Sx = y$.

Poiché $y_n \in \mathrm{Ran}(S)$, per ogni n esiste un unico $x_n \in \mathcal{H}$ (per l'iniettività dimostrata al punto 1) tale che:

$$Sx_n = y_n.$$

Passo fondamentale: Limitazione della successione preimmagine. Dobbiamo dimostrare che la successione $\{x_n\}$ è limitata in norma. Procediamo per **assurdo**. Supponiamo che $\{x_n\}$ non sia limitata. Allora esiste una sottosuccessione (che per semplicità di notazione indichiamo ancora con x_n) tale che:

$$\|x_n\| \to \infty \quad \text{per } n \to \infty.$$

Definiamo la successione normalizzata:

$$z_n := \frac{x_n}{\|x_n\|}.$$

Osserviamo che $\|z_n\| = 1$ per ogni n. Applichiamo l'operatore S:

$$Sz_n = S\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = \frac{1}{\|x_n\|}Sx_n = \frac{y_n}{\|x_n\|}.$$

Poiché $y_n \to y$ (quindi è limitata in norma) e $\|x_n\| \to \infty$, abbiamo:

$$\lim_{n\to\infty} Sz_n = 0.$$

Ricordando che $S = T - I$, possiamo scrivere:

$$(T - I)z_n \to 0 \implies z_n - Tz_n \to 0 \implies z_n \approx Tz_n.$$

Poiché $\{z_n\}$ è una successione limitata (norma unitaria) e l'operatore T è **compatto**, dalla definizione di compattezza segue che esiste una sottosuccessione $\{z_{n_k}\}$ tale che $\{Tz_{n_k}\}$ converge fortemente ad un vettore $z^* \in \mathcal{H}$.

Dalla relazione $z_{n_k} - Tz_{n_k} \to 0$, segue che anche la successione $\{z_{n_k}\}$ deve convergere a z^*:

$$z_{n_k} \to z^*.$$

Per la continuità di S, abbiamo:

$$Sz^* = S(\lim_{k\to\infty} z_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} Sz_{n_k} = 0.$$

Quindi $z^* \in \mathrm{Ker}(S)$. Ma per ipotesi $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$, quindi $z^* = 0$. Tuttavia, sappiamo che $\|z_{n_k}\| = 1$ per ogni k, quindi per continuità della norma:

$$\|z^*\| = \lim_{k\to\infty} \|z_{n_k}\| = 1.$$

Siamo giunti a una contraddizione ($0 = \|z^*\| = 1$). L'ipotesi che $\{x_n\}$ fosse illimitata è falsa. Dunque $\{x_n\}$ è limitata.

Conclusione della chiusura: Poiché $\{x_n\}$ è limitata e T è compatto, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_j}\}$ tale che Tx_{n_j} converge a un qualche vettore w. Dall'equazione $Sx_{n_j} = y_{n_j}$, abbiamo:

$$(T - I)x_{n_j} = y_{n_j} \implies x_{n_j} = Tx_{n_j} - y_{n_j}.$$

Il termine di destra converge (poiché $Tx_{n_j} \to w$ e $y_{n_j} \to y$), quindi x_{n_j} converge ad un elemento $x := w - y$. Per continuità di S:

$$Sx = \lim_{j\to\infty} Sx_{n_j} = \lim_{j\to\infty} y_{n_j} = y.$$

Dunque $y \in \mathrm{Ran}(S)$. Abbiamo dimostrato che $\mathrm{Ran}(S)$ è chiuso.

Conclusione Parte (a): Poiché $\mathrm{Ran}(S)$ è chiuso e $\mathrm{Ker}(S) = \{0\}$, abbiamo:

$$\mathrm{Ran}(S) = (\mathrm{Ker}(S^*))^\perp = (\mathrm{Ker}(S))^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}.$$

L'operatore S è quindi una biiezione su $\mathcal{H}$. L'equazione (2) ammette una ed una sola soluzione.

Parte (b)

Ipotesi: L'equazione (1) ammette soluzioni $\psi \neq 0$. Questo significa che $\text{Ker}(S) \neq \{0\}$. $\text{Ker}(S)$ è l'autospazio di T relativo all'autovalore 1. Poiché T è compatto, questo autospazio ha dimensione finita, ma qui ci basta sapere che non è banale.

Dalla teoria generale (e ricalcando la dimostrazione di chiusura fatta al punto (a), che rimane valida anche se il nucleo non è nullo), sappiamo che $\text{Ran}(S)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{H}$.

Essendo $\text{Ran}(S)$ chiuso, vale esattamente:

$$\text{Ran}(S) = (\text{Ker}(S^*))^\perp.$$

Poiché S è autoaggiunto ($S = S^*$), abbiamo:

$$\text{Ran}(S) = (\text{Ker}(S))^\perp.$$

L'equazione (2), $S\psi = \psi_0$, ha soluzione se e solo se $\psi_0 \in \text{Ran}(S)$. In virtù dell'uguaglianza sopra, questo equivale a:

$$\psi_0 \in (\text{Ker}(S))^\perp.$$

Ovvero, ψ_0 deve essere ortogonale a ogni vettore del nucleo di S. Poiché i vettori di $\text{Ker}(S)$ sono esattamente le soluzioni dell'equazione omogenea (1), l'equazione (2) è risolubile se e solo se ψ_0 è ortogonale ad ogni soluzione della (1).

$\square$

Traccia dell'Esercizio 2

Sia $g \in L^2([0, 2\pi])$. Definito l'operatore $T : L^2([0, 2\pi]) \to L^2([0, 2\pi])$ come:

$$f \mapsto T(f) \doteq g * f = \int_0^{2\pi} g(x-y)f(y)\,dy$$

si mostri che $T \in \mathcal{B}_\infty(L^2([0, 2\pi]))$ (ovvero T è compatto) e che le funzioni e^{inx} sono autovettori di T.

Soluzione. Per procedere con il dovuto rigore, assumiamo che la funzione g, data in $L^2([0, 2\pi])$, sia estesa per periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Questo rende ben definita l'espressione $g(x - y)$ per ogni coppia (x, y).

1. Spettro Puntuale: Gli autovettori

Siano $\phi_n(x) \doteq e^{inx}$ con $n \in \mathbb{Z}$. Verifichiamo direttamente che questi sono autovettori applicando l'operatore integrale.

$$(T\phi_n)(x) = \int_0^{2\pi} g(x-y)e^{iny}\,dy.$$

Operiamo il cambio di variabile $z = x - y$. Di conseguenza $y = x - z$ e $dy = -dz$. Gli estremi di integrazione si trasformano come segue: $y = 0 \to z = x$ e $y = 2\pi \to z = x - 2\pi$.

$$(T\phi_n)(x) = \int_x^{x-2\pi} g(z)e^{in(x-z)}(-dz) = e^{inx} \int_{x-2\pi}^{x} g(z)e^{-inz}\,dz.$$

L'integranda $h(z) = g(z)e^{-inz}$ è il prodotto di funzioni 2π-periodiche, ed è quindi essa stessa 2π-periodica. È fatto noto dell'analisi reale che l'integrale di una funzione periodica su un intervallo pari al periodo è invariante per traslazione degli estremi:

$$\int_{x-2\pi}^{x} h(z)\,dz = \int_0^{2\pi} h(z)\,dz.$$

Sostituendo, otteniamo:

$$(T\phi_n)(x) = e^{inx}\left(\int_0^{2\pi} g(z)e^{-inz}\,dz\right).$$

Definendo lo scalare $\lambda_n \doteq \int_0^{2\pi} g(z)e^{-inz}\,dz$, abbiamo dimostrato che:

$$T\phi_n = \lambda_n\phi_n.$$

Dunque, le funzioni ϕ_n sono autovettori di T relativi agli autovalori λ_n.

2. Completezza del sistema ortonormale

Per poter analizzare le proprietà spettrali globali dell'operatore, dobbiamo assicurarci che gli autovettori trovati generino l'intero spazio. Definiamo il sistema normalizzato:

$$u_n(x) \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Il sistema $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è chiaramente ortonormale rispetto al prodotto scalare standard di L^2: $\langle u_n, u_m \rangle = \delta_{nm}$.

Per dimostrarne la completezza, mostriamo che il complemento ortogonale del sottospazio generato da $\{u_n\}$ è il solo vettore nullo. Sia $f \in L^2([0, 2\pi])$ tale che $\langle f, u_n \rangle = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

$$\langle f, u_n \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{u_n(x)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = 0.$$

Gli integrali sopra corrispondono (a meno del fattore di normalizzazione) ai coefficienti di Fourier di f, denotati $\hat{f}_n$. L'ipotesi $\langle f, u_n \rangle = 0, \forall n$ implica $\hat{f}_n = 0, \forall n$. Per il **Teorema di Unicità** della serie di Fourier (conseguenza della densità dei polinomi trigonometrici e della completezza di L^2), una funzione L^2 con tutti i coefficienti di Fourier nulli è nulla quasi ovunque.

$$f = 0 \quad \text{q.o.}$$

Pertanto, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è una base ortonormale completa (Base di Hilbert) per $\mathcal{H}$.

3. Compattezza e Classe di Hilbert-Schmidt

Per dimostrare che T è compatto ($T \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$), dimostreremo la condizione più forte che T è un operatore di Hilbert-Schmidt. Un operatore T è di Hilbert-Schmidt se, data una base ortonormale $\{e_k\}$, la quantità $\|T\|_{HS}^2 \doteq \sum_k \|Te_k\|^2$ è finita.

Scegliamo come base proprio gli autovettori normalizzati $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Poiché $Tu_n = \lambda_n u_n$, abbiamo:

$$\|Tu_n\|^2 = \|\lambda_n u_n\|^2 = |\lambda_n|^2 \|u_n\|^2 = |\lambda_n|^2.$$

La norma Hilbert-Schmidt è dunque data dalla serie degli autovalori al quadrato:

$$\|T\|_{HS}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n|^2.$$

Analizziamo i termini λ_n. Dalla definizione data nel punto 1:

$$\lambda_n = \int_0^{2\pi} g(z) e^{-inz}\, dz.$$

Possiamo riscrivere λ_n in funzione dei coefficienti di Fourier della funzione g rispetto alla base ortonormale $\{u_n\}$. I coefficienti di Fourier sono $\hat{g}_n = \langle g, u_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} g(z) e^{-inz}\, dz$. Risulta evidente che:

$$\lambda_n = \sqrt{2\pi}\, \hat{g}_n.$$

Sostituendo nella somma:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \sqrt{2\pi}\, \hat{g}_n \right|^2 = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2.$$

Poiché per ipotesi $g \in L^2([0, 2\pi])$, l'**Identità di Parseval** garantisce che la somma dei quadrati dei suoi coefficienti di Fourier converga al quadrato della norma della funzione:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2 = \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Di conseguenza:

$$\|T\|_{HS}^2 = 2\pi \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

L'operatore T è dunque di Hilbert-Schmidt. Poiché la classe degli operatori di Hilbert-Schmidt è contenuta in quella degli operatori compatti ($\mathcal{B}_{HS} \subset \mathcal{B}_\infty$), concludiamo che T è un operatore compatto. □

Traccia dell'Esercizio 3

Sia data una matrice $\sigma \in \mathcal{M}(n;\mathbb{R})$ positiva e sia $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Si mostri che l'operatore

$$L \doteq \mathrm{div}(\sigma\nabla) = \nabla \cdot (\sigma\nabla)$$

è essenzialmente autoaggiunto sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, dove ∇ è l'operatore gradiente.

Soluzione. Per affrontare il problema con il dovuto rigore, è necessario specificare il dominio iniziale dell'operatore. Poiché stiamo trattando operatori differenziali su $\mathbb{R}^n$ non limitati, assumiamo come dominio di definizione lo spazio delle funzioni test a supporto compatto:

$$\mathcal{D}(L) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n).$$

L'operatore L è simmetrico su questo dominio. Infatti, per ogni $\phi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, integrando per parti due volte e assumendo che i termini di bordo svaniscano (garantito dal supporto compatto), e sfruttando la simmetria di σ (implicita nella definizione di positività per matrici reali in questo contesto, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$):

$$\langle L\phi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot (\sigma\nabla\phi)\bar{\psi}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} (\sigma\nabla\phi) \cdot \nabla\bar{\psi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi\overline{\nabla \cdot (\sigma\nabla\psi)}\, dx = \langle \phi, L\psi\rangle .$$

Per dimostrare che L è **essenzialmente autoaggiunto** (ovvero che la sua chiusura $\bar{L}$ è autoaggiunta, $\bar{L} = L^*$), utilizziamo il **Criterio di Von Neumann**. Dobbiamo mostrare che gli indici di difetto sono nulli, ovvero:

$$\ker(L^* - iI) = \{0\} \quad \text{e} \quad \ker(L^* + iI) = \{0\}.$$

Poiché L è a coefficienti reali, è sufficiente studiare una delle due equazioni, in quanto la coniugazione complessa mappa le soluzioni di una in quelle dell'altra. Cerchiamo quindi le soluzioni distribuzionali $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ dell'equazione:

$$L\psi = i\psi \implies \nabla \cdot (\sigma\nabla\psi) - i\psi = 0.$$

1. Diagonalizzazione e Cambio di Variabili

La matrice σ è definita positiva. Per il Teorema Spettrale reale, esiste una matrice ortogonale $O \in O(n)$ tale che:

$$O^T\sigma O = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad \text{con } \lambda_k > 0.$$

Operiamo un cambio di variabili nello spazio $\mathbb{R}^n$ definito dalla rotazione $y = O^T x$. Poiché O è ortogonale, la trasformazione è un'isometria unitaria su $L^2(\mathbb{R}^n)$ (preserva il prodotto scalare e la norma), quindi non altera le proprietà spettrali (come l'appartenenza a L^2). Esprimiamo l'operatore differenziale nelle nuove coordinate y. Notiamo che $\nabla_x = O\nabla_y$. L'operatore diventa:

$$\nabla_x \cdot (\sigma\nabla_x) = (O\nabla_y)^T\sigma(O\nabla_y) = \nabla_y^T(O^T\sigma O)\nabla_y = \nabla_y^T D\nabla_y = \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2}{\partial y_k^2}.$$

L'equazione agli autovalori nelle coordinate ruotate diventa:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{\partial^2\psi}{\partial y_k^2} - i\psi(y) = 0.$$

2. Analisi delle Soluzioni in L^2

Vogliamo dimostrare che l'unica soluzione $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a questa equazione è $\psi \equiv 0$. Possiamo procedere con la **separazione delle variabili** come suggerito. Cerchiamo soluzioni elementari della forma $\psi(y) = \prod_{k=1}^n f_k(y_k)$. Sostituendo nell'equazione e dividendo per ψ:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{f_k''(y_k)}{f_k(y_k)} = i.$$

Affinché questa uguaglianza valga per ogni y, ogni termine della somma deve essere costante:

$$\lambda_k \frac{f_k''(y_k)}{f_k(y_k)} = c_k, \quad \text{con } \sum_{k=1}^{n} c_k = i.$$

Questo porta a n equazioni differenziali ordinarie:

$$f_k''(y_k) = \frac{c_k}{\lambda_k} f_k(y_k).$$

Poniamo $\mu_k^2 = \frac{c_k}{\lambda_k}$. Le soluzioni generali sono combinazioni lineari di esponenziali:

$$f_k(y_k) = A_k e^{\mu_k y_k} + B_k e^{-\mu_k y_k}.$$

Affinché la soluzione prodotto $\psi(y)$ appartenga a $L^2(\mathbb{R}^n)$, è necessario che ciascun fattore $f_k(y_k)$ appartenga a $L^2(\mathbb{R})$ (o sia nullo). Analizziamo l'appartenenza a $L^2(\mathbb{R})$ della funzione $e^{\mu y}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{\mu y}|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\mathrm{Re}(\mu) y} dy.$$

Questo integrale converge se e solo se $\mathrm{Re}(\mu) \neq 0$ e l'intervallo è limitato opportunamente, ma su tutto $\mathbb{R}$ diverge sempre a meno che la funzione non sia identicamente nulla.

- Se $\mathrm{Re}(\mu) > 0$, l'esponenziale esplode a $+\infty$.
- Se $\mathrm{Re}(\mu) < 0$, l'esponenziale esplode a $-\infty$.
- Se $\mathrm{Re}(\mu) = 0$ (cioè μ immaginario puro), la funzione è oscillante con modulo costante 1, e quindi non integrabile su $\mathbb{R}$.

Dato che $\sum c_k = i$, almeno uno dei coefficienti c_k (e quindi μ_k) deve essere non nullo e complesso, impedendo l'esistenza di soluzioni decadenti su tutto l'asse reale simultaneamente. Poiché le combinazioni lineari (e limiti L^2) di tali soluzioni generano lo spazio delle soluzioni, concludiamo che:

$$\ker(L^* - iI) = \{0\}.$$

Analogamente, si dimostra che $\ker(L^* + iI) = \{0\}$.

Conclusione

Avendo dimostrato che gli indici di difetto sono $(0, 0)$, per il criterio di Von Neumann l'operatore L definito su $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è essenzialmente autoaggiunto. La sua unica estensione autoaggiunta è la sua chiusura.

$\square$

Traccia dell'Esercizio 4

Sia dato il dominio $I = [0, 1]$ e si consideri il problema di Dirichlet per $\psi : I \to \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} -\frac{d^2\psi}{dx^2} + \psi = f \\ \psi|_{\partial I} = 0 \end{cases}$$

dove $f \in C^\infty(I)$. Si mostri che esiste ed è unica una soluzione *debole* $\psi_0 \in H_0^1(I)$ tale che:

$$\int_I \psi_0 h \, dx + \int_I \frac{d\psi_0}{dx} \frac{dh}{dx} \, dx = \int_I f h \, dx, \quad \forall h \in H_0^1(I).$$

Soluzione. Per dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione debole, riformuliamo il problema nel linguaggio dell'analisi funzionale sugli spazi di Hilbert, identificando la struttura variazionale dell'equazione.

1. Lo Spazio di Hilbert e il Prodotto Scalare

Consideriamo lo spazio di Sobolev $H^1(I)$, definito come:

$$H^1(I) = \left\{ v \in L^2(I) \mid \frac{dv}{dx} \in L^2(I) \right\}.$$

Questo spazio è dotato del prodotto scalare naturale:

$$\langle u, v \rangle_{H^1} \doteq \int_I u(x)v(x)\,dx + \int_I \frac{du}{dx}(x)\frac{dv}{dx}(x)\,dx,$$

che induce la norma $\|u\|_{H^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2$.

Lo spazio funzionale di riferimento per il problema di Dirichlet omogeneo è il sottospazio $H_0^1(I)$, che è la chiusura in norma H^1 delle funzioni $C_0^\infty(I)$ a supporto compatto. Essendo un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert, $H_0^1(I)$ è esso stesso uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1}$ ereditato da $H^1(I)$.

2. Analisi del Membro di Sinistra (Forma Bilineare)

Osserviamo il membro sinistro dell'equazione integrale data:

$$A(\psi_0, h) \doteq \int_I \psi_0 h\,dx + \int_I \frac{d\psi_0}{dx}\frac{dh}{dx}\,dx.$$

Confrontando questa espressione con la definizione del prodotto scalare, notiamo immediatamente che:

$$A(\psi_0, h) = \langle \psi_0, h \rangle_{H^1}.$$

Pertanto, il problema variazionale richiede di trovare $\psi_0 \in H_0^1(I)$ tale che il suo prodotto scalare con una generica funzione test h sia uguale a un certo valore determinato da f.

3. Analisi del Membro di Destra (Funzionale Lineare)

Definiamo il funzionale lineare $F : H_0^1(I) \to \mathbb{R}$ associato al termine noto:

$$F(h) \doteq \int_I f(x)h(x)\,dx.$$

Dobbiamo verificare che questo funzionale sia continuo (limitato) su $H_0^1(I)$. Essendo $f \in C^\infty(I)$ su un dominio limitato, certamente $f \in L^2(I)$. Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $L^2(I)$:

$$|F(h)| = \left| \int_I fh\,dx \right| \leq \|f\|_{L^2}\|h\|_{L^2}.$$

Dalla definizione della norma in H^1, è evidente che $\|h\|_{L^2} \leq \|h\|_{H^1}$ (poiché si aggiunge il termine positivo della derivata). Quindi:

$$|F(h)| \leq \|f\|_{L^2}\|h\|_{H^1}.$$

Poiché $\|f\|_{L^2}$ è una costante finita, il funzionale F è limitato:

$$\|F\|_{(H_0^1)^*} \leq \|f\|_{L^2} < \infty.$$

Dunque F appartiene allo spazio duale topologico $(H_0^1(I))^*$.

4. Applicazione del Teorema di Riesz-Fréchet

Il problema debole può essere riscritto in forma astratta come segue: Cercare $\psi_0 \in H_0^1(I)$ tale che:

$$\langle \psi_0, h \rangle_{H^1} = F(h), \quad \forall h \in H_0^1(I).$$

Siamo nelle ipotesi del **Teorema di Rappresentazione di Riesz-Fréchet**:

Per ogni funzionale lineare continuo F su uno spazio di Hilbert H, esiste ed è unico un elemento $u \in H$ tale che $F(v) = \langle u, v \rangle_H$ per ogni $v \in H$. Inoltre $\|u\|_H = \|F\|_{H^*}$.

Applicando il teorema con $H = H_0^1(I)$, garantiamo che:

1. **Esistenza:** Esiste un vettore $\psi_0 \in H_0^1(I)$ che rappresenta il funzionale F.
2. **Unicità:** Tale vettore è unico.

Tale ψ_0 è, per definizione, l'unica soluzione debole del problema di Dirichlet assegnato.

$\square$

Traccia dell'Esercizio 5 $\psi(0) = 0$

Sia $I = [0, 1]$. Si consideri l'equazione differenziale:

$$-\frac{d\psi}{dx} + \psi = f, \quad \text{con } f \in L^2(I).$$

Si definisca la mappa $K : L^2(I) \to L^2(I)$ tale che $\psi = K(f)$ è soluzione dell'equazione. Si discuta se K è limitato, compatto e/o positivo.

Soluzione. Per definire univocamente la mappa lineare K, dobbiamo fissare una condizione al contorno o iniziale, poiché la soluzione generale dell'equazione differenziale dipende da una costante arbitraria. Affinché K sia un operatore lineare ben definito, la scelta canonica è fissare la condizione iniziale omogenea $\psi(0) = 0$ (che corrisponde a porre la costante della soluzione omogenea pari a zero).

1. Costruzione Esplicita dell'Operatore Integrale

L'equazione si riscrive come:

$$\psi'(x) - \psi(x) = -f(x).$$

Utilizzando il metodo del fattore integrante e^{-x}, otteniamo:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\psi(x)\right) = -e^{-x}f(x).$$

Integrando tra 0 e x e imponendo $\psi(0) = 0$:

$$e^{-x}\psi(x) = -\int_0^x e^{-y}f(y)\,dy \implies \psi(x) = -\int_0^x e^{x-y}f(y)\,dy.$$

L'operatore K è quindi un **operatore integrale di Volterra** della forma:

$$(Kf)(x) = \int_0^1 A(x, y)f(y)\,dy,$$

dove il nucleo integrale (kernel) è definito grazie alla funzione gradino di Heaviside $\theta(\cdot)$ come:

$$A(x, y) = -e^{x-y}\theta(x - y) = \begin{cases} -e^{x-y} & \text{se } 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

2. Limitatezza e Compattezza (Classe di Hilbert-Schmidt)

Nel caso di $L^2(I)$, mostriamo che la definizione di operatore di HS coincide con la norma L^2 del nucleo $A(x, y)$. Sia $\{e_n(y)\}$ una base ortonormale completa di $L^2(I)$. Calcoliamo $\|Ke_n\|^2$:

$$\|Ke_n\|^2 = \int_I dx\,|(Ke_n)(x)|^2 = \int_I dx\left|\int_I A(x, y)e_n(y)\,dy\right|^2.$$

Fissiamo x. La quantità interna $\int_I A(x, y)e_n(y)\,dy$ può essere vista come il prodotto scalare (o coefficiente di Fourier, a meno di coniugazione) della funzione $y \mapsto \overline{A(x, y)}$ rispetto al vettore di base $e_n(y)$. Per l'**Identità di Parseval**, la somma dei quadrati dei coefficienti di Fourier di una funzione restituisce la norma quadra della funzione stessa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_I A(x,y) e_n(y)\, dy \right|^2 = \int_I |A(x,y)|^2\, dy.$$

Inserendo questo risultato nella definizione di norma HS:

$$\|K\|_{HS}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I dx \left| \left\langle \overline{A(x,\cdot)}, e_n \right\rangle_{L^2_y} \right|^2 = \int_I dx \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left\langle \overline{A(x,\cdot)}, e_n \right\rangle \right|^2 \right).$$

$$\|K\|_{HS}^2 = \int_I dx \left(\int_I |A(x,y)|^2\, dy \right) = \int_{I\times I} |A(x,y)|^2\, dx\, dy.$$

Abbiamo così dimostrato rigorosamente che verificare che $A \in L^2(I \times I)$ equivale a verificare che l'operatore ha "traccia finita" nel senso HS.

Giustificazione rigorosa dello scambio somma-integrale. Partiamo dall'espressione della norma Hilbert-Schmidt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ke_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I \left| \left\langle \overline{A(x,\cdot)}, e_n \right\rangle_{L^2_y} \right|^2 dx.$$

Definiamo la successione delle somme parziali $S_N : I \to [0, +\infty]$ come:

$$S_N(x) \doteq \sum_{n=1}^{N} \left| \left\langle \overline{A(x,\cdot)}, e_n \right\rangle_{L^2_y} \right|^2.$$

Osserviamo due proprietà fondamentali:

1. I termini della serie sono funzioni misurabili non negative: $x \mapsto |\langle \dots, \dots \rangle|^2 \geq 0$.
2. Di conseguenza, la successione $\{S_N(x)\}_{N\in\mathbb{N}}$ è monotona crescente: $S_{N+1}(x) \geq S_N(x)$ per ogni $x \in I$.

Sotto queste ipotesi, il **Teorema della Convergenza Monotona (Beppo Levi)** garantisce che l'integrale del limite coincida con il limite dell'integrale (che equivale allo scambio serie-integrale):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_I (\dots)\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_I S_N(x)\, dx = \int_I \lim_{N\to\infty} S_N(x)\, dx = \int_I \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left\langle \overline{A(x,\cdot)}, e_n \right\rangle \right|^2 dx.$$

Un operatore integrale K agente su $L^2(I)$ è sicuramente limitato e compatto se è di classe **Hilbert-Schmidt**. Condizione necessaria e sufficiente affinché K sia Hilbert-Schmidt è che il suo nucleo $A(x,y)$ appartenga a $L^2(I \times I)$, ovvero che:

$$\|K\|_{HS}^2 \doteq \int_0^1 dx \int_0^1 dy\, |A(x,y)|^2 < \infty.$$

Calcoliamo tale norma:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy\, |-e^{x-y}\theta(x-y)|^2 = \int_0^1 dx \int_0^x dy\, e^{2(x-y)}.$$

Calcoliamo l'integrale interno rispetto a y:

$$\int_0^x e^{2x} e^{-2y}\, dy = e^{2x} \left[-\frac{1}{2} e^{-2y} \right]_0^x = e^{2x} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}.$$

Ora integriamo rispetto a x:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} x \right]_0^1 = \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{4} - 0 \right) = \frac{e^2 - 3}{4}.$$

Poiché $e \approx 2.718$, il valore è finito. Essendo $\|K\|_{HS} < \infty$, concludiamo rigorosamente che:

1. K è un operatore **limitato**.
2. K è un operatore **compatto** (poiché ogni operatore Hilbert-Schmidt è compatto).

3. Positività

Un operatore K si dice positivo se $\langle f, Kf\rangle \geq 0$ per ogni $f \in L^2(I)$. Verifichiamo questa proprietà utilizzando una funzione test semplice (controesempio). Sia $f(x) = 1$ (funzione costante unitaria). Calcoliamo Kf:

$$(Kf)(x) = -\int_0^x e^{x-y} \cdot 1\, dy = -e^x \left[-e^{-y}\right]_0^x = -e^x(-e^{-x} + 1) = 1 - e^x.$$

Calcoliamo ora il prodotto scalare:

$$\langle f, Kf\rangle = \int_0^1 1 \cdot (1 - e^x)\, dx = [x - e^x]_0^1 = (1 - e) - (0 - 1) = 2 - e.$$

Sapendo che $e > 2$, otteniamo:

$$\langle f, Kf\rangle = 2 - e < 0.$$

Esiste almeno una funzione f per cui la forma quadratica è negativa. Pertanto, K **non è un operatore positivo**.

$\square$

Traccia dell'Esercizio 5 Hard

Sia $I = [0, 1]$. Si consideri l'equazione differenziale:

$$-\frac{d\psi}{dx} + \psi = f, \quad \text{con } f \in L^2(I).$$

Si definisca la mappa $K : L^2(I) \to L^2(I)$ tale che $\psi = K(f)$ è soluzione dell'equazione. Si discuta se K è limitato, compatto e/o positivo.

Soluzione. L'operatore K descritto nel testo del problema non è ben definito, in quanto l'operatore

$$D : H^1(I) \to L^2(I) \qquad \psi \mapsto -\frac{d\psi}{dx} + \psi$$

ha kernel non banale, composto da tutte le funzioni del tipo Ae^x. Per questo motivo, se l'operatore K dovesse definire la soluzione dell'equazione, $K(0) = Ae^x$ ma questo non lo renderebbe lineare se non per $A = 0$. Per rendere tutto il più generale possibile, quindi dobbiamo scegliere un qualsiasi **funzionale lineare ovunque definito** $C : L^2(I) \to \mathbb{C}$ e, data una $f \in L^2(I)$ con cui risolvere il problema, definire un insieme e degli operatori derivata con condizione iniziale

$$S_C = \{\psi \in H^1(I) | \psi(0) = C(f)\} \qquad D_C : S_C \to L^2(I)$$

a questo punto possiamo finalmente scrivere la forma degli opreatori K_C dipendenti dalla condizione iniziale e la cui forma analitica è data dall'integrale di Volterra

$$K_C : L^2(I) \to L^2(I) \qquad K_C(f) := e^x \left(C(f) - \int_0^x f(y)e^{-y}dy\right)$$

K_C ora è un buon operatore perchè è lineare, ovunque definito e vale che $K_C(D_C(\psi)) = \psi$ con $\psi \in S_C$

$$\begin{aligned}
K_C(-\psi' + \psi) &= e^x \left(C(f) + \int_0^x \frac{d\psi}{dy} e^{-y}dy - \int_0^x \psi e^{-y}dy\right) \\
&= e^x C(f) + e^x(\psi(y)e^{-y}|_0^x) + e^x \int_0^x \psi e^{-y}dy - e^x \int_0^x \psi e^{-y}dy \\
&= e^x C(f) + \psi(x)e^{-x}e^x - \psi(0)e^x \\
&= e^x(C(f) - \psi(0)) + \psi(x) \\
&= \psi(x)
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato che $\psi \in S_C$. Perfetto, ora possiamo procdere. L'operatore descritto è somma di due componenti

$$K_C(f) = e^x C(f) + \int_0^x f(y)e^{x-y}dy = e^x C(f) + \int_0^1 f(y)\Theta(x - y)e^{x-y}dy = e^x C(f) + f \star (\Theta(x)e^x)$$

possiamo chiamare

$$K_C(f) = R_C(f) + T(f)$$

Analisi della convoluzione in $L^2([0,1])$ come in 2

Definiamo il sistema ortonormale in $L^2([0,1])$:

$$u_n(x) \doteq e^{2\pi i n x}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Il sistema $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è chiaramente ortonormale rispetto al prodotto scalare standard: $\langle u_n, u_m \rangle = \delta_{nm}$.

Per dimostrarne la completezza, mostriamo che il complemento ortogonale del sottospazio generato da $\{u_n\}$ contiene solo il vettore nullo. Sia $f \in L^2([0,1])$ tale che $\langle f, u_n \rangle = 0$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

$$\langle f, u_n \rangle = \int_0^1 f(x)\overline{u_n(x)}\, dx = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x}\, dx = 0.$$

Gli integrali sopra corrispondono esattamente ai coefficienti di Fourier di f, denotati con $\hat{f}_n$. L'ipotesi $\langle f, u_n \rangle = 0, \forall n$ implica $\hat{f}_n = 0, \forall n$. Per il **Teorema di Unicità** della serie di Fourier (conseguenza della densità dei polinomi trigonometrici e della completezza di L^2), una funzione L^2 con tutti i coefficienti di Fourier nulli è nulla quasi ovunque.

$$f = 0 \quad \text{q.o.}$$

Pertanto, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ è una base ortonormale completa (Base di Hilbert) per $\mathcal{H}$.
Per dimostrare che l'operatore T è **compatto** ($T \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$), verifichiamo la condizione più forte che T sia un operatore di Hilbert-Schmidt. Un operatore T è di Hilbert-Schmidt se, data una base ortonormale $\{e_k\}$, la quantità $\|T\|_{HS}^2 \doteq \sum_k \|Te_k\|^2$ è finita.

Scegliamo come base proprio gli autovettori $\{u_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Poiché $Tu_n = \lambda_n u_n$, abbiamo:

$$\|Tu_n\|^2 = \|\lambda_n u_n\|^2 = |\lambda_n|^2 \|u_n\|^2 = |\lambda_n|^2.$$

La norma Hilbert-Schmidt è dunque data dalla serie degli autovalori al quadrato:

$$\|T\|_{HS}^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n|^2.$$

Analizziamo i termini λ_n. Dalla definizione dell'operatore di convoluzione su $[0,1]$, gli autovalori sono dati dai coefficienti di Fourier del nucleo g:

$$\lambda_n = \int_0^1 g(z) e^{-2\pi i n z}\, dz = \hat{g}_n.$$

l'autovalore coincide esattamente con il coefficiente di Fourier $\hat{g}_n$.

Sostituendo nella somma:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_n|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2.$$

Poiché per ipotesi $g \in L^2([0,1])$, l'**Identità di Parseval** garantisce che la somma dei quadrati dei suoi coefficienti di Fourier converga al quadrato della norma della funzione:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{g}_n|^2 = \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Di conseguenza:

$$\|T\|_{HS}^2 = \|g\|_{L^2}^2 < \infty.$$

L'operatore T è dunque di Hilbert-Schmidt. Poiché la classe degli operatori di Hilbert-Schmidt è contenuta in quella degli operatori compatti ($\mathcal{B}_{HS} \subset \mathcal{B}_\infty$), concludiamo che T è un operatore compatto.

Analisi dell'operatore risolvente K

1. Limitatezza

L'operatore K_C è limitato se e solo se il funzionale C è limitato.

- $\Rightarrow$ Se C è limitato, allora per la disuguaglianza triangolare:

  $$\|K_C f\|_{L^2} \leq \|Tf\|_{L^2} + |C(f)| \|e^x\|_{L^2}.$$

  Essendo T limitato e C limitato per ipotesi, K è limitato.

- $\Leftarrow$ Se K è limitato, allora $R_C = K - T$ è differenza di operatori limitati, dunque è limitato. Poiché $R_C(f) = C(f)e^x$, la limitatezza di R implica necessariamente la limitatezza del funzionale C.

2. Compattezza

Assumendo C limitato (condizione necessaria per la limitatezza di K), l'operatore K risulta sempre compatto.

- L'operatore T è di Hilbert-Schmidt, pertanto, T è compatto.
- L'operatore $R_C(f) = C(f)e^x$ ha immagine unidimensionale, generata dal vettore e^x. Essendo un operatore di rango finito limitato, R_C è compatto. (Da esercitazione di prof. Costeri)

Poiché lo spazio degli operatori compatti è un sottospazio vettoriale, $K_C = T + R_C$ è compatto. Per il Teorema di Rappresentazione di Riesz, possiamo esplicitare la struttura di R_C: esiste un'unica $g \in L^2(I)$ tale che $C(f) = \langle g, f\rangle$, da cui $R_C(f) = R_g(f) = e^x\langle g, f\rangle$.

3. Positività

L'operatore K_C non è, in generale, positivo. Consideriamo il caso $\psi(0) = 0$ (che implica $C \equiv 0$). La forma quadratica associata è:

$$\langle K_0 f, f\rangle = \int_0^1 \psi(x)(-\psi'(x) + \psi(x))dx = \|\psi\|^2 - \frac{1}{2}\psi(1)^2. \tag{1}$$

Scegliendo la funzione test $\psi(x) = x$ quindi $f(x) = x - 1$, si ottiene:

$$\langle K_0 f, f\rangle = \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{2}(1)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} < 0.$$

Esistono quindi vettori f (nello specifico $f(x) = x - 1$) per cui $\langle K_0 f, f\rangle < 0$, violando la condizione di positività.
Per mostrare invece un esempio di operatore K_C positivo dobbiamo notare che

$$\langle K_C f, f\rangle = \langle \psi, -\psi' + \psi\rangle = \|\psi\|^2 + \frac{1}{2}\psi(0)^2 - \frac{1}{2}\psi(1)^2 \tag{2}$$

a questo punto basta imporre che $\psi(1) = 0$ per avere un operatore positivo. Restringiamoci quindi alla classe dei funzionali lineari che impongono $\psi(x_0) = 0$ ossia

$$C(f) = \int_0^{x_0} e^{-y} f(y)dy$$

ottenendo quindi

$$C(f) = \int_0^1 e^{-y} f(y)dy$$

L'analisi dettagliata completa è estremamente complessa e non ci sono risultati evidenti tranne delle condizioni necessarie e suff. molto implicite provenienti diretttamente da imporre la forma quadratica positiva. □

Traccia dell'Esercizio 6

Su $L^2(\mathbb{R})$ si consideri l'operatore differenziale:

$$T = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + i\frac{d}{dx}.$$

Si discuta se T ammette estensioni autoaggiunte calcolando eventualmente gli indici di difetto.

Soluzione. Per analizzare le proprietà di autoaggiunzione di T, cerchiamo di ricondurlo a una forma canonica nota tramite una trasformazione unitaria. L'operatore ricorda molto l'Hamiltoniana dell'Oscillatore Armonico unidimensionale ($H_{HO} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2$), con l'aggiunta di un termine del primo ordine.

1. Completamento del Quadrato

Riscriviamo l'operatore utilizzando l'operatore momento $p = -i\frac{d}{dx}$ (in unità con $\hbar = 1$). Notiamo che $i\frac{d}{dx} = -p$.

$$T = p^2 + x^2 - p.$$

L'idea è di "completare il quadrato" per la parte dipendente dal momento, trattando p come una variabile algebrica (lecito poiché stiamo cercando una trasformazione unitaria che agisce come una traslazione nello spazio dei momenti). Osserviamo che:

$$\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 = p^2 - p + \frac{1}{4}.$$

Pertanto possiamo scrivere:

$$T = \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 - \frac{1}{4}.$$

2. Equivalenza Unitaria

Vogliamo eliminare lo shift $-1/2$ nell'operatore momento. Sappiamo dalla meccanica quantistica che l'operatore di posizione x è il generatore delle traslazioni nello spazio dei momenti. Consideriamo l'operatore unitario $U : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definito dalla moltiplicazione per una fase (trasformazione di gauge):

$$(U\psi)(x) = e^{i\frac{1}{2}x}\psi(x).$$

L'aggiunto è $(U^\dagger\psi)(x) = e^{-i\frac{1}{2}x}\psi(x)$. Calcoliamo come trasforma l'operatore momento p:

$$\begin{aligned}
(U^\dagger pU\psi)(x) &= e^{-ix/2}\left(-i\frac{d}{dx}\right)\left(e^{ix/2}\psi(x)\right) \\
&= e^{-ix/2}\left[-i\left(\frac{i}{2}e^{ix/2}\psi(x) + e^{ix/2}\psi'(x)\right)\right] \\
&= e^{-ix/2}e^{ix/2}\left(\frac{1}{2}\psi(x) - i\psi'(x)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + p\right)\psi(x).
\end{aligned}$$

Quindi $U^\dagger pU = p + \frac{1}{2}$, oppure equivalentemente $U\left(p + \frac{1}{2}\right)U^\dagger = p$. Applichiamo questa trasformazione all'operatore T:

$$\begin{aligned}
\tilde{T} \doteq UTU^\dagger &= U\left[\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + x^2 - \frac{1}{4}\right]U^\dagger \\
&= \left[U\left(p - \frac{1}{2}\right)U^\dagger\right]^2 + Ux^2U^\dagger - \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Poiché U è funzione solo di x, commuta con x^2. Inoltre, dall'inverso della relazione trovata sopra ($p \to p - 1/2$ sotto l'azione di $U^\dagger \cdot U$), il termine al quadrato diventa semplicemente p^2. Formalmente:

$$U\left(-i\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}\right)U^\dagger = -i\frac{d}{dx}.$$

Dunque l'operatore trasformato è:

$$\tilde{T} = p^2 + x^2 - \frac{1}{4} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - \frac{1}{4}.$$

3. Analisi dell'Operatore Trasformato

L'operatore $\tilde{T}$ è (a meno della costante additiva $-1/4$, che non influenza le proprietà di dominio o autoaggiunzione per la nota qui sotto) l'Hamiltoniana dell'Oscillatore Armonico Quantistico:

$$H_{HO} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2.$$

È un risultato classico e fondamentale (dimostrabile ad esempio notando che ha uno spettro discreto completo di autofunzioni in $L^2(\mathbb{R})$, le funzioni di Hermite) che l'Oscillatore Armonico definito su $C_c^\infty(\mathbb{R})$ (o sullo spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$) è essenzialmente autoaggiunto. Ciò significa che la sua chiusura $\overline{H}_{HO}$ è autoaggiunta e unica.

Gli indici di difetto di un operatore essenzialmente autoaggiunto sono $(0,0)$.

Nota: Autoaggiunzione di $S = T - I$. Verifichiamo esplicitamente che $S = T - I$ è autoaggiunto usando la definizione. Per ogni $\phi, \psi \in \mathcal{H}$:

$$\langle \phi, S\psi \rangle = \langle \phi, (T - I)\psi \rangle = \langle \phi, T\psi \rangle - \langle \phi, \psi \rangle .$$

Poiché $T = T^*$ per ipotesi, $\langle \phi, T\psi \rangle = \langle T\phi, \psi \rangle$. Inoltre, banalmente $\langle \phi, \psi \rangle = \langle I\phi, \psi \rangle$. Quindi:

$$\langle \phi, S\psi \rangle = \langle T\phi, \psi \rangle - \langle I\phi, \psi \rangle = \langle (T - I)\phi, \psi \rangle = \langle S\phi, \psi \rangle .$$

Ciò prova che $S^* = S$.

Conclusione

Poiché T è unitariamente equivalente a un operatore essenzialmente autoaggiunto ($\tilde{T}$), anche T è essenzialmente autoaggiunto sul dominio iniziale delle funzioni test.

- T ammette un'unica estensione autoaggiunta (la sua chiusura $\bar{T}$).
- Gli indici di difetto sono $n_+ = n_- = 0$.

Osservazione (Nota sul Metodo della Coniugazione)**.** Si poteva anche osservare che, pur non essendo T reale ($T \neq \bar{T}$), esso commuta con l'operatore anti-unitario $\mathcal{J} = \mathcal{PC}$, dove $\mathcal{P}$ è la parità ($x \to -x$) e $\mathcal{C}$ la coniugazione complessa. Infatti:

$$\mathcal{PC}\left(-\partial_x^2 + x^2 + i\partial_x\right)(\mathcal{PC})^{-1} = -\partial_x^2 + (-x)^2 - i(-\partial_x) = T.$$

La commutazione con una coniugazione antiunitaria garantisce $n_+ = n_-$, assicurando l'esistenza di estensioni autoaggiunte, ma non la loro unicità (essenziale autoaggiunzione). Il metodo della trasformazione unitaria è quindi più forte in questo contesto.

□

Traccia dell'Esercizio 7

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e si consideri l'equazione:

$$T\psi = \lambda\psi + f,$$

con $T = T^* \in \mathcal{B}_\infty(\mathcal{H})$ (operatore compatto autoaggiunto), $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $f \in \mathcal{H}$. Si provi che, se λ è autovalore di T, allora l'equazione ha infinite soluzioni (sottointendendo: qualora sia risolubile).

Soluzione. Riscriviamo l'equazione nella forma operatoriale omogenea:

$$(T - \lambda I)\psi = f.$$

Definiamo l'operatore $S_\lambda \doteq T - \lambda I$.

1. Proprietà Spettrali Preliminari

Poiché T è autoaggiunto, i suoi autovalori sono reali. Essendo λ un autovalore per ipotesi, segue che $\lambda \in \mathbb{R}$. Inoltre, essendo T e I operatori limitati e autoaggiunti, anche S_λ è limitato e autoaggiunto:

$$S_\lambda^* = (T - \lambda I)^* = T^* - \bar{\lambda} I^* = T - \lambda I = S_\lambda.$$

Dato che T è compatto e $\lambda \neq 0$, l'operatore S_λ è un **operatore di Fredholm** esattamente come nell'esercizio 1. Valgono le seguenti proprietà, dimostrate nell'esercizio 1:

1. Il nucleo $\mathrm{Ker}(S_\lambda)$ ha dimensione finita.
2. Il rango $\mathrm{Ran}(S_\lambda)$ è chiuso in $\mathcal{H}$.

2. Analisi dell'Esistenza e Molteplicità

L'ipotesi che λ sia un autovalore di T implica che il nucleo di S_λ non è banale:

$$\mathrm{Ker}(S_\lambda) \neq \{0\}.$$

Sia $d = \dim(\mathrm{Ker}(S_\lambda)) \geq 1$.

Condizione di Risolubilità. Affinché l'equazione $S_\lambda \psi = f$ ammetta soluzioni, il termine noto f deve appartenere all'immagine dell'operatore. Poiché il rango è chiuso e l'operatore è autoaggiunto, vale la decomposizione ortogonale:

$$\mathrm{Ran}(S_\lambda) = (\mathrm{Ker}(S_\lambda^*))^\perp = (\mathrm{Ker}(S_\lambda))^\perp.$$

Quindi, l'equazione ammette soluzioni se e solo se $f \perp \mathrm{Ker}(S_\lambda)$. *Nota: Se f non soddisfa questa condizione, l'insieme delle soluzioni è vuoto. Assumeremo nel seguito che f sia compatibile o che l'esercizio richieda di discutere la cardinalità dell'insieme delle soluzioni nel caso in cui questo non sia vuoto.*

Struttura dello Spazio delle Soluzioni. Supponiamo che esista almeno una soluzione particolare ψ_p tale che $S_\lambda \psi_p = f$. La soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea è data dalla somma della soluzione particolare e della soluzione generale dell'equazione omogenea associata ($S_\lambda \phi = 0$). L'insieme delle soluzioni Σ è quindi lo spazio affine:

$$\Sigma = \psi_p + \mathrm{Ker}(S_\lambda) = \{\psi_p + \phi \mid \phi \in \mathrm{Ker}(S_\lambda)\}.$$

Poiché λ è un autovalore, esiste almeno un autovettore $u \neq 0$ tale che $u \in \mathrm{Ker}(S_\lambda)$. Consideriamo la famiglia di vettori:

$$\psi_\alpha = \psi_p + \alpha u, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Verifichiamo che sono soluzioni:

$$S_\lambda(\psi_\alpha) = S_\lambda \psi_p + \alpha S_\lambda u = f + \alpha \cdot 0 = f.$$

Essendo α un parametro continuo in $\mathbb{C}$, la famiglia $\{\psi_\alpha\}$ contiene infiniti elementi distinti. Pertanto, se l'equazione è risolubile, essa ammette infinite soluzioni.

□

Traccia dell'Esercizio 8

Si consideri una particella di massa $m > 0$ in $\mathbb{R}^3$, soggetta a un potenziale centrale $V(r)$. Sia dato l'operatore:

$$T = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}},$$

dove $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\mathbf{p}}$ sono gli operatori posizione e impulso. Si mostri che, per ogni $\psi \in L^2(\mathbb{R}^3)$ con $\|\psi\| = 1$ (e nel dominio dell'operatore), vale l'equazione di evoluzione:

$$\frac{d}{dt}\langle T \rangle = \frac{2}{m}\left\langle \hat{\mathbf{p}}^2 \right\rangle - 2\left\langle \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V \right\rangle.$$

Soluzione. La risoluzione dell'esercizio si basa sull'applicazione del **Teorema di Ehrenfest**, che lega la derivata temporale del valore di aspettazione di un osservabile al commutatore dell'osservabile con l'Hamiltoniana.

Ipotesi minimali per il Teorema di Ehrenfest

Sia H l'operatore Hamiltoniano autoaggiunto su un dominio denso $D(H) \subset \mathcal{H}$ e sia A un'osservabile autoaggiunta (con $\partial_t A = 0$) definita su $D(A)$. L'evoluzione temporale è data dal gruppo unitario fortemente continuo $U(t) = e^{-itH/\hbar}$.

1. Ruolo del Teorema di Stone e Domini

Per poter derivare rispetto al tempo il valore di aspettazione $\langle A \rangle_{\psi_t}$, dobbiamo garantire che lo stato ψ_t sia derivabile. Il **Teorema di Stone** stabilisce una corrispondenza biunivoca tra generatori autoaggiunti e gruppi unitari, affermando che la relazione:

$$\frac{d}{dt}U(t)\psi = -\frac{i}{\hbar}HU(t)\psi$$

è valida (nella topologia forte) **se e solo se** $\psi \in D(H)$. Pertanto, l'ipotesi $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ **non è sufficiente**. Se $\psi \in L^2 \setminus D(H)$, la funzione $t \mapsto \psi_t$ è continua ma non derivabile, rendendo privo di senso il membro sinistro dell'equazione di Ehrenfest.

Ipotesi minimali: Affinché la relazione di Ehrenfest valga come uguaglianza tra forme quadratiche all'istante t, richiediamo:

1. $\psi_t \in D(H)$ (per l'esistenza della derivata temporale);
2. $\psi_t \in D(A)$ (per l'esistenza del valore di aspettazione).

2. Derivazione come Forma Quadratica

Sotto le ipotesi sopra citate, non è necessario che $\psi_t \in D(HA)$ o $D(AH)$ (cioè che il commutatore esista come operatore). Interpretiamo il commutatore come una forma quadratica derivando il prodotto scalare:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \psi_t, A\psi_t\rangle &= \langle \dot{\psi}_t, A\psi_t\rangle + \langle \psi_t, A\dot{\psi}_t\rangle \\ &= \left\langle -\frac{i}{\hbar}H\psi_t, A\psi_t \right\rangle + \left\langle \psi_t, A\left(-\frac{i}{\hbar}H\psi_t\right)\right\rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar}\left(\langle A\psi_t, H\psi_t\rangle - \langle H\psi_t, A\psi_t\rangle\right).\end{aligned}$$

Definendo la media del commutatore in senso debole:

$$\langle [H, A]\rangle_\psi^{weak} := \langle H\psi, A\psi\rangle - \langle A\psi, H\psi\rangle,$$

otteniamo la relazione $\frac{d}{dt}\langle A\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H, A]\rangle^{weak}$.

3. Controesempio per $\psi \in L^2$

Mostriamo che $\psi \in L^2$ non basta. Consideriamo $A = X$ (operatore posizione) su $L^2(\mathbb{R})$. La funzione Lorentziana:

$$\psi(x) = \frac{C}{1 + x^2}$$

appartiene chiaramente a $L^2(\mathbb{R})$ (poiché integrabile al quadrato), ma non appartiene a $D(X)$ poiché:

$$\|X\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{x}{1+x^2}\right|^2 dx < \infty \quad \text{(converge)},$$

Tuttavia, se prendiamo $\phi(x) = \frac{C}{1+|x|}$ in L^2, allora $\|X\phi\|^2$ diverge logaritmicamente. In tal caso $\langle X\rangle_\phi$ non è definito, e l'equazione di Ehrenfest perde significato. Ancora più drasticamente, se $\psi \notin D(H)$ (energia infinita), la derivata temporale non esiste proprio. L'unico modo per dargli senso sarebbe in senso distribuzionale.

Calcolo del Commutatore

L'Hamiltoniana per una particella in un potenziale $V(r)$ è data da:

$$H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}}).$$

Dobbiamo calcolare $[T, H]$. Per linearità:

$$[T, H] = \left[T, \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\right] + [T, V(\hat{\mathbf{r}})].$$

1. Commutatore con l'Energia Cinetica

Calcoliamo $\left[T, \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\right] = \frac{1}{2m}[\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{p}}+\hat{\mathbf{p}}\cdot\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2]$. Poiché l'operatore impulso commuta con se stesso ($[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = 0$), il termine $\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}$ si semplifica notevolmente usando la regola $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$:

$$[\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = \hat{\mathbf{p}} \cdot [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] + \underbrace{[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2]}_{0} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{p}} \cdot [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2].$$

Analogamente per il primo termine:

$$[\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{r}} \cdot \underbrace{[\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2]}_{0} = [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] \cdot \hat{\mathbf{p}}.$$

Utilizziamo l'identità fondamentale $[x_j, \hat{\mathbf{p}}^2] = 2i\hbar p_j$, che in notazione vettoriale si scrive $[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = 2i\hbar\hat{\mathbf{p}}$. Sostituendo:

- Primo termine: $[\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = (2i\hbar\hat{\mathbf{p}}) \cdot \hat{\mathbf{p}} = 2i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2$.
- Secondo termine: $[\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}^2] = \hat{\mathbf{p}} \cdot (2i\hbar\hat{\mathbf{p}}) = 2i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2$.

Sommando i contributi:

$$\left[T, \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}\right] = \frac{1}{2m}(2i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2 + 2i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2) = \frac{4i\hbar\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} = \frac{2i\hbar}{m}\hat{\mathbf{p}}^2.$$

2. Commutatore con l'Energia Potenziale

Calcoliamo $[T, V(\hat{\mathbf{r}})]$. Poiché $V(\hat{\mathbf{r}})$ è funzione solo delle coordinate, commuta con $\hat{\mathbf{r}}$. Quindi:

$$[\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, V] = \hat{\mathbf{r}} \cdot [\hat{\mathbf{p}}, V] \quad \text{e} \quad [\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}, V] = [\hat{\mathbf{p}}, V] \cdot \hat{\mathbf{r}}.$$

Utilizziamo la relazione fondamentale $[\hat{\mathbf{p}}, V] = -i\hbar\nabla V$.

- Primo termine: $\hat{\mathbf{r}} \cdot [\hat{\mathbf{p}}, V] = \hat{\mathbf{r}} \cdot (-i\hbar\nabla V) = -i\hbar(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V)$.
- Secondo termine: $[\hat{\mathbf{p}}, V] \cdot \hat{\mathbf{r}} = (-i\hbar\nabla V) \cdot \hat{\mathbf{r}} = -i\hbar(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V)$ (dato che V è scalare).

Sommando i contributi:

$$[T, V] = -2i\hbar(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V).$$

Conclusione

Unendo i risultati parziali, il commutatore totale è:

$$[T, H] = \frac{2i\hbar}{m}\hat{\mathbf{p}}^2 - 2i\hbar(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V).$$

Inserendo questo risultato nell'equazione di Ehrenfest derivata all'inizio:

$$\frac{d}{dt}\langle T\rangle = \frac{1}{i\hbar}\left\langle \frac{2i\hbar}{m}\hat{\mathbf{p}}^2 - 2i\hbar(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V)\right\rangle.$$

Semplificando il fattore $i\hbar$, otteniamo la tesi:

$$\frac{d}{dt}\langle T\rangle = \frac{2}{m}\left\langle \hat{\mathbf{p}}^2\right\rangle - 2\left\langle \hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla V\right\rangle.$$

$\square$

Traccia dell'Esercizio 9 Versione Hard

Siano $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ e $V : \mathcal{D}(V) \to \mathcal{H}$ due operatori su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ tali che:

(a) T è autoaggiunto ($T = T^*$);

(b) V è simmetrico;

(c) V è T-limitato con limite relativo $a < 1$. Ovvero, $\mathcal{D}(T) \subset \mathcal{D}(V)$ ed esistono costanti $a \in [0, 1)$ e $b \geq 0$ tali che:
$$\|V\psi\| \leq a\|T\psi\| + b\|\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(T).$$

Si mostri che l'operatore somma $S \doteq T + V$, definito su $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T)$, è autoaggiunto.

Soluzione. La dimostrazione si basa sul criterio di suriettività dei ranghi per operatori simmetrici. L'obiettivo è dimostrare che esiste un valore $\nu > 0$ sufficientemente grande tale che:

$$\mathrm{Ran}(T + V \pm i\nu I) = \mathcal{H}.$$

Se ciò è vero, poiché $T + V$ è simmetrico, esso è necessariamente autoaggiunto.

1. Stime sul Risolvente dell'Operatore Non Perturbato

Consideriamo l'operatore non perturbato T. Poiché T è autoaggiunto, per ogni $\mu > 0$ e per ogni $\phi \in \mathcal{D}(T)$ vale l'identità pitagorica:

$$\|(T \pm i\mu I)\phi\|^2 = \langle (T \pm i\mu I)\phi, (T \pm i\mu I)\phi \rangle = \|T\phi\|^2 + \mu^2\|\phi\|^2.$$

(I termini misti si cancellano per simmetria di T). Da questa uguaglianza seguono immediatamente due disuguaglianze fondamentali. Ponendo $\psi = (T + i\mu I)\phi$ (e quindi $\phi = (T + i\mu I)^{-1}\psi$, dato che quell'operatore è invertibile essendo T autoaggiunto), abbiamo:

1. $\mu^2\|\phi\|^2 \leq \|\psi\|^2 \implies \left\|(T + i\mu I)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\mu}$.
2. $\|T\phi\|^2 \leq \|\psi\|^2 \implies \left\|T(T + i\mu I)^{-1}\right\| \leq 1$.

2. Stima dell'Operatore Perturbativo

Vogliamo stimare "quanto disturba" V rispetto al risolvente di T. Consideriamo il vettore

$$\phi = (T + i\mu I)^{-1}\psi$$

per un generico $\psi \in \mathcal{H}$. Applichiamo la condizione di limitatezza relativa di V (ipotesi c):

$$\|V\phi\| \leq a\|T\phi\| + b\|\phi\|.$$

Sostituendo ϕ con l'espressione in termini di ψ e utilizzando le stime del punto 1:

$$\begin{aligned}\left\|V(T + i\mu I)^{-1}\psi\right\| &\leq a\left\|T(T + i\mu I)^{-1}\psi\right\| + b\left\|(T + i\mu I)^{-1}\psi\right\| \\ &\leq a \cdot 1 \cdot \|\psi\| + b \cdot \frac{1}{\mu} \cdot \|\psi\| \\ &= \left(a + \frac{b}{\mu}\right)\|\psi\|.\end{aligned}$$

3. Costruzione dell'Inversa tramite Serie di Neumann

Definiamo l'operatore $U_\mu \doteq V(T + i\mu I)^{-1}$. Abbiamo appena dimostrato che la sua norma operatoriale è limitata da:

$$\|U_\mu\| \leq a + \frac{b}{\mu}.$$

Poiché per ipotesi $a < 1$, possiamo scegliere un valore $\mu = \nu$ sufficientemente grande tale che:

$$a + \frac{b}{\nu} < 1 \implies \|U_\nu\| < 1.$$

Intanto otteniamo che, avendo la norma limitata è un operatore limitato definito su tutto $\mathcal{H}$. Se la norma di un operatore U_ν è strettamente minore di 1, allora -1 non appartiene al suo spettro ($\sigma(U_\nu)$), e l'operatore $(I + U_\nu)$ è invertibile con inverso limitato). In particolare, il rango di $(I + U_\nu)$ è tutto lo spazio $\mathcal{H}$:

$$\mathrm{Ran}(I + U_\nu) = \mathcal{H}.$$

4. Fattorizzazione e Conclusione

Consideriamo ora l'operatore perturbato $(T + V + i\nu I)$. Possiamo fattorizzarlo come segue per ogni $\phi \in \mathcal{D}(T)$:

$$\begin{aligned}(T + V + i\nu I)\phi &= (T + i\nu I)\phi + V\phi \\ &= \left[I + V(T + i\nu I)^{-1}\right](T + i\nu I)\phi \\ &= (I + U_\nu)(T + i\nu I)\phi.\end{aligned}$$

Analizziamo i ranghi di questa composizione:

- L'operatore $(T + i\nu I)$ mappa suriettivamente $\mathcal{D}(T)$ su $\mathcal{H}$ (poiché T è autoaggiunto).
- L'operatore $(I + U_\nu)$ mappa suriettivamente $\mathcal{H}$ su $\mathcal{H}$ (poiché $\|U_\nu\| < 1$).

La composizione di due mappe suriettive è suriettiva. Dunque:

$$\mathrm{Ran}(T + V + i\nu I) = \mathcal{H}.$$

Un ragionamento perfettamente analogo vale per il segno opposto $-i\nu$, dimostrando che

$$\mathrm{Ran}(T + V - i\nu I) = \mathcal{H}$$

. Avendo dimostrato che gli operatori di difetto sono suriettivi (o equivalentemente che gli indici di difetto sono $(0, 0)$), concludiamo che $T + V$ è autoaggiunto sul dominio $\mathcal{D}(T)$.

□

Traccia dell'Esercizio 9 Versione Soft

Siano $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ e $V : \mathcal{D}(V) \to \mathcal{H}$ due operatori su uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ tali che:

(a) T è autoaggiunto ($T = T^*$);

(b) V è simmetrico;

(c) V è T-limitato con limite relativo $a < 1$. Ovvero, $T \subset V$ ed esistono costanti $a \in [0, 1)$ e $b \geq 0$ tali che:

$$\|V\psi\| \leq a\|T\psi\| + b\|\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(T).$$

Si mostri che l'operatore somma $S \doteq T + V$, definito su $\mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(T)$, è autoaggiunto.

Soluzione. Si ottiene dalla disuguaglianza che

$$\|V\psi\| = \|T\psi\| \Rightarrow (1 - a)\|T\psi\| \leq b\|\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(T)$$

quindi T è limitato, essendo autoaggiunto è ovunque definito. Essendo ovunque definito allora V è ovunque definito essendo $\mathcal{D}(T) \subseteq \mathcal{D}(V)$ per ipotesi. Ma ovunque definito e simmetrico implica limitato per Hellinger-Toepliz. Quindi V è limitato quindi T+V è limitato e simmetrico ossia autoaggiunto. □

Traccia dell'Esercizio 10 Metodo I

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert con norma $\|\cdot\|$. Sia $\|\cdot\|'$ una seconda norma su $\mathcal{H}$ tale che $\exists C > 0$:

$$\|\psi\| \le C \|\psi\|', \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Sia $T : D(T) \to \mathcal{H}$ un operatore simmetrico tale che $\exists \kappa > 0$:

$$\|T\psi\|' \le \kappa \|\psi\|', \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Mostrare che $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

> *[Hint: Un operatore lineare chiuso tra spazi di Banach e con dominio denso (inteso come tutto lo spazio) è limitato]*

Soluzione. Per dimostrare che $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ovvero che T è limitato rispetto alla norma standard $\|\cdot\|$), utilizzeremo il suggerimento fornito, che è un richiamo al Teorema del Grafico Chiuso. La strategia si divide in due passi logici:

1. Identificazione del dominio e dimostrazione che T è un operatore chiuso su $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$.
2. Applicazione del Teorema del Grafico Chiuso.

1. Analisi del Dominio e Chiusura

La seconda disuguaglianza fornita nel testo afferma che:

$$\|T\psi\|' \le \kappa \|\psi\|', \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

L'uso del quantificatore $\forall \psi \in \mathcal{H}$ implica necessariamente che il dominio di T coincide con l'intero spazio di Hilbert:

$$D(T) = \mathcal{H}.$$

Inoltre, per ipotesi, T è un operatore **simmetrico**. Un operatore simmetrico T definito su tutto lo spazio di Hilbert è sempre un operatore **chiuso**. Dimostriamolo formalmente per completezza (senza dare per scontato il teorema di Hellinger-Toeplitz).

Sia $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ una successione tale che:

$$\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \psi \quad \text{e} \quad T\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \phi.$$

Dobbiamo mostrare che $\phi = T\psi$. Poiché T è simmetrico, per ogni $\eta \in \mathcal{H}$ vale l'uguaglianza:

$$\langle T\psi_n, \eta \rangle = \langle \psi_n, T\eta \rangle .$$

Passando al limite per $n \to \infty$ e sfruttando la continuità del prodotto scalare:

$$\lim_{n\to\infty} \langle T\psi_n, \eta \rangle = \langle \phi, \eta \rangle ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \langle \psi_n, T\eta \rangle = \langle \psi, T\eta \rangle .$$

Quindi:

$$\langle \phi, \eta \rangle = \langle \psi, T\eta \rangle .$$

Sfruttando nuovamente la simmetria di T sul membro di destra:

$$\langle \phi, \eta \rangle = \langle T\psi, \eta \rangle , \quad \forall \eta \in \mathcal{H}.$$

Poiché l'uguaglianza vale per ogni η, segue che $\phi = T\psi$. Abbiamo così dimostrato che il grafico di T è chiuso rispetto alla topologia indotta dalla norma $\|\cdot\|$.

2. Applicazione del Teorema del Grafico Chiuso

Siamo ora nelle seguenti condizioni:

- $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è un operatore lineare.
- $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert (e quindi di Banach) rispetto alla norma $\|\cdot\|$.
- T è un operatore **chiuso** rispetto a $\|\cdot\|$.
- $D(T) = \mathcal{H}$ (il dominio è l'intero spazio).

Il **Teorema del Grafico Chiuso** afferma che un operatore chiuso definito su tutto uno spazio di Banach a valori in uno spazio di Banach è necessariamente continuo (limitato). Pertanto:

$$T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Osservazione (Sulle norme ausiliarie)**.** Le condizioni sulla norma ausiliaria $\|\cdot\|'$ e la limitatezza di T rispetto ad essa (ossia $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \|\cdot\|')$) sono condizioni sufficienti a garantire la buona definizione dell'operatore, ma la dimostrazione della limitatezza in norma standard $\|\cdot\|$ segue direttamente dalla struttura simmetrica dell'operatore e dal fatto che sia definito ovunque (Teorema di Hellinger-Toeplitz). L'esercizio è quindi risolubile in modo rigoroso basandosi primariamente sulle proprietà spettrali (Simmetria + Dominio totale $\implies$ Chiusura $\implies$ Limitatezza).

□

Traccia dell'Esercizio 10 Metodo II

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert con norma $\|\cdot\|$. Sia $\|\cdot\|'$ una seconda norma su $\mathcal{H}$ tale che $\exists C > 0$:

$$\|\psi\| \leq C \|\psi\|', \quad \forall \psi \in \mathcal{H}.$$

Sia $T : D(T) \to \mathcal{H}$ un operatore simmetrico tale che $\exists \kappa > 0$:

$$\|T\psi\|' \leq \kappa \|\psi\|', \quad \forall \psi \in \mathcal{H}'.$$

dove per $\mathcal{H}' = (\mathcal{H}, ||\cdot||')$ si intende lo spazio di Hilbert definito dagli elementi di $(\mathcal{H}, ||\cdot||)$ che sono finiti rispetto alla norma $||\cdot||'$ decorato della stessa. Mostrare che T è limitato rispetto alla norma $\|\cdot\|$ (ovvero $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nel senso dell'estensione).

[Hint: Un operatore lineare chiuso tra spazi di Banach e con dominio denso è limitato]

Soluzione. L'obiettivo è dimostrare che l'operatore T è limitato rispetto alla norma naturale dello spazio di Hilbert $\|\cdot\|$, ossia che esiste $M > 0$ tale che $\|T\psi\| \leq M\|\psi\|$ per ogni $\psi \in D(T)$.

Per fare ciò, sfrutteremo l'Hint interpretando lo spazio $(\mathcal{H}, \|\cdot\|')$ come uno spazio di Banach e utilizzando il **Teorema dell'Isomorfismo di Banach** (o dell'Applicazione Inversa, Teorema 25 nelle dispense) per stabilire l'equivalenza tra le due norme.

1. Equivalenza delle Norme

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{H}$ equipaggiato con le due norme.

- $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach (essendo di Hilbert).
- Assumiamo, coerentemente con l'Hint, che anche $(\mathcal{H}, \|\cdot\|')$ sia uno spazio di Banach.

Consideriamo l'operatore identità $I : (\mathcal{H}, \|\cdot\|') \to (\mathcal{H}, \|\cdot\|)$. Per ipotesi, vale la disuguaglianza:

$$\|I\psi\| = \|\psi\| \leq C \|\psi\|'.$$

Questo implica che l'operatore identità è continuo (limitato) da $(\mathcal{H}, \|\cdot\|')$ in $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$.

Poiché entrambi gli spazi sono di Banach e l'applicazione è biunivoca (è l'identità) e continua, per il **Teorema dell'Isomorfismo di Banach** (conseguenza del Teorema della Mappa Aperta), l'applicazione inversa $I^{-1} : (\mathcal{H}, \|\cdot\|) \to (\mathcal{H}, \|\cdot\|')$ è anch'essa continua.

Esiste quindi una costante $c > 0$ tale che:

$$\|\psi\|' \leq c\|\psi\|, \quad \forall \psi \in \mathcal{H}. \tag{3}$$

Le due norme sono pertanto equivalenti: $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|'$.

2. Dimostrazione della Limitatezza di T

Vogliamo stimare la norma $\|T\psi\|$. Utilizziamo in sequenza: la dominazione della norma $\|\cdot\|$ da parte di $\|\cdot\|'$, l'ipotesi di limitatezza di T nella norma $\|\cdot\|'$, e infine l'equivalenza dimostrata in (3).

Per ogni $\psi \in D(T)$:

$$\begin{aligned} \|T\psi\| &\leq C\,\|T\psi\|' && \text{(Ipotesi 1: dominazione)} \\ &\leq C \cdot \kappa\,\|\psi\|' && \text{(Ipotesi 2: limitatezza in } \|\cdot\|'\text{)} \\ &\leq C \cdot \kappa \cdot c\|\psi\| && \text{(Eq. 3: equivalenza inversa)} \end{aligned}$$

Ponendo $M = C\kappa c$, otteniamo:

$$\|T\psi\| \leq M\|\psi\|, \quad \forall \psi \in D(T).$$

Abbiamo così dimostrato che T è un operatore limitato rispetto alla norma dello spazio di Hilbert.

3. Estensione a tutto $\mathcal{H}$

Poiché T è un operatore lineare limitato definito su un sottospazio denso $D(T) \subset \mathcal{H}$, per il **Teorema di Estensione (BLT Theorem)**, T ammette un'unica estensione continua $\overline{T}$ definita su tutto $\mathcal{H}$:

$$\overline{T} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad \text{con } \left\|\overline{T}\right\| = \|T\|.$$

Essendo T simmetrico, la sua chiusura coincide con la sua estensione continua. Pertanto, possiamo concludere che l'operatore (inteso nella sua estensione) appartiene a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.